Gedruckt mit Unterstützung aus dem Jerome und Margaret Stonborough-Fonds

Punktmittenflächen und eine Art relativer Flächentheorie

Von

Emil Müller in Wien

M. d. Akad.

(Vorgelegt in der Sitzung am 9. Juli 1925)

Inhaltsübersicht.

Schon vor länger als einem Jahrzehnt habe ich mich mit dem zur Bildung der Sehnenmittenfläche zweier Kurven dualen Vorgang und dessen Verallgemeinerungen beschäftigt. In metrisch spezialisierter Form besteht er einfach darin, zu zwei Flächen mit den Gleichungen $\mathfrak{z} = \varphi_1(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ und $\mathfrak{z} = \varphi_2(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ in rechtwinkligen Koordinaten die »Punktmittenfläche« $2\mathfrak{z} = \varphi_1(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) + \varphi_2(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ aufzusuchen. Einige Sonderergebnisse dieser Überlegungen habe ich, in anderm Zusammenhang, bereits in der Arbeit »Relative Minimalflächen«, Monatsh. Math. Phys., 31 (1921), p. 3 bis 19, mitgeteilt, auf die in der Folge mit »R. M.« Bezug genommen werden soll. Diesen Punktmittenflächen ist der I. Teil der vorliegenden Arbeit gewidmet. Es ergibt sich z. B. sehr einfach, daß die Punktmittenfläche zweier Torsen eine Fläche mit einem Netz konjugierter Kurven ist, dessen Grundriß (d. h. Normalriß auf die horizontal gedachte $[XY]$-Ebene) aus zwei Scharen von Geraden besteht. Mit diesen zu den Schiebflächen dualen Flächen hat sich inzwischen auch G. Scheffer's[1] in andrer Weise eingehend beschäftigt, insbesondre die Fälle untersucht, in denen diese Flächen zwei oder ∞^1 solche Netze konjugierter Kurven tragen. Die Mittenflächen von Torsenpaaren, deren Gratlinien demselben lotrechten Zylinder zweiter Ordnung angehören, sind dual zu den Minimalflächen.

Die Bildung der Mittenflächen einer festen analytischen Fläche Φ, von der Gleichung $\mathfrak{z} = \Phi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$, und beliebiger andrer Flächen φ läßt sich als eine auf letztere ausgeübte Punkttransformation auffassen. Im II. Teil der Arbeit wird gleich die etwas allgemeinere »$\mathfrak{d}$-Spiegelung an Φ« betrachtet, die sich durch die Gleichungen $\mathfrak{x}^\times = \mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}^\times = \mathfrak{y}$, $(1-\mathfrak{d})\,\mathfrak{z}^\times = \mathfrak{z} - \mathfrak{d}\,\Phi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ definieren läßt und eine einfache

[1] Flächen mit geradlinig projizierbaren konjugierten Kurvennetzen. Mathem. Zeitschrift 16 (1923), p. 43 bis 77

geometrische Bedeutung hat. Jede solche Transformation $\mathfrak{M}_\mathfrak{d}$ führt die Ebenen ε des Raums in Flächen $\varepsilon^\times$ über, die aus Φ durch jene ∞ perspektiven Affinitäten mit lotrechten Affinitätsstrahlen hervorgehen, die ε zur Affinitätsebene und $\mathfrak{v} = \mathfrak{d}$ $(\mathfrak{d}-1)$ zum Streckungsverhältnis haben. Läßt man nun noch $\mathfrak{d}$ alle reellen Werte durchlaufen, so gelangt man zu einer Mannigfaltigkeit (Φ) von ∞^4 Flächen, die aus Φ durch eine Gruppe $\mathfrak{A}_4$ von Affinitäten hervorgeht. Wie zu jeder Mannigfaltigkeit von ∞^4 Flächen gibt es auch zu (Φ) eine relative Flächentheorie. Die Grundgleichungen dieser (Φ)-Flächentheorie stimmen mit denen der in R. M. behandelten (μ)-Flächentheorie völlig überein, was vorauszusehen war, da die Mannigfaltigkeit (Φ) zur Mannigfaltigkeit (μ) zentrisch ähnlicher Flächen dual ist. Von besonderm Interesse sind wieder die (Φ)-Minimalflächen. Sie lassen sich durch die Eigenschaft kennzeichnen, daß ihre Asymptotenlinien und die von Φ als Grundrisse Kurvennetze haben, die harmonisch liegen. Für Φ als Fläche zweiter Ordnung sind die (Φ)-Minimalflächen dual zu den gewöhnlichen Minimalflächen. Für Φ als Paraboloid mit lotrechter Achse wird die Mannigfaltigkeit (Φ) zugleich eine Mannigfaltigkeit (μ). Die darauf bezüglichen Minimalflächen sind zugleich Schiebflächen.

I. Teil.

1. Ebenenmittenflächen.

Aus S. Lies bekannter Erzeugungsweise der Schiebflächen, als Sehnenmittenfläche zweier Raumkurven K_1, K_2, läßt sich unmittelbar die folgende ableiten:[1]

Legt man an zwei Raumkurven K_1, K_2 parallele Tangentialebenen und sucht zu jedem solchen Ebenenpaar τ_1, τ_2 die Mittenebene τ, also die zur uneigentlichen Ebene Ω bezüglich τ_1 und harmonische Ebene, so umhüllen diese Ebenen eine Schiebfläche.

Diese Deutung führt zur Betrachtung von Flächen, die aus zwei Flächen φ_1, φ_2, statt Kurven, auf dieselbe Weise erzeugt werden, die nämlich von den Mittenebenen aller Paare paralleler Tangentialebenen an φ_1 und φ_2 umhüllt werden. Eine solche *Ebenenmittenfläche* von φ_1 und φ_2 geht durch zentrische Streckung aus der *Schiebhüllfläche* der einen Fläche längs der andern hervor.[2] Die Sehnenmittenfläche zweier Kurven ist also zugleich deren Ebenenmittenfläche, indem man die Kurven als Vereine von ∞^2 Flächenelementen auffaßt.

Die Definition der Ebenenmittenfläche zweier Flächen läßt sich noch projektiv verallgemeinern, indem man einmal an Stelle der

---

[1] E. Müller, Krümmungslinien bezüglich der Flächenmannigfaltigkeit, die aus einer Fläche durch alle Schiebungen und Dilatationen hervorgeht. Sitzungsber. (math.-naturw.) Ak. Wien, 127 (1918), Abt. II*a*, p. 2139.

[2] A. a. O., Satz 9. Der Name »Mittelfläche« ist für den Ort der Mittelpunkte der Strahlen einer Kongruenz gebräuchlich. Vgl. L. Bianchi, Vorl. über Differentialgeometrie, deutsch von M. Lukat, Leipzig 1899, p. 265.

uneigentlichen Ebene Ω irgendeine Ebene ω setzt, dann statt des Doppelverhältnisses -1 ein andres festes $\mathfrak{d}$ wählt. Wir nennen die so erhaltene Fläche eine *projektive Ebenenmittenfläche.*

Für zwei Minimalkurven K_1, K_2, also für die Gratlinien von zwei Torsen, die dem absoluten Kegelschnitt umschrieben sind, ist die Mittenfläche eine *Minimalfläche.* Sie wird für konjugiert-imaginäre Torsen reell. Zur projektiven Verallgemeinerung der Minimalflächen gelangt man, wenn man K_1, K_2 als Gratlinien von Torsen wählt, die einem Kegelschnitt in ω umschrieben sind, und die projektiv verallgemeinerte Mittenfläche von K_1 und K_2 bezüglich ω sucht. Man kann auch sagen, K_1 und K_2 sollen Kurven sein, deren Tangenten ω in den Punkten desselben Kegelschnittes treffen.

2. Punktmittenflächen.

Bezeichnet o einen festen Punkt und $\mathfrak{d}$ eine feste Zahl, so leiten wir aus zwei Flächen φ_1, φ_2 eine neue dadurch ab, daß wir zu je zweien auf einer Geraden durch o liegenden Punkten x_1, x_2 von φ_1 und φ_2 jenen Punkt x suchen, für den das Doppelverhältnis $(x_1 x_2 x o) = \mathfrak{d}$ ist. Der Ort $(x) = \varphi$ soll die *projektive Punktmittenfläche* von φ_1 und φ_2 bezüglich o und $\mathfrak{d}$ heißen. Sie ist das duale Gebilde zur projektiven Ebenenmittenfläche.

Für $\mathfrak{d} = -1$ und o als uneigentlichen Punkt u ist φ die *Punktmittenfläche* von φ_1 und φ_2, nämlich der Mittenort (x) der Punktepaare $x_1 x_2$ von φ_1 und die auf den parallelen Geraden durch liegen.

Zur rechnerischen Darstellung des Zusammenhanges zwischen φ_1, φ_2 und φ wählen wir ein rechtwinkliges Koordinatensystem und u als den uneigentlichen Punkt der z-Achse. Sind die Flächen und durch die Gleichungen

$$\mathfrak{z}_1 = \varphi_1(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}), \quad \mathfrak{z}_2 = \varphi_2(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) \tag{1}$$

gegeben, worin φ_1, φ_2 analytische, im allgemeinen mehrdeutige Funktionen bezeichnen, so ist

$$2\,\mathfrak{z} = \varphi_1(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) + \varphi_2(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) \tag{2}$$

die Gleichung der *Mittenfläche* φ, wie wir jetzt kürzer sagen wollen, von φ_1 und φ_2.

Bequemerer Sprechweise halber denken wir uns die $[XY]$-Ebene des Koordinatensystems horizontal und nennen sie die *Grundrißebene* Π, die Normalrisse von Gebilden auf sie *Grundrisse.* Dann kann man sagen: *Konstruktiv erhält man Punkte der Mittenfläche von φ_1 und φ_2, wenn man von je zwei Punkten auf φ_1 und φ_2 mit demselben Grundriß die Mitte x aufsucht.* Hieraus folgert man:

Die Mittenfläche φ geht durch die Schnittlinie von φ_1 und φ_2 und berührt jede lotrechte gemeinsame Tangente dieser Flächen.

Zu je zwei Kurven K_1, K_2 des Raums mit demselben Grundriß gehört eine *Mittenkurve* K, die durch die Schnittpunkte von K_1 und K_2 geht.

Die Mittenfläche zweier eigentlichen Ebenen ε_1, ε_2 ist eine Ebene. Diese *Mittenebene* ist die zur lotrechten Ebene $[\varepsilon_1 \varepsilon_2 u]$ durch $[\varepsilon_1 \varepsilon_2]$ bezüglich ε_1 und ε_2 harmonische Ebene. Analoges gilt für die *Mittengerade* zweier Geraden in einer lotrechten Ebene.

Die Tangentialebene im Punkt x der Mittenfläche von φ_1 und φ_2 ist die Mittenebene der Tangentialebenen in den zugehörigen Punkten x_1 und x_2 von φ_1 und Nennt man solche Tangentialebenen von φ_1 und φ_2 entsprechend, deren Berührungspunkte denselben Grundriß haben, so kann man sagen: φ *ist die Hüllfläche der Mittenebenen entsprechender Tangentialebenen von* φ_1 *und* φ_2.

Geht eine Fläche φ_2 durch die lotrechte Schiebung um die Strecke $\mathfrak{a}$ in φ'_2 über, so geht die Mittenfläche φ' von φ_1 und φ'_2 aus der Mittenfläche von φ_1 und durch die lotrechte Schiebung $\mathfrak{a}/2$ hervor; denn aus

$$\varphi'_2 = \varphi_2 + \mathfrak{a},\ 2\,\mathfrak{z} = \varphi_1 + \varphi_2,\ 2\,\mathfrak{z}' = \varphi_1 + \varphi'_2 \text{ folgt } 2\,(\mathfrak{z}' - \mathfrak{z}) = \mathfrak{a}.$$

Nun sind parallele, nicht lotrechte Ebenen stets durch lotrechte Schiebung ineinander überführbar. Daher besteht der

Satz 1: Die Mittenflächen einer Fläche φ mit parallelen, nicht lotrechten Ebenen gehen durch lotrechte Schiebungen ineinander über.

Analog gilt der

Satz 1a: In einer lotrechten Ebene gehen die Mittenkurven einer Kurve K mit parallelen, nicht lotrechten Geraden durch lotrechte Schiebungen ineinander über.

3. Mittenflächen einer Fläche mit sämtlichen Ebenen.

Die Mittenfläche φ_1 von φ und einer nicht lotrechten Ebene ε_1 ergibt sich dadurch, daß man die in lotrechter Richtung gemessenen Abstände der Punkte der Fläche φ von der Ebene ε_1 hälftet. Dieser Übergang von φ zu φ_1 ist eine perspektive Affinität mit ε_1 als Affinitätsebene, lotrechten Affinitätsstrahlen und dem »Streckungsverhältnis« $^1/_2$. Jeder nicht lotrechten Ebene ε_i ist so eine Affinität $\mathfrak{A}_i$ zugeordnet. Die Transformation $\mathfrak{A}_i^{-1}\mathfrak{A}_k$ ist wieder eine perspektive Affinität mit u als Richtung der Affinitätsstrahlen, nämlich jene, die den durch $\mathfrak{A}_i$ transformierten Raum in den durch $\mathfrak{A}_k$ transformierten überführt. Da $\mathfrak{A}_i$ und $\mathfrak{A}_k$ die Punkte der (lotrechten) Ebene $[\varepsilon_i \varepsilon_k u]$ in gleicher Weise transformieren, so läßt $\mathfrak{A}_i^{-1}\mathfrak{A}_k$ die Punkte dieser Ebene ungeändert, hat also diese Ebene durch u zur Affinitätsebene.

Wir nennen nun in Anlehnung an H. Graßmann d. J.[1] eine perspektive Kollineation, deren K.-Zentrum und K.-Ebene vereinigt

[1] Ges. Werke von H. Graßmann, Bd. I_2, p. 454.

legen, eine *kollineare Schiebung* mit dem K.-Zentrum als *Schiebzentrum* oder *Zielpunkt*, und der K.-Ebene als *Schiebebene*. Dann ist $\mathfrak{A}_i^{-1}\mathfrak{A}_k$ eine *affine Schiebung* mit u als Zielpunkt und $[\varepsilon_i \varepsilon_k u]$ als Schiebebene. In dieser Schiebung entspricht der Ebene ε_i die ihr durch $\mathfrak{A}_k$ zugeordnete Ebene.

In jeder zur Schiebebene parallelen Ebene erfahren alle Punkte dieselbe Schiebung. Hieraus folgt, *daß die affinen Schiebungen raumtreue Transformationen sind.*

Die Anwendung der Affinitäten $\mathfrak{A}_i$ auf die Fläche gibt den zusammenfassenden

Satz I: Die ∞^3 Mittenflächen einer festen Fläche φ mit den, nicht dem Bündel durch $u = \Pi$ angehörenden, Ebenen gehen aus durch perspektive Affinitäten mit lotrechten Affinitätsstrahlen, dem Streckungsverhältnis $^1/_2$ und der jeweiligen Ebene als Affinitätsebene hervor. Die Flächen sind durch affine Schiebungen mit u als Zielpunkt ineinander überführbar. Die zum Flächenpaar φ_i, φ_k gehörige Schiebung hat $[\varepsilon_i \varepsilon_k u]$ als Schiebebene, und es entspricht in ihr der Ebene jene Ebene, die zufolge der Affinität $\mathfrak{A}_k$ zugeordnet wird, die in φ_k verwandelt.

Analoges gilt in jeder lotrechten Ebene für die ∞^2 Mittenkurven K_i einer festen Kurve K mit den nicht lotrechten Geraden der Ebene.

4. Einige konstruktiv verwendbare Folgerungen.[1]

Für φ_1 als Drehfläche mit lotrechter Achse A und φ_2 als Regelfläche, die A zur Leitgeraden und einen Drehkegel mit der Achse A als Richtkegel hat, ist die Mittenfläche beider durch Windung einer zur Meridiankurve von φ_1 in der oben angegebenen Weise affinen Kurve um A erzeugbar. Unter *Windung um A* sei dabei eine aus Drehungen um A und Schiebungen längs A zusammengesetzte stetige Bewegung verstanden; jede durch Windung einer Kurve erzeugte Fläche heiße *Windungsfläche*. Umgekehrt läßt sich jede Windungsfläche, deren erzeugende Kurve einer Ebene durch die Windungsachse angehört, als Mittenfläche zweier Flächen der angegebenen Art auffassen, wobei φ_2 sogar immer als gerades Konoid wählbar ist.

Für φ_1 als Drehfläche mit lotrechter Achse A und φ_2 als gleichachsige Wendelfläche ist die Mittenfläche eine Schraubfläche. Daß jede Schraubfläche mit lotrechter Achse sich so auffassen läßt, ist die geometrische Deutung ihrer bekannten Gleichung $\mathfrak{z} = f(\mathfrak{r}) + \mathfrak{k}\varphi$ in den Zylinderkoordinaten φ, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{z}$.

---

[1] Die Konstruktion der »Summenfläche« zweier Flächen findet sich auch bei A. Liljeström, Sur la génération géométrique des courbes et des surfaces, Arkiv f. matematik, astronomi och fysik, Bd. 13, Nr. 4, Stockholm 1918—19; die Verwendung der Mittenfläche ist geometrisch vorteilhafter.

Die Mittenfläche zweier Schraubflächen (Drehflächen inbegriffen) mit gemeinsamer lotrechter Achse ist eine gleichachsige Schraubfläche. Aus einer Wendelfläche und einem Drehkegel mit gemeinsamer Achse erhält man so eine schiefe geschlossene Regelschraubfläche, aus einer beliebigen Regelschraubfläche und einem gleichachsigen Drehkegel eine Schraubfläche, die durch Schraubung einer in einer lotrechten Ebene befindlichen Hyperbel entsteht.

5. Mittenfläche zweier Zylinder.

Es seien φ_1 und φ_2 zwei Zylinder, deren Erzeugenden nicht zu derselben lotrechten Ebene parallel sind. Dann schneiden die lotrechten Ebenen durch die Erzeugenden von φ_1 aus φ_2 Kurven aus, die durch Schiebungen in der Richtung der Erzeugenden dieses Zylinders ineinander übergehn. Die Mittenkurven zwischen diesen Schnittkurven und den Erzeugenden von φ_1 sind dann nach Nr. 2 und 3 zu den erstern affin und durch Schiebungen ineinander überführbar. Da Gleiches für die Mittenkurven in den lotrechten Ebenen durch die Erzeugenden von φ_2 gilt, so hat man den

Satz 1: Die Mittenfläche zweier Zylinder, deren Erzeugenden nicht zu derselben lotrechten Ebene parallel sind, ist eine Schiebfläche, deren erzeugende Kurven den lotrechten Ebenen durch die Zylindererzeugenden angehören.

In dem ausgeschlossenen Fall ist die Mittenfläche ein Zylinder.

Vom Satz 1 gilt die folgende Umkehrung:

Satz 2: Jede Schiebfläche, deren erzeugende Kurven lotrechter Ebenen angehören, läßt sich als Mittenfläche zweier Zylinder mit horizontalen Erzeugenden auffassen.

Gehören nämlich die Kurven K_1, K_2 in den lotrechten Ebenen $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ verschiedenen Erzeugendenscharen unsrer Fläche an, und sind H_1, H_2 die Schnittlinien von ε_1 und ε_2 mit Π, dann ist K_1 Mittenkurve von ∞^1 durch lotrechte Schiebungen auseinander hervorgehenden Kurven $K_1^\times$ mit zugeordneten, zu H_1 parallelen Geraden.[1] Dies gilt für jede zu ε_1 parallele Ebene. Da die Kurven K_1 durch Schiebungen $\| \varepsilon_2$ ineinander übergehen, so gilt dasselbe für die Schiebscharen $K_1^\times$. Wählt man nun in diesen Scharen solche Kurven aus, die einem Zylinder φ_2 mit Erzeugenden H_2 angehören, so erfüllen die zugeordneten Geraden $\| H_1$ einen Zylinder φ_1 und die Mittenfläche von φ_1 und φ_2 ist die gegebene Schiebfläche.

Da $\mathfrak{z} = f(\mathfrak{a}\,\mathfrak{x} + \mathfrak{b}\,\mathfrak{y})$ die Gleichung eines zu Π parallelen Zylinders ist, so hat jede Schiebfläche der obigen Art eine Gleichung der Form

$$2\,\mathfrak{z} = f_1(\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{x} + \mathfrak{b}_1\,\mathfrak{y}) + f_2(\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{x} + \mathfrak{b}_2\,\mathfrak{y}). \tag{1}$$

---

[1] Denn eine Fläche $\mathfrak{z} = \varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ ist Mittenfläche der Fläche $\mathfrak{z} = 2\,\varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) - \mathfrak{a}$ und der Ebene $\mathfrak{z} = \mathfrak{a}$ für beliebige Werte von $\mathfrak{a}$. Analoges gilt für Mittenkurven in einer lotrechten Ebene.

Die Grundrisse der erzeugenden Kurven dieser Schiebfläche sind die Parallelstrahlbüschel $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{x}+\mathfrak{b}_1 \mathfrak{y} =$ konst. und $\mathfrak{a}_2 \mathfrak{x}+\mathfrak{b}_2 \mathfrak{y} =$ konst. Die Haupttangentenkurven der Fläche bilden sich daher im Grundriß als Kurvennetz ab, dessen beide durch einen Punkt gehende Linienelemente die Richtungen der beiden Parallelstrahlbüschel harmonisch trennen.

Jedes elliptische oder hyperbolische Paraboloid mit lotrechter Achse ist eine Schiebfläche dieser Art. Denn die Gleichung $\mathfrak{z} = \mathfrak{a}\mathfrak{x}^2+\mathfrak{b}\mathfrak{y}^2$ einer solchen Fläche läßt sich schreiben

$$2\mathfrak{z} = (\sqrt{\mathfrak{a}}\,\mathfrak{x}+\sqrt{\mathfrak{b}}\,\mathfrak{y})^2+(\sqrt{\mathfrak{a}}\,\mathfrak{x}-\sqrt{\mathfrak{b}}\,\mathfrak{y})^2.$$

Bezeichnen f und $\bar{f}$ konjugierte analytische Funktionen, so ist

$$2\mathfrak{z} = f(\mathfrak{x}+i\mathfrak{y})+\bar{f}(\mathfrak{x}-i\mathfrak{y}) \tag{2}$$

die Gleichung der (reellen) Mittenfläche der konjugiert komplexen horizontalen Zylinder $\mathfrak{z} = f(\mathfrak{x}+i\mathfrak{y})$ und $\mathfrak{z} = \bar{f}(\mathfrak{x}-i\mathfrak{y})$, die von den beiden absoluten Punkten in Π ausstrahlen. Diese Fläche ist eine Schiebfläche, deren erzeugende Kurven den lotrechten Minimalebenen angehören.[1]

Für $f(\mathfrak{x}+i\mathfrak{y}) = P(\mathfrak{x},\mathfrak{y})+i\,Q(\mathfrak{x},\mathfrak{y})$ erhält Gleichung (2) die Form

$$\mathfrak{z} = P(\mathfrak{x},\mathfrak{y}). \tag{3}$$

Mithin gilt der

Satz 3: Ist $P(\mathfrak{x},\mathfrak{y})$ der reelle (oder imaginäre) Bestandteil einer analytischen Funktion von $\mathfrak{x}+i\mathfrak{y}$, so stellt $\mathfrak{z} = P(\mathfrak{x},\mathfrak{y})$ eine Schiebfläche dar, deren erzeugende Kurven den zu Π normalen Minimalebenen angehören. Ihre Haupttangentenkurven haben als Grundriß ein orthogonales Kurvennetz.

Aus Satz 2 folgt ferner die Umkehrung:

Satz 4: Jede reelle Schiebfläche, deren erzeugende Kurven den zu Π normalen Minimalebenen angehören, hat eine Gleichung $\mathfrak{z} = P(\mathfrak{x},\mathfrak{y})$, wo $P(\mathfrak{x},\mathfrak{y})$ den reellen Teil einer analytischen Funktion von $\mathfrak{x}+i\mathfrak{y}$ bezeichnet.

Für den Neigungswinkel τ der zum Punkt $(\mathfrak{x},\mathfrak{y},\mathfrak{z})$ einer Fläche $\mathfrak{z} = \psi(\mathfrak{x},\mathfrak{y})$ gehörigen Tangentenebene gegen Π besteht bekanntlich die Beziehung

$$tg^2\,\tau = \left(\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial \mathfrak{x}}\right) + \left(\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial \mathfrak{y}}\right)^2 \tag{4}$$

Für gegebene Werte von τ stellt (4) *die Grundrisse der Lichtgleichen der Fläche bei lotrechter Beleuchtung* dar.

[1] Auf diese Flächen habe ich bereits R. M. hingewiesen. Vgl. a. a. O., p. 12, Fußnote 3.

Für die durch Gleichung (2) gegebenen Flächen erhält (5) die Form

$$\mathrm{tg}^2\tau = f'(\mathfrak{x}+i\mathfrak{y}) \cdot f'(\mathfrak{x}-i\mathfrak{y}). \qquad (5)$$

Wählt man insbesondre $f(\mathfrak{x}+i\mathfrak{y}) = (\mathfrak{x}+i\mathfrak{y})^n$, wo n reell sein soll, und setzt $\mathfrak{x}\pm i\mathfrak{y} = \mathfrak{r}(\cos\varphi\pm i\sin\varphi)$, so haben wir es mit der Schiebfläche

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{r}^n \cos n\varphi \qquad (6)$$

zu tun, für die dann

$$\mathrm{tg}^2\tau = n^2(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2)^{n-1} \qquad (7)$$

ist. Daraus folgt: *Die Lichtgleichen für lotrechte Beleuchtung der durch Gleichung (6) definierten Schiebflächen stellen sich im Grundriß als konzentrische Kreise um den Ursprung dar.* Zu diesen Flächen gehört das gleichseitige hyperbolische Paraboloid ($n = 2$) und die Fläche[1] mit der Gleichung $\mathfrak{z}(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2)-\mathfrak{x} = 0$ ($n = -1$).

6. Eine infinitesimalgeometrische Eigenschaft der Mittenfläche.

Wir ordnen solche Punkte von φ_1 und φ_2 einander als entsprechend zu, die denselben Grundriß haben. Wie bei jeder Punktabbildung zweier Flächen aufeinander gibt es dann in den Umgebungen zweier entsprechenden regulären Punkte ein Netz konjugierter Kurven auf φ_1, dem ein ebensolches Netz auf φ_2 entspricht. Diese beiden Netze haben in unserm Fall denselben Grundriß. Unter Benützung der in Nr. 2 erwähnten Eigenschaften der Mittenfläche folgert man daraus[2] den wichtigen

Satz 1: Sucht man auf zwei Flächen φ_1, φ_2 jene Netze konjugierter Kurven, deren Grundrisse sich decken, so ist dieses Kurvennetz in Π zugleich der Grundriß eines Netzes konjugierter Kurven auf der Mittenfläche φ von φ_1 und φ_2.

Er ergibt sich auch rechnerisch unmittelbar aus der Gleichung

$$2\mathfrak{z} = \varphi_1(\mathfrak{x},\mathfrak{y}) + \varphi_2(\mathfrak{x},\mathfrak{y}) \qquad (1)$$

der Mittenfläche. Bezeichnet man nämlich die zweiten partiellen Ableitungen von $\mathfrak{z}$ nach $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ in üblicher Weise mit r, s, t und kennzeichnet die analogen Ableitungen von φ_1 und φ_2 durch Beifügen von Zeigern, so folgt aus (1)

$$2r = r_1 + r_2,\ 2s = s_1 + s_2,\ 2t = t_1 + t_2. \qquad (2)$$

Da nun die Grundrisse der Asymptotenlinien (Haupttangentenkurven) der Flächen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi$ beziehungsweise durch die Gleichungen

---

[1] Ich habe sie in Jahresb. Deutsch. Math.-Ver. 25 (1916), p. 224, »Kubische achsiale Kugel« genannt.

[2] Analog wie in der in Nr. 1, Fußnote 1, erwähnten Arbeit der Satz 6 bewiesen wurde.

$$\left.\begin{array}{l} r_1\, d\,\mathfrak{x}^2+2\,s_1\, d\,\mathfrak{x}\, d\,\mathfrak{y}+t_1\, d\,\mathfrak{y}^2=0 \\ r_2\, d\,\mathfrak{x}^2+2\,s_2\, d\,\mathfrak{x}\, d\,\mathfrak{y}+t_2\, d\,\mathfrak{y}^2=0 \\ r\;\, d\,\mathfrak{x}^2+2\,s\;\, d\,\mathfrak{x}\, d\,\mathfrak{y}+t\;\, d\,\mathfrak{y}^2=0 \end{array}\right\} \tag{3}$$

estimmt sind und zwischen deren linken Seiten wegen (2) eine Zahlbeziehung besteht, so gehören die einem Punkt $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ (in einer stimmten Schicht) durch die drei Gleichungen zugeordneten Linienlemente einer Involution an. Die Doppelelemente dieser Involution rennen die drei Elementenpaare harmonisch, sind daher Grundrisse konjugierter Elemente aller drei Flächen. Damit ist Satz 1 rechnerisch ewiesen.

Aus den ersten zwei Gleichungen (3) folgt aber zugleich für die Doppelelemente der Involution die Gleichung

$$(r_1\, s_2-s_1\, r_2)\, d\,\mathfrak{x}^2+(r_1\, t_2-t_1\, r_2)\, d\,\mathfrak{x}\, d\,\mathfrak{y}+(s_1\, t_2-t_1\, s_2)\, d\,\mathfrak{y}^2=0, \tag{4}$$

lso die *Differentialgleichung des Grundrisses des in Satz 1 erwähnten Kurvennetzes.*

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die urch die ersten zwei Gleichungen (3) einem Punkt ($\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$) zugeordneten Linienelemente einander harmonisch trennen, lautet bekanntlich

$$r_1\, t_2-2\,s_1\, s_2+t_1\, r_2=0. \tag{5}$$

Diese Gleichung gibt die Bedingung dafür an, daß die Grundrisse der Asymptotenlinien in entsprechenden Punkten von φ_1 und φ_2 einander harmonisch trennen.

7. Mittenfläche zweier Torsen.

Für eine Torse φ_1 sind die doppelt überdeckten Grundrisse der Erzeugenden die Grundrisse der Asymptotenlinien. Die Mittenfläche φ von φ_1 und einer beliebigen andern Fläche φ_2 besitzt daher nach Nr. 6 ein Netz konjugierter Kurven, dessen Grundriß aus dem Grundriß der Erzeugendenschar von φ_1 und der zu diesen Geraden bezüglich des Grundrißnetzes der Asymptotenlinien von φ_2 konjugierten Schar besteht. Wählt man auch   als Torse, so folgt hieraus der

Satz 1: Die Mittenfläche zweier Torsen besitzt zwei Scharen ebener konjugierter Kurven, deren Grundrisse sich mit denen der Torsenerzeugenden decken.

Von dieser Fläche φ lassen sich sowohl die Tangentialebenen τ als auch deren Berührungspunkte t leicht konstruieren. Von zwei Tangentialebenen τ_1, τ_2 der Torsen φ_1, φ_2 ist die Mittenebene τ eine Tangentialebene von φ. Zu den Berührungserzeugenden T_1, T_2 von φ_1, φ_2 mit τ_1 beziehungsweise τ_2 gibt es eine lotrechte sie schneidende Gerade; die Mitte der zugehörigen Schnittpunkte ist nach Nr. 2 der zu τ gehörige Berührungspunkt t.

Die Mittenfläche φ einer Torse φ_1 und einer beliebigen Fläch
ist die Hüllfläche der Mittenflächen von φ_2 und der ∞^1 Tangenti
ebenen τ_1 von φ_1. Nach Nr. 3 gehen letztere Flächen aus φ_2 dur
bestimmte Affinitäten $\mathfrak{A}_i$ hervor. Da die Charakteristiken ihrer Hü
fläche φ in den lotrechten Ebenen durch die Erzeugenden von
liegen, so bilden sie die eine Schar des oben erwähnten Netz
konjugierter Kurven. Für zwei Torsen folgt hieraus der

Satz 2: Die Mittenfläche zweier Torsen wird längs der Schnitt kurven mit den lotrechten Ebenen durch die Erzeugenden der ein Torse von Torsen berührt, die aus der andern Torse durch p spektive Affinitäten $\mathfrak{A}_i$ hervorgehen.

Auf der Mittenfläche φ zweier Kegel φ_1, φ_2 sind die in d lotrechten Ebenen durch die Kegelerzeugenden liegenden konjugierte Kurven »Kegelkurven«, d. h. die längs ihrer umschriebenen Torse sind Kegel, und zwar zu φ_2 beziehungsweise φ_1 affin. Die Spitze dieser Kegel gehören daher den lotrechten Geraden durch die Spitze von φ_2 und φ_1 an.

Auf der Mittenfläche φ zweier Zylinder ergeben sich konjugiert Zylinderkurven. Hieraus folgt neuerlich, daß φ eine Schiebfläche ist

Die Mittenflächen von Torsen sind (samt ihren kollinear ver wandten) zu den Schiebflächen dual.[1] Diese Dualität kommt vielleicht am sichtbarsten zum Ausdruck, wenn man die Torsen in lineare Ebenenkoordinaten darstellt, wofür sich die sogenannten *Prismenkoordinaten*[2] vorzüglich eignen. Drei lotrechte, nicht derselben Eben angehörige Gerade (die »Achsen«) mögen Π in den Punkten o_1, o_2, o schneiden. Haben die Achsenschnittpunkte einer Ebene von o_1, o_2, o bezüglich die Abstände $\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2, \mathfrak{t}_3$, so sind dies die Prismenkoordinaten der Ebene. Die Koordinaten der Mittenebene zweier Ebenen sin dann die arithmetischen Mittel aus den entsprechenden Koordinaten der letztern Ebenen. Sind also

$$\mathfrak{t}_i = \varphi_i(\mathfrak{u}) \text{ und } \mathfrak{t}_i = \psi_i(\mathfrak{v}), \ (i = 1, 2, 3)$$

die Gleichungen zweier Torsen und ψ in den Parametern $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}$, stellen die Gleichungen

$$2\,\mathfrak{t}_i = \varphi_i(\mathfrak{u}) + \psi_i(\mathfrak{v}), \ (i = 1, 2, 3)$$

die Mittenfläche von φ und ψ dar. Aus der formalen Übereinstimmung dieser Gleichungen mit denen der Schiebflächen in kartesischen Koordinaten folgt, daß jedem Satz über Schiebflächen ein Satz über die Mittenfläche zweier Torsen entspricht. Den Sätzen z. B. von K. Reidemeister über jene Kurven, deren Sehnenmittenfläche

---

[1] Diese Bemerkung machte schon E. Goursat, Leçons sur l'intégration équations aux dérivées partielles du second ordre, t. I, p. 160.

[2] Enzykl. math. Wissensch., III, *AB* 7 (E. Müller), Nr. 22.

windschiefe Regelflächen sind,[1] entsprechen Sätze über Torsen, deren Mittenflächen (mit sich selbst) windschiefe Regelflächen sind.

8. Duale Flächen zu den Minimalflächen.

Nach der in Nr. 1 erwähnten projektiven Verallgemeinerung der Minimalflächen sind die dazu dualen Flächen die projektiven Mittenflächen bezüglich eines Punktes o von zwei Torsen, deren Gratlinien demselben Kegel zweiter Ordnung mit der Spitze in o angehören. Wählt man o wieder als den uneigentlichen Punkt $u = \Pi$, so folgt der

Satz 1: *Haben zwei Torsen φ_1, φ_2 Gratlinien mit demselben Kegelschnitt V als Grundriß, so ist die Mittenfläche von φ_1 und φ_2 eine zu einer Minimalfläche duale Fläche. Sie besitzt die kennzeichnende Eigenschaft, daß es auf ihr ein Netz konjugierter Kurven gibt, deren Grundrisse in die Tangenten von V fallen.*

Die Grundrisse der Asymptotenlinien einer solchen Fläche bilden also ein Kurvennetz, für das die beiden zu einem Punkt gehörigen Linienelemente (von Kurven derselben Schicht) bezüglich V konjugiert sind. Betrachtet man V als absoluten Kegelschnitt einer Maßgeometrie in Π, so kann man auch sagen, dieses Kurvennetz ist *V-normal.*

Die Mittenfläche zweier Kegel (oder Zylinder) ist stets eine Fläche obiger Art; die Kegelspitzengrundrisse bilden die zerfallende Kurve V.

Das duale Gegenstück zu Ribaucours Erzeugungsweise der Minimalflächen als Hüllfläche der Mittelebenen einer isotropen Kongruenz[2] ist folgendes. *Zwei Kurven C_1, C_2 sollen demselben lotrechten Zylinder zweiter Ordnung angehören. Sind T_1, T_2 Tangenten von C_1 beziehungsweise C_2, und sucht man auf der T_1 und T_2 schneidenden lotrechten Geraden die Mitte t der Schnittpunkte, so ist der Ort (t) dieser Punkte eine zu einer Minimalfläche duale Fläche.* Denn (t) ist nach dieser Konstruktion jedenfalls die Mittenfläche der Tangentenflächen von C_1 und C_2. Bezeichnen nun t_1 und t_2 die Berührungspunkte von T_1 und T_2 mit C_1 beziehungsweise C_2, so ist t auch der Schnitt der Mittenebene von $[t_1\, T_2]$ und $[t_2\, T_1]$ mit der Polare von $[t_1\, t_2\, u]$ bezüglich ι. Diese Konstruktion von t ist aber, wie man leicht erkennt, vollkommen dual zur Ribaucourschen Konstruktion der Tangentialebenen einer Minimalfläche. Die Tangentialebene in t ist nach Nr. 2 die Mittenebene τ der Schmiegebenen von C_1 und C_2 in den Punkten t_1 und t_2.

Eine Fläche φ sei auf zwei Arten Mittenfläche von Torsenpaaren, deren Gratlinienpaare ihren Grundriß beziehungsweise in den

---

[1] Vgl. W. Blaschke u. K. Reidemeister, Vorl. über Differentialgeometrie, Bd. II, Berlin 1923, p. 86.

[2] Enzykl. math. Wissensch. III D 5 (v. Lilienthal), Nr. 30.

Kurven zweiter Klasse V und W haben. Der Grundriß der Asymptotenlinien von φ ist dann ein Kurvennetz, dessen beide durch einen Punkt x gehenden Linienelemente sowohl bezüglich V als bezüglich W konjugiert sind. Diese Linienelemente gehören daher jenen beiden Kurven der durch V und W bestimmten Schar (VW) an, die durch x gehen. Anders ausgedrückt: *Die Asymptotenlinien einer solchen Fläche φ haben als Grundriß die Kegelschnitte der linearen Schar (VW).*[1]

II. Teil.

9. Eine räumliche Punkttransformation.

Die Bildung der Punktmittenflächen einer festen analytischen Fläche Φ mit beliebigen andern analytischen Flächen ψ läßt sich als eine auf letztere ausgeübte Punkttransformation auffassen. Wir betrachten gleich eine noch etwas allgemeinere Transformation. Schneidet die durch einen Punkt x mit den rechtwinkligen Koordinaten $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ gelegte Gerade $[x\,u]$ die Fläche Φ in den (rellen oder komplexen) Punkten y_i $(i = 1, 2 \ldots)$, so sollen jene Punkte $x_i^\times$ auf $[x\,u]$, für welche die Teilverhältnisse $(x\,y_i\,x_i^\times)$ einen vorgegebenen Festwert $\mathfrak{d}$ haben, dem Punkt x als entsprechend zugeordnet werden. Stellt $\mathfrak{z} = \Phi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$, worin $\Phi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ eine im allgemeinen mehrdeutige analytische Funktion bezeichnet, die Fläche Φ dar, so gelten für die Koordinaten $\mathfrak{x}^\times, \mathfrak{y}^\times, \mathfrak{z}^\times$ der Punkte $x_i^\times$ die Gleichungen

$$\mathfrak{x}^\times = \mathfrak{x}, \quad \mathfrak{y}^\times = \mathfrak{y}, \quad \mathfrak{z}^\times = \frac{\mathfrak{z} - \mathfrak{d}\,\Phi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})}{1 - \mathfrak{d}}. \tag{1}$$

Sie definieren die Transformation $x \rightarrow x^\times$, die wir mit $\mathfrak{M}_\mathfrak{d}$ oder ausführlicher mit $\mathfrak{M}(\Phi, u, \mathfrak{d})$ bezeichnen und die $\mathfrak{d}$-*Spiegelung an* Φ, für $\mathfrak{d} = 2$ insbesondre *Spiegelung an* Φ, nennen wollen.[2] Die einer Kurve K oder einer Fläche ψ zufolge $\mathfrak{M}_\mathfrak{d}$ entsprechenden Gebilde sollen mit $K^\times$ beziehungsweise $\psi^\times$ bezeichnet werden. *Die Mittenfläche $\psi^\times$ von Φ und ψ entspricht ψ zufolge der Transformation $\mathfrak{M}_{-1}$.*

Schreibt man statt $\Phi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$, $\psi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$, $\psi^\times(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) \ldots$, kurz $\Phi, \psi, \psi^\times \ldots$ so folgt aus (1) die Gleichung

$$\psi^\times = \frac{\psi - \mathfrak{d}\,\Phi}{1 - \mathfrak{d}} \tag{2}$$

oder, wenn man $\dfrac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{d} - 1} = \mathfrak{v}$ setzt,

$$\psi^\times - \psi = \mathfrak{v}\,(\Phi - \psi). \tag{3}$$

---

[1] Die Gleichung von φ findet sich bei G. Scheffers, a. a. O., als Gleichung (15).

[2] Genauer müßte man von *Punktspiegelungen* an Φ sprechen, da es analoge *Ebenenspiegelungen* gibt. Letztere treten jedoch im folgenden nicht auf.

Sie sagt aus:

Satz 1: Trägt man auf jeder lotrechten Geraden die $\mathfrak{v}$-fachen Abstände jedes Φ angehörigen Punktes von sämtlichen Schnittpunkten der Geraden mit ψ von diesen Punkten aus ab, so gelangt man zu den Punkten der Fläche $\psi^\times$, die durch die Transformation $\mathfrak{M}_\mathfrak{d}$ aus ψ hervorgeht.

Die Fläche $\psi^\times$ geht stets durch die Schnittkurve von ψ und Φ.

Für die zweien Flächen ψ, ψ_1 entsprechenden Flächen $\psi^\times, \psi_1^\times$ folgt aus (2)

$$\psi_1^\times - \psi^\times = \frac{\psi_1 - \psi}{1 - \mathfrak{d}}. \tag{4}$$

Für $\psi_1 - \psi =$ konst. ist also auch $\psi_1^\times - \psi^\times$ konstant. Zweien durch lotrechte Schiebung auseinander hervorgehenden Flächen entsprechen mithin zufolge $\mathfrak{M}_\mathfrak{d}$ wieder zwei solche Flächen. Eine *Schiebschar von Flächen* soll aus einer Fläche durch sämtliche lotrechten Schiebungen entstanden sein. Dann kann man sagen: *$\mathfrak{M}_\mathfrak{d}$ führt jede Schiebschar von Flächen wieder in eine solche über.* Insbesondre führt $\mathfrak{M}_\mathfrak{d}$ jedes Büschel paralleler Ebenen in eine Schiebschar von Flächen über.

Nach Satz 1 geht die einer Ebene ε zufolge $\mathfrak{M}_\mathfrak{d}$ entsprechende Fläche $\varepsilon^\times$ aus Φ durch jene perspektive Affinität mit lotrechten Affinitätsstrahlen hervor, für die ε die Affinitätsebene und $\mathfrak{v}$ das Streckungsverhältnis ist. Diese zu $\mathfrak{M}_\mathfrak{d}$ *gehörigen Affinitäten bewirken eine Ver-$\mathfrak{v}$-fachung des Volumens.* Begrenzt die Fläche Φ ein endliches Volumen, so begrenzen also alle Flächen $\varepsilon^\times$ das $\mathfrak{v}$-fache dieses Volumens. Ist $\mathfrak{z} = \mathfrak{a}\,\mathfrak{x} + \mathfrak{b}\,\mathfrak{y} + \mathfrak{c}$ die Gleichung der Ebene so lautet nach (2) die Gleichung von $\varepsilon^\times$

$$\mathfrak{z} = \frac{\mathfrak{a}\,\mathfrak{x} + \mathfrak{b}\,\mathfrak{y} + \mathfrak{c}}{1 - \mathfrak{d}} + \mathfrak{v}\,\Phi. \tag{5}$$

Wie in Nr. 3 schließt man, daß diese Flächen $\varepsilon^\times$ durch affine Schiebungen auseinander hervorgehen. Die zweien Ebenen $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ entsprechenden Flächen $\varepsilon_1^\times, \varepsilon_2^\times$ schneiden sich nach einer in der Ebene $[\varepsilon_1\,\varepsilon_2\,u]$ liegenden Kurve. Wir halten fest:

Satz 2: Die Transformation $\mathfrak{M}_\mathfrak{d}$ führt die Ebenen in jene Flächen $\varepsilon^\times$ über, die aus Φ durch die ∞^3 perspektiven Affinitäten mit lotrechten Affinitätsstrahlen hervorgehen, deren Streckungsverhältnis $\mathfrak{v} = \mathfrak{d} : (\mathfrak{d} - 1)$ ist. Die Flächen $\varepsilon^\times$ gehen auseinander durch lotrechte affine Schiebungen hervor

Übt man auf die Ebenen des Raums die ∞^1 den möglichen Werten von $\mathfrak{d}$ entsprechenden Transformationen $\mathfrak{M}_\mathfrak{d}$ aus, so erhält man eine Mannigfaltigkeit (Φ) von ∞^4 Flächen, die aus Φ durch sämtliche perspektiven Affinitäten mit lotrechten Affinitätsstrahlen hervorgehen. Zu diesen Flächen gehört, für $\mathfrak{d} = \infty$, die Fläche Φ selbst (vgl. Gleichung [2]). Die erwähnten Affinitäten bilden eine viergliedrige Gruppe $\mathfrak{A}_4$. Bezeichnet nun $\bar{\Phi}$ eine von Φ verschiedene Fläche aus (Φ), so wird die Transformation $\mathfrak{M}(\bar{\Phi}, u, \mathfrak{d})$ eine Ebene in eine Fläche $\bar{\varepsilon}^{\times}$ überführen, die aus $\bar{\Phi}$ durch eine Affinität aus $\mathfrak{A}_4$ hervorgeht. Da aber $\bar{\Phi}$ aus Φ ebenfalls durch eine Affinität derselben Gruppe entstanden ist, so wird auch eine Affinität von $\mathfrak{A}_4$ die Fläche Φ in $\bar{\varepsilon}^{\times}$ überführen, d. h. $\bar{\varepsilon}^{\times}$ gehört ebenfalls zu den Flächen (Φ). *Die Transformation $\mathfrak{M}(\bar{\Phi}, u, \mathfrak{d})$ wird also alle Ebenen in ∞^3 Flächen der Mannigfaltigkeit (Φ) überführen, die auseinander durch lotrechte affine Schiebungen hervorgehen.*

Die Asymptotenlinien der Flächen (Φ) gehen aus denen von Φ durch die Affinitäten $\mathfrak{A}_4$ hervor, haben daher als Grundrisse dasselbe Kurvennetz[1] H', bestimmt durch die Differentialgleichung

$$R\,d\mathfrak{x}^2 + 2\,S\,d\mathfrak{x}\,d\mathfrak{y} + T\,d\mathfrak{y}^2 = 0, \qquad (6)$$

wenn $\Phi_{\mathfrak{x}\mathfrak{x}} = R$, $\Phi_{\mathfrak{x}\mathfrak{y}} = S$, $\Phi_{\mathfrak{y}\mathfrak{y}} = T$ gesetzt wird. Durch die in (6) linker Hand stehende Differentialform zweiten Grades wird der Ebene Π eine Maßbestimmung aufgeprägt. Das Φ-Längenquadrat des zum Punkt $x'(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ gehörigen Linienelements $d\mathfrak{x}, d\mathfrak{y}$ ist der Wert der Differentialform. Gleichung (6) definiert die Kurven von der Φ-Länge null. Zwei zu x' gehörige Linienelemente ds_1, ds_2 bilden mit den Elementen der Länge null ein Doppelverhältnis δ; $\mathfrak{k}\log\operatorname{nat}\delta$ ($\mathfrak{k}$ ein Festwert) soll der Φ-*Winkel* der beiden Linienelemente heißen. Für $\delta = -1$ nennen wir die Elemente Φ-*normal*. Zu einer Kurvenschar in Π gibt es immer eine Φ-normale.

Unter dem Φ-Winkel zweier von einem Punkt x des Raums ausgehenden Linienelementen verstehen wir den Φ-Winkel ihrer Grundrisse. Da je zwei in der Transformation $\mathfrak{M}_{\mathfrak{d}} = \mathfrak{M}(\Phi, u, \mathfrak{d})$ einander entsprechende Punkte denselben Grundriß haben, so schließen zwei von x ausgehende Linienelemente denselben Φ-Winkel ein, wie ihre zufolge $\mathfrak{M}_{\mathfrak{d}}$ entsprechenden Elemente. Dies läßt sich in der Form aussprechen:

Satz 3: Die Transformationen $\mathfrak{M}_{\mathfrak{d}}$ sind Φ-konform.

Auf jeder Fläche ψ gibt es ein Netz Φ-normaler Kurven. Bezeichnen nämlich r, s, t die zweiten partiellen Ableitungen von $\psi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$, so ist nach Gleichung (4) in Nr. 6

$$(Rs - Sr)\,d\mathfrak{x}^2 + (Rt - Tr)\,d\mathfrak{x}\,d\mathfrak{y} + (St - Ts)\,d\mathfrak{y}^2 = 0 \qquad (7)$$

die Differentialgleichung dieses Kurvennetzes. Führt $\mathfrak{M}_{\mathfrak{d}}$ die Fläche ψ in $\psi^{\times}$ über, so folgt aus Gleichung (2), daß zwischen den zweiten

[1] Wir sprechen von einem Kurvennetz, obgleich durch jeden Punkt x' in Π mehrere Kurvenpaare gehen, entsprechend den verschiedenen Flächenpunkten, die in x' ihren Grundriß haben. Wir sagen dann, die Grundrisse der Asymptotenlinien gehören verschiedenen Schichten an, und setzten fest, daß wir bei infinitesimalen Betrachtungen immer in derselben Schicht verbleiben.

partiellen Ableitungen $r^{\times}, s^{\times}, t^{\times}$ von $\varphi^{\times}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ und zwischen r, s, t die Beziehungen

$$(1-\mathfrak{d})\, r^{\times} = r - \mathfrak{d} R, \quad (1-\mathfrak{d})\, s^{\times} = s - \mathfrak{d} S, \quad (1-\mathfrak{d})\, t^{\times} = t - \mathfrak{d} T$$

bestehen. Die Gleichung (7) bleibt daher auch gültig, wenn man r, s, t durch $r^{\times}, s^{\times}, t^{\times}$ ersetzt. Dies gibt den

Satz 4: Die Φ-normal konjugierten Kurven einer Fläche sind invariant gegenüber den Transformationen $\mathfrak{M}(\Phi, u, \mathfrak{d})$.

Für $\mathfrak{d} = -1$ erhält man den Satz in Nr. 6.

Wählt man Φ als Torse, so geht jede Torse φ durch die Transformationen $\mathfrak{M}(\Phi, u, \mathfrak{d})$ in Flächen $\varphi^{\times}$ über, die ein Netz konjugierter ebener Kurven besitzen.

Berührt Φ die uneigentliche Ebene Ω in u, so führt jede Transformation $\mathfrak{M}_{\mathfrak{d}}$ die Ebenen in Flächen $\varepsilon^{\times}$ über, die Φ in u oskulieren. Denn in jeder Ebene durch u erleidet die Schnittkurve mit Φ eine affine Schiebung (Nr. 3), wird also in eine sie in u oskulierende Kurve übergeführt.

10. Die Grundgleichungen der (Φ)-Flächentheorie.

Zu jeder Mannigfaltigkeit von ∞^4 Flächen gehört eine darauf bezügliche Flächentheorie,[1] also auch zu der durch die Gleichung

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{a}\,\mathfrak{x} + \mathfrak{b}\,\mathfrak{y} + \mathfrak{c} + \mathfrak{v}\,\Phi, \tag{1}$$

worin $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{v}$ beliebige Konstanten bezeichnen, definierten Mannigfaltigkeit (Φ). Da diese Mannigfaltigkeit dual ist zur Mannigfaltigkeit (μ) zentrisch ähnlicher Flächen, so ließen sich die in R. M. aufgestellten Grundgleichungen der (μ)-Flächentheorie leicht dual übertragen. Ich will jedoch hier, von Gleichung (1) ausgehend, die Grundgleichungen der (Φ)-Flächentheorie unabhängig von jenen Betrachtungen ableiten. Denn dieser kürzere Weg ist ganz analog für die (μ)-Flächentheorie gangbar.[2]

---

[1] Vgl. R. M., insbesondre Nr.

[2] Als Koordinaten einer orientierten Ebene sollen die Richtungskosinus $\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2, \mathfrak{u}_3$ ihrer Normalen und der Abstand $\mathfrak{w}$ der Ebene vom Ursprung gewählt werden. Dann ist

$$\mathfrak{w} = \mathfrak{a}_1\mathfrak{u}_1 + \mathfrak{a}_2\mathfrak{u}_2 + \mathfrak{a}_3\mathfrak{u}_3 \equiv a\,(\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2, \mathfrak{u}_3)$$

Gleichung des Punktes a mit den Koordinaten $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$ und

$$\mathfrak{w} = \mu\,(\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2, \mathfrak{u}_3) \text{ mit } \mathfrak{u}_1^2 + \mathfrak{u}_2^2 + \mathfrak{u}_3^2 = 1$$

die Gleichung einer Fläche. Die partiellen Ableitungen von μ nach den $\mathfrak{u}_i$ sind die rechtwinkligen Koordinaten des Berührungspunktes der Tangentialebene, nämlich $\mathfrak{x} = \mu_{\mathfrak{u}_1}$, $\mathfrak{y} = \mu_{\mathfrak{u}_2}$, $\mathfrak{z} = \mu_{\mathfrak{u}_3}$. Da $\mu - a$ die Abstände der Tangentialebenen der Fläche μ vom Punkt a angibt, so stellt $\mathfrak{w} = \mathfrak{t}\,(\mu - a)$ die Gleichung der Fläche dar, die aus μ durch die Streckung $\mathfrak{t}$ vom Punkt a aus hervorgeht. Setzt man in dieser Gleichung für a alle Punkte des Raums und läßt $\mathfrak{t}$ alle reellen Zahlwerte durchlaufen, so erhält man die Mannigfaltigkeit (μ) der ∞^4 zu zentrisch ähnlichen Flächen ebenfalls in der Form

$$\mathfrak{w} = \mathfrak{a}\,\mathfrak{u}_1 + \mathfrak{b}\,\mathfrak{u}_2 + \mathfrak{c}\,\mathfrak{u}_3 + \mathfrak{t}\,\mu(\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2, \mathfrak{u}_3) \qquad (\text{mit } \mathfrak{u}_1^2 + \mathfrak{u}_2^2 + \mathfrak{u}_3^2 = 1)$$

dargestellt.

Bezeichnet man die ersten und zweiten partiellen Ableitungen von $\Phi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ in üblicher Weise mit P, Q, beziehungsweise R, S, T, so folgt aus (1) durch Differentiation

$$\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial \mathfrak{x}} = \mathfrak{a} + \mathfrak{v} P, \qquad \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial \mathfrak{y}} = \mathfrak{b} + \mathfrak{v} Q \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{z}}{\partial \mathfrak{x}^2} = \mathfrak{v} R, \qquad \frac{\partial^2 \mathfrak{z}}{\partial \mathfrak{x}\, \partial \mathfrak{y}} = \mathfrak{v} S, \qquad \frac{\partial^2 \mathfrak{z}}{\partial \mathfrak{y}^2} = \mathfrak{v} T \tag{3}$$

Ist nun

$$\mathfrak{z} = \phi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$$

die Gleichung der zu untersuchenden Fläche, und bezeichnet man die ersten und zweiten partiellen Ableitungen von $\phi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ analog mit p, q, r, s, t, so lauten die Bedingungsgleichungen dafür, daß die Fläche ϕ im Punkt $x(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ von einer Fläche aus (Φ) berührt werde,

$$\phi = \mathfrak{a}\,\mathfrak{x} + \mathfrak{b}\,\mathfrak{y} + \mathfrak{c} + \mathfrak{v}\,\Phi, \tag{4}$$

$$p = \mathfrak{a} + \mathfrak{v} P, \quad q = \mathfrak{b} + \mathfrak{v} Q. \tag{5}$$

Unter den ∞^1 Flächen aus (Φ), die ϕ in x berühren, gibt es eine endliche Anzahl, die ϕ noch in einem Nachbarpunkt, also ϕ in x stationär berühren. Wir nennen sie die zum Punkt x von ϕ gehörigen *Haupt-Φ-Flächen.* Für sie müssen noch die durch totale Differentiation der Gleichungen (5) hervorgehenden Gleichungen bestehen. Dabei ist $\mathfrak{y}$ als Funktion von $\mathfrak{x}$ zu betrachten. Setzt man $d\mathfrak{y}/d\mathfrak{x} = \mathfrak{y}'$, so lauten die neuen Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} r + s\,\mathfrak{y}' - \mathfrak{v}(R + S\,\mathfrak{y}') = 0, \\ s + t\,\mathfrak{y}' - \mathfrak{v}(S + T\,\mathfrak{y}') = 0. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Aus ihnen und den Gleichungen (4), (5) lassen sich die fünf Größen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{v}, \mathfrak{y}'$ berechnen. $\mathfrak{y}'$ bestimmt die Richtung der Linienelemente, längs denen die Haupt-Φ-Flächen die Fläche ϕ stationär berühren. Die aus diesen Linienelementen gebildeten Integralkurven sollen die *(Φ)-Krümmungslinien* der Fläche ϕ heißen. Durch Elimination von $\mathfrak{v}$ aus den Gleichungen (6) erhält man

$$(R + S\,\mathfrak{y}')(s + t\,\mathfrak{y}') - (S + T\,\mathfrak{y}')(r + s\,\mathfrak{y}') = 0$$

oder

$$(St - Ts)\,\mathfrak{y}'^2 + (Rt - Tr)\,\mathfrak{y}' + (Rs - Sr) = 0 \tag{7}$$

als *Differentialgleichung der (Φ)-Krümmungslinien der Fläche.* Aus der Identität dieser Gleichung mit Gleichung (7) in Nr. 9 folgt der

Satz 1: Die (Φ)-Krümmungslinien einer Fläche sind deren Φ-normal konjugierte Kurven.

Auf den Flächen (Φ) sind alle Kurven (Φ)-Krümmungslinien.

Auf der Hüllfläche einer Schar von ∞^1 Flächen aus (Φ) bilden die Charakteristiken die eine Schar von (Φ)-Krümmungslinien.[1]

Durch Elimination von $\mathfrak{v}'$ aus den Gleichungen (6) erhält man die Gleichung

$$(r-\mathfrak{v}R)(t-\mathfrak{v}T)-(s-\mathfrak{v}S)^2=0$$

oder

$$(RT-S^2)\mathfrak{v}^2-(Rt-2Ss+Tr)\mathfrak{v}+(rt-s^2)=0 \qquad (8)$$

zur Berechnung von $\mathfrak{v}$. Wir setzen $\mathfrak{v}=1/\mathfrak{r}$ und nennen $\mathfrak{r}$ den *Radius* der betreffenden Fläche aus (Φ). Die aus (8) folgenden Radien $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2$ der beiden zur Stelle x von ϕ gehörigen Hauptflächen sollen die *(Φ)-Krümmungsradien von ϕ* an dieser Stelle heißen. Aus (8) folgen für sie die Gleichungen

$$\frac{1}{\mathfrak{r}_1}+\frac{1}{\mathfrak{r}_2}=\frac{Rt-2Ss+Tr}{RT-S^2}, \qquad (9\,a)$$

$$\frac{1}{\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2}=\frac{rt-s^2}{RT-S^2}. \qquad (9\,b)$$

$1/\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2$ nennen wir die *totale (Φ)-Krümmung* und $\left(\frac{1}{\mathfrak{r}_1}+\frac{1}{\mathfrak{r}_2}\right)$ die *mittlere (Φ)-Krümmung* der Fläche ϕ an der Stelle x. Für Φ selbst sind diese Krümmungen $=1$.

Die Gleichungen (7), (8), (9) stimmen mit den analogen der $(\mathfrak{U})$-Flächentheorie völlig überein. (Vgl. R. M., p. 16 f.)

Hat man aus (8) für einen bestimmten Punkt von ϕ die beiden Werte für $\mathfrak{v}$ gefunden, so liefern die Gleichungen (2) die Werte für $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, schließlich (4) die zugehörigen Werte von $\mathfrak{c}$. Damit sind dann die zu einem Punkt von ϕ gehörigen Haupt-Φ-Flächen gefunden.

Wird eine eigentliche Ebene γ der Fläche Φ als *Zentralebene* zugeordnet, so führen die Affinitäten, welche Φ in die Haupt-Φ-Flächen einer Fläche ϕ überführen, γ in die Zentralebenen der Hauptflächen über. Die Hüllfläche $\bar{\phi}$ dieser Zentralebenen — die *(Φ)-Zentralfläche* von ϕ — bildet ein (duales) Seitenstück zur Zentralfläche der gewöhnlichen Flächentheorie. Die ∞^1 die Fläche ϕ in einem Punkt x berührenden Flächen (derselben Schicht) aus (Φ) haben Zentralebenen, die ein Büschel bilden. Die Scheitelkanten aller solchen Büschel erfüllen eine Strahlkongruenz, deren Brennfläche $\bar{\phi}$ ist.

Interesse bietet auch die Hüllfläche der Affinitätsebenen jener Affinitäten aus $\mathfrak{A}_4$, die Φ in die Hauptflächen von ϕ überführen.

Aus (9 *b*) folgt, daß die Torsen auch die (Φ)-Krümmung null haben, wofern nicht Φ selbst eine Torse ist.

(9 *b*) und (9 *a*) geben ferner die Differentialgleichungen der Flächen konstanter (Φ)-Krümmung oder konstanter mittlerer (Φ)-Krümmung.

---

[1] Für eine Kongruenz von Flächen aus (Φ) gelten analoge Sätze zu denen Ribaucour über Kugelkongruenzen. Vgl. z. B. G. Darboux, Surfaces, Nr. 474.

11. (Φ)-Minimalflächen.

In Übereinstimmung mit R. M., p. 15, *nennen wir eine Fläche φ eine (Φ)-Minimalfläche, wenn in jedem Punkt x von φ deren Haupttangenten von den Haupttangenten der zu x gehörigen Haupt-(Φ)-Flächen harmonisch getrennt werden.* Da

$$r\,d\mathfrak{x}^2+2\,s\,d\mathfrak{x}\,d\mathfrak{y}+t\,d\mathfrak{y}^2=0$$

die Haupttangentenrichtungen von φ und zufolge Nr. 9, Gleichung (1)

$$R\,d\mathfrak{x}^2+2\,S\,d\mathfrak{x}\,d\mathfrak{y}+T\,d\mathfrak{y}^2=0$$

die Haupttangentenrichtungen aller Flächen (Φ), also auch der Hauptflächen bestimmt, so ist nach Nr. 6, Gleichung (5)

$$Rt-2\,Ss+Tr=0 \qquad (1)$$

die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Fläche eine (Φ)-Minimalfläche ist. Aus der symmetrischen Gestalt dieser Gleichung folgt: Ist φ eine (Φ)-Minimalfläche, so ist Φ eine (φ)-Minimalfläche. φ und Φ stehen dann in der Beziehung, daß die lotrechte Projektion der Asymptotenlinien der einen Fläche auf die andre Fläche hier ein konjugiertes Kurvennetz bilden. Man kann auch sagen: *Auf einer (Φ)-Minimalfläche sind die Asymptotenlinien Φ-normal.* Ein solches Flächenpaar bildet das duale Gegenstück zu L. Bianchis assoziierten Flächen (R. M., p. 5). Auf die Auffindung solcher Flächenpaare hat G. Darboux, Surfaces IV, Nr. 857, das Problem der infinitesimalen Verbiegung einer Fläche zurückgeführt.

Die Vergleichung von (1) mit Gleichung (9 *a*) in Nr. 10 gibt den

Satz 1. Ist Φ keine Torse, so sind die (Φ)-Minimalflächen identisch mit den Flächen der mittleren (Φ)-Krümmung null.

Gleichung (1) ist die Differentialgleichung der (Φ)-Minimalflächen; in ihr sind die Koeffizienten R, S, T durch die Fläche Φ bestimmte Funktionen von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$. Die Charakteristiken dieser Differentialgleichung sind bekanntlich gegeben durch die Gleichung

$$T\,d\mathfrak{y}^2+2\,S\,d\mathfrak{y}\,d\mathfrak{x}+R\,d\mathfrak{x}^2=0,$$

sind also Kurven, deren Grundrisse sich mit denen der Asymptotenlinien von Φ decken.

Genügen die Funktionen $\varphi_1(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ und $\varphi_2(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ der Gleichung (1), so genügt ihr auch $^1/_2(\varphi_1+\varphi_2)$. Daraus folgt der zum Satz 4 in R. M. duale

Satz 2: Die Mittenfläche zweier (Φ)-Minimalflächen ist wieder eine (Φ)-Minimalfläche.

Die Transformation $\mathfrak{M}_\mathfrak{d}=(\Phi, u, \mathfrak{d})$ führt eine Fläche φ nach Nr. 9, Gleichung (2) in die Fläche

$$\varphi^{\times} = \frac{\varphi - \mathfrak{d}\,\Phi}{1-\mathfrak{d}} = \mathfrak{d}_1\,\varphi + \mathfrak{v}\,\Phi \qquad \left(\mathfrak{d}_1 = \frac{1}{1-\mathfrak{d}}\right)$$

oder. Wegen $r^{\times} = \mathfrak{d}_1\, r + \mathfrak{v}\, R$, $s^{\times} = \mathfrak{d}_1\, s + \mathfrak{v}\, S$, $t^{\times} = \mathfrak{d}_1\, t + \mathfrak{v}\, T$ hat man dann

$$R\,t^{\times} - 2\,S\,s^{\times} + T\,r^{\times} = \mathfrak{d}_1\,(R\,t - 2\,S\,s + T\,r) + 2\,\mathfrak{v}\,(R\,T - S^2). \qquad (2)$$

Ist nun φ eine (Φ)-Minimalfläche, verschwindet also in (2) die Klammer rechter Hand, so wird

$$\frac{R\,t^{\times} - 2\,S\,s^{\times} + T\,r^{\times}}{R\,T - S^2} = 2\,\mathfrak{v}.$$

Dies sagt aus:

Satz 3: *Die Transformation $\mathfrak{M}_{\mathfrak{d}}$ führt jede (Φ)-Minimalfläche in eine Fläche mit der konstanten mittleren (Φ)-Krümmung $\mathfrak{v} = \mathfrak{d} : (\mathfrak{d} - 1)$ über*

Umgekehrt läßt sich jede Fläche von konstanter mittlerer (Φ)-Krümmung $\mathfrak{k}$ durch die Transformation $\mathfrak{M}_{\mathfrak{k}}$ in eine (Φ)-Minimalfläche überführen.

Aus Gleichung (2) folgt ferner, daß eine (Φ)-Minimalfläche φ durch eine Transformation $\mathfrak{M}_{\mathfrak{d}}$ $(\mathfrak{d} \neq 0)$ dann und nur dann wieder in eine (Φ)-Minimalfläche $\varphi^{\times}$ übergeht, wenn $R\,T - S^2 = 0$, d. h. Φ eine Torse ist. Gemäß Definition *sind die Minimalflächen bezüglich einer Torsenmannigfaltigkeit (Φ) Regelflächen, deren Erzeugende in den lotrechten Ebenen durch die Erzeugenden von Φ liegen. Nur sie gehen also durch die Transformationen $\mathfrak{M}_{\mathfrak{d}}$ wieder in (Φ)-Minimalflächen über*

Die obigen Ausdrücke für $r^{\times}, s^{\times}, t^{\times}$ geben ferner die Gleichung

$$r^{\times}\,t^{\times} - s^{\times 2} = \mathfrak{d}_1\,\mathfrak{v}\,(R\,t - 2\,S\,s + T\,r) + \mathfrak{d}_1^2\,(r\,t - s^2) + \mathfrak{v}^2\,(R\,T - S^2). \quad (3)$$

Eliminiert man aus ihr und (2) das erste Glied rechter Hand und dividiert durch $R\,T - S^2$, so folgt

$$\frac{r^{\times}\,t^{\times} - s^{\times 2}}{R\,T - S^2} - \mathfrak{v}\,\frac{R\,t^{\times} - 2\,S\,s^{\times} + T\,r^{\times}}{R\,T - S^2} = \mathfrak{d}_1^2\,\frac{r\,t - s^2}{R\,T - S^2} - \mathfrak{v}^2. \qquad (4)$$

Für eine Fläche φ konstanter positiver totaler (Φ)-Krümmung kann $\mathfrak{v}$ stets so gewählt werden, daß die rechte Seite verschwindet, mithin

$$\left(\frac{1}{r_1^{\times}} + \frac{1}{r_2^{\times}}\right) \frac{1}{r_1^{\times}\,r_2^{\times}} = r_1^{\times} + r_2^{\times} = \frac{1}{\mathfrak{v}}$$

wird. Daher: *Eine Fläche konstanter positiver totaler (Φ)-Krümmung läßt sich durch eine Transformation $\mathfrak{M}_{\mathfrak{d}}$ stets in eine Fläche überführen, für die die Summe der beiden (Φ)-Krümmungsradien konstant ist.*

12. (Φ)-Flächentheorie für Φ als Fläche zweiten Grades.

Wählt man Φ als Fläche zweiten Grades, so umhüllen die Grundrisse ihrer Erzeugenden eine Kurve zweiter Klasse H. Das Kurvennetz in Π, das den Grundriß der Asymptotenlinien der Fläche (Φ) bildet, besteht jetzt aus den Tangenten von H. Die im Sinne von Nr. 9 der Ebene Π aufgeprägte Maßbestimmung wird im vorliegenden Fall die durch H bestimmte Cayley'sche Es bezeichne den lotrechten Zylinder durch H. Da sich einem Zylinder zweiter Klasse ∞^1 Flächen zweiten Grades einschreiben lassen, die untereinander perspektiv affin sind, so bilden die eingeschriebenen Flächen zweiten Grades schon die Mannigfaltigkeit (Φ), *die daher durch Wahl von H bestimmt ist.*

Die (Φ)-Krümmungslinien einer Fläche φ sind jene konjugierten Kurven auf ihr, deren Grundrisse ein H-normales Netz bilden. Für eine Fläche zweiten Grades φ, die als scheinbaren Umriß in Π eine Kurve zweiter Klasse Q hat, werden demnach die (Φ)-Krümmungslinien Kurven vierter Ordnung sein, deren Grundrisse die Kegelschnitte der durch H und Q bestimmten linearen Schar sind.

(Φ)-Minimalflächen sind solche, deren Asymptotenlinien im Grundriß ein H-normales Netz bilden. (Φ)-*Minimaltorsen sind* also nach Nr. 11 *solche Torsen*, deren Erzeugenden sich im Grundriß als Tangenten von H darstellen, *deren Gratlinien* mithin *dem Zylinder angehören.* Die Tangentialebenen von insbesondre sind (Φ)-Minimalebenen.

Nach Nr. 11, Satz 2, ist die Mittenfläche zweier (Φ)-Minimaltorsen eine (Φ)-Minimalfläche φ. Umgekehrt läßt sich jede solche Fläche als Mittenfläche zweier (Φ)-Minimaltorsen darstellen. Denn da ihre Asymptotenlinien sich im Grundriß als H-normales Netz darstellen, so gibt es auf ihr ein Netz konjugierter Kurven, die die Tangenten von H zu Grundrissen haben. Jede solche Fläche ist aber Mittenfläche zweier (Φ)-Minimaltorsen.[1] Unter Bezugnahme auf Nr. 8 hat man daher den

Satz 1 Für Φ als Fläche zweiter Ordnung sind die (Φ)-Minimalflächen identisch mit den zu den gewöhnlichen Minimalflächen dualen Flächen.

Eine kollineare Transformation, die das Strahlbündel ... invariant läßt, führt die Mannigfaltigkeit (Φ) in eine analoge Mannigfaltigkeit (Φ') und die (Φ)-Minimalflächen in die (Φ')-Minimalflächen über. Bei einer rechnerischen Untersuchung genügt es daher, jene Fälle zu betrachten, die hinsichtlich dieser kollinearen Transformationen verschieden sind. Wir wählen z. B. Φ als die durch die Gleichung

$$\mathfrak{m}\,\mathfrak{x}^2+\mathfrak{n}\,\mathfrak{y}^2+\mathfrak{p}\,\mathfrak{z}^2-\mathfrak{q}=0 \qquad (1$$

[1] Dual zur bekannten Tatsache, daß jede Fläche mit einem Netz konjugierter gewöhnlicher Minimalkurven Sehnenmittenfläche zweier Minimalkurven ist.

definierte Mittelpunktsfläche zweiten Grades. Durch partielles Differentiieren erhält man, wenn wieder P, Q die ersten und R, S, T die zweiten partiellen Ableitungen von $\mathfrak{z}$ nach $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ bezeichnen,

$$P = -\frac{\mathfrak{m}\,\mathfrak{x}}{\mathfrak{p}\,\mathfrak{z}} \quad Q = -\frac{\mathfrak{n}\,\mathfrak{y}}{\mathfrak{p}\,\mathfrak{z}} \tag{2}$$

$$R = \mathfrak{m}\,\frac{\mathfrak{n}\,\mathfrak{y}^2-\mathfrak{q}}{\mathfrak{p}^2\,\mathfrak{z}^3} \quad S = -\frac{\mathfrak{m}\,\mathfrak{n}\,\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}}{\mathfrak{p}^2\,\mathfrak{z}^3}, \quad T = \mathfrak{n}\,\frac{\mathfrak{m}\,\mathfrak{x}^2-\mathfrak{q}}{\mathfrak{p}^2\,\mathfrak{z}^3} \tag{3}$$

worin für $\mathfrak{z}$ der aus Gleichung (1) sich ergebende Ausdruck in $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ zu setzen ist. Die Differentialgleichung der zugehörigen Minimalflächen z. B. lautet nach Nr. 11, Gleichung (1)

$$\mathfrak{n}\,(\mathfrak{m}\,\mathfrak{x}^2-\mathfrak{q})\,r+2\,\mathfrak{m}\,\mathfrak{n}\,\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}\,s+\mathfrak{m}\,(\mathfrak{n}\,\mathfrak{y}^2-\mathfrak{q})\,t = 0. \tag{4}$$

Die Charakteristiken dieser Differentialgleichung müssen nach obigem im Grundriß die Tangenten des Kegelschnittes H mit der Gleichung $\mathfrak{m}\,\mathfrak{x}^2+\mathfrak{n}\,\mathfrak{y}^2-\mathfrak{q} = 0$ sein. In der Tat lautet die Charakteristikengleichung

$$\mathfrak{n}\,(\mathfrak{m}\,\mathfrak{x}^2-\mathfrak{q})\,\mathfrak{y}'^2-2\,\mathfrak{m}\,\mathfrak{n}\,\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}\,\mathfrak{y}'+\mathfrak{m}\,(\mathfrak{n}\,\mathfrak{y}^2-\mathfrak{q}) = 0$$

oder

$$\mathfrak{m}\,\mathfrak{n}\,(\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}'-\mathfrak{y})^2-\mathfrak{q}\,(\mathfrak{n}\,\mathfrak{y}'^2+\mathfrak{m}) = 0,$$

die mit den beiden Clairaut'schen Gleichungen

$$\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}'-\mathfrak{y}\pm\sqrt{\frac{\mathfrak{q}\,(\mathfrak{n}\,\mathfrak{y}'^2+\mathfrak{m})}{\mathfrak{m}\,\mathfrak{n}}} = 0$$

identisch ist, deren Integralkurven die Tangenten von H sind.

Wählt man Φ als Ellipsoid, so hat jede der Flächen (Φ), die aus den Ebenen des Raums durch die Transformation $\mathfrak{M}_\mathfrak{v}$ hervorgehen, das $\mathfrak{v}$-fache Volumen von Φ. In den Gleichungen (9 *a*) und (9 *b*) von Nr. 10 bedeuten also $1/\mathfrak{r}_1$ und $1/\mathfrak{r}_2$ die durch das Volumen von Φ gemessenen Volumen der betreffenden Hauptflächen. Daraus folgt z. B. der

Satz 2: Bezeichnet (Φ) *die Mannigfaltigkeit der einem lotrechten elliptischen Zylinder eingeschriebenen Ellipsoide, dann ist eine Fläche* ϕ*, für welche die beiden sie in einem Punkt stationär berührenden Flächen aus* (Φ) *stets entgegengesetzt gleiche Volumen haben, eine* (Φ)*-Minimalfläche.*

Aus den Gleichungen (3) folgt

$$R\,T-S^2 = \frac{\mathfrak{m}\,\mathfrak{n}\,\mathfrak{q}}{\mathfrak{p}^3\,\mathfrak{z}^4}. \tag{5}$$

Diese Größe ist also proportional der (-4)-ten Potenz der zu $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ gehörigen Applikate von Φ. Wegen $\mathfrak{p}^2\,\mathfrak{z}^4 = (\mathfrak{q}-\mathfrak{m}\,\mathfrak{x}^2-\mathfrak{n}\,\mathfrak{y}^2)^2$ lautet die

12. (Φ)-Flächentheorie für Φ als Fläche zweiten Grades.

Wählt man Φ als Fläche zweiten Grades, so umhüllen die Grundrisse ihrer Erzeugenden eine Kurve zweiter Klasse H. Das Kurvennetz in Π, das den Grundriß der Asymptotenlinien der Fläche (Φ) bildet, besteht jetzt aus den Tangenten von H. Die im Sinne von Nr. 9 der Ebene Π aufgeprägte Maßbestimmung wird im vorliegenden Fall die durch H bestimmte Cayley'sche Es bezeichne den lotrechten Zylinder durch H. Da sich einem Zylinder zweiter Klasse ∞^1 Flächen zweiten Grades einschreiben lassen, die untereinander perspektiv affin sind, so bilden die eingeschriebenen Flächen zweiten Grades schon die Mannigfaltigkeit (Φ), *die daher durch Wahl von H bestimmt ist.*

Die (Φ)-Krümmungslinien einer Fläche φ sind jene konjugierten Kurven auf ihr, deren Grundrisse ein H-normales Netz bilden. Für eine Fläche zweiten Grades φ, die als scheinbaren Umriß in Π eine Kurve zweiter Klasse Q hat, werden demnach die (Φ)-Krümmungslinien Kurven vierter Ordnung sein, deren Grundrisse die Kegelschnitte der durch H und Q bestimmten linearen Schar sind.

(Φ)-Minimalflächen sind solche, deren Asymptotenlinien im Grundriß ein H-normales Netz bilden. (Φ)-*Minimaltorsen sind* also nach Nr. 11 *solche Torsen,* deren Erzeugenden sich im Grundriß als Tangenten von H darstellen, *deren Gratlinien* mithin *dem Zylinder angehören.* Die Tangentialebenen von insbesondre sind (Φ)-Minimalebenen.

Nach Nr. 11, Satz 2, ist die Mittenfläche zweier (Φ)-Minimaltorsen eine (Φ)-Minimalfläche φ. Umgekehrt läßt sich jede solche Fläche als Mittenfläche zweier (Φ)-Minimaltorsen darstellen. Denn da ihre Asymptotenlinien sich im Grundriß als H-normales Netz darstellen, so gibt es auf ihr ein Netz konjugierter Kurven, die die Tangenten von H zu Grundrissen haben. Jede solche Fläche ist aber Mittenfläche zweier (Φ)-Minimaltorsen.[1] Unter Bezugnahme auf Nr. 8 hat man daher den

Satz 1 Für Φ als Fläche zweiter Ordnung sind die (Φ)-Minimalflächen identisch mit den zu den gewöhnlichen Minimalflächen dualen Flächen.

Eine kollineare Transformation, die das Strahlbündel O invariant läßt, führt die Mannigfaltigkeit (Φ) in eine analoge Mannigfaltigkeit (Φ') und die (Φ)-Minimalflächen in die (Φ')-Minimalflächen über. Bei einer rechnerischen Untersuchung genügt es daher, jene Fälle zu betrachten, die hinsichtlich dieser kollinearen Transformationen verschieden sind. Wir wählen z. B. Φ als die durch die Gleichung

$$\mathfrak{m}\,\mathfrak{x}^2+\mathfrak{n}\,\mathfrak{y}^2+\mathfrak{p}\,\mathfrak{z}^2-\mathfrak{q}=0 \qquad (1$$

---

[1] Dual zur bekannten Tatsache, daß jede Fläche mit einem Netz konjugierter gewöhnlicher Minimalkurven Sehnenmittenfläche zweier Minimalkurven ist.

definierte Mittelpunktsfläche zweiten Grades. Durch partielles Differentiieren erhält man, wenn wieder P, Q die ersten und R, S, T die zweiten partiellen Ableitungen von $\mathfrak{z}$ nach $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ bezeichnen,

$$P = -\frac{\mathfrak{m}\,\mathfrak{x}}{\mathfrak{p}\,\mathfrak{z}} \quad Q = -\frac{\mathfrak{n}\,\mathfrak{y}}{\mathfrak{p}\,\mathfrak{z}} \tag{2}$$

$$R = \mathfrak{m}\,\frac{\mathfrak{n}\,\mathfrak{y}^2-\mathfrak{q}}{\mathfrak{p}^2\,\mathfrak{z}^3},\; S = -\frac{\mathfrak{m}\,\mathfrak{n}\,\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}}{\mathfrak{p}^2\,\mathfrak{z}^3} \quad T = \mathfrak{n}\,\frac{\mathfrak{m}\,\mathfrak{x}^2-\mathfrak{q}}{\mathfrak{p}^2\,\mathfrak{z}^3} \tag{3}$$

worin für $\mathfrak{z}$ der aus Gleichung (1) sich ergebende Ausdruck in $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ zu setzen ist. Die Differentialgleichung der zugehörigen Minimalflächen z. B. lautet nach Nr. 11, Gleichung (1)

$$\mathfrak{n}\,(\mathfrak{m}\,\mathfrak{x}^2-\mathfrak{q})\,r+2\,\mathfrak{m}\,\mathfrak{n}\,\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}\,s+\mathfrak{m}\,(\mathfrak{n}\,\mathfrak{y}^2-\mathfrak{q})\,t = 0. \tag{4}$$

Die Charakteristiken dieser Differentialgleichung müssen nach obigem im Grundriß die Tangenten des Kegelschnittes H mit der Gleichung $\mathfrak{m}\,\mathfrak{x}^2+\mathfrak{n}\,\mathfrak{y}^2-\mathfrak{q} = 0$ sein. In der Tat lautet die Charakteristikengleichung

$$\mathfrak{n}\,(\mathfrak{m}\,\mathfrak{x}^2-\mathfrak{q})\,\mathfrak{y}'^2-2\,\mathfrak{m}\,\mathfrak{n}\,\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}\,\mathfrak{y}'+\mathfrak{m}\,(\mathfrak{n}\,\mathfrak{y}^2-\mathfrak{q}) = 0$$

oder

$$\mathfrak{m}\,\mathfrak{n}\,(\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}'-\mathfrak{y})^2-\mathfrak{q}\,(\mathfrak{n}\,\mathfrak{y}'^2+\mathfrak{m}) = 0,$$

die mit den beiden Clairaut'schen Gleichungen

$$\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}'-\mathfrak{y}\pm\sqrt{\frac{\mathfrak{q}\,(\mathfrak{n}\,\mathfrak{y}'^2+\mathfrak{m})}{\mathfrak{m}\,\mathfrak{n}}} = 0$$

identisch ist, deren Integralkurven die Tangenten von H sind.

Wählt man Φ als Ellipsoid, so hat jede der Flächen (Φ), die aus den Ebenen des Raums durch die Transformation $\mathfrak{M}_{\mathfrak{v}}$ hervorgehen, das $\mathfrak{v}$-fache Volumen von Φ. In den Gleichungen (9 *a*) und (9 *b*) von Nr. 10 bedeuten also $1/\mathfrak{r}_1$ und $1/\mathfrak{r}_2$ die durch das Volumen von Φ gemessenen Volumen der betreffenden Hauptflächen. Daraus folgt z. B. der

Satz 2: Bezeichnet (Φ) *die Mannigfaltigkeit der einem lotrechten elliptischen Zylinder eingeschriebenen Ellipsoide, dann ist eine Fläche* ϕ, *für welche die beiden sie in einem Punkt stationär berührenden Flächen aus* (Φ) *stets entgegengesetzt gleiche Volumen haben, eine* (Φ)*-Minimalfläche.*

Aus den Gleichungen (3) folgt

$$R\,T-S^2 = \frac{\mathfrak{m}\,\mathfrak{n}\,\mathfrak{q}}{\mathfrak{p}^3\,\mathfrak{z}^4}. \tag{5}$$

Diese Größe ist also proportional der (-4)-ten Potenz der zu $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ gehörigen Applikate von Φ. Wegen $\mathfrak{p}^2\,\mathfrak{z}^4 = (\mathfrak{q}-\mathfrak{m}\,\mathfrak{x}^2-\mathfrak{n}\,\mathfrak{y}^2)^2$ lautet die

Differentialgleichung der Flächen von konstanter (Φ)-Krümmung, wenn man $\mathfrak{m}\,\mathfrak{n}\,\mathfrak{q}\,\mathfrak{k}:\mathfrak{p}=\mathfrak{k}'$ setzt,

$$r\,t-s^2-\mathfrak{k}'\,(\mathfrak{q}-\mathfrak{m}\,\mathfrak{x}^2-\mathfrak{n}\,\mathfrak{y}^2)^2=0.$$

Für $\mathfrak{q}=0$ stellt (1) einen Kegel zweiter Ordnung dar, dessen Achsen in den Koordinatenachsen liegen. Der Kegelschnitt H wird jetzt zum Geradenpaar $\mathfrak{m}\,\mathfrak{x}^2+\mathfrak{n}\,\mathfrak{y}^2=0$. Die Mannigfaltigkeit (Φ) besteht aus den Kegeln zweiter Ordnung, die die lotrechten Ebenen durch dieses Geradenpaar zu Tangentialebenen haben. Die Kegelspitzen gehören der Z-Achse an. Die Gleichung der auf diese Kegelmannigfaltigkeit bezüglichen Minimalflächen lautet nach (4)

$$\mathfrak{x}^2\,r+2\,\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}\,s+\mathfrak{y}^2\,t=0.$$

Aus der Bemerkung in Nr. 11 über die Minimalflächen bezüglich einer Torsenmannigfaltigkeit (Φ) schließt man sogleich, daß die Integralflächen dieser Gleichung Regelflächen mit der Z-Achse als Leitlinie sein müssen. In der Tat ergibt sich als allgemeines Integral dieser Gleichung[1]

$$\mathfrak{z}=\varphi_1\left(\frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{z}}\right)+\mathfrak{x}\,\varphi_2\left(\frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{z}}\right),$$

wo φ_1 und φ_2 willkürliche Funktionen bedeuten.

Die Krümmungslinien einer Fläche ϕ bezüglich dieser Kegelmannigfaltigkeit sind die Schnittkurven mit den Ebenen durch die Achse Z sowie deren konjugierte Kurven, also die Berührungskurven von ϕ mit den aus den Punkten von Z umschriebenen Kegeln. Die Grundrisse letzterer Kurven genügen nach (7) in Nr. 10 der Differentialgleichung

$$(\mathfrak{x}\,s+\mathfrak{y}\,t)\,\mathfrak{y}'+\mathfrak{x}\,r+\mathfrak{y}\,s=0.$$

Die Gleichung (8) von Nr. 10 lautet hier, wegen $R\,T-S^2=0$,

$$-\mathfrak{m}\,\mathfrak{n}\,(\mathfrak{y}^2\,t+2\,\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}\,s+\mathfrak{x}^2\,r)\,\mathfrak{v}+\mathfrak{p}^2\,\mathfrak{z}^3\,(r\,t-s^2)=0,$$

worin $\mathfrak{p}\,\mathfrak{z}^2=-(\mathfrak{m}\,\mathfrak{x}^2+\mathfrak{n}\,\mathfrak{y}^2)$ zu setzen ist. Sie liefert also für $\mathfrak{v}$ nur einen Wert.

13. (Φ)-Flächentheorie für Φ als Paraboloid.

Das Interesse an diesem Sonderfall entspringt hauptsächlich aus dem Umstand, daß die Mannigfaltigkeit (Φ) zugleich eine Mannigfaltigkeit (μ) im Sinne von R. M. ist. Rechnerisch sieht man dies auf folgende Art rasch ein. Stellt

$$\mathfrak{z}=\mathfrak{m}\,\mathfrak{x}^2+\mathfrak{n}\,\mathfrak{y}^2 \qquad (1$$

[1] Vgl. etwa: E. Czuber, Vorl. über Differential- und Integralrechnung, (6. Aufl., 1924), Nr. 424, Beispiel 5 *d*.

Paraboloid Φ dar, so ist

$$\mathfrak{a}\,\mathfrak{x}+\mathfrak{b}\,\mathfrak{y}+\mathfrak{c}+\mathfrak{v}\,(\mathfrak{m}\,\mathfrak{x}^2+\mathfrak{n}\,\mathfrak{y}^2)-\mathfrak{z}=0$$

Gleichung der Flächen (Φ). Schreibt man sie in der Form

$$\mathfrak{v}\,(\mathfrak{z}+\mathfrak{c}')=\mathfrak{m}\,[\mathfrak{v}(\mathfrak{x}+\mathfrak{a}')]^2+\mathfrak{n}\,[\mathfrak{v}(\mathfrak{y}+\mathfrak{b}')]^2, \tag{2}$$

worin

$$\mathfrak{a}'=\frac{\mathfrak{a}}{2\,\mathfrak{m}\,\mathfrak{v}},\quad \mathfrak{b}'=\frac{\mathfrak{b}}{2\,\mathfrak{m}\,\mathfrak{v}},\quad \mathfrak{c}'=\frac{\mathfrak{a}^2}{4\,\mathfrak{m}\,\mathfrak{v}}+\frac{\mathfrak{b}^2}{4\,\mathfrak{n}\,\mathfrak{v}}-\mathfrak{c}$$

ist, so stellt sie eine Fläche dar, die aus Φ durch die $1/\mathfrak{v}$-fache Streckung vom Zentrum $(-\mathfrak{a}', -\mathfrak{b}', -\mathfrak{c}')$ aus hervorgeht. Man hat daher den

Satz 1: Die Mannigfaltigkeit (Φ) *von Paraboloiden entsteht aus einem Paraboloid* Φ *sowohl durch die Affinitäten* $\mathfrak{A}_4$ *als durch die zentrischen Ähnlichkeiten. Die Streckungen der perspektiven Ähnlichkeit und der perspektiven Affinität, die den Übergang von* Φ *zu einer Fläche der Mannigfaltigkeit bewirken, sind reziprok.*

Diese Paraboloidmannigfaltigkeit besteht aus den Flächen zweiter Ordnung, die ein uneigentliches durch den Punkt u gehendes Geradenpaar $U=(U_1, U_2)$ enthalten. Wir wollen sie *U-Kugeln* nennen. Die polare Fläche einer U-Kugel bezüglich einer andern ist wieder eine U-Kugel. Die Mannigfaltigkeit (Φ) der U-Kugeln ist mithin invariant gegenüber den Polarisationen an diesen Flächen. Die Affinitäten $\mathfrak{A}_4$ werden durch jede solche Polarität in die sämtlichen zentrischen Streckungen (Ähnlichkeiten) transformiert, die affinen Schiebungen insbesondre in gewöhnliche Schiebungen und die Schiebungen gegen u hin in ebensolche. Auch hieraus folgt, daß die U-Kugeln paarweise zentrisch ähnlich sind, wie es Satz 1 behauptet.

Die Transformation $\mathfrak{M}_\mathfrak{d}$ für eine U-Kugel ist eindeutig. Für $\mathfrak{d}=2$ ist sie involutorisch und bildet jenen kaum beachteten Sonderfall der »Inversion an einer Fläche zweiter Ordnung«, wo das Inversionszentrum (hier u) auf der Fläche liegt. Aber auch für beliebiges $\mathfrak{d}$ besitzt $\mathfrak{M}_\mathfrak{d}$ ganz analoge Eigenschaften wie die Inversion. Es seien die folgenden aus dem Vorhergehenden leicht abzuleitenden erwähnt:

$\mathfrak{M}_\mathfrak{d}$ *führt jede U-Kugel in eine U-Kugel über. Sie transformiert die Ebenen in* ∞^3 *U-Kugeln, die sich in u oskulieren. Solche U-Kugeln gehen durch Schiebungen ineinander über, sind also kongruent, und zwar haben sie die* $1/\mathfrak{v}$*-fache Größe von* Φ. *Aus parallelen Ebenen entstehen U-Kugeln, die durch lotrechte Schiebungen ineinander übergehen; solche Paraboloide hyperoskulieren sich in u (d. h. berühren sich längs* U_1 *und* U_2*).*

Nennen wir die U (also entweder U_1 oder U_2 oder U_1 und U_2) schneidenden Geraden *U-Minimalstrahlen*, so gilt auch hier:

Die Transformationen $\mathfrak{M}_\mathfrak{d}$ führen U-Minimalstrahlen wieder in solch über Ist nämlich M eine, etwa U_1 in einem von U verschiedenen Punkt schneidende Gerade und $\varkappa$ eine durch M gelegte U-Kugel so führt $\mathfrak{M}_\mathfrak{d}$ diese Fläche in eine U-Kugel $\varkappa^\times$ über, die $M^\times$ enthält Da $M^\times$ auch der Ebene $|u M|$ angehört, die durch U_1 geht, so muß $M^\times$ wieder eine U_1 schneidende Gerade sein. Die Strahlen durch U entsprechen nach der Definition von $\mathfrak{M}_\mathfrak{d}$ sich selbst.

Aus dieser Bemerkung folgt der

Satz 2: Die U-Minimalkurven sind die Kurven in den Ebenen durch U_1 oder U_2. Sie sind kovariant gegenüber den Transformationen $\mathfrak{M}_\mathfrak{d}$

Durch Polarisation an einer U-Kugel entsteht aus $\mathfrak{M}_\mathfrak{d}$ die duale quadratische Ebenentransformation $\mathfrak{M}'_\mathfrak{d} = (\Phi', \Omega, \mathfrak{d})$ bezüglich einer U-Kugel Φ' [1] *Sie führt jeden Punkt m, als Ebenenort in eine U-Kugel über, die aus Φ' durch die Streckung $\mathfrak{v} = \mathfrak{d}:(\mathfrak{d}-1)$ von m aus hervorgeht. $\mathfrak{M}'_\mathfrak{d}$ transformiert also die Punkte des Raums in einen Schiebkomplex von U-Kugeln, d. h. in ∞^3 durch Schiebung auseinander hervorgehende U-Kugeln.* Die Transformationen $\mathfrak{M}'_\mathfrak{d}$ lassen also ebenfalls die Mannigfaltigkeit (Φ) invariant. Da allgemein die (Φ)-Krümmungslinien einer Fläche konvariant sind gegenüber allen Berührungstransformationen, die (Φ) invariant lassen, so folgt der

Satz: Die Krümmungslinien einer Fläche bezüglich der Mannigfaltigkeit (Φ) von Paraboloiden sind konvariant gegenüber den: a) Affinitäten $\mathfrak{A}_4$, b) zentrischen Ähnlichkeiten, c) Polaritäten bezüglich der Paraboloide (Φ), d) quadratischen Punkt- und Ebenentransformationen $\mathfrak{M}_\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{M}'_\mathfrak{d}$, e) aus den vorhergehenden zusammengesetzten Transformationen.

Durch Zusammensetzung der Polarität bezüglich Φ mit der Transformation $\mathfrak{M}_2$ erhält man z. B. das Seitenstück zur Fußpunkten-

---

[1] Eine solche Ebenentransformation $\mathfrak{M}'_\mathfrak{d}$ wird durch jede beliebige Fläche Φ' der Weise bestimmt, daß man jeder Ebene jene Parallelebenen $\xi_i^\times$ zuordnet, für die, wenn η_i die zu parallelen Tangentialebenen von Φ' bezeichnen, das Teilverhältnis $(\xi\,\eta_i\,\xi_i^\times) = \mathfrak{d}$ ist. Wegen $(\xi_i^\times\,\eta_i\,\xi) = \mathfrak{d}:(\mathfrak{d}-1) = \mathfrak{v}$ ist $\overline{\xi\xi_i^\times} : \overline{\xi\eta_i} = \mathfrak{v}$. Die einem Punkt m, als Ebenenort aufgefaßt, zufolge $\mathfrak{M}'_\mathfrak{d}$ entsprechende Fläche $m^\times$ geht daher aus Φ' durch die Streckung $\mathfrak{v}$ von m aus hervor. Jeder Punkt der uneigentlichen Ebene Ω entspricht sich selbst. Jedem Flächenelement (m, ξ) werden jene Flächenelemente $(m_i, \xi_i^\times)$ zugeordnet, die die dem Punkt m entsprechende Fläche $m^\times$ mit den Ebenen $\xi_i^\times$ gemeinsam haben. Da jede Ebenentransformation im Infinitesimalen projektiv ist, so ist die Beziehung $m \rightarrow m_i$ der beiden Punktfelder $\xi, \xi_i^\times$ im allgemeinen kollinear. In unserm Fall ist sie wegen des Selbstentsprechens der Punkte von Ω *zentrisch ähnlich.* Ähnlichkeitszentrum ist der Berührungspunkt x_i von η_i mit Φ'. Wegen $(m\,x_i\,m_i) = \mathfrak{d}$ ist $(m_i\,m\,x_i) = 1:(1-\mathfrak{d})$ das Streckungsverhältnis dieser Ähnlichkeit. Für die *Spiegelungen an* Φ', d. h. für $\mathfrak{d} = 2$, sind daher die Felder $\xi, \xi_i^\times$ bezüglich x_i *zentrisch symmetrisch.* Der Verbindungsvektor zweier Punkte in ξ entgegengesetzt gleich dem Verbindungsvektor der entsprechenden Punkte in $\xi_i^\times$. Eine solche Ebenentransformation hat W. Blaschke, Arch. Math. Phys., 16 (1910), p. 188, »*äquilonge Spiegelung*« genannt.

…ansformation: Jeder Ebene wird ihr Schnittpunkt mit dem bezüglich …h konjugierten Durchmesser zugeordnet.

Die zur Mannigfaltigkeit (Φ) der U-Kugeln gehörige Kurve …weiter Klasse H in Π (Nr. 12) artet in das Paar der uneigentlichen …unkte des Geradenpaars $\mathfrak{m}\,\mathfrak{x}^2+\mathfrak{n}\,\mathfrak{y}^2=0$ aus. Die auf die U-Kugeln …züglichen Minimalflächen sind die Lösungen der Differentialgleichung

$$\mathfrak{n}\,r+\mathfrak{m}\,t=0. \tag{3}$$

Diese Flächen sind Schiebflächen, die dadurch entstehen, daß eine Kurve in einer Ebene durch U_1 sich längs einer Kurve in einer Ebene durch U_2 verschiebt.[1]

Für Φ als Drehparaboloid gelangt man zu der in R. M. näher besprochenen $\mathfrak{P}$-Geometrie. Die zugehörigen Transformationen $\mathfrak{M}_\mathfrak{v}$ führen die Geraden des Raums in untereinander kongruente Parabeln mit lotrechten Achsen über, ermöglichen daher manche interessanten Übertragungen von Strahlgebilden.

14. Schlußbemerkungen.

Analoge Überlegungen zu den vorstehenden gelten in linearen Räumen von weniger oder mehr als drei Dimensionen.

Schließlich sei noch erwähnt, daß man zur obigen (Φ)-Flächentheorie auch durch eine Abbildung des R_4 auf einen seiner R_3 als Bildraum gelangt, die dual ist zu jener Verallgemeinerung der Zyklographie, über die ich 1922 auf der Naturforscherversammlung in Leipzig berichtet habe.[2] Sie besteht kurz in folgendem: Wir wählen im R_4 einen *Kegelraum* $\mathfrak{B}$ mit der Spitze v, einen nicht durch v gehenden eigentlichen Raum $\mathfrak{P}$ (unter »Raum« einen R_3 verstanden) als Bildraum und einen Punkt w, der weder $\mathfrak{B}$ noch $\mathfrak{P}$ angehört. Die Schnittfläche von $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{P}$ heiße Φ. Wird nun die Schnittfläche von $\mathfrak{B}$ mit einem beliebigen Raum $\mathfrak{F}_i$ des R_4 aus w auf $\mathfrak{P}$ projiziert, so erhält man in $\mathfrak{P}$ die Bildfläche Φ_i von $\mathfrak{F}_i$, die zu Φ perspektiv kollinear ist für den festen Punkt $v'=[v\,w\,\mathfrak{P}]$ als Kollineationszentrum und die Schnittebene $[\mathfrak{F}_i\,\mathfrak{P}]$ als Kollineationsebene. Wählt man insbesondre w so, daß v' ins Unendliche fällt, so liefert diese Abbildung ∞^4 Flächen (Φ), die zu Φ perspektiv affin sind, mit einer festen Richtung (v') der Affinitätsstrahlen.

Zu einem Strahl P von $\mathfrak{B}$ gibt es in $\mathfrak{B}$ ∞^1 benachbarte Strahlen; sie liegen in dem $\mathfrak{B}$ längs P berührenden Raum. Dieser Tangentialraum schneidet aus $\mathfrak{B}$ eine Kegelfläche aus, die P zur Doppelerzeugenden hat. Die beiden Tangentialebenen an diesen Kegel längs P sind jene, die $\mathfrak{B}$ auch noch in einem Nachbarstrahl berühren. Schreitet man in $\mathfrak{B}$ längs solcher Ebenen fort, so erhält man die

[1] Schon in R. M., p. 12, Anm. 3, angedeutet.

[2] Zusammenhang zwischen relativer Flächentheorie und einer Verallgemeinerung der Zyklographie, Jahresber. Deutsch. Math.-Ver. 32 (1923), p. 155 bis 160.

den Haupttangentenkurven einer Fläche analogen *Hauptkegel* in
Sie schneiden auf jeder räumlichen Schnittfläche von $\mathfrak{B}$ die Haupt-
tangentenkurven aus. Die Projektion dieser Hauptkegel aus w auf
liefert die ∞^1 Zylinder, auf denen alle Haupttangentenkurven d.
Flächen (Φ) liegen.

Jede Fläche ψ' in $\mathfrak{P}$ ist die Projektion einer in $\mathfrak{B}$ enthaltenen
Fläche ψ, die nur dann einem Raum angehört, wenn ψ' eine Fläch.
aus (Φ) ist. Zwei benachbarte Flächenelemente von ψ, die in einem
Raum liegen, haben als Bilder benachbarte Flächenelemente von
die auf einer Fläche aus (Φ) liegen, d. h. zwei Flächenelement.
einer (Φ)-Krümmungslinie von ψ'. Da es auf ψ zu jedem Punkt
zwei benachbarte gibt, deren Flächenelemente mit dem von p einem
Raum angehören, so gibt es auf ψ' ein Netz von (Φ)-Krümmungslinien

Diese Bemerkungen sollen nur die dualen Betrachtungen zu
denen des angeführten Vortrages andeuten. Die dort ausgesprochenen
Sätze lassen sich nun unschwer übertragen.
