Gedruckt mit Unterstützung aus dem Jerome und Margaret Stonborough-Fonds

Konstruktion der Haupttangentenkurven auf Netzflächen

Von

Hans Neudorfer in Wien

(Mit 1 Textfigur)

(Vorgelegt in der Sitzung am 25. Juni 1925)

I.

Die Erzeugenden einer Regelfläche Φ mögen einem linearen Strahlkomplex angehören. Die Regelscharen zweiter Ordnung, welche Φ längs Erzeugenden oskulieren, gehören dann auch dem linearen Komplex an, da sie drei benachbarte Komplexstrahlen enthalten. Die Erzeugenden der zweiten Schar dieser Regelflächen zweiter Ordnung sind Haupttangenten von Φ und bilden eine Involution von konjugierten Polaren des Komplexes, deren Doppelelemente die zwei einzigen Komplexstrahlen der Schar sind. Auf jeder Erzeugenden von Φ (die nicht Torsallinie ist) gibt es daher zwei Punkte, in welchen die Haupttangenten Komplexstrahlen sind. Die Tangentialebenen von Φ in diesen Punkten sind offenbar auch gleichzeitig deren Nullebenen.

Die erwähnten Punkte beschreiben eine Kurve, die Haupttangentenkurve der Fläche ist; denn sind t, t' zwei ihrer Punkte, E, E' die zugehörigen Erzeugenden von Φ, τ, τ' die Nullebenen (= Tangentialebenen), so sind die Geraden $[t\, t']$, $[\tau\, \tau']$ konjugierte Polaren des Komplexes, die außerdem zu konjugierten Flächentangenten werden, wenn t' nach t konvergiert. Dann wird $[t'\, t]$ zur Tangente der Kurve, da sie aber in τ liegt, ist sie Komplexstrahl, fällt mithin mit ihrer Polare $[\tau\, \tau']$ zusammen und ist daher Haupttangente, die Kurve demnach Haupttangentenkurve. Jede einem linearen Komplex angehörende Regelfläche hat also eine ausgezeichnete Haupttangentenkurve, die für eine algebraische Fläche algebraisch ist. Jede solche algebraische Fläche besitzt also mindestens eine algebraische Haupttangentenkurve. Diese Bemerkung stammt bekanntlich von S. Lie.

Um nun diese Haupttangentenkurve zu konstruieren, schneiden wir irgendeine Erzeugende E mit den Haupttangenten längs E, die, wie zuvor erwähnt, eine Involution konjugierter Polaren bilden, und erhalten eine Involution, deren Doppelpunkte der Kurve angehören. Nun seien H_1, H_2 zwei Haupttangenten, die konjugierte Polaren bezüglich des Komplexes sind und durch die Punkte h_1, h_2 von E gehen. Die Ebene $[H_1\, E]$ berührt die Fläche in h_1, ihr Nullpunkt liegt auf der Polare H_2 von H_1, ist daher h_2. Man hat mithin folgende von F. Klein stammende Konstruktion: Man leg durch E Ebenen, suche ihre Berührungs- und Nullpunkt so erhält man eine Involution, deren Doppelpunkte de Haupttangentenkurve angehören.

Die Konstruktion läßt sich nun auch folgendermaßen durch führen. Ist s ein beliebiger Punkt, σ seine Nullebene, E eine be liebige Erzeugende der Fläche Φ, so berührt die Ebene $[s E]$ di Fläche Φ etwa in e_s. Der Nullpunkt dieser Ebene muß in der Null ebene von s liegen und ist daher der Punkt $e_\sigma = [E \sigma]$; e_s, e_σ bilde dann ein Punktepaar der Involution auf E. Durchläuft E die Fläch dann beschreibt e_s die zum Lichtzentrum s gehörige Eigenschatten grenze von Φ, e_σ einen ebenen Schnitt der Fläche. Man hat als

Satz 1: *Um die ausgezeichnete Haupttangentenkurve ein einem linearen Komplex angehörenden Regelfläche zu finden, such man zu irgendeinem Punkt s die Eigenschattengrenze und schneid die Fläche mit der Nullebene von s; dies für einen zweit Punkt s durchgeführt, gibt auf jeder Erzeugenden zwei Punkt paare einer Involution, deren Doppelpunkte der Haupttangenten kurve angehören.*[1]

Es sei umgekeht jene Haupttangentenkurve bekannt; dan kann man jede Eigenschattengrenze ermitteln. Denn ist s das Licht zentrum, so liegen die Punkte e_s, e_σ harmonisch zu den beide Punkten der Haupttangentenkurve auf E. Daher:

Satz 2: *Ist die ausgezeichnete Haupttangentenkurve de Regelfläche bekannt, so ergibt sich die Eigenschattengrenze fü einen leuchtenden Punkt s, indem man die Nullebene σ von s m der Fläche schneidet und für jeden Punkt des Schnittes auf de zugehörigen Erzeugenden den vierten harmonischen Punkt bezüglic der beiden Punkte der Haupttangentenkurve aufsucht.*

Wegen späterer Anwendung sei noch die Aufgab besprochen, die Schnittpunkte der ausgezeichneten Haupt tangentenkurve mit einer Ebene zu finden. Die Tangentia ebenen in den Schnittpunkten müssen, da sie ja auch die Nullebene bezüglich des linearen Komplexes sind, durch den Nullpunkt d schneidenden Ebene gehen. Legt man also aus dem Nullpunkt d Ebene die Tangenten an die Schnittkurve, so sind deren Berüh rungspunkte die gesuchten Punkte. Daraus ergibt sich, daß d Ordnung jener Haupttangentenkurve gleich ist dem Range der Fläch (Mohrmann a. a. O.).

---

[1] Die beiden Doppelpunkte gehören im allgemeinen einer einzigen Hau tangentenkurve an. Wegen des Zerfallens (bei Netzflächen) vergleiche m H. Mohrmann: Über die Haupttangentenkurven auf den Netzfläch Math. Ann., Bd. 73 (1913), p. 571—595.

Wir betrachten nun Regelflächen, die einem Strahlnetz angehören, also zwei Gerade als Leitlinien besitzen; solche Flächen bezeichnen wir nach Mohrmann (a. a. O.) als Netzflächen.

Durch ein Strahlnetz gehen ∞^1 lineare Komplexe, von denen jeder eine Haupttangentenkurve bestimmt und umgekehrt. Die Haupttangentenkurven von Netzflächen sind mithin gleichberechtigt; die Sätze 1 und 2 gelten für jede ihrer Haupttangentenkurven. Satz 2 läßt sich nun folgendermaßen aussprechen:

Satz 3: *Bestimmt man auf den Erzeugenden einer Netzfläche die vierten harmonischen Punkte der Punkte einer Eigenschattengrenze bezüglich einer beliebigen Hauttangentenkurve, so liegen sie in einer Ebene. Die Ebene und das Lichtzentrum liegen inzident und sind Nullpunkt und Nullebene jenes linearen Komplexes, dem die Haupttangentenkurve angehört; beide enthalten daher einen und denselben Netzstrahl.*

Alle Haupttangentenkurven einer algebraischen Netzfläche sind mithin algebraisch.

Die Konstruktion der Haupttangentenkurven vereinfacht sich für Netzflächen; denn die Leitlinien sind konjugierte Polaren bezüglich aller durch das Netz gehenden linearen Komplexe, falls das Netz kein parabolisches ist. Die beiden Schnittpunkte einer Erzeugenden mit den Brennlinien sind bereits ein Punktepaar der Involution, so daß man nur noch eine Eigenschattengrenze und einen ebenen Schnitt zu verwenden hat (Satz 1). Ist das Netz parabolisch, so ist der Schnittpunkt einer Flächenerzeugenden mit der Leitlinie ein Doppelpunkt jener Involution. Die Leitlinie spaltet sich mithin von jeder Haupttangentenkurve ab und ist daher bei Verwendung von Satz 2 immer mit zu benützen.

Die zur Ermittlung der Haupttangentenkurven dienenden linearen Komplexe können etwa auf folgende Art festgelegt werden: Man nehme einen beliebigen Punkt s (Lichtzentrum), lege durch ihn den Netzstrahl und durch diesen eine Ebene σ; s, σ als Nullpunkt und Nullebene bestimmen nun einen durch das Netz gehenden linearen Komplex; umgekehrt läßt sich jeder solche Komplex auf diese Art festlegen.

Will man die Haupttangentenkurven auf eine Ebene abbilden, so wird man in der Regel den scheinbaren Umriß der Fläche verwenden. Sind F_1^c, F_2^c die Bilder der Leitlinien, U^c der scheinbare Umriß (für eine lineare Abbildung), so werden die ebenen Schnitte σ (Satz 1) projizierend; denn das Projektionszentrum und σ gehören ja dem projizierenden Netzstrahl an. σ^c kann daher als beliebige Gerade durch den Punkt $[F_1^c F_2^c]$ gewählt werden.

II.

Die Anwendung der entwickelten Methoden soll nun für einige Flächen durchgeführt werden, und zwar zunächst bei der Cayley'schen Fläche dritter Ordnung, die einem parabolischen Strahlnetz angehört. Wir denken uns die Fläche in bekannter

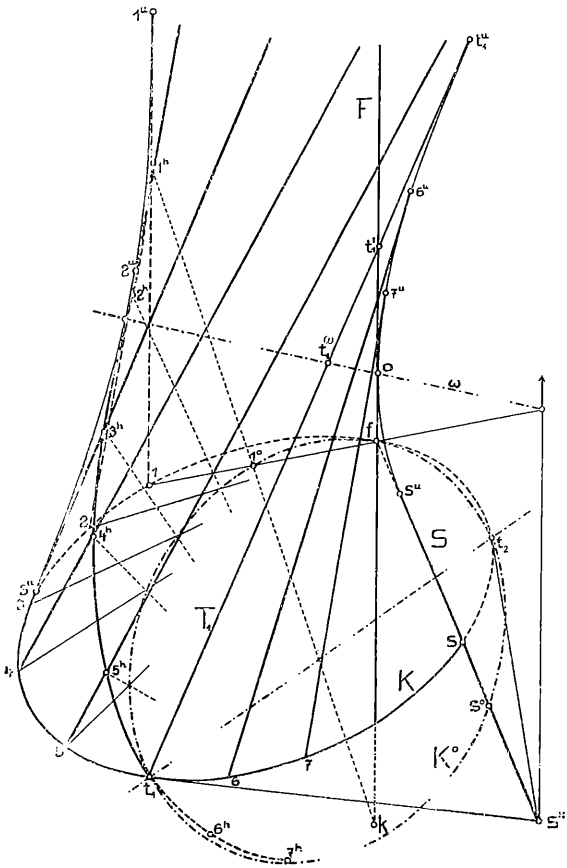

Fig. 1.

Weise erzeugt durch eine Projektivität zwischen einem Kegelschnitt *K* und einer *K* in *f* schneidenden Geraden *F* (Figur); *k* sei der Kuspidalpunkt der Fläche.

Die Haupttangentenkurven der Fläche sind Raumkurven dritter Ordnung, die durch *k* gehen.[1]

Ferner berühren sie *F* in *k* und haben dort die Torsalebene zur Schmiegebene. Projizieren wir daher die Haupttangentenkurven

[1] Mohrmann a. a. O.

aus k auf die Ebene $\varkappa$ von K, so erhalten wir ∞^1 Kegelschnitte, die K in f berühren. Um einen der Kegelschnitte zu finden, ermitteln wir den in $\varkappa$ liegenden Netzstrahl S. Wählen wir auf S einen beliebigen Punkt $s^\times$ als Nullpunkt von $\varkappa$, so ist damit ein linearer Komplex bestimmt, der das Netz enthält. Wir suchen nun die Schnittpunkte der durch ihn bestimmten Haupttangentenkurve mit $\varkappa$. Einer von ihnen, s°, liegt auf S und ist der vierte harmonische Punkt von f in Bezug auf s, $s^\times$ (s ist der zweite Schnittpunkt von S mit K); denn $s^\times$ ist Nullpunkt und s der Berührungspunkt von $\varkappa$, also ein Punktepaar der Involution auf S, f einer ihrer Doppelpunkte. Die zwei weiteren Schnittpunkte erhält man, wie bereits bemerkt wurde, als Berührungspunkte t_1, t_2 der aus $s^\times$ an K gelegten Tangenten. Der Kegelschnitt K° durch s°, t_1, t_2, der K in f berührt, ist der gesuchte; er kann aus K leicht mittels einer perspektiven Kollination abgeleitet werden, deren Zentrum f und deren Achse $[t_1\, t_2]$ ist. Wie aus der räumlichen Bedeutung leicht zu ersehen ist, hat das System der Kegelschnitte K° außer f keine weiteren Schnittpunkte. Die K° bilden daher ein Büschel von Kegelschnitten, die sich in f hyperoskulieren. Die Haupttangentenkurven der Cayley'schen Fläche berühren sich daher im Kuspidalpunkt fünfpunktig. Nun kann man die Haupttangentenkurve leicht darstellen. Um den Punkt 1^h zu erhalten, der auf der durch 1 gehenden Erzeugenden liegt, schneiden wir $[1 f]$ mit K° in 1° und projizieren 1° aus dem Kuspidalpunkt k auf die Erzeugende.

Es soll nun gemäß Satz 2 der Zentralumriß der Fläche konstruiert werden. Zu diesem Zweck hat man die Nullebene ω des Projektionszentrums aufzusuchen, die zunächst durch den projizierenden Netzstrahl O geht, dessen Bild ein Punkt o auf dem Bilde von F sein wird. Nun sei p ein beliebiger Punkt auf F, π seine Nullebene, die von den durch p gehenden Netzstrahlen gebildet wird, und $[\pi\,\varkappa] = P$. Wird P als Achse eines Ebenenbüschels angesehen, so liegen die Nullpunkte der Ebenen auf der Polare $\bar{P} = [p\, s^\times]$ von P; denn $s^\times$ war der Nullpunkt von $\varkappa$. Die projizierende Ebene von P hat ihren Nullpunkt im Schnitt mit $\bar{P}$; verbindet man diesen mit O, so hat man die Nullebene ω des Projektionszentrums. In der Figur wurde p als der unendlichferne Punkt von F gewählt; die durch ihn gehende Erzeugende trifft K in 1. Um den Umrißpunkt t_1^u von T_1 zu erhalten (Erzeugende durch t_1), schneiden wir T_1 mit ω in t_1^ω, mit F in t'_1, dann gilt $(t_1\, t'_1\, t_1^\omega\, t_1^u) = -1$,usw.

Der scheinbare Umriß ist eine Kurve vierter Ordnung (mit drei Spitzen). Er wird daher von ω außer in o noch in drei anderen Punkten getroffen; dort kommt auch das Bild der Haupttangentenkurve an den Umriß. In diesen drei Punkten muß das Bild daher Wendepunkte besitzen. Da das Bild eine rationale Kurve dritter Ordnung ist, so wird damit ein bekannter Satz über die drei Wendepunkte einer solchen Kurve bestätigt.

Es möge noch auf eine parabolische Netzfläche vierte Ordnung hingewiesen werden, die eine ganz ähnliche Behandlung gestattet wie die Cayley'sche Fläche.

Geht eine dem parabolischen Netz mit der Leitlinie F angehörende Regelfläche durch einen Kegelschnitt K, der F nicht schneidet, so hat sie die Ordnung vier, F als doppelte Leitlinie und den in der Ebene $\varkappa$ von K liegenden Netzstrahl D als Doppelerzeugende.

Trifft man die Annahme so, daß D Tangente von K wird, dann ist D Rückkehrerzeugende der Fläche. Mit dieser speziellen Fläche wollen wir uns beschäftigen.

Von $f = [F\varkappa]$ geht noch eine zweite Tangente T an K; die durch ihren Berührungspunkt t gehende Erzeugende ist offenbar Torsallinie, und zwar die einzige.

Nun ist jede Doppelerzeugende einer parabolischen Netzfläche Bisekante der Haupttangentenkurven, daher eine Rückkehr erzeugende Tangente dieser Kurven.

Wir wählen auf D den Nullpunkt $d^\times$ von $\varkappa$. Ist d der Berührungspunkt von D und K, dann berührt die so bestimmte Haupttangentenkurve die Rückkehrerzeugende in einem Punkte d' der durch $(d' f\, d\, d^\times) = -1$ gegeben ist. Aus $d^\times$ geht noch eine zweite Tangente $T^\times$ an K; ihr Berührungspunkt $t^\times$ ist ebenfalls ein Punkt der Haupttangentenkurve, die daher mit $\varkappa$ drei Punkte gemein hat, daher:

Die Haupttangentenkurven der Fläche sind Raumkurven dritter Ordnung.

Um sie zu konstruieren, verfahren wir wie bei der Cayley-schen Fläche: Projizieren wir eine dieser Kurven aus dem Kuspidalpunkt der Fläche auf $\varkappa$, so erhalten wir einen Kegelschnitt $K^\times$, der D in d', K in t berührt (da die Torsalebene Schmiegebene der Haupttangentenkurve ist. Mohrmann a. a. O.) und durch $t^\times$ geht.

Wir wollen nun das System der Kegelschnitte $K^\times$ näher untersuchen und wählen zu diesem Zweck die Geraden $[d\, t]$, D, T beziehungsweise als x-, y-, z-Achsen eines Systems homogener linearer Koordinaten. Die Gleichung des Kegelschnittes K kann man dann in der Form annehmen:

$$x^2 - 2\, y z = 0.$$

Hat der Punkt $d^\times$ die Koordinaten $x_0\;\; 0\;\; z_0$, so folgt für die Koordinaten des Schnittpunktes $t^\times$ von K mit der Polare von bezüglich K

$$2\, z_0 x_0 \quad 2\, x_0^2 \quad z_0^2.$$

Ferner sind die Koordinaten von d' $\left((d' f\, d\, d^\times) = -1\right)$:

$$x_0 \quad 0 \quad 2\, z_0.$$

Mithin ergibt sich als Gleichung von $K^\times$:

$$2\,(2\,z_0\,x - x_0\,z)^2 - 9\,z_0^2\,y\,z = 0$$

und, falls man noch $a = \frac{x_0}{z_0}$ setzt,

$$K_a^\times \equiv 2\,(2\,x - a\,z)^2 - 9\,y\,z = 0.$$

Diese Gleichung stellt bei veränderlichem a das System $(K^\times)$ dar, das somit quadratisch ist.

Da $K_a^\times - K_b^\times = 0$ einen zerfallenden Kegelschnitt des Büschels $K_a^\times + \lambda K_b^\times = 0$ darstellt, dessen Bestandteile $4\,x - (a+b)\,z = 0$ und $= 0$ sind, so folgt, daß sich die Kegelschnitte $K^\times$ in t oskulieren. Das Kegelschnittsystem $(K^\times)$ hat also drei unendlich benachbarte Basispunkte. Dies sagt aber:

Die Haupttangentenkurven hyperoskulieren sich im Kuspidalpunkt.

Ist $K_1^\times$ ein Kegelschnitt von $(K^\times)$, so gibt es einen zweiten Kegelschnitt $K_2^\times$ des Systems, der den ersten in t hyperoskuliert, da durch vier Punkte zwei Kegelschnitte gehen, die eine Gerade D berühren. Also:

Zu jeder Haupttangentenkurve gibt es eine zweite, welche sie im Kuspidalpunkt fünfpunktig berührt.

III.

Es soll nun die Behandlung einer nicht parabolischen Netzfläche besprochen werden. Wir wählen als Beispiel die Wringfläche.[1]

Diese Fläche kann definiert werden als eine Netzfläche, deren Richtkegel ein Drehkegel mit zum Hauptstrahl des Netzes paralleler Achse ist. Das Netz kann auch ein elliptisches sein. Die Fläche ist eine rationale Netzfläche vierter Ordnung erster Art, welche den unendlichfernen Netzstrahl zur Doppelerzeugenden hat.

Wir benützen zur Darstellung zugeordnete Normalrisse und nehmen die Leitlinien des Netzes parallel Π_1 an. Da dann die unendlichferne Gerade der Π_1 die Doppelerzeugende ist, wird der scheinbare Umriß der Fläche im Aufriß eine Hyperbel sein, mit der reellen Achse parallel X_{12}. Aus dem Umriß können nun die Haupttangentenkurven der Fläche leicht ermittelt werden.

Wir wollen jene spezielle Kurve betrachten, die dem linearen Komplex angehört, für den die Nullebene des Projektionszentrums die unendlichferne Ebene des Raumes ist. Dann

---

[1] L. Burmester: Kinematische Flächenerzeugung vermittelst zylindrischer Rollung. Zeitschr. f. Math. u. Phys., Bd. 33 (1888), p. 343.

ergibt sich der Aufriß dieser Haupttangentenkurve folgendermaßen. Auf jeder Hyperbeltangente hat man eine Involution mit dem Berührungspunkt als Mittelpunkt und den Schnittpunkten mit den Bildern der Leitlinien F_1, F_2 des Netzes als entsprechendes Punktepaar. Die Doppelpunkte dieser Involutionen gehören dann dem Aufriß der Kurve an (Satz 1), der sich als Kurve sechster Ordnung vom Geschlechte eins ergibt (Mohrmann a. a. O.), die den unendlich fernen Punkt von X_{12} zum vierfachen Punkt hat.

Will man das oskulierende Hyperboloid einer Erzeugenden darstellen, so ergibt sich sein Umriß als jener Kegelschnitt, der den scheinbaren Umriß der Fläche im Berührungspunkt der Erzeugenden oskuliert und F_1'', F_2'' berührt. Dies gilt natürlich im Prinzip für jede Netzfläche.

Die Netzflächen (von mindestes vierter Ordnung) sind im allgemeinen dadurch ausgezeichnet, daß für gewisse Erzeugende das oskulierende Hyperboloid nicht drei, sondern vier benachbarte Erzeugende mit der Fläche gemeinsam hat; man bezeichnet sie nach Voß[1] als hyperbolische Erzeugende. Sie sind für den Verlauf der Haupttangentenkurven von Wichtigkeit, da deren Schnittpunkte mit diesen Erzeugenden stationäre Punkte sind (Mohrmann a. a. O.).

Für die Wringfläche bekommt man die Aufrisse der hyperbolischen Erzeugenden, wenn man die F_1'', F_2'' berührenden Kegelschnitte sucht, die die Umrißhyperbel hyperoskulieren. Da die Scheitel eines Kegelschnittes jene Punkte sind, in denen er von einem Kreis hyperoskuliert wird, so braucht man nur die Konstruktion der Scheitel projektiv zu verallgemeinern und zu dualisieren, um zu einer Lösung der gestellten Aufgabe zu gelangen. Auf unseren speziellen Fall angewendet, heißt dies: Man suche die Schnittpunkte der Nebenachse der Hyperbel mit F_1'', F_2'', ermittle dann das Punktepaar, welches diese zwei Schnittpunkte und die imaginären Scheitel der Hyperbel harmonisch trennt; die durch diese Punkte gehenden Hyperbeltangenten sind die gesuchten Aufrisse der hyperbolischen Flächenerzeugenden.

Es soll noch die Konstruktion der Eigenschattengrenze der Fläche für Parallelbeleuchtung besprochen werden. Sie ergibt sich aus der vorhin gefundenen Haupttangentenkurve unter Verwendung eines ebenen Schnittes (Satz 2). Die Schnittebene muß die Nullebene des leuchtenden Punktes bezüglich des betreffenden linearen Komplexes sein. Nun liegt das Lichtzentrum in der unendlichfernen Ebene Ω; seine Nullebene geht daher durch den Nullpunkt von Ω, hier durch das Aufrißprojektionszentrum. Die Nullebene ist also zweitprojizierend, und da sie den zur Lichtrichtung parallelen Netzstrahl enthält, deckt sich ihr Aufriß mit dem Aufriß dieses Strahles. Die Konstruktion der Eigenschattengrenze kann nun leicht geschehen. Auf den Erzeugenden, die keine reellen

[1] A. Voß: Zur Theorie der windschiefen Flächen. Math. Ann., Bd. 8 (1875), p. 94.

Punkte der Haupttangentenkurve tragen, hat man nur die betreffende Involution zu vervollständigen. Dies gilt auch allgemein; man braucht die Haupttangentenkurve nicht zu kennen, um die Eigenschattengrenze zu erhalten, so daß also die Konstruktion derselben ganz linear erfolgen kann.

IV.

Zum Schlusse möge noch ein neuer Beweis für einen bekannten Satz über die Haupttangentenkurven des Plückerschen Konoides mitgeteilt werden.

Es seien F_1 die doppelte Leitlinie, T_1, T_2 die Torsallinien der Fläche. Projiziert man die ∞^2 Kegelschnitte einer Regelfläche dritter Ordnung aus einem Punkte der Doppelgeraden F_1 auf eine Ebene π, so erhält man Kegelschnitte, die durch drei feste Punkte gehen, nämlich $[F_1 \pi]$ und die Schnittpunkte der beiden durch das Projektionszentrum gehenden Erzeugenden mit π. Wird das Plückersche Konoid aus dem unendlichfernen Punkt von F_1 auf die Ebene $\pi \perp F_1$ projiziert, dann stellen sich die Kegelschnitte der Fläche als Kreise durch $[\pi F_1]$ dar. Die Torsallinien T_1, T_2 erscheinen als zwei zueinander senkrechte Geraden T'_1, T'_2. Die ebenen Schnitte durch eine der Torsallinien, etwa T_1, stellen sich dann als Kreise dar, welche T'_1 in $[T'_1 T'_2] = f$ berühren und daher ihre Mitten auf T'_2 haben.

Wir nehmen nun auf T_1 ein Lichtzentrum s an; die zugehörige Eigenschattengrenze ergibt sich als Ort der Berührungspunkte der aus s an die ebenen Schnitte durch T_1 gezogenen Tangenten und ist in der Projektion der Kreis K'_1 durch f' mit der Mitte s auf T'_1. Nehmen wir noch einen zweiten Kreis K'_2 durch f' mit der Mitte auf T'_2 als Bild eines ebenen Schnittes durch T_1 an, so kann man nach Satz 1 aus K'_1, K'_2 das Bild einer Haupttangentenkurve ermitteln; f' ist der gemeinsame Mittelpunkt der Involutionen auf den Erzeugenden.

Ein Punkt des Bildes der Haupttangentenkurve ist aber der Schnittpunkt p' der beiden Kreise K'_1, K'_2. Ist $s_1 = [K'_1 T'_1]$, $s_2 = [K'_2 T'_2]$, so ist p' auch der Fußpunkt des aus f auf $[s_1 s_2]$ gefällten Lotes.

Nun kann man aber dieselbe Haupttangentenkurve auf unendlich viele Arten erhalten. Bewegt sich nämlich s auf T_1, so müssen die ebenen Schnitte K_2 Nullebenen von s bezüglich des gleichen Komplexes sein (Satz 1). Die Nullebenen sind zur Punktreihe (s) projektiv. Schneidet man die ersteren mit T_2, so erhält man die Punkte s_2, also $(s) \overline{\wedge} (s_2)$. Dem Punkte $[F_1 T_1]$ entspricht als Nullebene seine Verbindungsebene mit der unendlichfernen Leitgeraden der Fläche; s_2 fällt mithin ins Unendliche. Analoges gilt für die Reihe (s_1). Die beiden Reihen (s_1), (s_2) erzeugen also eine gleichseitige Hyperbel mit den Asymptoten T_1, T_2. Mithin:

Die senkrechten Risse der Haupttangentenkurven des Plücker'schen Konoides auf eine zur Achse der Fläche normale Ebene sind Fußpunktskurven der gleichseitigen Hyperbel, also Lemniskaten.

Der gegebene Beweis hätte sich durch eine kleine Rechnung noch abkürzen lassen. Man kann ihn aber projektiv verallgemeinern und erhält folgendes Ergebnis:

Es seien F_1 die doppelte Leitlinie einer nicht parabolischen Regelfläche dritter Ordnung, o das auf F_1 gelegene Projektionszentrum, π die Rißebene, i_1, i_2 die Spurpunkte der durch o gehenden Erzeugenden in π, $U = [i_1 i_2]$, $T_1 T_2$ die Bilder der Torsallinien. Greifen wir einen der ∞^1 Kegelschnitte, die T_1 in $[U T_1]$, T_2 in $[U T_2]$ berühren, heraus, bringen dessen Tangenten T mit U zum Schnitt, suchen zu diesem Punkt den bezüglich i_1, i_2 vierten harmonischen Punkt t auf U und schneiden T mit $[T_1 T_2 . t]$ in x. Diese Punkte x durchlaufen dann das Bild einer Haupttangentenkurve.