Gedruckt mit Unterstützung aus dem Jerome und Margaret Stonborough-Fonds

Darstellung eines Strahlenkomplexes durch eine duale quadratische Differentialform

Von

Karl Mayrhofer in Wien

(Vorgelegt in der Sitzung am 7. Mai 1925)

Die erste Darstellung eines Strahlenkomplexes durch zwei quadratische Differentialformen rührt von G. Sannia her.[1] Er bestimmt eine Gerade durch einen beliebigen ihrer Punkte $P(x, y, z)$ und durch ihre Richtungskosinus X, Y, Z und stellt einen Komplex unter Anwendung spezieller Parameter u, v, w in der Form:

$$x = x(u, v, w),\ y = y(u, v, w),\ z = z(u, v, w),$$
$$X = X(u, v),\quad Y = Y(u, v),\quad Z = Z(u, v)$$

dar; die Parameter sind so gewählt, daß sich längs der im Komplex enthaltenen Zylinder bloß w ändert. Sodann verwendet er als Fundamentalformen die von K. Zindler eingeführten Ausdrücke für das Quadrat des Winkels ds'^2 und für das Moment μ zweier unendlich benachbarten Geraden;[2] diese Ausdrücke nehmen zufolge der Festsetzung über die Parameter die Form:

$$ds'^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$
$$-\mu = D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2 + 2M\,du\,dv + 2N\,dv\,dw$$

an, wo die Koeffizienten in ds'^2 Funktionen von u und v, die in μ dagegen Funktionen von u, v und w sind. Die Fundamentalformen bestimmen nun immer dann, wenn jene Koeffizienten gewissen Integrabilitätsbedingungen genügen, einen Komplex gerade bis auf Bewegungen, den man durch Integration der folgenden Gleichungen und denen, die daraus durch zyklisches Vorrücken in x und X entstehen, erhält:

$$E = \sum\left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2,\quad F = \sum \frac{\partial X}{\partial u}\,\frac{\partial X}{\partial v},\quad G = \sum\left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)^2$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \left(\frac{D'}{\Delta} - r_0\right)\frac{\partial X}{\partial u} - \frac{D}{\Delta}\,\frac{\partial X}{\partial v} + \left(\frac{b_{112}}{\Delta} - \frac{\partial r_0}{\partial u}\right)X,$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{D''}{\Delta}\,\frac{\partial X}{\partial u} - \left(\frac{D'}{\Delta} + r_0\right)\frac{\partial X}{\partial v} - \left(\frac{b_{221}}{\Delta} + \frac{\partial r_0}{\partial v}\right)X,$$

[1] G. Sannia, Annali di Matematica (3) 17 (1910), p. 179 f.

[2] K. Zindler, Liniengeometrie II (1906), § 47 (92).

$$\frac{\partial x}{\partial w} = 2\frac{N}{\Delta}\frac{\partial X}{\partial u} - 2\frac{M}{\Delta}\frac{\partial X}{\partial v} + \left[\frac{1}{\Delta}\left(\frac{\partial M}{\partial v} - \frac{\partial N}{\partial u}\right) - \frac{\partial r_0}{\partial w}\right] X;$$

dabei ist

$$\Delta^2 = EG - F^2 > 0,$$

b_{112} und b_{221} sind gewisse Funktionen der Koeffizienten der Fundamentalformen und deren Ableitungen, während r_0 eine willkürliche Funktion von u, v, w ist. Diese Unbestimmtheit liegt in der Willkür des Punktes $P(x, y, z)$.

Die vorliegende Abhandlung geht von der Study'schen Abbildung des Geradenraumes auf die duale Einheitskugel aus, verwendet also normierte Plücker'sche Linienkoordinaten, läßt jedoch die Parameter im Komplex unter Ausschließung gewisser singulärer Fälle allgemein. Die beiden Zindler'schen Formen erscheinen in eine einzige duale zusammengefaßt, die als das Quadrat des Bogenelementes auf der dualen Einheitskugel aufgefaßt werden kann, wobei die beiden unendlich benachbarten Punkte der Kugel so gewählt sind, daß sie zwei infinitesimal verschiedene Geraden des Komplexes darstellen. Die Untersuchung ist analog den Entwicklungen der Gauß'schen Flächentheorie geführt und liefert Ableitungsgleichungen, die denen von Weingarten und Gauß entsprechen, wodurch es möglich wird, im regulären Falle den Komplex in der Umgebung einer Stelle ohne Integration als Potenzreihe darzustellen. Dabei erscheinen die Integrabilitätsbedingungen in recht übersichtlicher Form.

§ 1. Die duale Fundamentalform.

Eine Gerade $\mathfrak{A}$ sei in einem gewöhnlichen Koordinatensystem X_1, X_2, X_3 durch den Richtungsvektor $\mathfrak{a}\,(a_1, a_2, a_3)$ und den Momentvektor $\bar{\mathfrak{a}}\,(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3)$ bestimmt. Bei geeigneter Normierung von $\mathfrak{a}$ gilt

$$\mathfrak{a}^2 = 1, \tag{1}$$

$$\mathfrak{a}\bar{\mathfrak{a}} = 0, \tag{2}$$

wofür bei Anwendung des dualen Vektors $\mathfrak{A} = \mathfrak{a} + \varepsilon\bar{\mathfrak{a}}$

$$\mathfrak{A}^2 = 1 \tag{3}$$

tritt. Damit erscheint aber der Geradenraum eineindeutig auf die duale Einheitskugel (3) abgebildet, und zwar so, daß seinen Bewegungen Drehungen der Kugel in sich entsprechen und umgekehrt.[1] Geht bei einer solchen Drehung $\mathfrak{A}\,(A_1, A_2, A_3)$ in $\mathfrak{A}^*\,(A_1^*, A_2^*, A_3^*)$ über, so gilt

$$A_i^* = C_{i1}A_1 + C_{i2}A_2 + C_{i3}A_3 \quad (i = 1, 2, 3), \tag{4}$$

[1] W. Blaschke, Differentialgeometrie I (1921), § 103.

wo die C_{ik} duale Koeffizienten mit orthogonaler Determinante

$$|C_{ik}|_1^3 \tag{5}$$

sind.

Durch

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(u^1, u^2, u^3) = \mathfrak{a}(u^1, u^2, u^3) + \varepsilon\bar{\mathfrak{a}}(u^1, u^2, u^3) \tag{6}$$

wird ein Strahlenkomplex definiert, wobei die u^i reelle Parameter und $\mathfrak{a}, \bar{\mathfrak{a}}$ reelle Funktionen davon sind. Zwei infinitesimal verschiedene Gerade des Komplexes bestimmen auf ihrem dualen Bilde ein duales Bogenelement, für dessen Quadrat $d\mathfrak{A}^2$ gilt:

$$d\mathfrak{A}^2 = \sum_{i,k=1}^{3} G_{ik}\, du^i du^k, \tag{7}$$

worin

$$G_{ik} = \mathfrak{A}_{u^i}\mathfrak{A}_{u^k} \tag{8}$$

bedeutet. Wir setzen noch

$$G_{ik} = g_{ik} + \varepsilon\bar{g}_{ik}.$$

Die Form (7) ist wegen der Orthogonalität der Determinante (5) invariant gegenüber beliebigen Bewegungen des Komplexes und außerdem gegenüber beliebigen Parametertransformationen. Diese Invarianz entspringt geometrisch daraus, daß der reelle, beziehungsweise duale Koeffizient von (7) mit der ersten, beziehungsweise zweiten Zindler'schen Form übereinstimmt;[1] sie legt die Frage nach der Bestimmbarkeit eines Komplexes durch eine Form (7) nahe, weshalb (7) die duale Fundamentalform des Komplexes heißen soll.

Wir beobachten noch, daß die Determinante

$$D = \begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{12} & G_{22} & G_{23} \\ G_{13} & G_{23} & G_{33} \end{vmatrix} = 0 \tag{9}$$

sein muß. Denn es ist zufolge (8)

$$D = (\mathfrak{A}_{u^1}\mathfrak{A}_{u^2}\mathfrak{A}_{u^3})^2 = (\mathfrak{a}_{u^1} + \varepsilon\bar{\mathfrak{a}}_{u^1},\ \mathfrak{a}_{u^2} + \varepsilon\bar{\mathfrak{a}}_{u^2},\ \mathfrak{a}_{u^3} + \varepsilon\bar{\mathfrak{a}}_{u^3})^2 =$$
$$= [(\mathfrak{a}_{u^1}\mathfrak{a}_{u^2}\mathfrak{a}_{u^3}) + \varepsilon(*)]^2 = 0,$$

da der reelle Teil wegen (1) verschwindet. Im folgenden soll die Adjunkte zu G_{ik} in D mit D_{ik} bezeichnet werden.

[1] W. Blaschke, a. O., p. 193 (21).

§ 2. Kovariante Dreibeine.

Zur Behandlung der in § 1 aufgeworfenen Frage wird ma- sich zunächst kovariante Dreibeine bezüglich der Drehungen (4) de- dualen Einheitskugel verschaffen. Man stellt sofort fest, daß hierz die Vektoren

$$\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_{u^i} \ (i = 1, 2, 3)$$

in Betracht kommen, deren Anfangspunkt $\mathfrak{A}(u^i)$ sei. Diese Vektoren ermöglichen die Bildung von vier im allgemeinen verschiedenen kovarianten Dreibeinen:

$$\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_{u^i}, \mathfrak{A}_{u^k} \ (i, k = 1, 2;\ 2, 3;\ 1, 3), \tag{10}$$

$$\mathfrak{A}_{u^1}, \mathfrak{A}_{u^2}, \mathfrak{A}_{u^3}, \tag{11}$$

von denen festzustellen ist, ob sich ein beliebiger dualer Vektor aus den das Dreibein bildenden Vektoren eindeutig linear ableiten läßt. Als notwendige und hinreichende Bedingung dafür findet man, daß die Determinante dieser Vektoren, also

$$(\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}_{u^i}\,\mathfrak{A}_{u^k}) \ (i, k = 1, 2;\ 2, 3;\ 1, 3),$$

$$(\mathfrak{A}_{u^1}\,\mathfrak{A}_{u^2}\,\mathfrak{A}_{u^3}),$$

nicht rein dual sein darf, was für die Dreibeine (10) im allgemeinen zutrifft, während für das Dreibein (11) der reelle Bestandteil der Determinante

$$(\mathfrak{a}_{u^1}\,\mathfrak{a}_{u^2}\,\mathfrak{a}_{u^3})$$

wegen (1) verschwindet; (11) schließen wir daher aus. Da aber

$$(\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}_{u^i}\,\mathfrak{A}_{u^k}) \ (i, k = 1, 2;\ 2, 3;\ 1, 3)$$

und

$$D_{ll} \ (l = 3;\ 1;\ 2)$$

zugleich rein dual sind oder nicht, kann über die Zulässigkeit der Dreibeine (10) durch die Hauptunterdeterminanten von D entschieden werden. Es kann nämlich z. B. der reelle Bestandteil von $(\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}_{u^1}\,\mathfrak{A}_{u^2})$

$$(\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_{u^1}\,\mathfrak{a}_{u^2})$$

nur dann verschwinden, wenn $\mathfrak{a}_{u^1}$ und $\mathfrak{a}_{u^2}$ linear abhängig sind, also wenn

$$\mathfrak{a}_{u^1} \times \mathfrak{a}_{u^2} = 0$$

ist; zugleich verschwindet dann aber auch der reelle Bestandteil von D_{33}:

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{a}_{u^1}^2 & \mathfrak{a}_{u^1}\,\mathfrak{a}_{u^2} \\ \mathfrak{a}_{u^1}\,\mathfrak{a}_{u^2} & \mathfrak{a}_{u^2}^2 \end{vmatrix} = (\mathfrak{a}_{u^1} \times \mathfrak{a}_{u^2})^2.$$

Wir bemerken noch, daß die g_{ii} sowie die reellen Teile der D_{ii} nicht negativ sind.

§ 3. Die Ableitungsgleichungen.

Unter der Voraussetzung, daß

$$D_{33}$$

nicht rein dual sei, gelingt es leicht, $\mathfrak{A}_{u^3}$ im Dreibeine $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_{u^1}, \mathfrak{A}_{u^2}$ auszudrücken. Man setzt

$$\mathfrak{A}_{u^3} = \lambda\mathfrak{A} + \mu\mathfrak{A}_{u^1} + \nu\mathfrak{A}_{u^2},$$

multipliziert der Reihe nach mit $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_{u^1}, \mathfrak{A}_{u^2}$ und berücksichtigt (3), (8) und die aus (3) folgenden Gleichungen

$$\mathfrak{A}\mathfrak{A}_{u^i} = 0, \tag{3'}$$

wodurch man

$$\mathfrak{A}_{u^3} = -\frac{D_{13}}{D_{33}}\mathfrak{A}_{u^1} - \frac{D_{23}}{D_{33}}\mathfrak{A}_{u^2} \tag{12a}$$

findet. Analog kann man $\mathfrak{A}_{u^i u^k}$ unter Beibehaltung der Voraussetzung über D_{33} im Dreibeine $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_{u^1}, \mathfrak{A}_{u^2}$ ausdrücken, wenn man beachtet, daß man durch Differenzieren von (3′)

$$\mathfrak{A}\mathfrak{A}_{u^i u^k} = -G_{ik}$$

und durch Differenzieren von (8)

$$\mathfrak{A}_{u^1}\mathfrak{A}_{u^1u^1} = \frac{1}{2}G_{11_{u^1}}, \quad \mathfrak{A}_{u^1}\mathfrak{A}_{u^2u^2} = -\frac{1}{2}G_{22_{u^1}} + G_{12_{u^2}},$$

$$\mathfrak{A}_{u^1}\mathfrak{A}_{u^1u^2} = \frac{1}{2}G_{11_{u^2}}, \quad \mathfrak{A}_{u^1}\mathfrak{A}_{u^2u^3} = \frac{1}{2}(-G_{23_{u^1}} + G_{13_{u^2}} + G_{12_{u^3}}),$$

$$\mathfrak{A}_{u^1}\mathfrak{A}_{u^1u^3} = \frac{1}{2}G_{11_{u^3}}, \quad \mathfrak{A}_{u^1}\mathfrak{A}_{u^3u^3} = -\frac{1}{2}G_{33_{u^1}} + G_{13_{u^3}}$$

samt den Gleichungen, die daraus durch zyklisches Vorrücken entstehen, erhält. Dadurch findet man:

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{A}_{u^1u^1} &= -G_{11}\mathfrak{A} + \begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}'\mathfrak{A}_{u^1} + \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}'\mathfrak{A}_{u^2},\\
\mathfrak{A}_{u^1u^2} &= -G_{12}\mathfrak{A} + \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}'\mathfrak{A}_{u^1} + \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}'\mathfrak{A}_{u^2},\\
\mathfrak{A}_{u^2u^2} &= -G_{22}\mathfrak{A} + \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}'\mathfrak{A}_{u^1} + \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}'\mathfrak{A}_{u^2},
\end{aligned}\right\} \tag{13a}$$

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{A}_{u^1u^3} &= -G_{13}\mathfrak{A} + L_{13}\mathfrak{A}_{u^1} + M_{13}\mathfrak{A}_{u^2},\\
\mathfrak{A}_{u^2u^3} &= -G_{23}\mathfrak{A} + L_{23}\mathfrak{A}_{u^1} + M_{23}\mathfrak{A}_{u^2},\\
\mathfrak{A}_{u^3u^3} &= -G_{33}\mathfrak{A} + L_{33}\mathfrak{A}_{u^1} + M_{33}\mathfrak{A}_{u^2};
\end{aligned}\right\} \tag{14a}$$

darin bedeuten $\left\{ {ik \atop l} \right\}'$ die Christoffelsymbole der gewöhnlichen Flächentheorie mit G_{11}, G_{12}, G_{22}; u^1, u^2 gebildet und es ist:

$$L_{13} = \frac{-G_{12}\,G_{23_{u^1}} + G_{12}\,G_{13_{u^2}} + G_{22}\,G_{11_{u^3}} - G_{12}\,G_{12_{u^3}}}{2\,D_{33}},$$

$$M_{13} = \frac{G_{11}\,G_{23_{u^1}} - G_{11}\,G_{13_{u^2}} - G_{12}\,G_{11_{u^3}} + G_{11}\,G_{12_{u^3}}}{2\,D_{33}},$$

$$L_{23} = \frac{-G_{22}\,G_{23_{u^1}} + G_{22}\,G_{13_{u^2}} + G_{22}\,G_{12_{u^3}} - G_{12}\,G_{22_{u^3}}}{2\,D_{33}},$$

$$M_{23} = \frac{G_{12}\,G_{23_{u^1}} - G_{12}\,G_{13_{u^2}} - G_{12}\,G_{12_{u^3}} + G_{11}\,G_{22_{u^3}}}{2\,D_{33}},$$

$$L_{33} = \frac{-G_{22}\,G_{33_{u^1}} + G_{12}\,G_{33_{u^2}} + 2\,G_{22}\,G_{13_{u^3}} - 2\,G_{12}\,G_{23_{u^3}}}{2\,D_{33}},$$

$$M_{33} = \frac{G_{12}\,G_{33_{u^1}} - G_{11}\,G_{33_{u^2}} - 2\,G_{12}\,G_{13_{u^3}} + 2\,G_{11}\,G_{23_{u^3}}}{2\,D_{33}}.$$

Die Ableitungsgleichungen (12a), beziehungsweise (13a), (14a) entsprechen denen von Weingarten, beziehungsweise Gauß in der Flächentheorie.

Ist außer D_{33} auch

$$D_{11}, D_{22}$$

nicht rein dual, so erhält man aus (12a), (13a), (14a) durch ein-, beziehungsweise zweimaliges zyklisches Vorrücken die Gleichungen (12b), (13b), (14b), beziehungsweise (12c), (13c), (14c), wovon wir die folgenden anschreiben wollen:

$$\mathfrak{A}_{u^1} = -\frac{D_{12}}{D_{11}}\,\mathfrak{A}_{u^2} - \frac{D_{13}}{D_{11}}\,\mathfrak{A}_{u^3}; \tag{12b}$$

$$\mathfrak{A}_{u^2} = -\frac{D_{23}}{D_{22}}\,\mathfrak{A}_{u^3} - \frac{D_{12}}{D_{22}}\,\mathfrak{A}_{u^1}; \tag{12c}$$

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{A}_{u^2u^2} &= -G_{22}\,\mathfrak{A} + \left\{ {11 \atop 1} \right\}''\mathfrak{A}_{u^2} + \left\{ {11 \atop 2} \right\}''\mathfrak{A}_{u^3},\\
\mathfrak{A}_{u^2u^3} &= -G_{23}\,\mathfrak{A} + \left\{ {12 \atop 1} \right\}''\mathfrak{A}_{u^2} + \left\{ {12 \atop 2} \right\}''\mathfrak{A}_{u^3},\\
\mathfrak{A}_{u^3u^3} &= -G_{33}\,\mathfrak{A} + \left\{ {22 \atop 1} \right\}''\mathfrak{A}_{u^2} + \left\{ {22 \atop 2} \right\}''\mathfrak{A}_{u^3};
\end{aligned}\right\} \tag{13b}$$

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{A}_{u^3u^3} &= -G_{33}\,\mathfrak{A}+\left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\}'''\mathfrak{A}_{u^3}+\left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}'''\mathfrak{A}_{u^1},\\
\mathfrak{A}_{u^1u^3} &= -G_{13}\,\mathfrak{A}+\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}'''\mathfrak{A}_{u^3}+\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}'''\mathfrak{A}_{u^1},\\
\mathfrak{A}_{u^1u^1} &= -G_{11}\,\mathfrak{A}+\left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\}'''\mathfrak{A}_{u^3}+\left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\}'''\mathfrak{A}_{u^1};
\end{aligned}\right\}\qquad(13c)$$

hierin beziehen sich die zwei-, beziehungsweise dreigestrichenen Christoffelsymbole auf G_{22}, G_{23}, G_{33}; u^2, u^3, beziehungsweise auf G_{33}, G_{13}, G_{11}; u^3, u^1 Die Berechtigung dieses zyklischen Vorrückens liegt darin, daß neben der Voraussetzung und den Beziehungen, die zu (12a), (13a), (14a) führen, auch diejenigen Voraussetzungen und Beziehungen gelten, die sich daraus durch zyklisches Vorrücken ableiten lassen: alle jene Beziehungen folgen ja aus (3) und (8).

Aus (9) folgert man, daß zugleich mit D_{11}, D_{22}, D_{33} sämtliche D_{ik} nicht rein dual sind und daß die Unterdeterminanten einer Zeile von D denen einer andern Zeile proportional sind, weshalb (12a), (12b), (12c) schon wegen (9) einander gleichwertig sind.

Die Gleichungen (12a), (12b), (12c) wollen wir zusammen mit (12) bezeichnen; entsprechendes soll in analogen Fällen gelten.

§ 4. Die Integrabilitätsbedingungen.

Es sei ein Komplex (6) mit der Fundamentalform (7) unter Beibehaltung der Voraussetzung, daß kein D_{ii} rein dual sei, gegeben. Dann gilt für die G_{ik} die Beziehung (9) und es bestehen die Gleichungen (3), (3'), (8) und (12a), die wir zum Systeme

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{A}^2 = 1,\ \mathfrak{A}\,\mathfrak{A}_{u^i} = 0,\ \mathfrak{A}_{u^i}\mathfrak{A}_{u^k} = G_{ik},\\
D_{13}\,\mathfrak{A}_{u^1}+D_{23}\,\mathfrak{A}_{u^2}+D_{33}\,\mathfrak{A}_{u^3} = 0
\end{aligned}\right\}\qquad(\mathrm{I})$$

zusammenfassen; die Gleichung (12a) kann wegen (9) auch in der Form (12b) oder (12c) geschrieben werden. Faßt man die $G_{ik}, \mathfrak{A}, \mathfrak{A}_{u^i}$ als Veränderliche auf, so erkennt man, daß in (I) nicht alle Gleichungen unabhängig sind: aus (12a) und den drei ersten Gleichungen (8)

$$\mathfrak{A}_{u^1}^2 = G_{11},\ \mathfrak{A}_{u^1}\mathfrak{A}_{u^2} = G_{12},\ \mathfrak{A}_{u^2}^2 = G_{22}$$

folgen wegen (9) die drei letzten Gleichungen (8) und aus (12a) und den beiden ersten von (3')

$$\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}_{u^1} = 0,\ \mathfrak{A}\,\mathfrak{A}_{u^2} = 0$$

die dritte. Diese Bemerkung läßt sich in naheliegender Weise verallgemeinern. Von den 26 in (I) enthaltenen reellen Gleichungen sind also 8 sicher eine Folge der übrigen; daß diese unabhängig sind, können wir weiter unten erschließen. Von den 18 unabhängigen enthalten 2 nur $a_i, \bar{a}_i$, so daß die restlichen 16, die in den 18 Variablen $a_{i_u k}, \bar{a}_{i_u k}$ teils linear, teils quadratisch sind, nicht hinreichen, um die $a_{i_u k}, \bar{a}_{i_u k}$ durch die $u^i, a_i, \bar{a}_i$ auszudrücken. Ferner bilden wir im Anschlusse an (13) das System

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{A}_{u^1u^1} &= -G_{11}\,\mathfrak{A}+\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}'\mathfrak{A}_{u^1}+\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}'\mathfrak{A}_{u^2},\\
\mathfrak{A}_{u^1u^2} &= -G_{12}\,\mathfrak{A}+\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}'\mathfrak{A}_{u^1}+\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}'\mathfrak{A}_{u^2},\\
\mathfrak{A}_{u^2u^2} &= -G_{22}\,\mathfrak{A}+\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}'\mathfrak{A}_{u^1}+\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}'\mathfrak{A}_{u^2},\\
\mathfrak{A}_{u^2u^3} &= -G_{23}\,\mathfrak{A}+\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}''\mathfrak{A}_{u^2}+\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}''\mathfrak{A}_{u^3},\\
\mathfrak{A}_{u^3u^3} &= -G_{33}\,\mathfrak{A}+\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}''\mathfrak{A}_{u^2}+\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}''\mathfrak{A}_{u^3},\\
\mathfrak{A}_{u^1u^3} &= -G_{13}\,\mathfrak{A}+\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}'''\mathfrak{A}_{u^3}+\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}'''\mathfrak{A}_{u^1}.
\end{aligned}\right\} \tag{II}$$

Die beiden Systeme (I) und (II) bilden zusammen ein System von partiellen Differentialgleichungen mit den unabhängigen Variablen u^i und der unbekannten Funktion $\mathfrak{A}$; in ihm sind sämtliche Differentialquotienten höchster, nämlich zweiter Ordnung durch die niederer Ordnung, durch die unbekannte Funktion und durch die unabhängigen Variablen ausgedrückt, ohne daß dies analog für die Differentialquotienten erster Ordnung zuträfe.

Wir wollen nun zwischen den G_{ik} und deren Ableitungen notwendige Beziehungen suchen, die zugleich notwendige und hinreichende Bedingungen dafür sind, daß unser System folgende Eigenschaft annimmt: es soll bei einmaliger Differentiation nach den u^i neben (I) keine neuen Relationen zwischen den Veränderlichen u^i, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_{u^i}$ liefern, wenn man alle öfter als einmal auftretenden Differentialquotienten dritter Ordnung wegschafft und alle zweiter Ordnung durch ihre Werte aus (II) ersetzt. Dabei beziehen wir uns in (I) nur auf die unabhängigen Gleichungen.

Zur Vorbereitung suchen wir zunächst zwischen den G_{ik} und ihren ersten Ableitungen solche für den Komplex notwendige Relationen, die aus der Gleichheit der in (13) je zweimal auftretenden Ausdrücke für die $\mathfrak{A}_{u^i u^i}$ folgen. Wir setzen also $\mathfrak{A}_{u^1u^1}$ in (13a) und (13c) einander gleich und eliminieren mittels (12a) $\mathfrak{A}_{u^3}$; in der entstehenden Gleichung müssen dann sowohl die Koeffizienten von $\mathfrak{A}_{u^1}$ als auch von $\mathfrak{A}_{u^2}$ auf beiden Seiten einander gleich sein, wodurch man

$$\frac{\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}'''-\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}'}{D_{13}} = -\frac{\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}'}{D_{23}} = \frac{\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}'''}{D_{33}} \tag{15}$$

erhält. Diese Doppelbeziehung ist wegen (9) der folgenden äquivalent:

$$\begin{vmatrix} G_{11u^1} & G_{12} & G_{13} \\ 2\,G_{12u^1} - G_{11u^2} & G_{22} & G_{23} \\ 2\,G_{13u^1} - G_{11u^3} & G_{23} & G_{33} \end{vmatrix} = 0. \qquad (16_1)$$

Analog geben $\mathfrak{A}_{u^2u^2}$, beziehungsweise $\mathfrak{A}_{u^3u^3}$ zu Gleichungen (15_2), (16_2), beziehungsweise (15_3), (16_3) Anlaß, die aus (15_1), (16_1) durch ein-, beziehungsweise zweimaliges zyklisches Vorrücken entstehen. Für die Glieder von (15_1) wollen wir noch das Symbol $Q_1\,(u^1, u^2, u^3)$ einführen. Umgekehrt sind die Relationen (16) zusammen mit (9) und (12) für die Gleichheit der in (13) je zweimal auftretenden Ausdrücke für die $\mathfrak{A}_{u^iu^i}$ hinreichend.

Ferner suchen wir Relationen, die man durch Gleichsetzen der Ausdrücke für $\mathfrak{A}_{u^1u^3}$, $\mathfrak{A}_{u^2u^3}$ in $(13c)$, $(13b)$ und in $(14a)$ erhält. Eliminiert man jedesmal wiederum $\mathfrak{A}_{u^3}$ mittels $(12a)$, so findet man im ersten Falle

$$\frac{\left\{ {12 \atop 2} \right\}''' - L_{13}}{D_{13}} = -\frac{M_{13}}{D_{23}} = \frac{\left\{ {12 \atop 1} \right\}'''}{D_{33}} \qquad (17_1)$$

diese beiden Beziehungen sind wegen (9) der folgenden äquivalent:

$$\begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{11u^3} \\ G_{12} & G_{22} & G_{23u^1} - G_{13u^2} + G_{12u^3} \\ G_{13} & G_{23} & G_{33u^1} \end{vmatrix} = 0. \qquad (18_1)$$

Im zweiten Falle erhält man:

$$\frac{L_{23}}{D_{13}} = \frac{M_{23} - \left\{ {12 \atop 1} \right\}''}{D_{23}} = -\frac{\left\{ {12 \atop 2} \right\}''}{D_{33}} \qquad (19_1)$$

wofür wegen (9) eine einzige Beziehung (18_3) treten kann, die aus (18_1) durch zweimaliges zyklisches Vorrücken entsteht. Aus der Gleichwertigkeit aller Indizes schließen wir noch auf das Bestehen einer Beziehung (18_2), die man aus (18_1) durch zyklisches Vorrücken erhält und die wir weiter unten durch die Rechnung wiederfinden werden. Umgekehrt bürgen (18_1) und (18_3) nebst (9) und (12) für die Gleichheit der Ausdrücke, durch deren Gleichsetzen sie entstanden sind.

Wir differenzieren nun die beiden ersten Gleichungen (3′) nach den u^i und setzen für die auftretenden $\mathfrak{A}_{u^iu^k}$ die Werte aus (II) ein. Bei Berücksichtigung von (I) erhält man nur Identitäten.

Dasselbe Verfahren auf die drei ersten Gleichungen (8) angewendet führt im allgemeinen wieder zu Identitäten; nur wenn man

$$\mathfrak{A}_{u^1}\mathfrak{A}_{u^2}=G_{12}$$

nach u^3 differenziert, stößt man bei Anwendung von (9) auf (16_2). Diese für den Komplex notwendige Beziehung reicht zugleich hin, daß unser Verfahren nur solche Relationen zwischen den u^i, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_{u^i}$ ergibt, die aus (I) folgen.

Sodann hätten wir $(12a)$ nach den u^i zu differenzieren und die auftretenden $\mathfrak{A}_{u^i u^k}$ mittels (II) zu eliminieren. Dabei ist es aber wegen (9) und (12) gleichgültig, welche der drei Gleichungen (12) man zugrundelegt. Denn es ist beispielsweise

$$\begin{aligned}D_{13u^1}\mathfrak{A}_{u^1}+D_{23u^1}\mathfrak{A}_{u^2}+D_{33u^1}\mathfrak{A}_{u^3}+D_{13}\mathfrak{A}_{u^1u^1}+D_{23}\mathfrak{A}_{u^1u^2}+D_{33}\mathfrak{A}_{u^1u^3}=\\ =R_{u^1}(D_{11}\mathfrak{A}_{u^1}+D_{12}\mathfrak{A}_{u^2}+D_{13}\mathfrak{A}_{u^3})+\\ +R(D_{11u^1}\mathfrak{A}_{u^1}+D_{12u^1}\mathfrak{A}_{u^2}+D_{13u^1}\mathfrak{A}_{u^3}+D_{11}\mathfrak{A}_{u^1u^1}+D_{12}\mathfrak{A}_{u^1u^2}+D_{13}\mathfrak{A}_{u^1u^3}),\end{aligned}$$

worin die G_{ik}, $G_{ik_{u^l}}$, $\mathfrak{A}_{u^i}$, $\mathfrak{A}_{u^i u^k}$ als Variable angesehen werden und $R(u^1, u^2, u^3)$ nicht rein dual ist. Wir beginnen daher mit der Differentiation von $(12b)$ nach u^1, ersetzen $\mathfrak{A}_{u^1u^1}$, $\mathfrak{A}_{u^1u^2}$, $\mathfrak{A}_{u^1u^3}$ durch die Werte aus (II) und $\mathfrak{A}_{u^3}$ durch den Wert aus $(12a)$. Die entstehende Gleichung kann nur bestehen, wenn die Koeffizienten von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_{u^1}$, $\mathfrak{A}_{u^2}$ für sich verschwinden. Der Koeffizient von $\mathfrak{A}$ führt zur Beziehung (9), während die Koeffizienten von $\mathfrak{A}_{u^1}$ und $\mathfrak{A}_{u^2}$ bei Berücksichtigung von (9) auf (16_1) führen. Man findet nämlich zunächst

$$\begin{vmatrix}G_{11} & G_{13} & G_{11u^2}\\ G_{12} & G_{23} & G_{22u^1}\\ G_{13} & G_{33} & G_{23u^1}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}G_{11} & G_{12} & G_{11u^3}\\ G_{12} & G_{22} & G_{23u^1}\\ G_{13} & G_{23} & G_{33u^1}\end{vmatrix}, \qquad (20_1)$$

woraus mittels der nach u^1 differenzierten Beziehung (9) die Relation (16_1) folgt. Rücken wir in der nach u^1 differenzierten Gleichung $(12b)$ zyklisch vor, so erhält man die nach u^2 differenzierte Gleichung $(12c)$. Darin tritt $\mathfrak{A}_{u^1u^2}$, $\mathfrak{A}_{u^2u^2}$, $\mathfrak{A}_{u^2u^3}$ auf, wofür die Werte aus (II) zu setzen wären; bei Beachtung von (9), (16_2) und (12) kann aber $\mathfrak{A}_{u^2u^2}$ aus $(13b)$ entnommen werden, so daß man, wenn man noch $\mathfrak{A}_{u^1}$ mittels $(12b)$ eliminiert, auf Beziehungen stoßen muß, die aus (9) und (16_1) durch zyklisches Vorrücken entstehen, also auf (9) und (16_2). Analoges gilt bei der Differentation nach u^3. Umgekehrt ist (9) und (16) hinreichend, daß die Differentiation von $(12a)$ bei Anwendung von (II) nur solche Relationen zwischen den Variablen u^i, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_{u^i}$ ergibt, die aus (12), also aus (I) folgen.

Schließlich differenziert man das System (II), setzt die Ausdrücke für die mehrmals auftretenden dritten Differentialquotienten einander gleich und eliminiert die zweiten Differentialquotienten mittels (II). Dadurch entstehen Beziehungen zwischen den u^i, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_{u^i}$, die bei geeigneten notwendigen Relationen für die G_{ik} und deren Ableitungen eine Folge von (I) werden sollen. Zu ihrer Auffindung haben wir also an die aus (II) entstandenen Gleichungen

$$\mathfrak{A}_{u^1u^1u^2} = \mathfrak{A}_{u^1u^2u^1},\ \mathfrak{A}_{u^2u^2u^1} = \mathfrak{A}_{u^1u^2u^2}, \tag{21a}$$

$$\mathfrak{A}_{u^2u^2u^3} = \mathfrak{A}_{u^2u^3u^2},\ \mathfrak{A}_{u^3u^3u^2} = \mathfrak{A}_{u^2u^3u^3}, \tag{21b}$$

$$\mathfrak{A}_{u^3u^3u^1} = \mathfrak{A}_{u^1u^3u^3},\ \mathfrak{A}_{u^1u^1u^3} = \mathfrak{A}_{u^1u^3u^1}, \tag{21c}$$

$$\mathfrak{A}_{u^1u^2u^3} = \mathfrak{A}_{u^2u^3u^1} = \mathfrak{A}_{u^1u^3u^2} \tag{22}$$

anzuknüpfen.

Wegen der Analogie von (13a) zu den Ableitungsgleichungen für die reelle Einheitskugel in der Flächentheorie ergibt (21a) eine einzige Beziehung

$$D_{33}^2 = \begin{vmatrix} \left(-\frac{1}{2} G_{22u^1u^1} + G_{12u^1u^2} - \frac{1}{2} G_{11u^2u^2}\right) & \frac{1}{2} G_{11u^1} & \left(G_{12u^1} - \frac{1}{2} G_{11u^2}\right) \\ \left(G_{12u^2} - \frac{1}{2} G_{22u^1}\right) & G_{11} & G_{12} \\ \frac{1}{2} G_{22u^2} & G_{12} & G_{22} \end{vmatrix} +$$

$$- \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} G_{11u^2} & \frac{1}{2} G_{22u^1} \\ \frac{1}{2} G_{11u^2} & G_{11} & G_{12} \\ \frac{1}{2} G_{22u^1} & G_{12} & G_{22} \end{vmatrix}, \tag{23$_1$}$$

die der Gauß'schen Formel für die reelle Einheitskugel nachgebildet ist und die umgekehrt hinreicht, daß (21a) überhaupt zu keinen Beziehungen zwischen den u^i, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_{u^i}$ führt.[1]

Um (21b) auszuwerten, bemerken wir zuerst, daß der Ausdruck für $\mathfrak{A}_{u^2u^2u^3}$ bei Berücksichtigung von (9), (16$_2$), (16$_3$) und (12) mit jenem äquivalent ist, der aus $\mathfrak{A}_{u^1u^1u^2}$ in (21a) durch zyklisches Vorrücken entsteht; dabei sieht man die G_{ik}, $G_{ik_{u^l}}$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_{u^i}$ als Veränderliche an. Denn aus (9) und (16$_2$) folgt (15$_2$), womit man für die Differenz jener beiden Ausdrücke findet:

[1] W. Blaschke, a. a. O., § 48; § 36 (42).

$$Q_{2u^3}(D_{11}\mathfrak{A}_{u^1}+D_{12}\mathfrak{A}_{u^2}+D_{13}\mathfrak{A}_{u^3})+$$
$$+Q_2\,(D_{11u^3}\mathfrak{A}_{u^1}+D_{12u^3}\mathfrak{A}_{u^2}+D_{13u^3}\mathfrak{A}_{u^3}+D_{11}\mathfrak{A}_{u^1u^3}+D_{12}\mathfrak{A}_{u^2u^3}+D_{13}\mathfrak{A}_{u^3u^3});$$

hierin verschwindet aber die erste Klammer wegen (12) und die zweite wegen (9), (16_3) und (12). Wir haben dabei beachtet, daß die Ausdrücke für $\mathfrak{A}_{u^2u^3}$ und $\mathfrak{A}_{u^3u^3}$, die man erhält, wenn man in (21 a) zyklisch vorrückt, die in (II) auftretenden sind. Analog sind die Ausdrücke für $\mathfrak{A}_{u^2u^3u^2}$, beziehungsweise $\mathfrak{A}_{u^3u^3u^2}$ jenen äquivalent, die aus $\mathfrak{A}_{u^1u^2u^1}$, beziehungsweise $\mathfrak{A}_{u^2u^2u^1}$ in (21 a) durch zyklisches Vorrücken entstehen, wenn man (9), (16_2) und (12), die für die Übereinstimmung von $\mathfrak{A}_{u^2u^2}$ in (13 a) und (13 b) sorgen, anwendet. Schließlich entsteht $\mathfrak{A}_{u^2u^3u^3}$ aus $\mathfrak{A}_{u^1u^2u^2}$ in (21 a) unmittelbar durch zyklisches Vorrücken. Setzt man also (9), (16_2), (16_3) und (12) voraus, so ergibt (21 b) zwischen den G_{ik} und deren Ableitungen eine für den Komplex notwendige Beziehung (23_2), die aus (23_1) durch zyklisches Vorrücken entsteht; sie reicht umgekehrt mit (9), (16_2), (16_3) hin, daß (21 b) bei Elimination der zweiten Differentialquotienten mittels (II) zwischen den Veränderlichen $u^i, \mathfrak{A}, \mathfrak{A}_{u^i}$ nur solche Beziehungen ergibt, die aus (12), also aus (I) folgen. — Daß irgend eine mögliche Darstellung beispielsweise für $\mathfrak{A}_{u^1u^1u^2}$ durch zyklisches Vorrücken in eine mögliche Darstellung für $\mathfrak{A}_{u^2u^2u^3}$ übergeht, folgt bereits aus der Gleichwertigkeit aller Indizes.

Ganz entsprechend sind die Ausdrücke in (21 c) bei Anwendung von (9), (16_1), (16_3) und (12) jenen äquivalent, die aus den Ausdrücken in (21 b) durch zyklisches Vorrücken entstehen und zugleich jenen, die man bei zweimaligem zyklischen Vorrücken in (21 a) erhält. Man findet also aus (21 c) neben (9), (16_1), (16_3) und (12) eine notwendige Beziehung zwischen den G_{ik} und deren Ableitungen, die sich aus (23_2) durch zyklisches Vorrücken ergibt; sie reicht umgekehrt zusammen mit (9), (16_1), (16_3) hin, daß (21 c) zwischen den $u^i, \mathfrak{A}, \mathfrak{A}_{u^i}$ nur aus (I) folgende Beziehungen bestimmt.

Ist der reelle Teil von D_{11} positiv, so erkennt man in der Beziehung (23_1) die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß sich eine Form (7) für

$$u^3 = \text{const.}$$

auf eine Form verkürzt, die eine Strahlenkongruenz bis auf Bewegungen bestimmt. Analoges gilt für (23_2), beziehungsweise (23_3) und jener Form, die aus (7) für

$$u^1 = \text{const., beziehungsweise } u^2 = \text{const.}$$

entsteht.[1]

In der Doppelgleichung (22) fassen wir zuerst das erste und letzte Glied zusammen:

$$\mathfrak{A}_{u^1u^2u^3} = \mathfrak{A}_{u^1u^3u^2}. \tag{22a}$$

---

[1] W Blaschke, O., § 106.

Hierin ist bei Anwendung von (9), (18_1), (18_3) und (12) der Ausdruck für $\mathfrak{A}_{u^1u^2u^3}$, der im Anschlusse an (II) gebildet ist, jenem äquivalent, den man mittels $(13a)$, $(14a)$ findet; analog kann der Ausdruck für $\mathfrak{A}_{u^1u^3u^2}$ mit Hilfe von (9), (16_2), (18_1) und (12) in jenen umgerechnet werden, der aus $(13a)$, $(14a)$ entsteht. Bilden wir also $(22a)$ im Anschlusse an $(13a)$, $(14a)$ und eliminieren wir $\mathfrak{A}_{u^3}$ mittels $(12a)$, so stoßen wir durch Vergleichung der Koeffizienten von $\mathfrak{A}$ auf eine Beziehung, die sich wegen (9) auf die Form (18_2) bringen läßt und die wir bereits oben angekündet haben, während die Koeffizienten von $\mathfrak{A}_{u^1}$ und $\mathfrak{A}_{u^2}$ vermöge einer umfangreichen Rechnung zu einer einzigen Relation führen, die wir mit (24_1) bezeichnen wollen. Umgekehrt gewährleisten (9), (16_2), (18_1), (18_2), (18_3), (24_1) und (12) das Bestehen der im Anschlusse an (II) gebildeten Gleichung (22a).

Die recht unübersichtliche Beziehung (24_1) können wir aber ausschalten. Wir knüpfen dazu an die Gleichung

$$\mathfrak{A}_{u^2u^2u^3} = \mathfrak{A}_{u^2u^3u^2} \tag{25}$$

an, die wir uns im Anschlusse an $(13a)$, $(14a)$ bilden; die auftretenden zweiten Ableitungen seien bereits durch ihre Werte aus $(13a)$, $(14a)$ ausgedrückt. Eliminiert man darin $\mathfrak{A}_{u^3}$ mittels $(12a)$, so ergibt die Vergleichung der Koeffizienten von $\mathfrak{A}$ wegen (9) die Beziehung (16_2), während die Koeffizienten von $\mathfrak{A}_{u^1}$ und $\mathfrak{A}_{u^2}$ wiederum (24_1) liefern; umgekehrt sorgen (9), (16_2), (24_1) und (12) für das Bestehen von (25). Die beiden Ausdrücke in (25) sind aber bei Zuhilfenahme von (9), (16_2), (18_1), (18_3) und (12) jenen äquivalent, die man erhielte, wenn (25) im Anschlusse an (II) gebildet würde; das führten wir in der ersten Gleichung $(21b)$ aus. Diese ergab, wenn (9), (16_2), (16_3) und (12) berücksichtigt werden, die Beziehung (23_2). Umgekehrt sorgen (9), (16_2), (16_3), (18_1), (18_3), (23_2) und (12) für das Bestehen der im Anschlusse an $(13a)$, $(14a)$ gebildeten Gleichung (25), also auch, wenn man wieder (12) benützt, für die Beziehung (24_1).

Es reichen also (9), (16), (18), (23_2) sicher hin, daß $(22a)$ zwischen den u^i, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_{u^i}$ nur aus (12), also aus (I) folgende Beziehungen bestimmt. Analoges gilt für die aus $(22a)$ durch zyklisches Vorrücken entstehende Gleichung $(22b)$; an Stelle von (23_2) tritt dann (23_3). Rückt man nochmals zyklisch vor, so ist die entstehende Gleichung eine Folge von $(22a)$ und $(22b)$, also auch eine Folge von (9), (16), (18), (23_2), (23_3) und (12), woraus somit auch (23_1) folgen muß. Die Beziehungen (9), (16), (18), (23_2), (23_3) reichen also hin, daß die Gleichungen $(21a)$ die oben geforderten Eigenschaften annehmen.

Wir wollen noch zeigen, daß die Beziehungen (16) aus den Beziehungen (18) folgen. Zu diesem Zwecke schreiben wir (18_1) in folgender Form:

$$\begin{vmatrix} G_{11} & G_{13} & 0 \\ G_{12} & G_{23} & 0 \\ G_{13} & G_{33} & G_{23u^1}+2\,G_{12u^3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} & 2\,G_{11u^3} \\ G_{12} & G_{22} & G_{23u^1}-2\,G_{13u^2} \\ G_{13} & G_{23} & 2\,G_{33u^1} \end{vmatrix}$$

Auf ähnliche Gestalt läßt sich (18_2) wegen (9) bringen:

$$\begin{vmatrix} G_{11} & G_{13} & 2\,G_{11u^2} \\ G_{12} & G_{23} & 2\,G_{22u^1} \\ G_{13} & G_{33} & G_{23u^1}-2\,G_{12u^3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} & 0 \\ G_{12} & G_{22} & G_{23u^1}+2\,G_{13u^2} \\ G_{13} & G_{23} & 0 \end{vmatrix}$$

Addiert man diese beiden Gleichungen, so findet man (20_1), das mit (16_1) äquivalent ist. Analog erhält man durch zyklisches Vorrücken aus (18_2), (18_3), beziehungsweise (18_3), (18_1) die Beziehungen (16_2), beziehungsweise (16_3).

Die Untersuchungen dieses Paragraphen haben ergeben, daß bei jedem Komplexe zwischen den G_{ik} und deren Ableitungen die Relationen (9), (18), (23_2), (23_3) bestehen, welche notwendig und hinreichend sind, daß die unabhängigen Gleichungen des Systems (I) und das System (II) die eingangs geforderte Eigenschaft annehmen. An Stelle von (23_2), (23_3) kann man auch (23_3), (23_1) oder (23_1), (23_2) wegen der Gleichwertigkeit aller Indizes setzen. Jene Relationen sind nun in dem Sinne Integrabilitätsbedingungen, als sie die Bestimmung eines Komplexes bis auf Bewegungen bei gegebener Fundamentalform (7) durch Integration von (I) und (II) sicherstellen.

§ 5. Bestimmung des Komplexes durch die Fundamentalform.

Es sei nun eine duale quadratische Differentialform (7) derart gegeben, daß der reelle Teil aller D_{ii} positiv ist und die Integrabilitätsbedingungen (9), (18), (23_1), (23_2) gelten. Stellen wir dann die Systeme (I) und (II) her, so bilden sie zusammen ein System von partiellen Differentialgleichungen mit der unbekannten Funktion $\mathfrak{A}$, das nach einem Satze über solche Systeme integrabel ist und dessen allgemeines Integral nur von einer endlichen Anzahl willkürlicher Konstanten abhängt.[1] Enthielte, wie anfangs von § 4 behauptet, das System (I) 18 unabhängige reelle Gleichungen, so folgte aus jenem Satze, daß das allgemeine Integral sechs wesentliche reelle Konstanten enthalten müsse. Daß das allgemeine Integral sich aus einem besonderen höchstens durch eine Bewegungstransformation herleiten läßt, also höchstens sechs reelle Konstanten enthält, ergibt sich daraus, daß es auch die in (I) und (II) enthaltenen Gleichungen (3), die beiden ersten von $(3')$, die drei ersten von (8) und $(13a)$ erfüllt.

[1] Lie-Engel, Transformationsgruppen I (1888), Kap. 10; vgl. insbesondere Satz 1.

in welchen u^3 die Rolle eines Parameters spielt und die wegen der Voraussetzung über D_{33} und wegen (23_1) für sich so integrabel sind, daß sich ihr allgemeines Integral aus einem besonderen mittels (4) ableiten läßt: sie bestimmen ja das zur verkürzten Form

$$d\mathfrak{A}^2 = \sum_{i,k=1}^{2} G_{ik}\, du^i\, du^k$$

gehörige Strahlensystem bis auf Bewegungen, wobei u^3 ein Parameter ist.[1] Wegen der Analogie von ($13b$) und ($13c$) zu ($13a$), muß aber jedes so gefundene Integral das System (II) befriedigen. Daß es schließlich auch die restliche von den unabhängigen Gleichungen in (I), nämlich ($12a$) erfüllt, erkennt man durch Einsetzen. Wendet man also auf ein besonderes Integral eine Bewegungstransformation an, so erhält man umgekehrt immer eine Lösung von (I) und (II). Das allgemeine Integral des aus (I) und (II) gebildeten Systems leitet sich daher aus einem besonderen durch die allgemeine Bewegungstransformation her und muß sechs willkürliche reelle Konstanten enthalten, woraus zufolge des angeführten Satzes die tatsächliche Unabhängigkeit jener 18 Gleichungen folgt.

Als Probe dient die Bemerkung, daß man durch Gleichsetzen der Ausdrücke für $\mathfrak{A}_{u^3u^3}$ in ($13b$) und in ($14a$) bei Elimination von $\mathfrak{A}_{u^1}$ mittels ($12a$) wegen (9) auf (16_3) stößt. An Stelle von (II) könnte man auch das System ($13a$), ($14a$) treten lassen, zu dessen Aufstellung bereits die Voraussetzung, daß D_{33} nicht rein dual sei, genügen würde. Unsere Ableitung der Integrabilitätsbedingungen gilt jedoch nur dann, wenn kein D_{ii} rein dual ist.

Betrachten wir eine reguläre Stelle u_0^i eines Komplexes (6), so lassen sich die reellen Bestandteile in Reihen nach Potenzen von $u^i - u_0^i$ entwickeln; diese Reihenentwicklung gelingt mittels unserer Ableitungsgleichungen bereits auf Grund der gegebenen Fundamentalform (7).

Um dies zu zeigen, suchen wir zunächst geeignete Angaben, die einen beweglichen Komplex mit der Fundamentalform (7) ein- oder mehrdeutig im Raume festlegen.

Wir werden dazu einer Geraden u_0^i des Komplexes eine bestimmte Lage zuweisen, also $\mathfrak{A}(u_0^i)$ irgendwie so wählen, daß es (3) erfüllt. Man kann immer $\mathfrak{A}(u_0^i)$ etwa mit der X_3-Achse zusammenfallen lassen. Der Komplex besitzt jetzt nur mehr zwei Freiheitsgrade: er kann um die X_3-Achse gedreht und längs ihr verschoben werden. Deutet der Index 0 jeweils die Stelle u_0^i an, so rotiert bei einer Drehung des Komplexes im sphärischen Bilde der Vektor $(\mathfrak{a}_{u^1})_0$ in der Tangentialebene des Punktes (0, 0, 1) ebenfalls um die X_3-Achse unabhängig von einer etwaigen gleichzeitigen Translation des Komplexes längs der X_3-Achse. Da gemäß der Fundamentalform

$$(\mathfrak{a}_{u^1}^2)_0 = (g_{11})_0$$

[1] Vgl. W. Blaschke, a. a. O., § 106.

ist, wird bei der Rotation die X_1-, beziehungsweise X_2-Komponente von $(\mathfrak{a}_{u^1})_0$ die Werte von

$$-\sqrt{(g_{11})_0} \text{ bis } +\sqrt{(g_{11})_0}$$

im allgemeinen je zweimal annehmen, während die X_3-Komponente beständig Null bleibt. Gibt man also

$$(a_{1_{u^1}})_0 = 0$$

vor, so trifft dies für zwei Scharen von je ∞^1 Komplexen zu, die aus zwei gewissen, durch eine Rotation um die X_3-Achse ineinander überführbaren Komplexen, durch Translation längs der X_3-Achse gewonnen werden können und für die

$$(a_{2_{u^1}})_0 = +\sqrt{(g_{11})_0}, \text{ beziehungsweise } -\sqrt{(g_{11})_0}$$

sein muß.

Um schließlich durch eine geeignete Angabe in jenen beiden Scharen eine endliche Anzahl von Komplexen zu bestimmen, knüpfen wir an die reelle Darstellung der allgemeinen Bewegung des Linienraumes an. Gehen $\mathfrak{a}, \bar{\mathfrak{a}}$ vermöge der Bewegung in $\mathfrak{a}^*, \bar{\mathfrak{a}}^*$ über, so gilt

$$\left.\begin{aligned} a_i^* &= \mathfrak{a}\,\mathfrak{d}_i \\ \bar{a}_i^* &= \bar{\mathfrak{a}}\,\mathfrak{d}_i + (\mathfrak{v}\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{d}_i); \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

dabei ist $\mathfrak{d}_i$ ein Einheitsvektor in der X_i-Achse, der mit ihr gleichorientiert ist, dargestellt in jenem Koordinatensystem, das aus dem zugrundegelegten bei der betrachteten Bewegung entsteht und $\mathfrak{v}$ der Vektor vom Ursprunge des festen Koordinatensystems nach jenem des beweglichen bezogen auf das feste. Wird durch den Einheitsvektor $\mathfrak{t}$ eine Richtung festgelegt, so folgt aus (26) für eine Translation in ihr mittels des Parameters t

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{a}^* &= \mathfrak{a}, \\ \bar{\mathfrak{a}}^* &= \bar{\mathfrak{a}} + (\mathfrak{t} \times \mathfrak{a})\, t. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Bedeutet nun $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}\,(u^1, u^2, u^3)$, $\bar{\mathfrak{a}} = \bar{\mathfrak{a}}\,(u^1, u^2, u^3)$ irgend einen bestimmten Komplex aus den beiden genannten Scharen und geht aus ihm durch die Translation $\mathfrak{a}_0$, t der Komplex $\mathfrak{a}^* = \mathfrak{a}^*\,(u^1, u^2, u^3)$, $\bar{\mathfrak{a}}^* = \bar{\mathfrak{a}}^*\,(u^1, u^2, u^3)$ hervor, so gilt nach (27)

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}^*_{u^i} &= \mathfrak{a}_{u^i}, \\ \bar{\mathfrak{a}}^*_{u^i} &= \bar{\mathfrak{a}}_{u^i} + (\mathfrak{a}_0 \times \mathfrak{a}_{u^i})\, t, \end{aligned}$$

woraus mit $i = 1$ für die Stelle u_0^i bei Bezugnahme auf die Festsetzungen über $\mathfrak{a}_0$ und $(a_{1_{u^1}})_0$

$$(\bar{a}^*_{1_{u^1}})_0 = (\bar{a}_{1_{u^1}})_0 \mp \sqrt{(g_{11})_0}\; t$$

folgt; darin entsprechen die Vorzeichen den beiden Scharen. Schreibt man also $(\bar{a}^*_{1_{u^1}})_0$ beliebig vor, so legt man in jeder der beiden Scharen gerade einen Komplex fest; insbesondere kann

$$(\bar{a}^{*}_{1_{u^1}})_0 = 0$$

verlangt werden. Wir kommen somit zu folgendem Ergebnis: bei einem beweglichen Komplexe darf man immer für eine Stelle u^i_0 verlangen, daß

$$\mathfrak{A}(u^i_0) \equiv (0, 0, 1),\ (a_{1_{u^1}})_0 = 0,\ (\bar{a}_{1_{u^1}})_0 = 0$$

sei, wodurch seine Lage zweideutig festgelegt ist. Man erkennt leicht, wie sich diese Ausführungen verallgemeinern ließen.

Um die gewünschte Reihenentwicklung zu erhalten, wird man also $\mathfrak{A}(u^i_0)$, $(a_{1_{u^1}})_0$, $(\bar{a}_{1_{u^1}})_0$ etwa wie vorhin wählen und mit diesen Werten in die für die Stelle u^i_0 gebildeten unabhängigen Gleichungen von (I) eingehen. Die so entstehenden Gleichungen sind nach den noch unbekannten Komponenten der $\mathfrak{A}_{u^i}$ lösbar und ergeben vier Lösungssysteme, die man auch dann erhielte, wenn man an Stelle von $\mathfrak{A}(u^i_0)$ die entgegengesetzt orientierte Gerade $-\mathfrak{A}(u^i_0)$ gewählt hätte. Die vier Lösungssysteme entsprechen vier verschiedenen Lagen des durch (7) bestimmten Komplexes; das eine Paar ist der Geraden $\mathfrak{A}(u^i_0)$, das andere der Geraden $-\mathfrak{A}(u^i_0)$ in der oben besprochenen Art zugeordnet. Die zweiten und alle höheren Ableitungen von $\mathfrak{A}$ findet man für die betrachtete Stelle u^i_0 mittels (13) oder (14) und den durch schrittweises Differenzieren daraus folgenden Gleichungen. Wir kommen also zur Reihenentwicklung

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 + \sum_{i=1}^{3} (u^i - u^i_0)\,(\mathfrak{A}_{u^i})_0 + \frac{1}{2!} \sum_{i,k=1}^{3} (u^i - u^i_0)\,(u^k - u^k_0)\,(\mathfrak{A}_{u^i u^k})_0 + \qquad (28)$$

woraus man durch Zerlegen in den reellen und den dualen Teil die Reihenentwicklungen des Komplexes in normierten Plücker'schen Linienkoordinaten erhält.

§ 6. Singularitäten.

Wir untersuchen noch, wie weit bei einem vorgelegten Komplex das Verschwinden der reellen Teile der D_{ii} in der Parameterwahl begründet ist und wie weit es eine geometrische Eigenschaft des Komplexes ausdrücken kann; vom zugrunde gelegten Koordinatensystem muß es ja unabhängig sein.

Wir transformieren die reellen Bestandteile der D_{ii} mittels

$$u^i = u^i(u^1_*, u^2_*, u^3_*), \qquad (29)$$

worin die u^i_* die neuen Parameter darstellen und eine gewisse Funktionaldeterminante nicht verschwinden möge; dadurch gehe $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{a}^*$ über. Der reelle Bestandteil eines der D_{ii}, der in den ursprünglichen Parametern die Gestalt

$$(\mathfrak{a}_{u^k} \times \mathfrak{a}_{u^l})^2$$

hat, kann in den neuen Parametern folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$\left.\begin{aligned}&(\mathfrak{a}^*_{u^k_*} \times \mathfrak{a}^*_{u^l_*})^2 = \\ &\left[\frac{\partial (u^1 u^2)}{\partial (u^k_* u^l_*)}(\mathfrak{a}_{u^1}\times\mathfrak{a}_{u^2}) + \frac{\partial (u^2 u^3)}{\partial (u^k_* u^l_*)}(\mathfrak{a}_{u^2}\times\mathfrak{a}_{u^3}) + \frac{\partial (u^3 u^1)}{\partial (u^k_* u^l_*)}(\mathfrak{a}_{u^3}\times\mathfrak{a}_{u^1})\right]^2,\end{aligned}\right\} (30)$$

worin für die u^i und u^i_* zusammengehörige Werte zu nehmen sind.

Sind alle drei D_{ii} rein dual, so kann das geometrisch begründet sein oder in den Parametern liegen. Dieses singuläre Verhalten der D_{ii} findet in einem ganzen Gebiete des Komplexes sicher dann statt, wenn dieser dort eine unendlich ferne Leitkurve besitzt.

Ist dagegen bloß eines der D_{ii} rein dual, so gibt es immer eine Transformation (29), mittels der man erreichen kann, daß kein D_{ii} rein dual ist. Ist z. B. D_{11} rein dual, aber nicht D_{22}, D_{33}, eignet sich hierfür die folgende Transformation:

$$u^1 = u^1_* + u^2_*,\; u^2 = u^2_*,\; u^3 = u^3_*. \tag{31}$$

Sind schließlich zwei von den D_{ii} rein dual, z. B. D_{11}, D_{22}, während das dritte dies nicht ist, so wird unter unserer Annahme mittels der Transformation

$$u^1 = u^1_* + u^3_*,\; u^2 = u^2_* + u^3_*,\; u^3 = u^3_* \tag{32}$$

wiederum bewirkt, daß kein D_{ii} rein dual ist. In den beiden letzten Fällen liegt also das singuläre Verhalten der D_{ii} lediglich in den Parametern.

Wie in der Einleitung erwähnt, sind in der Sannia'schen Arbeit die Parameter so gewählt, daß $\mathfrak{a}$ nur von zwei etwa von u^1, u^2 abhängt. Es werden dann D_{11} und D_{22} rein dual aber nicht D_{33} und durch eine Transformation (32) kann der in der vorliegenden Arbeit ausgeführte Fall erreicht werden. Zur Probe überzeugen wir uns noch, daß man die Integrabilitätsbedingungen, die Sannia mit (I) bezeichnet, aus den Koeffizienten von $\mathfrak{A}$ in den Gleichungen (21), (22) findet, wenn diese Gleichungen im Anschlusse an die entsprechend spezialisierten Gleichungen (13*a*), (14*a*) gebildet werden, während die Sannia'sche Bedingung (II) aus den dualen Teilen in (23_1) entstehen muß.[1]

Für die Anregung zu dieser Untersuchung bin ich Herrn Professor K. Reidemeister in Königsberg zu aufrichtigem Dank verpflichtet.

---

[1] Vgl. W. Blaschke, a. a. O., § 106 (80) und G. Sannia, Annali di Matematica (3) 15 (1908), p. 143f.