Gedruckt mit Unterstützung aus dem Jerome und Margaret Stonborough-Fonds

Beiträge zur Kenntnis der atmosphärischen Elektrizität

Nr. 67

Grundzüge einer Theorie des elektrischen Feldes der Erde I.

Von

Hans Benndorf

k. M.

(Mitteilung aus dem physikalischen Institut der Universität Graz Nr. 40)

(Mit 1 Textfigur)

(Vorgelegt in der Sitzung am 12. Juni 1925)

I. Abschnitt.

Die Erde als Ganzes.

§ 1. Einleitung.

Den Ausgangspunkt vorliegender Untersuchung bilden gewisse allgemeine Überlegungen über das Zusammenwirken der Faktoren, die das elektrische Feld der Erde bedingen, wie sie Schweidler[1] bereits in voller Klarheit ausgesprochen hat, was mir leider erst beim Abschluß meiner Arbeit bekannt geworden ist. Die hier ausgesprochenen Anschauungen haben auch mancherlei Berührungspunkte mit Überlegungen Swanns, die dieser an verschiedenen Stellen seiner luftelektrischen Arbeiten, insbesondere Terr. Magn. *20*, 105, 1915 angestellt hat. Im übrigen sei auf mein auf der Naturforscherversammlung in Innsbruck (Phys. Zs. 1925) erstattetes Referat über das Grundproblem luftelektrischer Forschung und dort angegebene Literatur verwiesen.

In diesem ersten Teil soll die Untersuchung auf den Fall beschränkt bleiben, daß die örtlichen und zeitlichen Veränderungen des Feldes nur bedingt sind durch die beiden Faktoren, Zustrom und elektrische Leitfähigkeit der Luft. Es werden daher von vornherein ausgeschlossen alle sogenannten Störungen des normalen Feldes, hervorgerufen durch Gewitterbildung und Niederschläge, Staubwolken etc, ebenso alle Elektrizitätstransporte durch Konvektion und schwere geladene Elektrizitätsträger, wobei Konvektion im engeren Sinn als Elektrizitätstransport durch bewegte Luft zu verstehen ist.

[1] Jahrb. Rad. und El. *18*, 1, 1921.

Es wird sich zeigen, daß auch bei Außerachtlassung dieser Quellen des elektrischen Feldes der Erde sich eine Reihe von Gesetzmäßigkeiten ergibt, deren Prüfung an der Hand des vorliegenden und in der Zukunft zu erwartenden Beobachtungsmateriales wird vorgenommen werden können.

Der zweite Teil soll sich dann mit den durch diese Raumladungen hervorgerufenen Störungen beschäftigen.

Ich erhoffe mir von dieser Theorie, so mangelhaft sie auch noch sein mag, Richtlinien, in welcher Weise die luftelektrischen Beobachtungen angestellt werden sollen; denn darüber darf man sich keiner Täuschung hingeben, daß das vorliegende Beobachtungsmaterial wenig brauchbar, jedenfalls aber sehr unzureichend ist und zum Teil nur deswegen, weil kein allgemeiner Plan, nach dem diese Beobachtungen angestellt werden sollen, vorliegt; gerade bei den luftelektrischen Messungen, die so ungemein schwierig und mühsam sind, sollte man auf möglichste Ökonomie bedacht sein.

Die Methode der Untersuchung, die im folgenden verwendet wird, ist die, daß ein sehr einfaches Modell der Atmosphäre, das sich theoretisch genau überblicken läßt, erst eingehend studiert wird und dann untersucht wird, inwieweit sich die gewonnenen Gesetzmäßigkeiten auf das in Wirklichkeit so überaus komplizierte elektrische Feld der Erde anwenden lassen. Indem man nun von einfacheren zu komplizierteren Modellen fortschreitet, wird eine immer bessere Annäherung an die Wirklichkeit erstrebt und teilweise wohl auch erreicht. Ich hoffe auf diese Weise einen Einblick in den Mechanismus des Getriebes zu vermitteln, das die Veränderungen des elektrischen Feldes der Erde bewirkt und damit ein tiefergehendes Verständnis für die Entstehungsbedingungen des Feldes.

Das elektrische Feld der Erde ist hervorgerufen durch die Ladung der Erde und die Raumladung der Luft; da die Luft immer eine gewisse elektrische Leitfähigkeit besitzt, müßten diese Ladungen sich in verhältnismäßig kurzer Zeit ausgleichen, wenn sich nicht fortdauernd Vorgänge abspielen würden, die diesen Ausgleich verhindern.

Die Frage nach der Ursache der Aufrechterhaltung der Erdladung wird ja bekanntlich seit langem ebenso eifrig wie ergebnislos diskutiert. Den gegenwärtigen Stand der Frage habe ich in einem Bericht[1] auf der Naturforscherversammlung in Innsbruck ausführlich dargelegt und muß hier bezüglich der Begründung der einzelnen Behauptungen auf ihn verweisen.

Sicher ist, daß zur Aufrechterhaltung der Erdladung dauernd ein Strom negativer Elektrizität zur Erde (oder in umgekehrter Richtung ein Strom positiver Elektrizität) von etwa 1000 A. fließen muß. Über die Natur dieses Stromes wissen wir eigentlich nur

[1] Phys. Z. S.

Negatives. Es kann als völlig sicherstehend angenommen werden, daß dieser Strom, für den ich den Namen »Zustrom« vorgeschlagen habe, weder ein Leitungsstrom in Luft noch ein Konvektionsstrom im Sinne der Ebert'schen Hypothese noch ein Strom von durch Schwere und sonstige Kräfte bewegten, elektrisierten Massenteilchen sein kann. Von den uns bekannten Arten elektrischer Ströme bleibt nur mehr ein Elektronenstrom als einzige Erklärungsmöglichkeit übrig. Doch auch gegen sie bestehen so schwerwiegende Bedenken, daß sich mir immer mehr die Überzeugung aufdrängt, daß wir in der oben als Zustrom bezeichneten Elektrizitätsquelle einen seiner Natur nach uns noch völlig unbekannten Naturvorgang zu suchen haben.

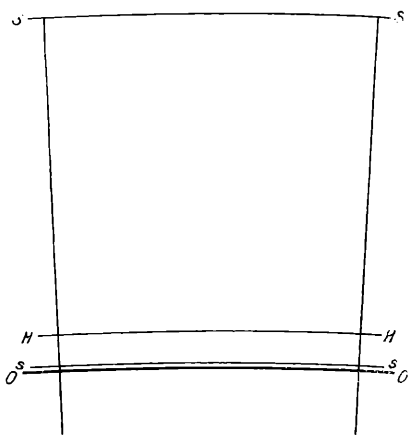
In der vorliegenden Theorie wird über die Natur des Zustromes im allgemeinen keine weitere Voraussetzung gemacht, als daß er kein Leitungsstrom und kein Konvektionsstrom ist, was wohl sicher steht, und daß er dem unteren Teil der Atmosphäre, in dem ein elektrisches Feld vorhanden ist, in merklichem Betrag weder Elektrizität zuführt noch entzieht, sondern direkt der Erde seine Ladung abgibt. Nur im Interesse der Anschaulichkeit halten wir daran fest, daß er in einem Transport negativer Ladungen zur Erde besteht; die Gültigkeit unserer Überlegungen bleibt bestehen, auch wenn ein Abtransport positiver Ladungen von der Erde weg stattfinden sollte, was allerdings sehr unwahrscheinlich ist. Sollte aber die Erde nicht nur Elektronen empfangen, sondern auch aussenden, so ist unter Zustrom immer die Differenz zugeführte weniger abgegebene Elektronen, zu verstehen.

Was wir über die Leitfähigkeit der Erde und der Atmosphäre wissen, ist folgendes: Das elektrische Leitvermögen der Materialien, aus denen sich die Erdrinde aufbaut, schwankt, im elektrostatischen Maß gemessen, zwischen 10^{10} $\sec^{-1}$ und etwa 10^{2} $\sec^{-1}$, wobei die erste Zahl für Seewasser, das zwei Drittel der Erdoberfläche bedeckt, gilt. Die Leitfähigkeit der Luft ist von der Größenordnung 10^{-4} $\sec^{-1}$, also 10^{14} bis 10^{6}mal kleiner als die der Erdmaterialien. Infolgedessen darf bei Untersuchungen des elektrischen Feldes der Erde, wo es sich nur um verhältnismäßig langsame Feldänderungen handelt, die Erde als unendlich guter Leiter betrachtet werden.

Die Leitfähigkeit der Luft nimmt mit der Höhe rasch zu und erreicht in etwa 10 *km* Höhe mindestens das Zehnfache des Bodenwertes; eine Anzahl von Gründen spricht dafür, daß der Anstieg der Leitfähigkeit in noch größeren Höhen in verstärktem Maße zunimmt und in einer Höhe von etwa 70 *km* (rund 0·01 Erdradius) schon einen sehr hohen Wert erreicht, verglichen mit dem Wert in der Nähe des Bodens.

Die Leitung in diesen Höhen dürfte aller Wahrscheinlichkeit nach hauptsächlich durch freie Elektronen bestritten werden und sich daher dem Charakter der metallischen Leitung nähern. Wir müssen deshalb schließen, daß das elektrische Feld der Atmosphär das in 10 *km* Höhe schon nur mehr wenige Volt /*m* beträgt, in 70 *km* völlig zu vernachlässigen ist; berücksichtigt man, daß noch in 700 *km* Höhe aus Nordlichtbeobachtungen das Vorhandensein der Erdatmosphäre sichergestellt ist, so sieht man, daß das elektrische Feld der Erde sich nur auf den untersten Teil der Atmosphäre beschränkt.

Nach diesen Darlegungen ist es als nahezu sicher anzunehmen, daß die gutleitende äußere Atmosphäre das Erdfeld vor äußeren elektrostatischen Einwirkungen schützt und die öfters



Figur 1.

gemachte Annahme, daß die Veränderungen des Erdfeldes in direkter Weise durch ein elektrisches Feld mitbedingt werden, das von der Sonne oder anderen Himmelskörpern stammt, ist völlig haltlos. Wir können vielmehr den Teil der Atmosphäre, der ein merkliches elektrisches Feld aufweist, als den Zwischenraum eines Kugelkondensators betrachten, bei dem der Abstand der beiden Belegungen etwa den hundertsten Teil des Kugelradius beträgt, ein Umstand, den man im folgenden sich stets vor Augen halten möge.

Unseren Betrachtungen legen wir nun folgendes Modell zugrunde: Wir betrachten eine sehr gut leitende Kugel von der Größe der Erde, umgeben von einer Atmosphäre mit zeitlich und räumlich veränderlichem Leitfähigkeitszustand, über den wir fallweise verschiedene Annahmen machen werden.

In obenstehender Figur ist ein Teil der Kugel und der Atmosphäre nahe in der Verkleinerung $2 \times 10^{7} : 1$ ähnlich abgebildet. Die Krümmung der Kugelfläche ist mit freiem Auge kaum merklich. Knapp über der Erde in 70 *km* Höhe denken wir uns eine konzentrische Kugel *H* etwa aus einem Drahtnetz bestehend angebracht; diese Annahme entspricht zwar nicht ganz der

Wirklichkeit, wo wir einen mehr oder weniger raschen Übergang zu großer Leitfähigkeit anzunehmen haben, ist aber nötig, um exakt definierte Verhältnisse zu haben. Die genaue Lage dieser Fläche ist im übrigen für unsere Theorie gleichgültig; wesentlich ist nur, daß in irgendeiner Höhe die Leitfähigkeit der Atmosphäre so groß ist, daß sich horizontale Potentialdifferenzen praktisch momentan ausgleichen. Außer der Kugelfläche H sind in der Figur die Kugelflächen s, die Grenze zwischen Tropo- und Stratosphäre in etwa 10 *km* Höhe und S eingezeichnet. S ist in 700 *km* Entfernung von der Erdoberfläche angenommen und soll die Grenze der Atmosphäre andeuten; ihre wahre Lage, wenn man überhaupt von einer Grenze sprechen darf, ist für das folgende belanglos.

In unserem Modell bildet also der Erdkörper die innere Belegung des Kugelkondensators, während die äußere durch die Luftschicht zwischen H und S gebildet wird. Wir wollen diese Schichte als »obere Stratosphäre« oder als die »leitende Hülle« bezeichnen; sie dürfte in Wirklichkeit aus verdünntem und sehr weitgehend ionisiertem Wasserstoff gebildet sein. Die negativen »Ionen« sind wohl freie Elektronen, während die positiven Ionen, Atom- oder Molionen, infolge ihrer Masse verschwindend wenig an der Elektrizitätsleitung teilnehmen.

Das Dielektrikum ist der Raum zwischen H und O, das wir im folgenden immer meinen, wenn wir von Atmosphäre sprechen. Wichtig ist, im Auge zu behalten, daß ein merkliches elektrisches Feld sowie Raumladungen der Luft im wesentlichen nur in dem untersten Teil der Atmosphäre, das ist der Raum zwischen s und O, besteht. Es ist dies gleichzeitig der Bereich, aus dem wir direkte Beobachtungsdaten luftelektrischer Größen besitzen; der elektrische Zustand der darüberliegenden Schichten ist nur indirekt erschlossen.

Die innere Belegung des Kondensators besitze eine elektrische Ladung, das Dielektrikum eine Raumladung und der äußeren Belegung sei ebenfalls eine beliebige Ladung erteilt. Das Dielektrikum habe ferner eine Leitfähigkeit von der Größenordnung der wirklichen Leitfähigkeit der Luft. Die Aufrechterhaltung der Ladungen wird durch den Zustrom bewirkt, den wir uns im Modell am einfachsten durch einen Draht fließend denken können, der die Atmosphäre isoliert durchsetzt. Durch Verbindung mit einer äußeren Elektrizitätsquelle möge er so geregelt werden, daß er zu jeder Zeit einen vorgegebenen Wert besitzt.

§ 2. Bezeichnungen, Einheiten und Zahlenwerte.

Da eine streng systematische Bezeichnungsweise trotz ihrer etwas umständlicheren Schreibweise für das Lesen der Formeln wesentliche Vorzüge besitzt, wird im folgenden eine solche angewendet und soll zur leichteren Orientierung hier die Bedeutung der einzelnen Zeichen übersichtlich zusammengestellt werden.

Z, A, e_O, e_H, E nur von t,
σ_O, σ_H, σ_S nur von λ, φ und von t,
nur von r und t ab.

Größen, die sich auf den Anfangswert der Zeit $t = O$ beziehen, erhalten rechts oben den Index o.

IV. Mittelwerte der elektrischen Größen.

Es kommen folgende exakt definierte Mittelwerte zur Verwendung:

1. Das Oberflächenmittel, bezeichnet durch ⌒ über der betreffenden Größe.
2. Das Höhenmittel ^ betreffenden Größe.
3. Das laufende Zeitmittel — betreffenden Größe.
4. Das Zeitintervallmittel ⌐¬ betreffenden Größe, eventuell, wenn nötig, mit dem Beisatz h, d, m, a (Stunden-, Tages-, Monats-, Jahresmittel).

Bezeichnet G irgendeine Größe, so gelten folgende Definitionen:

$$\widehat{G} = \frac{1}{f} \int G\, d f = \frac{1}{f} \int_{O}^{2\pi} d\lambda \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} G\, r^2 \cos\varphi\, d\varphi, \tag{1}$$

wobei die Integration über die ganze Kugelfläche zu erstrecken ist; ist G ein Vektor, so ist zur Mittelbildung die Vertikalkomponente zu nehmen.

$$\hat{G} = \frac{1}{H} \int_{r_O}^{r_H} G\, d r = \frac{1}{H} \int_{O}^{H} G\, d h \tag{2}$$

$$\overline{G} = \frac{1}{t} \int_{O}^{t} G\, d t, \tag{3}$$

wobei t die laufende Zeit bedeutet.

$$\overline{G} = \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} G\, d t, \tag{4}$$

wobei T ein bestimmtes Zeitintervall, z. B. Stunde, Tag, Monat, Jahr bedeutet.

In leicht verständlicher Weise bezeichnet z. B.

$$\overline{\widehat{G}} = \frac{1}{t}\int_{0}^{t} \widehat{G}\, d\, t \text{ etc.}$$

Die Beziehungen, die zwischen vielfachen Mitteln bestehen, sind im § 8 angegeben.

V. Einheiten und Zahlenwerte.

Die elektrischen Einheiten in den Formeln sind durchaus im elektrostatischen Maßsystem gemessen zu denken; bei numerischen Rechnungen wird daneben auch das praktische Maßsystem verwendet.

Bezeichnet[1] wird die Einheit der Elektrizitätsmenge mit Ces, des Potentials mit Ves, der Stromstärke mit Aes, des Widerstandes mit Oes, wenn sie im elektrostatischen Maßsystem, mit C, V, A, Ω, wenn sie im praktischen Maßsystem gemessen werden.

Spezifisches Leitvermögen wird in $\sec^{-1}$ oder $\Omega^{-1}\, cm^{-1}$, spezifischer Widerstand in sec oder in $\Omega\, cm$ angegeben.

bezeichnet das Elementarquantum.

Bei numerischen Rechnungen werden folgende Zahlenwerte zugrunde gelegt:

$$r_O = 6 \cdot 37 \times 10^8\, cm \quad = 6 \cdot 37 \times 10^3\, km,$$

$$f_O = 5 \cdot 10 \times 10^{18}\, cm^2 \quad = 5 \cdot 10 \times 10^8\, km^2,$$

$$H = 70\, km,$$

$$r_S - r_O = 700\, km,$$

$$1\, \varepsilon = 4 \cdot 77 \times 10^{-10}\,\text{Ces} = 1 \cdot 59 \times 10^{-19}\, C,$$

$$1\,\text{Ces} = 2 \cdot 10 \times 10^9\, \varepsilon \quad = 3 \cdot 33 \times 10^{-10}\, C,$$

$$1\,\text{Aes} = 2 \cdot 10 \times 10^9\, \frac{\varepsilon}{\text{sec}} = 3 \cdot 33 \times 10^{-10}\, A,$$

$$1\,\text{Ves} = 3 \cdot 00 \times 10^2\, V,$$

$$1\,\text{Oes} = 9 \cdot 00 \times 10^{11}\, \Omega.$$

---

[1] Siehe Benndorf, Phys. Z. S. 60, 1924.

I. Flächen, Räume und Koordinaten.

Es bezeichnet:

O die Oberfläche der Erde.

s die Trennungsfläche von Tropo- und Stratosphäre.

H die »Heavisideschichte«, innere Begrenzungsfläche der leitenden Hülle.

S die äußere Grenze der Atmosphäre.

F eine beliebige Kugelfläche.

Alle Größen, die sich auf diese Flächen beziehen, tragen rechts unten den Index *o, s, H, S,* die sich auf F beziehen, keinen Index.

Eine Ausnahme von dieser Regel wird nur bei der Bezeichnung der Raumladung der Atmosphäre gemacht (siehe unten

Der Raum zwischen den Kugelflächen O und H heiße das »Innenfeld« oder »Atmosphäre« schlechthin.

Der Raum zwischen H und S die »leitende Hülle« oder »Stratosphäre« schlechthin. Der Raum außerhalb S das »Außenfeld oder der »Außenraum«.

Größen im Außenraum erhalten den Index a.

Die Lage eines Punktes im Raum wird festgelegt durch seinen Abstand r vom Erdmittelpunkt, durch die geographische Länge λ und die geographische Breite φ, die Oberfläche einer Kugel vom Radius r wird mit f bezeichnet.

Es bedeutet somit:

r_O, f_O Radius und Oberfläche von O.

r_s, f_s " " " " s.

r_H, f_H " " " " H.

r_S, f_S " " " " S.

r, f " " " " einer beliebigen Kugelfläche F zwischen O und H.

Für den Innenraum speziell zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned} h &= r - r_O \\ h_s &= r_s - r_O \\ H &= r_H - r_O \end{aligned}\right\} \text{Höhen über dem Erdboden.}$$

II. Elektrische Größen.

Es bezeichnet:

$\Lambda, \Lambda_O, \Lambda_H$ das elektrische Leitvermögen im Abstand r, r_O, r_H.

$\mathrm{P}, \mathrm{P}_O, \mathrm{P}_H$ (griechisches R) den spezifischen Widerstand der Luft.

L den Leitwert der Atmosphäre zwischen O und H.

W Widerstand der Atmosphäre zwischen O und F.
W_H Gesamtwiderstand der Atmosphäre zwischen O und H.

Z Gesamtstromstärke des »Zustromes« zur Erde, und zwar soll das Vorzeichen so gewählt werden, daß $Z > O$ Zuströmen negativer Elektrizität zur Erde bedeutet was äquivalent mit einem Abströmen positiver Elektrizität ist.

A Gesamstromstärke des Abstromes von der leitenden Hülle in den Weltraum. $A > O$ bedeutet ein Abströmen negativer Elektrizität oder ein Zuströmen positiver Elektrizität.

$= \frac{Z}{f_O}$ Stromdichte des Zustromes.

J, J_O, J_H Gesamtstromstärke des in der Atmosphäre fließenden Leitungsstromes durch eine beliebige Kugelfläche F, nach O, aus H;

$J > O$ bedeutet, daß der Leitungsstrom, im gewöhnlichen Sinn gerechnet, von O nach H fließt.

$$\left.\begin{aligned} j &= \frac{J}{f} \\ j_O &= \frac{J_O}{f_O} \\ j_H &= \frac{J_H}{f_H} \end{aligned}\right\} \text{Stromdichte des Leitungsstromes durch } F,\ O,\ H.$$

V, V_O, $V_H = V_S$, V_a, Potential auf F, O, H, S und im Außenraum.

$\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_O$, $\mathfrak{E}_H$, $\mathfrak{E}_S$, $\mathfrak{E}_a$ Feldstärke auf F, O, H, S und im Außenraum.

$\mathfrak{E} > O$ bedeutet, daß die Feldrichtung von O nach H gerichtet ist.

σ_O, σ_H, σ_S Flächendichte der Ladung auf O, H, S.

Dichte der Raumladung der Atmosphäre im Punkte r.

e_O Eigenladung der Erde.

Gesamtraumladung der Atmosphäre zwischen O und F.

e_H Gesamtraumladung der Atmosphäre zwischen O und H.

E Eigenladung der leitenden Hülle.

III. Abhängigkeit der Größen von Koordinaten und der Zeit.

Die elektrischen Größen sind im allgemeinen als Funktion der Zeit t und der Koordinaten r, λ, φ zu betrachten. Im speziellen hängen ihrer Definition nach

Als beiläufige Mittelwerte der luftelektrischen Größen sind angenommen:

$$\Lambda_O = \quad 2\times10^{-4}\,\text{sec}^{-1} = 2\cdot22\times10^{-16}\,\Omega^{-1}cm^{-1},$$

$$P_O = \quad 5\times10^{3}\,\text{sec} \quad = 4\cdot50\times10^{15}\,\Omega\, cm,$$

$$\mathfrak{E}_O = 120\,\frac{V}{m} \quad = 4\cdot00\times10^{-3}\,\frac{\text{Ves}}{cm}$$

$$\sigma_O = 3\cdot18\times10^{-4}\,\frac{\text{Ces}}{cm^2} = 6\cdot51\times10^{5}\,\frac{\varepsilon}{cm^2} = 1\cdot06\times10^{-13}\,\frac{C}{cm^2},$$

$$e_O = 1\cdot62\times10^{15}\,\text{Ces} \quad = 3\cdot32\times10^{24}\,\varepsilon \quad = 5\cdot40\times10^{5}\,C,$$

$$j_O = 8\cdot00\times10^{-7}\,\frac{\text{Aes}}{cm^2} = 1\cdot68\times10^{3}\,\frac{\varepsilon}{cm^2\,\text{sec}} = 2\cdot66\times10^{-16}\,\frac{A}{cm^2} =$$

$$= 2\cdot66\times10^{-6}\,\frac{A}{km^2},$$

$$J_O = 4\cdot08\times10^{12}\,\text{Aes} \quad = 8\cdot56\times10^{21}\,\frac{\varepsilon}{\text{sec}} = 1\cdot36\times10^{3}\,A.$$

§ 3. Die Erde als elektrisches System im Weltraum.

I. Elektrostatik eines Kugelkondensators mit einem Dielektrikum $K = 1$, $\Lambda = O$.

Es sei ein Kugelkondensator mit den Radien r_O, r_H, r_S zunächst ganz ungeladen. Wir erteilen O eine Ladung e_O, dann wird auf H $-e_O$ und auf S $+e_O$ influenziert. Nun werde das Dielektrikum mit Raumladung im Gesamtbetrag e_H erfüllt; dann sitzt auf O die Ladung e_O, auf H, $-(e_O+e_H)$ und auf S, e_O+e_H. Schließlich werde S noch mit der Ladung E versehen, wodurch die Gesamtladung von S auf den Betrag e_O+e_H+E gebracht wird. Da wir die Raumladung auf konzentrischen Kugelflächen als gleich annehmen wollen, ergibt sich das Feld im Außenraum in der Entfernung r vom Kugelmittelpunkt zu:

$$\mathfrak{E}_a = \frac{e_O + e_H + E}{r^2} \tag{1}$$

und das Potential

$$V_a = \frac{e_O + e_H + E}{r}; \tag{2}$$

daraus die Feldstärke auf S

$$\mathfrak{E}_S = \frac{e_O + e_H + E}{r_S^2} \tag{3}$$

und das Potential der leitenden Hülle

$$V_S = V_H = \frac{e_O + e_H + E}{r_S}. \tag{4}$$

Im Innenraum des Kondensators wird die Feldstärke

$$\mathfrak{E} = \frac{e_O + e}{r^2} \tag{5}$$

und auf O und H

$$\mathfrak{E}_O = \frac{e_O}{r_O{}^2}, \tag{6}$$

$$\mathfrak{E}_H = \frac{e_O + e_H}{r_H^2}. \tag{7}$$

Das Potential in einem Punkte des Innenraumes setzt sich aus zwei Teilen zusammen, dem Potential der innerhalb befindlichen Ladungen $\frac{e_O + e}{r}$ und dem Potential der außerhalb be- befindlichen

$$4\pi \int_r^{r_H} \frac{\rho r^2 dr}{r} - \frac{e_O + e_H}{r_H} + \frac{e_O + e_H + E}{r_S},$$

woraus sich ergibt:

$$V - V_H = \frac{e_O + e}{r} + 4\pi \int_r^{r_H} \rho r \, dr - \frac{e_O + e_H}{r_H} \tag{8}$$

und für die Potentialdifferenz zwischen O und H

$$V_O - V_H = e_O \left(\frac{1}{r_O} - \frac{1}{r_H} \right) - \frac{e_H}{r_H} + 4\pi \int_{r_O}^{r_H} \rho r \, dr. \tag{9}$$

Setzen wir

$$4\pi \int_{r_O}^{r_H} \rho\, r\, d\, r = \frac{e_H^*}{r_H},$$

so ergibt sich folgende anschauliche Deutung für e_H^*: Wir denken uns einen Hohlzylinder von der Höhe $2\, r_H$ und den Radien r_O und r_H so mit einer Raumladung ρ erfüllt, daß ρ auf konzentrischen Zylinderflächen konstant ist und auf einer Zylinderfläche mit dem Radius r denselben Wert hat, wie in unserem Kugelkondensator im Abstand r vom Mittelpunkt, daß also ρ im Zylinder dieselbe Funktion von r ist, wie im Kondensator. Die Gesamtladung dieses Hohlzylinders berechnet sich nun zu

$$2\, r_H \int_{r_O}^{r_H} 2\, \pi\, \rho\, r\, d\, r = e_H^*.$$

Da die äußere Mantelfläche dieses Hohlzylinders $4\, r_H^2 \pi$, also gleich der Kugelfläche H, die innere Mantelfläche aber größer als die Kugelfläche O ist, so sieht man unmittelbar, daß e_H^* stets größer als e_H sein muß. Wir setzen daher $e_H^* = (1 + \delta)\, e_H$, wo eine positive Zahl ist, und erhalten:

$$V_O - V_H = e_O \left(\frac{1}{r_O} - \frac{1}{r_H} \right) + \delta\, \frac{e_H}{r_H}. \tag{10}$$

Die Größe von δ hängt von der Art der Verteilung der Raumladung ab und kann höchstens den Betrag von

$$\delta = \frac{r_H - r_O}{r_O} = \frac{H}{r_O}$$

erreichen.

Man sieht aus den vorangehenden Betrachtungen, daß das Außenfeld von E und $e_O + e_H$ abhängig ist, während das Innenfeld nur von $e_O + e$ bestimmt ist; insbesondere ist die Potentialdifferenz zwischen den beiden Kondensatorbelegungen im wesentlichen nur abhängig von e_O und e_H, während die Art der Verteilung der Raumladung, die sich in dem Wert für δ ausdrückt, nur von sekundärem Einfluß ist. Ist der Abstand der Kondensatorplatten gegen ihren Krümmungsradius zu vernachlässigen, so ist die Art der Raumladungsverteilung überhaupt ohne Einfluß auf $V_O - V_H$.

II. Elektrische Vorgänge in einem Kugelkondensator, dessen Dielektrikum eine gewisse Leitfähigkeit besitzt.

Wir denken uns einen Kugelkondensator beliebig geladen und mit einer vorgeschriebenen Raumladung versehen; zu einer bestimmten Zeit werde das Dielektrikum etwa durch einen Ionisator leitend gemacht, und zwar so, daß Λ nur Funktion von r, also auf konzentrischen Kugelflächen konstant ist. Dann wird ein Strom zwischen O und H fließen, der einen Ausgleich der Ladungen bewirkt und zu einem stationären Endzustand führt. In welcher Weise dieser Endzustand erreicht wird, soll nun berechnet werden. Betrachten wir eine beliebige Kugelfläche, so wird durch sie der Strom $J = -f\Lambda\mathfrak{E}$ nach innen fließen und eine Veränderung der Ladung gemäß der Gleichung

$$\frac{\partial (e_O + e)}{\partial t} = -f\Lambda\mathfrak{E} \tag{11}$$

bedingen, nach (5) ist aber

$$\frac{\partial (e_O + e)}{\partial t} = r^2 \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}$$

und daher wird

$$\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = -4\pi\Lambda\mathfrak{E}, \tag{12}$$

woraus sich ergibt

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}^0 e^{-4\pi\Lambda t}, \tag{13}$$

d. h. das Feld verschwindet nach einem Exponentialgesetz, und zwar an Orten mit größerer Leitfähigkeit rascher.

Nach demselben Gesetz nimmt $e_O + e$ ab, und ähnlich, wenngleich etwas komplizierter, $V_O - V_H$. Der Endzustand ist charakterisiert dadurch, daß $\mathfrak{E}$, $V_O - V_H$, e_O, e, ρ Null werden und der ganze Kondensator das Potential $V_H = \frac{E}{r_S}$ erreicht.

III. Den Kondensatorbelegungen wird Elektrizität zugeführt.

1. Wir betrachten zunächst wieder den Fall, daß das Dielektrikum keine Leitfähigkeit besitzt. Wird nur der Innenbelegung Elektrizität zugeführt, etwa in gleichen Zeiten gleiche Mengen, dann wächst e_O linear mit der Zeit und, da sich die Raumladung nicht ändert, auch $\mathfrak{E}$ und $V_O - V_H$ etwa bis zu jener Grenze, wo eine disruptive Entladung zwischen den Kondensatorplatten einsetzt; gleichzeitig wächst das Außenfeld entsprechend der Veränderung von e_O linear mit der Zeit an.

2. Wird dagegen nur der äußeren Belegung Elektrizität zugeführt, dann bleibt das innere Feld ungeändert und nur das äußere wächst linear mit der Zeit, damit auch V_H und V_O, während $V_O - V_H$ konstant bleibt. Wird gleichzeitig beiden Belegungen Elektrizität zugeführt, dann ändert sich das Innenfeld entsprechend

der Veränderung von e_0 und das Außenfeld infolge der Änderung von e_0 und E.

3. Nun wollen wir dieselben Fälle betrachten unter der Annahme, daß das Dielektrikum eine Leitfähigkeit Λ besitzt, und zur Zeit $t = O$ ein beliebiger Anfangszustand herrscht. Es fließe ein konstanter Strom nur zur Innenbelegung, er sei mit $-Z$ bezeichnet; dann wird eine Zunahme von $e_0 + e$ eintreten durch den Zustrom und durch den Leitungsstrom $J = -f \Lambda \mathfrak{E}$ durch die Kugelfläche mit dem Radius r

Wir erhalten daher

$$\frac{\partial (e_0 + e)}{\partial t} = -Z - f \Lambda \mathfrak{E} = r^2 \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}. \tag{14}$$

Diese Gleichung, in bekannter Weise integriert, liefert

$$\mathfrak{E} = \left(\mathfrak{E}^0 + \frac{Z}{4 \pi \Lambda r^2}\right) e^{-4 \pi \Lambda t} - \frac{Z}{4 \pi \Lambda r^2}, \tag{15}$$

d. h. $\mathfrak{E}$ nähert sich einem Grenzwert, der gegeben ist durch

$$\mathfrak{E}^{\infty} = -\frac{Z}{4 \pi \Lambda r^2} \tag{16}$$

Diesem Feld entspricht eine ganz bestimmte Raumladungsverteilung, die sich aus der Gleichung

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 \mathfrak{E})}{\partial r} = 4 \pi \rho$$

$$\text{zu } 4 \pi \rho = -\frac{Z}{4 \pi r^2} \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial r} \text{ ergibt,} \tag{17}$$

und eine Potentialdifferenz

$$V_0 - V_H = -\frac{Z}{4 \pi} \int_{r_0}^{r_H} \frac{\mathrm{P}}{r^2} \, d r. \tag{18}$$

Während so das Innenfeld einem konstanten Endzustand entgegenstrebt, wächst das Außenfeld dauernd an. Die Gesamtladung E der leitenden Hülle wird durch den Leitungsstrom verändert, entsprechend der Gleichung

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -J_H = f_H \Lambda_H \mathfrak{E}_H. \tag{19}$$

Differenziert man nun Gleichung (1), so wird

$$r^2 \frac{\partial \mathfrak{E}_a}{\partial t} = \frac{\partial (e_O + e_H)}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial t}, \tag{20}$$

setzt man hier die Werte aus Gleichung (14) und (19) ein, so ergibt sich

$$r^2 \frac{\partial \mathfrak{E}_a}{\partial t} = -Z - f_H \Lambda_H \mathfrak{E}_H + f_H \Lambda_H \mathfrak{E}_H = -Z \tag{21}$$

und daraus

$$\mathfrak{E}_a = \mathfrak{E}_a^0 - \frac{Z}{r^2} t, \tag{22}$$

d. h. das Außenfeld wächst linear mit der Zeit an, und zwar gleich vom Anbeginn an, auch schon, wenn der stationäre Zustand des Innenfeldes noch nicht erreicht ist.

4. Nun behandeln wir den Fall, daß nur von außen her der äußeren Belegung gleichmäßig Elektrizität zugeführt wird. Hier gelten für das Innenfeld die Gleichungen (11), (12), (13), gemäß denen das Innenfeld exponential verschwinden muß, genau wie in dem Fall, daß der äußeren Belegung keine Ladung zugeführt wird. Für das Außenfeld ergibt sich, wenn A die pro Zeiteinheit konstant zugeführte Elektrizitätsmenge bezeichnet

$$\frac{\partial E}{\partial t} = A + f_H \Lambda_H \mathfrak{E}_H; \tag{23}$$

setzt man für $\mathfrak{E}_H$ den Wert aus Gleichung (13) und integriert, so erhält man

$$E = E^0 + r_H^2 \mathfrak{E}_H^0 \left(1 - e^{-4\pi \Lambda_H t}\right) + A t, \tag{24}$$

mit Rücksicht auf (1), (7), (13) wird die Feldstärke im Außenraum

$$\mathfrak{E}_a = \frac{E^0}{r^2} + \frac{r_H^2 \mathfrak{E}_H^0}{r^2} + \frac{A}{r^2} t = \mathfrak{E}_a^0 + \frac{A}{r^2} t \tag{25}$$

Es ergibt sich somit, daß ein Zustrom auf die Außenbelegung, auch wenn das Dielektrikum Leitfähigkeit besitzt, zu keiner Zeit einen Einfluß auf die zeitliche Änderung des Innenfeldes hat; das Außenfeld wächst unter dem Einfluß des Zustromes gleich vom Anbeginn linear mit der Zeit an.

5. Ein gleichzeitiger Zustrom auf die Innen- und Außenbelegung ergibt für das Innenfeld, da für dieses der Zustrom auf die Außenbelegung ohne Einfluß ist, die zeitliche Änderung, die durch Gleichung (15) festgelegt ist. Das Innenfeld strebt asymptotisch einem Grenzwert zu, der durch Gleichung (16) bestimmt ist.

Das Außenfeld ändert sich sowohl infolge des Zustromes auf a als auch auf S. Es ergibt sich in analoger Weise wie früher

$$\mathfrak{E}_a = \mathfrak{E}_a^0 + \frac{A-Z}{r^2} t \tag{26}$$

IV. Anwendung auf die Erde.

Für die Erde ergibt sich, soweit die gemachten Voraussetzungen zutreffen, wenn wir das eben Gefundene anwenden, folgendes: Das Innenfeld der Erde verdankt sein Entstehen dem Zustrom Z zur Erde, es ist aber unabhängig von einer Elektrizitätszufuhr A, die die leitende Hülle etwa vom Weltraum erfährt, seine zeitliche Änderung hängt nur ab von der zeitlichen Änderung des Zustromes Z und der der Leitfähigkeit. Das Außenfeld der Erde dagegen hängt sowohl von Z als von A ab. Das Außenfeld kann nur dann stationär werden, wenn $A = Z$ wird, d. h. wenn entweder der leitenden Hülle von außen soviel positive Elektrizität zugeführt wird, wie der Erde negative, oder aber, wenn sie selbst negative Elektrizität in gleichem Betrage in den Weltraum abgibt. Ob in Wirklichkeit der Zustrom A in einer Zufuhr positiver Elektrizität oder einer Abfuhr negativer oder aus beiden besteht, wissen wir nicht. Wir können daher auch nicht sagen, ob die Außenseite der leitenden Hülle positiv oder negativ geladen ist.

Wie dem auch sein mag, jedenfalls kann das Außenfeld der Erde nur so stark werden, daß die durch dieses auf die Ionen der leitenden Hülle ausgeübte Kraft nicht hinreicht, sie in den Weltraum hinauszutreiben. Hier haben Betrachtungen Anwendung zu finden, wie sie Schweidler in seiner Theorie der Selbstaufladung ionisierter Gaskugeln angestellt hat.[1]

Für das Weitere ist nur die Feststellung von Wichtigkeit, daß wir bei der Behandlung des Innenfeldes vom Zustrom A völlig absehen können.

II. Abschnitt.

Das Innenfeld mit kugelsymmetrischer Anordnung.

§ 4. Leitfähigkeit nur abhängig von r, der Zustrom zeitlich konstant. Stationärer Zustand.

In diesem Abschnitte soll das Innenfeld einer eingehenden Untersuchung unterzogen werden für den kugelsymmetrischen Fall, d. h. unter der Annahme, daß alle Größen nur Funktionen von r und t sind.

[1] E. Schweidler, Terr. Magn. *27*, 105 bis 118, 1922.

Wir betrachten also im folgenden nur den Innenraum des Kondensators zwischen den Flächen O und H, und zwar zunächst den stationären Zustand bei zeitlicher Konstanz von Z.

Einige diesbezügliche Formeln sind bereits § 3 III angegeben, der Vollständigkeit halber seien sie hier noch einmal mitangeführt.

Der stationäre Zustand bedingt, daß

$$-Z = J = 4\pi r^2 \Lambda \mathfrak{E} = J_O = 4\pi r_O^2 \Lambda_O \mathfrak{E}_O; \tag{27}$$

daraus ergibt sich

$$\mathfrak{E}_O = -\frac{Z}{4\pi r_O^2 \Lambda_O} = -z\,\mathrm{P}_O \tag{28}$$

und

$$\mathfrak{E} = -\frac{Z}{4\pi r^2 \Lambda} = -\frac{r_O^2}{r^2}\,\mathrm{P}. \tag{29}$$

Die Potentialdifferenz $V - V_O$ berechnet sich aus

$$V - V_O = -\int_{r_O}^{r} \mathfrak{E}\, d\,r$$

$$V - V_O = z\, r_O^2 \int_{r_O}^{r} \frac{\mathrm{P}}{r^2}\, d\,r = \frac{Z}{4\pi} \int_{r_O}^{r} \frac{\mathrm{P}}{r^2}\, d\,r \quad \text{und} \tag{30}$$

$$V_H - V_O = \frac{Z}{4\pi} \int_{r_O}^{r_H} \frac{\mathrm{P}}{r^2}\, d\,r, \tag{31}$$

woraus sich der Widerstand aus

$$W = \frac{V_O - V}{J} = \frac{V - V_O}{Z}$$

ergibt als

$$W = \frac{1}{4\pi} \int_{r_O}^{r} \frac{\mathrm{P}}{r^2}\, d\,r, \tag{32}$$

$$W_H = \frac{1}{4\pi} \int_{r_O}^{r_H} \frac{\mathrm{P}}{r^2}\, d\,r \tag{33}$$

Die Anwendung des Gauß'schen Satzes auf eine Kugelfläche ergibt.

$$4\,\pi\, e_O = 4\,\pi\, r_O^2\, \mathfrak{E}_O = f_O\, \mathfrak{E}_O \tag{34}$$

$$4\,\pi\,(e + e_O) = 4\,\pi\, r^2\, \mathfrak{E} = f\, \mathfrak{E} \tag{35}$$

und aus (34) und (35)

$$4\,\pi\, e = f\, \mathfrak{E} - f_O\, \mathfrak{E}_O. \tag{36}$$

Die Oberflächendichte und Raumladung ist bestimmt durch

$$4\,\pi\, \sigma_O = \mathfrak{E}_O = -z\, \mathrm{P}_O, \tag{37}$$

$$4\,\pi\, \rho = \operatorname{div} \mathfrak{E} = \frac{1}{r^2}\, \frac{\partial}{\partial\, r}\, (\mathfrak{E}\, r^2) = -z\, \frac{r_O^2}{r^2}\, \frac{\partial\, \mathrm{P}}{\partial\, r}. \tag{38}$$

Dieses Formelsystem vereinfacht sich, wenn berücksichtigt wird, daß $h = r - r_O$ klein gegen r_O ist, wenn wir uns auf die untersten Schichten der Atmosphäre beschränken, die allein bei luftelektrischen Untersuchungen in Frage kommen. Selbst für $h = 64\ km$ wird erst $h = 0 \cdot 01\ r_O$; wenn wir also $\frac{h}{r_O}$ gegen 1 vernachlässigen, ergeben sich folgende Gleichungen:

$$-Z = J = 4\,\pi\, r_O^2\, \Lambda\, \mathfrak{E} = 4\,\pi\, r_O^2\, \Lambda_O\, \mathfrak{E}_O. \tag{27'}$$

daher

$$-z = j = \Lambda\, \mathfrak{E} = \Lambda_O\, \mathfrak{E}_O$$

$$\mathfrak{E}_O = -z\, \mathrm{P}_O = \frac{z}{\Lambda_O} \tag{28'}$$

$$\mathfrak{E} = -z\, \mathrm{P} = -\frac{z}{\Lambda} \tag{29'}$$

$$V - V_O = Z\, \frac{1}{4\,\pi\, r_O^2} \int_O^h \mathrm{P}\, d\, h = Z\, W \tag{30'}$$

$$V_H - V_O = Z\, W_H \tag{31'}$$

$$W = \frac{1}{f_O} \int_O^h \mathrm{P}\, d\, h \tag{32'}$$

$$W_H = \frac{1}{f_O}\int_O^H \mathrm{P}\,d\,h = \widehat{\mathrm{P}}\,\frac{H}{f_O} \tag{33'}$$

$$4\,\pi\, e_O = f_O\, \mathfrak{E}_O = -\, Z\, \mathrm{P}_O \tag{34'}$$

$$4\,\pi\,(e + e_O) = f_O\, \mathfrak{E} = -\, Z.\mathrm{P} \tag{35'}$$

$$4\,\pi\, e = f_O\,(\mathfrak{E} - \mathfrak{E}_O) = Z\,(\mathrm{P} - \mathrm{P}_O) \tag{36'}$$

$$4\,\pi\,\sigma_O = -\, z\, \mathrm{P}_O \tag{37'}$$

$$4\,\pi\,\rho = -\;\frac{\partial\,\mathrm{P}}{\partial\,h}. \tag{38'}$$

Aus diesen Gleichungen gewinnen wir einen guten Einblick in die wechselseitige Bedingtheit der einzelnen Größen. Als gegeben vorausgesetzt ist der konstante Zustrom Z, ferner die Leitfähigkeit der Luft als Funktion der Höhe und damit auch der Widerstand einer Luftsäule von der Höhe h. Aus Gleichung (27′) folgt: J, beziehungsweise j hängt nur ab von Z und ist unabhängig von der Leitfähigkeit der Luft. Nach Gleichung (28′) und (29′) ist die Feldstärke nur abhängig von Z und der Größe der Leitfähigkeit im betrachteten Punkte, unabhängig davon wie sich die Leitfähigkeit mit der Höhe ändert. Nach (30′) ist $V - V_O$ bedingt durch Z und den Widerstand der darunter liegenden Luftschichte. Die Ladung der Erde, beziehungsweise die Flächendichte σ_O ist nach (34′) und (37′) bestimmt durch und P_O (Λ_O), die räumliche Ladungsdichte nach (38′) nur durch und $\frac{\partial\,\mathrm{P}}{\partial\,h}$ der Stärke der Abnahme von P mit der Höhe in dem betrachteten Punkt.

Einen noch besseren Einblick gewinnen wir, wenn wir die Art untersuchen, in der sich der stationäre Zustand einstellt, wenn der Anfangszustand des Feldes ein anderer ist, als es dem stationären Zustand entspricht.

§ 5. Die Leitfähigkeit der Luft ist nur abhängig von r, der Zustrom ist konstant, Anfangszustand beliebig. Wie stellt sich der stationäre Zustand ein?

Hier sollen die Ausführungen des § 3 III etwas ausführlicher behandelt werden. Den Anfangszustand können wir uns etwa gegeben denken durch Angabe der Gesamtladung der Erde e_O^O und der räumlichen Ladungsdichte ρ^O als Funktion von r zur Zeit $t = O$. Der Anfangszustand der übrigen Größen ergibt sich, wenn man in den folgenden Gleichungen, die den Zusammenhang mit e_O und darstellen, die Anfangswerte e_O^O und ρ^O einsetzt.

$$\mathfrak{E}_O = 4\pi\sigma_O = \frac{e_O}{r_O^2} \tag{39}$$

$$e = 4\pi \int_{r_O}^{r} \rho\, r^2\, d\, r \tag{40}$$

$$\mathfrak{E} = \frac{e_O + e}{r^2} \tag{41}$$

$$V - V_O = -\int_{r_O}^{r} \frac{e_O + e}{r^2}\, d\, r \tag{42}$$

$$J = 4\pi r^2 \Lambda \mathfrak{E}. \tag{43}$$

Zur Gewinnung einer Differentialgleichung für $\mathfrak{E}$ gehen wir von Gleichung (41) aus, differenzieren nach t und erhalten so

$$r^2 \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \frac{\partial (e_O + e)}{\partial t}. \tag{44}$$

Die rechte Seite dieser Gleichung bedeutet die Zunahme der gesamten Elektrizitätsmenge innerhalb einer Kugelfläche vom Radius r in der Zeiteinheit; diese kann nur herbeigeführt werden durch den Zustrom und den Leitungsstrom durch jene Kugelfläche. Es ist also

$$r^2 \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \frac{\partial (e_O + e)}{\partial t} = -Z - J = -Z - 4\pi r^2 \Lambda \mathfrak{E}, \tag{45}$$

woraus sich die Differentialgleichung

$$\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + 4\pi \Lambda \mathfrak{E} = -\frac{Z}{r^2} \tag{46}$$

ergibt. Das Integral dieser Differentialgleichung ist

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}^O e^{-4\pi\Lambda t} - \frac{Z}{4\pi r^2 \Lambda}\left[1 - e^{-4\pi\Lambda t}\right] \tag{47}$$

und gibt an, wie sich $\mathfrak{E}$ in jedem Punkte r mit der Zeit ändern ($\mathfrak{E}^O$ Wert von $\mathfrak{E}$ für $t = O$). Bezeichnen wir den stationären

Grenzwert, dem sich $\mathfrak{E}$ mit wachsender Zeit nähert, mit $\mathfrak{E}^\infty$ folgt aus Gleichung (47)

$$\mathfrak{E}^\infty = -\frac{Z}{4\pi r^2 \Lambda} \tag{48}$$

und

$$\mathfrak{E} - \mathfrak{E}^\infty = (\mathfrak{E}^0 - \mathfrak{E}^\infty)\, e^{-4\pi\Lambda t}. \tag{49}$$

Aus (49) ersieht man, daß die anfänglich vorhandene Abweichung vom stationären Zustand $\mathfrak{E}^0 - \mathfrak{E}^\infty$ nach einem Exponentialgesetz der O zustrebt; charakteristisch für die Geschwindigkeit der Abnahme ist die Relaxationszeit $\tau = \frac{1}{4\pi\Lambda} = \frac{\mathrm{P}}{4\pi}$, für praktische Zwecke bequemer, die mit ihr durch die Gleichung

$$T_d = \tau \ln 10 = 2\cdot 30 \times \tau$$

verbundene »Dezimierungszeit« T_d, d. h. die Zeit, in der die Abweichung auf ein Zehntel ihres ursprünglichen Wertes gesunken ist. Nehmen wir als Mittelwert der Leitfähigkeit der Luft an der Erdoberfläche $\Lambda_O = 2\times 10^{-4}\ \mathrm{sec}^{-1}$ in 10 *km* Höhe $\Lambda_{10} = 2\times 10^{-3}\ \mathrm{sec}^{-1}$ an, so ergibt sich $T_d = 900\ \mathrm{sec} = 15\ \mathrm{min}$, beziehungsweise in 10 *km* Höhe $T_d = 90\ \mathrm{sec} = 1\cdot 5\ \mathrm{min}$, d. h. in 30 Minuten an der Erdoberfläche und in 3 Minuten an der Grenze der Troposphäre, ist eine vorhandene Abweichung vom stationären Zustand bereits auf 1% ihres Anfangswertes abgesunken, also praktisch verschwunden.

Diese Tatsache läßt zwei bedeutsame Schlußfolgerungen zu. Ändert sich Λ oder Z oder beide Größen mit der Zeit aber so langsam, daß die Änderungen von Λ und Z in der Zeit T_d zu vernachlässigen sind, dann befindet sich das elektrische Feld und die übrigen Größen dauernd in dem stationären Zustand, der der jeweiligen Größe von Λ und Z entspricht, so daß die oben aufgestellten Gleichungen (27) bis (43) dauernd gültig bleiben. Nur Änderungen von Λ und Z, die sehr rasch erfolgen, erfordern eine besondere Betrachtung, die weiter unten gegeben wird. Die zweite Folgerung, die wir ziehen können, ist die: Werden dauernde Abweichungen vom stationären Zustande beobachtet, so können diese nur durch Störungsfaktoren bedingt sein, die nichts mit der Leitfähigkeit und dem Zustrom zu tun haben; auch müssen sie andauernd wirken, solange die Störung anhält. Dies ist wichtig mit Rücksicht auf die Vorgänge bei Gewittern.

Was Gleichung (49) für die Abweichung von $\mathfrak{E}$ besagt, gilt natürlich auch für die anderen elektrischen Größen. Bezeichnet Δ die Abweichung irgendeiner dieser Größen vom stationären Endzustand, Δ^O diese Abweichung zur Zeit $t = O$, dann gilt allgemein $\Delta = \Delta^O e^{-4\pi\Lambda t}$.

§ 6. Die Leitfähigkeit der Luft ist eine Funktion von r und t; der Zustrom ist konstant.

Um diesen Fall zu behandeln, gehen wir wieder von Gleichung (46) aus und suchen das vollständige Integral dieser Differentialgleichung gleich für den allgemeinsten Fall, daß sowohl Λ wie Z Funktionen von t sind. Die bekannte Lösung ist:

$$\mathfrak{E} = e^{-\int\limits_0^t 4\pi\Lambda\,dt}\left[\mathfrak{E}^0 - \int\limits_0^t \frac{Z}{r^2}\, e^{\int\limits_0^t 4\pi\Lambda\,dt}\,dt\right] \tag{50}$$

Allgemein läßt sich auch für konstantes Z das Integral in der Klammer nicht ausführen; wir können aber darüber folgendes sagen: Eine erste Annäherung ergibt sich, wenn wir Λ durch seinen zeitlichen Mittelwert $\overline{\Lambda} = \frac{1}{t}\int\limits_0^t \Lambda\,dt$ ersetzen und diesen während der betrachteten Zeit als konstant voraussetzen. Wir erhalten dann

$$\mathfrak{E} = \left(\mathfrak{E}^0 + \frac{Z}{4\pi\overline{\Lambda}r^2}\right)e^{-4\pi\overline{\Lambda}t} - \frac{Z}{4\pi\overline{\Lambda}r^2}, \tag{50a}$$

also denselben Ausdruck wie Gleichung (47), nur ist darin Λ durch $\overline{\Lambda}$ ersetzt.

Begnügt man sich nicht mit dieser Annäherung, so kann man zur Darstellung von $\mathfrak{E}$ Reihenentwicklungen verwenden, auf die an anderer Stelle noch näher eingegangen werden soll, und man kann zeigen, daß die durch das variable Λ hervorgerufene Änderung von $\mathfrak{E}$ bei konstantem Zustrom, identisch ist mit der Änderung von $\mathfrak{E}$ bei konstantem Λ und entsprechend variablem Z.

§ 7. Die Leitfähigkeit der Luft ist konstant und der Zustrom zeitlich variabel.

Zur Behandlung dieses Falles müssen wir an das Integral Gleichung (50) anknüpfen. Den Fall, daß das Z langsam veränderlich ist, haben wir bereits in § 5 betrachtet; es ergibt sich hier merklich genau $\mathfrak{E} = -\frac{Z}{4\pi r^2\overline{\Lambda}}$. Es bleibt daher nur zu untersuchen, was eintritt, wenn Z in der Zeit T_d eine starke Änderung erleidet. Hier wollen wir drei einfache Fälle herausgreifen.

a) Z wächst linear mit der Zeit.

Wir setzen

$$Z = Z^0 + \left(\frac{d\,Z}{d\,t}\right)^0 t$$

in (50) ein und erhalten, wenn wir zur Abkürzung $4\pi\bar{\Lambda} = \frac{1}{\ }$ setzen:

$$\mathfrak{E} = \left[\mathfrak{E}^0 + \frac{Z^0}{r^2}\bar{\tau} - \frac{1}{r^2}\left(\frac{d\,Z}{d\,t}\right)^0 \bar{\tau}^2\right] e^{-\frac{t}{\bar{\tau}}} -$$

$$- \frac{\bar{\tau}}{r^2}\left[Z^0 + \left(\frac{d\,Z}{d\,t}\right)^0 (t - \bar{\tau})\right] \qquad (51)$$

Wird t groß gegen so verschwinden die Anfangsglieder und wir erhalten:

$$\mathfrak{E} = - \frac{Z^0 + \left(\frac{d\,Z}{d\,t}\right)^0 (t - \bar{\tau})}{4\pi\bar{\Lambda}\,r^2}; \qquad (52)$$

der Zähler dieses Ausdruckes bedeutet den Wert von Z zur Zeit $t - \bar{\tau}$, so daß wir sagen können: bei linearer Änderung von Z ist $-4\pi\Lambda r^2\mathfrak{E}$ gleich dem Wert von Z zur Zeit $t - \bar{\tau}$, d. h. die Feldstärke entspricht jeweils einem Werte des Zustromes, der um $\bar{\tau}$ Sekunden zurückliegt, hinkt also dem Zustrom (an der Erdoberfläche) um etwa $\bar{}$ Minuten nach.

b) Z springt plötzlich vom Werte Z^0 auf Z'

Wir nehmen an, der Zustrom habe einen dauernd konstanten Wert Z^0 gehabt, so daß sich das Feld bereits in den stationären Zustand einstellen konnte. Im Zeitintervall 0 bis Δt wachse der Zustrom plötzlich auf den Betrag Z',

$$\frac{d\,Z}{d\,t} = \frac{Z' - Z^0}{\Delta t} = \frac{\Delta Z}{\Delta t}$$

Vom Zeitpunkt Δt ab sei Z wieder konstant gleich Z'. Wir rechnen zunächst für das Zeitintervall $0 - \Delta t$ nach den Formeln des vorigen Abschnittes. Es ist

$$\mathfrak{E}^0 = - \frac{Z^0}{r^2}\bar{\tau},\ \left(\frac{d\,Z}{d\,t}\right)^0 = \frac{\Delta Z}{\Delta t}$$

Setzen wir diese Werte in (51) ein und berechnen den Wert von $\mathfrak{E}$

zur Zeit Δt, so ergibt sich, wenn $e^{-\frac{\Delta t}{\bar{\tau}}}$ nach Potenzen von Δ entwickelt wird:

$$\mathfrak{E} = -\left(Z^0 + \Delta Z \frac{\Delta t}{2\bar{\tau}}\right)\frac{\bar{\tau}}{r^2} = \frac{\bar{\tau}}{r^2}\left[Z' - \Delta Z\left(1 - \frac{\Delta t}{2\bar{\tau}}\right)\right] \quad (53)$$

und

$$\frac{\mathfrak{E} - \mathfrak{E}^0}{\mathfrak{E}^0} = \frac{\Delta Z}{Z^0} \cdot \frac{\Delta t}{2\bar{\tau}} \quad (54)$$

d. h. der relative Sprung von $\mathfrak{E}$ ist $\frac{2\bar{\tau}}{\Delta t}$ mal kleiner als der ihn verursachende relative Sprung von Z. Sollte sich einmal herausstellen, daß gleichzeitige Sprünge von $\mathfrak{E}$ an den verschiedenen Orten der Erde auftreten, so könnte mit Sicherheit auf einen $\frac{2\bar{\tau}}{\Delta t}$ mal größeren Sprung von Z geschlossen werden. (Eventueller Zusammenhang magnetischer Gewitter mit luftelektrischen Störungen.)

c) Z schwankt periodisch um einen mittleren Wert.

Setzen wir

$$Z = \bar{Z} + Z^* \sin \nu t = \bar{Z}(1 + \zeta \sin \nu t), \; \zeta = \frac{Z^*}{\bar{Z}}$$

in Gleichung (50) ein, so ergibt sich nach Ausführung des Integrals

$$\mathfrak{E} = \left[\mathfrak{E}^0 + \frac{\bar{Z}\bar{\tau}}{r^2} - \frac{Z^*}{r^2}\,\frac{r}{(4\pi\Lambda)^2 + \nu^2}\right] e^{-\frac{t}{\bar{\tau}}} -$$

$$- \frac{\bar{\tau}\bar{Z}}{r^2}\left[1 + \zeta \frac{4\pi\bar{\Lambda}}{\sqrt{(4\pi\bar{\Lambda})^2 + \nu^2}} \sin(\nu t - \delta)\right] \quad (55)$$

wobei

$$tg\,\delta = \nu\bar{\tau}, \; \nu = \frac{2\pi}{\mathfrak{T}}$$

ist, wenn $\mathfrak{T}$ die Periode von Z bedeutet. Der stationäre Zustand, der in Zeiten, die groß gegen $\bar{\tau}$ sind, erreicht wird, ergibt sich als

$$\mathfrak{E}^s = -\frac{\bar{Z}}{4\pi\Lambda r^2}\left[1 + \zeta \frac{4\pi\Lambda}{\sqrt{(4\pi\Lambda)^2 + \nu^2}} \sin(\nu t - \delta)\right] =$$

$$= -\frac{\bar{Z}}{4\pi\Lambda r^2}\left[1 + \varepsilon \sin(\nu t - \delta)\right], \quad (56)$$

vobei

$$\zeta \frac{4\pi\bar{\Lambda}}{\sqrt{(4\pi\bar{\Lambda})^2+\nu^2}} = \zeta \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{P}}{2\mathfrak{T}}\right)^2}} = \zeta\,\mathfrak{V} = \varepsilon \text{ ist.} \qquad (57)$$

Vir können

$$-\frac{\bar{Z}}{4\pi\bar{\Lambda}\,r^2} = \bar{\mathfrak{E}}, \quad \varepsilon\bar{\mathfrak{E}} = \mathfrak{E}^*$$

etzen und erhalten dann

$$\mathfrak{E}^s = \bar{\mathfrak{E}}\,[1+\varepsilon \sin(\nu t - \delta)] = \bar{\mathfrak{E}} + \mathfrak{E}^* \sin(\nu t - \delta). \qquad (58)$$

Diese Gleichung läßt unmittelbar erkennen, daß eine periodische Änderung von Z einen periodisch veränderlichen Zustand von $\mathfrak{E}$ als stationären erzwingt, der die gleiche Periode $\mathfrak{T}$ und die Phasenverschiebung δ besitzt.

Messen wir die Amplituden in Bruchteilen des Mittelwertes, so bedeutet $\zeta = \frac{Z^*}{\bar{Z}}$ die Amplitude von Z und $\varepsilon = \frac{\mathfrak{E}^*}{\bar{\mathfrak{E}}}$ die von $\mathfrak{E}$; die Größe $\mathfrak{V}$ in (57) kann als Amplitudenverkleinerung aufgefaßt werden. Die erzwungene Schwingung des Feldes kann daher durch die beiden Größen $\mathfrak{V}$ und δ charakterisiert werden; wir brauchen also bloß die Abhängigkeit von δ und $\mathfrak{V}$ von $\mathfrak{T}$ zu diskutieren. Da

$$tg\,\delta = \nu\bar{\tau} = \frac{\bar{\mathrm{P}}}{2\mathfrak{T}}$$

und

$$\mathfrak{V} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\bar{\mathrm{P}}}{2\mathfrak{T}}\right)^2}}$$

sehen wir, daß die Phasenverschiebung sowohl wie die Amplitudenverkleinerung nur vom Verhältnis $\frac{\bar{\mathrm{P}}}{\mathfrak{T}}$ abhängt. Für Perioden von Z, die groß gegen $\bar{\mathrm{P}}$ sind, wird $tg\,\delta$ und daher δ klein und $\mathfrak{V}$ nähert sich der Einheit. Ist dagegen $\mathfrak{T}$ klein gegen $\bar{\mathrm{P}}$, dann nähert sich δ dem Wert $\frac{\pi}{2}$ und die Verkleinerung dem Wert $\mathfrak{V} = \frac{2\mathfrak{T}}{\bar{\mathrm{P}}}$. Für dazwischenliegende Werte ergibt die folgende Tabelle einige Zahlen, die zur allgemeinen Orientierung ausreichen

P										
0	0·2	0·5	1·0	2·0	3·0	4·0	5·0	10·0	100	∞
1	0·98	0·89	0·71	0·45	0·32	0·24	0·20	0·10	0·01	0
0·00	0·03	0·08	0·13	0·18	0·20	0·21	0·22	0·235	0·247	0·25

Die Zahlen der letzten Reihe geben die Phasenverschiebung der beiden Wellen ausgedrückt in Bruchteilen von $\mathfrak{T}$.

Zusammenfassend läßt sich sagen: eine periodische Schwankung des Zustromes ruft eine Schwankung von $\mathfrak{E}$ mit gleicher Periode, aber verkleinerter Amplitude hervor.

Wie stark die Verkleinerung der Amplituden wird, hängt nur vom Wert des spezifischen Widerstandes der Luft in der gerade betrachteten Schichte verglichen mit $\mathfrak{T}$ ab, was am besten aus folgenden Zahlen entnommen werden kann.

$\mathfrak{T}$ in min		0	0·25	2·5		10		50	100	∞
$\mathfrak{V} = \frac{\varepsilon}{\zeta}$	$\overline{P} = 83$ min	0·0	0·006	0·066	0·12	0·23	0·51	0·77	0·93	1·00
	$P = 8·3$ min	0·0	0·060	0·51	0·77	0·93	0·990	0·997	0·999	1·00

Es ergibt sich in Übereinstimmung mit den Ausführungen der früheren Abschnitte, daß für größere Perioden $\mathfrak{T}$ die Schwankung des Feldes ein getreues Abbild der Schwankungen des Zustromes darstellt.

§ 8. Anwendung der bisherigen Untersuchungen auf die wirklichen Verhältnisse in der Atmosphäre.

I. Einige Festsetzungen über Mittelbildungen.

Wenn wir den Versuch machen wollen, die in den vorigen Abschnitten an einem so einfach gebauten Modell gewonnenen Resultate auf die höchst verwickelten Verhältnisse in unserer Atmosphäre anzuwenden, so kann dies offenbar nur durch Verwendung von Mittelwerten geschehen.

Es sollen daher zunächst eine Anzahl verschiedener Arten von Mittelwerten unterschieden und genau definiert werden. Irgendeine Größe A sei eine Funktion der drei Raumkoordinaten r, λ, φ und der Zeit t. Dann wollen wir zunächst bei konstantem r und t bilden $\int A\,df$, erstreckt über die ganze Kugelfläche mit dem Radius r; diesen Wert des Integrales setzen wir gleich $4\pi r^2 \widehat{A}$ und nennen $\widehat{A} = \frac{1}{4\pi r^2}\int A\,df$ das »Flächenmittel« von A oder kurz das »Mittel« und bezeichen es durch $\frown$ über der Größe. Analog bilden wir bei konstantem r, λ, φ das »laufende Zeitmittel zur Zeit t

$$\bar{A} = \frac{1}{t}\int_0^t A\,d\,t$$

und bezeichnen es durch einen Querstrich über der Größe. Ferner benötigen wir eine zweite Art der Zeitmittelbildung, die wir »Zeitintervallmittel« (Stundenmittel, Tagesmittel, Monatsmittel und Jahresmittel) nennen und durch $\sqcap$ bezeichnen wollen, wobei, wenn nötig, durch Beisetznng der Buchstaben h, d, m, a das Zeitintervall (Stunde, Tag, Monat, Jahr) gekennzeichnet wird. Das Zeitintervallmittel ist definiert durch

$$\overline{\overline{A}} = \frac{1}{T}\int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} A\,d\,t$$

Schließlich können wir noch bei konstantem λ, t über r integrieren und wollen

$$\widehat{A} = \frac{1}{H}\int_{r_0}^{r_0+H} A\,d\,r$$

das »Höhenmittel« von A nenen.

Flächen-, Zeitintervall- und Höhenmittelbildungen können nacheinander auf dieselbe Größe angewendet werden, und da die Integrationsfolge vertauscht werden kann, ergibt sich

$$\widehat{\widehat{A}} = \widehat{\widehat{A}},\quad \overline{\widehat{A}} = \widehat{\overline{A}},\quad \overline{\widehat{\widehat{A}}} = \widehat{\overline{\widehat{A}}} = \widehat{\widehat{\overline{A}}}$$

u. s. w.

Einige Bemerkungen bezüglich der Mittelwerte von Differentialquotienten sind noch von Wichtigkeit. Definitionsgemäß ist

$$\widehat{\frac{\partial A}{\partial t}} = \frac{1}{4\pi r^2}\int \frac{\partial A}{\partial t}\,d\,f$$

und

$$\frac{\partial \widehat{A}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi r^2}\,\frac{\partial}{\partial t}\int A\,d\,f;$$

da nun bei der Integration über die Fläche t als konstanter Parameter zu betrachten ist, so ist

$$\frac{\partial \widehat{A}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi r^2}\,\frac{\partial}{\partial t}\int A\,d\,f = \frac{1}{4\pi r^2}\int \frac{\partial A}{\partial t}\,d\,f,$$

woraus folgt, daß

$$\frac{\widetilde{\partial A}}{\partial t} = \frac{\partial \widetilde{A}}{\partial t}$$

ist. Genau das Gleiche gilt bezüglich des Höhenmittels; es ist

$$\frac{\widehat{\partial A}}{\partial t} = \frac{\partial \widehat{A}}{\partial t}.$$

Auch bezüglich des Zeitintervallmittels über einen Differentialquotienten nach der Zeit gilt die analoge Beziehung

$$\overline{\frac{\partial A}{\partial t}} = \frac{\partial \overline{A}}{\partial t}$$

denn einerseits ist

$$\overline{\frac{\partial A}{\partial t}} = \frac{1}{T}\int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} \frac{\partial A}{\partial t}\, d\,t = \frac{1}{T}\int d\,A = \frac{1}{T}\left[A^{t+\frac{T}{2}} - A^{t-\frac{T}{2}}\right]$$

andrerseits ergibt sich

$$\frac{\partial \overline{A}}{\partial t} = \frac{1}{T}\,\frac{\partial}{\partial t}\int A\,d\,t$$

und nach den Regeln für die Differenzierung von Integralen wird

$$\frac{\partial \overline{A}}{\partial t} = \frac{1}{T}\left[A^{t+\frac{T}{2}} - A^{t-\frac{T}{2}}\right] = \overline{\frac{\partial A}{\partial t}} \text{ q. e. d.}$$

Dagegen gilt eine analoge Beziehung nicht mehr für

$$\frac{\widehat{\partial A}}{\partial r} \text{ und } \frac{\partial \widehat{A}}{\partial r}, \text{ denn}$$

$$\frac{\widehat{\partial A}}{\partial r} = \frac{1}{H}\int_{r_0}^{r_0+H} \frac{\partial A}{\partial r}\, d\,r = \frac{1}{H}\left[A^{r_0+H} - A^{r_0}\right],$$

während

$$\frac{\partial \widehat{A}}{\partial r} = \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial r} \int_{r_O}^{r_O + H} A\, d\, r = O \text{ wird.}$$

Ebenso ist $\overline{\frac{\partial A}{\partial t}}$ nicht gleich $\frac{\partial \bar{A}}{\partial t}$

II. Allgemein gültige Beziehungen über gewisse Mittelwerte in der Atmosphäre.

Wenden wir den Gauß'schen Satz auf eine Kugelfläche vom Radius r an, so erhalten wir

$$\int \mathfrak{E}\, d f = 4 \pi (e + e_O) = 4 \pi r^2 \widehat{\mathfrak{E}}$$

oder

$$r^2 \widehat{\mathfrak{E}} = e + e_O. \tag{59}$$

Diese Beziehung gilt streng für ein beliebig kompliziertes Erdfeld, wenn wir unter $\mathfrak{E}$ die Vertikalkomponente der Feldstärke verstehen. Die gesamte innerhalb der Kugelfläche mit dem Radius r vorhandene Ladung, bestehend aus der Erdladung e_O und der Raumladung der Atmosphäre e, kann nur durch den Zustrom und den Leitungsstrom eine Änderung erfahren. Um Mißverständnissen vorzubeugen, sei hier nochmals daran erinnert, daß wir in diesem Teil der vorliegenden Arbeit Elektrizitätstransport durch konvektive Vorgänge außer Betracht lassen; unsere Betrachtungen auf die Atmosphäre angewendet, setzen also voraus, daß der Gesamtkonvektionsstrom durch eine Kugelfläche zu vernachlässigen ist. Es ergibt sich daher (streng gültig, wenn j die Vertikalkomponente des Leitungsstromes bedeutet)

$$\frac{d (e + e_O)}{d t} = - Z - \int j d f = - Z - 4 \pi r^2 \widehat{j} \tag{60}$$

Gleichung (59) nach t differenziert ergibt mit (60)

$$r^2 \frac{\partial \widehat{\mathfrak{E}}}{\partial t} = - Z - 4 \pi r^2 \widehat{j}. \tag{61}$$

Bilden wir nun das Zeitintervallmittel auf beiden Seiten der Gleichung (61), so erhalten wir

$$r^2 \overline{\frac{\partial \overset{\frown}{\mathfrak{E}}}{\partial t}} = -\overline{Z} - 4\pi r^2 \overline{\overset{\frown}{j}} \tag{62}$$

und durch Anwendung der Mittelwertsätze des vorigen Abschnittes zunächst

$$\frac{\partial \overline{\overset{\frown}{\mathfrak{E}}}}{\partial t} = -\frac{\overline{Z}}{r^2} - 4\pi \overline{\overset{\frown}{j}}$$

und nach Vertauschung der Reihenfolge der Mittelwertsbildungen

$$\frac{\partial \overset{\frown}{\overline{\mathfrak{E}}}}{\partial t} = -\frac{\overline{Z}}{r^2} - 4\pi \overset{\frown}{\overline{j}} \tag{63}$$

Bezeichnen wir nun noch den Quotienten

$$\frac{\overset{\frown}{\overline{j}}}{\overset{\frown}{\overline{\mathfrak{E}}}} = \tilde{\Lambda} \tag{64}$$

so erhalten wir eine Differentialgleichung für $\overset{\frown}{\overline{\mathfrak{E}}}$ in folgender Form:

$$\frac{\partial \overset{\frown}{\overline{\mathfrak{E}}}}{\partial t} + 4\pi \tilde{\Lambda} \overset{\frown}{\overline{\mathfrak{E}}} = -\frac{\overline{Z}}{r^2}, \tag{65}$$

die vollkommen analog der Gleichung (46) gebaut ist.

Wir wollen nun dazu übergehen, die Bedeutung dieser Gleichung zu besprechen. Da bei der Zeitintervallmittelbildung, die vorgenommen wurde, um auf beobachtete Größen zu kommen, keine bestimmte Zeitperiode vorausgesetzt wurde, so gilt die Gleichung für alle Zeitmittel. Wir wollen im Interesse der Anschaulichkeit ein bestimmtes Zeitmittel ins Auge fassen und unter $\overline{\mathfrak{E}}$ und $\overline{Z}$ die Tagesmittel der betreffenden Größen verstehen. $\overset{\frown}{\overline{\mathfrak{E}}}$ bedeutet dann den Mittelwert des Tagesmittels der Feldstärke über die ganze Kugelfläche genommen. $\overset{\frown}{\overline{\mathfrak{E}}}$ und $\overline{Z}$ sind als Funktionen der Zeit zu betrachten und die Gleichung (65) gibt ihren Zusammenhang wieder. $\tilde{\Lambda}$ ist eine Art Mittelwert von Λ, der völlig exakt nach Gleichung (64) durch beobachtbare Werte definiert ist. Er unterscheidet sich von $\overset{\frown}{\overline{\Lambda}}$ zwar theoretisch, praktisch wird aber jedenfalls in der Größenordnung kein Unterschied bestehen, da Λ nur innerhalb verhältnismäßig enger Grenzen schwankt und j erfahrungsmäßig noch konstanter ist.

Wenden wir Gleichung (65) zunächst auf die Erdoberfläche an, so erhalten wir

$$\frac{\partial \overline{\widehat{\mathfrak{E}}}_O}{\partial t} + 4\pi \tilde{\Lambda}_O \overline{\widehat{\mathfrak{E}}}_O = - \frac{\overline{Z}}{r^2}, \tag{66}$$

also genau dieselbe Differentialgleichung, wie wir sie für die homogene Atmosphäre bereits ausführlich diskutiert haben. Das hat zur Folge, daß für das wirkliche Erdfeld bezüglich des Mittelwertes des Tages(Stunden-, Jahres)mittels dieselben Beziehungen zu $\tilde{\Lambda}$ und $\overline{Z}$ bestehen, die auch für die homogene Atmosphäre für die Einzelwerte gelten.

Zunächst wird es zweckmäßig sein, die Größenordnung der einzelnen Glieder der Differentialgleichung festzustellen. Dividieren wir Gleichung (66) durch 4π, so ergibt sich

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \overline{\widehat{\mathfrak{E}}}_O}{\partial t} + \widehat{j}_O = - \overline{} \tag{67}$$

$\widehat{j}_O$ ist der Mittelwert des Zeitintervallmittels des vertikalen Leitungsstromes, er ist von der Größenordnung $10^{-6} \frac{\text{Aes}}{cm^2}$. Die Werte von $\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathfrak{E}_O}{\partial t}$ sind aus folgender Tabelle zu entnehmen.

Wenn $\mathfrak{E}_0$ 1 V der Zeit von	1 Sek.	1 Stunde	1 Tag	1 Jahr wächst,
so ist $\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathfrak{E}_0}{\partial t}$ in $\frac{\text{Aes}}{\text{cm}}$	$2 \cdot 6 \times 10^{-6}$	$7 \cdot 4 \times 10^{-10}$	$3 \cdot 1 \times 10^{-11}$	$8 \cdot 5 \times 10^{-11}$
und $\frac{1}{j_0} \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathfrak{E}_0}{\partial t}$ für $j_0 = 10^{-6}$	$2 \cdot 6$	$7 \cdot 4 \times 10^{-4}$	$3 \cdot 1 \times 10^{-5}$	$8 \cdot 5 \times 10^{-8}$

Nun wollen wir aus den beobachteten Werten von $\mathfrak{E}_O$ sicher zu hoch angenommene Werte von $\frac{\partial \overline{\widehat{\mathfrak{E}}}_O}{\partial t}$ herausgreifen; ist $\mathfrak{E}_O$ eine harmonische Funktion der Zeit mit der Amplitude $\mathfrak{E}_O^*$, so ist der Maximalwert von $\frac{\partial \mathfrak{E}_O}{\partial t}$ gegeben durch $\frac{2\pi}{\mathfrak{T}} \mathfrak{E}_O^*$, wo $\mathfrak{T}$ die betreffende Periode bezeichnet. Betrachten wir zunächst die Tagesperiode von $\mathfrak{E}_O$; $\mathfrak{E}_O^* = 100 \frac{\text{V}}{\text{m}}$ ist schon für eine Einzelstation ein extrem hoher Wert für die Tagesschwankung und wird im Mittel über die ganze Erde bestimmt weit unterschritten. Diesem Werte der Tagesamplitude entspricht als Maximum des Anstieges des Stundenmittels mit der Zeit der Wert von

$$\frac{2\pi \times 100}{4\pi} = 50 \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m\,d}} \quad \text{für} \quad \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \hat{\bar{\mathfrak{E}}}^h_O}{\partial t}$$

das wäre nach obiger Tabelle

$$50 \times 3 \cdot 1 \times 10^{-11} \frac{\mathrm{Aes}}{cm^2} = 150 \times 10^{-11} \frac{\mathrm{Aes}}{cm^2}$$

und für

$$\frac{1}{\bar{j}^d_O} \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \hat{\bar{\mathfrak{E}}}^h_O}{\partial t} = 0 \cdot 0015.$$

Wir sehen somit, daß selbst unter der Annahme ganz extremer Werte für die zeitlichen Schwankungen des Stundenmittels der Feldstärke sich $\hat{\bar{j}}_O$ und $\bar{z}$ nur um etwa 1 pro mille unterscheiden. Gehen wir von Stundenmitteln zu Tagesmitteln über und betrachten die zeitlichen Änderungen des Tagesmittels im Laufe eines Jahres, so wird der Unterschied zwischen j_O und noch 1000mal kleiner.

Ist daher das Zeitintervall, in dem wir den Verlauf von $\hat{\bar{\mathfrak{E}}}_O$ verfolgen wollen, von der Größenordnung eines Tages oder noch größer, so kann in Gleichung (66) und (67) $\frac{\partial \hat{\bar{\mathfrak{E}}}_O}{\partial t}$ gegenüber den anderen Gliedern vernachlässigt werden, d. h. es gilt merklich genau

$$\hat{\bar{j}}_O = -\overline{} = \tilde{\Lambda}_O \hat{\bar{\mathfrak{E}}}_O. \tag{68}$$

Diese Gleichung sagt aus, daß der Mittelwert des Zeitmittels des vertikalen Leitungsstromes jederzeit gleich ist dem Zeitmittel des Zustromes. Nur durch wesentlich kürzere Zeitintervalle hindurch kann zwischen den beiden Größen ein merkbarer Unterschied bestehen.

Besäßen wir ein genügend dichtes Netz luftelektrischer Beobachtungsstationen, so würden wir imstande sein, aus den Messungen von j_O den zeitlichen Verlauf des Zustromes unmittelbar entnehmen zu können. Nach dem spärlich vorliegenden Beobachtungsmaterial können wir nur vermuten, daß $\overline{}$ und $\hat{\bar{j}}_O$ vielleicht eine schwache tägliche und eine etwas stärkere jährliche, möglicherweise auch eine ausgeprägte 11jährige Periode besitzt.

$\hat{\bar{\mathfrak{E}}}_O$ hängt außer vom Zustrom noch von $\tilde{\Lambda}_O$ als zweitem Faktor ab. Bezeichnen wir den reziproken Wert

$$\frac{1}{\tilde{\Lambda}} = \tilde{\mathrm{P}}_O = \frac{\hat{\bar{\mathfrak{E}}}_O}{\hat{\bar{j}}_O}$$

als mittleren spezifischen Widerstand der Luft, so können wir schreiben

$$\overline{\overline{\mathfrak{E}}}_O = - \quad . \tilde{\mathrm{P}}_O. \tag{69}$$

Diese Gleichung sagt aus, daß der Mittelwert von $\mathfrak{E}_O$ nur von zwei Faktoren abhängt, dem Zeitmittel der Zustromdichte und dem Mittelwert des spezifischen Widerstandes der Luft, infolgedessen unabhängig ist von der Art, wie die Raumladung in der Atmosphäre verteilt ist, wie sich die Leitfähigkeit in den höheren Schichten verhält, ob sich Gewitter oder sonstige Störungen vollziehen, falls nur während der betrachteten Zeitperiode der Erde im Mittel keine merklichen Mengen von Elektrizität durch konvektive Prozesse entzogen oder zugeführt werden.

Leider ist das Beobachtungsmaterial nicht annähernd ausreichend, um die Gleichung (69) prüfen zu können; wir können bloß auf ganz allgemeinen Überlegungen fußende Vermutungen aufstellen. Betrachten wir zunächst den Verlauf von $\overline{\overline{\mathfrak{E}}}_O$ während eines Tages. Da wird es zweckmäßig sein, unter $\overline{\mathfrak{E}}_O$ Stundenmittel zu verstehen. Die tägliche Schwankung von $\overline{\overline{\mathfrak{E}}}_O$ setzt sich dann zusammen aus der täglichen Schwankung von $\overline{z}$, die vermutlich gering ist, jedenfalls aber geringer als die von $\overline{\overline{\mathfrak{E}}}_O$ selbst und aus der von $\tilde{\mathrm{P}}_O$. Daß $\tilde{\mathrm{P}}_O$ im Lauf eines Tages schwankt, ist durchaus verständlich, wenn wir an die Faktoren denken, von denen $\tilde{\mathrm{P}}_O$ abhängt; insbesondere ist zu vermuten, daß die Verteilung von Land und Wasser auf der Erde den maßgebenden Einfluß ausüben; die mittlere Leitfähigkeit wird andere Werte besitzen, wenn die Wasserhalbkugel Tag hat, als wenn die Landseite von der Sonne beschienen wird; außerdem werden meteorologische Einflüsse unregelmäßige Schwankungen von $\tilde{\mathrm{P}}_O$ bedingen können.

Bei Betrachtung der jährlichen Änderungen von $\overline{\overline{\mathfrak{E}}}_O$ werden wir Tagesmittel zugrunde legen; da werden die jahreszeitlichen Änderungen der Leitfähigkeit in erster Linie bedingt sein durch den Unterschied in der Beschaffenheit der Nord- und Südhalbkugel; $\tilde{\mathrm{P}}_O$ wird andere Werte haben, wenn die Nordhalbkugel Sommer und die Südhalbkugel Winter hat und umgekehrt. Die unregelmäßigen Einflüsse der Witterung werden sich weniger bemerkbar machen als bei der Tagesschwankung.

Gehen wir zu noch größeren Zeitperioden über, etwa zur 11jährigen Sonnenfleckenperiode und legen Jahresmittel der einzelnen Größen zugrunde, so ist wohl zu vermuten, daß jetzt $\tilde{\mathrm{P}}_O$ der konstantere Faktor sein wird und die Änderung von $\overline{\overline{\mathfrak{E}}}_O$, die nach den Untersuchungen von L. A. Bauer höchstwahrscheinlich vorhanden ist, also hauptsächlich durch die Änderung von $\overline{z}$ bedingt wird, was ja bei einer Änderung der Sonnenfleckenzahlen nicht unwahrscheinlich ist.

In Anbetracht des Umstandes, daß das Beobachtungsmaterial nicht einmal ausreicht, den Verlauf von $\hat{\overline{\mathfrak{E}}}_O$ und $\tilde{\Lambda}_O$ zu bestimmen, verzichten wir darauf, die übrigen Größen, die etwa noch von Interesse sind, als $\mathfrak{E}$ in der Höhe h, $\hat{\overline{\rho}}$, $\hat{\overline{V}}$ etc. eingehender zu besprechen. Es genügt darauf hinzuweisen, daß die Gleichungnn (27) bis (38) sinngemäß Anwendung finden können. Hervorzuheben wäre nur, daß $\hat{\overline{\mathfrak{E}}}$ außer vom Zustrom nur abhängt von dem Mittelwert des spezifischen Widerstandes in der Höhe, in der wir $\mathfrak{E}$ betrachten, während der Widerstand der Luft und damit der Potentialunterschied $\widehat{\overline{V_H - V_O}}$ von $\hat{\overline{\mathrm{P}}}$ dem mittleren spezifischen Widerstand der ganzen Atmosphäre abhängig ist.

Schließlich sei noch einmal betont, daß Gleichung (66) unter den gemachten Voraussetzungen streng gültig ist und auf eine beliebig unregelmäßige Feldverteilung Anwendung findet.

§ 9. Zusammenfassung.

Im zweiten Abschnitt wurde zunächst versucht, an einem sehr vereinfachten Modell der Atmosphäre einen Einblick in das Getriebe der luftelektrischen Vorgänge zu gewinnen. Es wurde vorausgesetzt, daß die Leitfähigkeit der Atmosphäre nahe dem Erdboden über allen Teilen der Erde gleich groß ist, und daß kein Transport von Elektrizität durch konvektive Prozesse eintritt, sondern nur durch Luftleitung und durch den Zustrom, von dem vorausgesetzt wird, daß er nicht durch Leitung und Konvektion bewegter Luftmassen bedingt ist.

Zunächt wurde der einfachste Fall behandelt, daß Zustrom und Leitfähigkeit der Luft zeitlich konstant seien; für diesen Fall ergibt sich, daß ein stationärer Zustand eintritt, der in folgender Weise charakterisiert ist. Der Zustrom bestimmt die Größe der Leitungsstromdichte an der Erdoberfläche und in den höheren Schichten. $\mathfrak{E}_O$ ist bestimmt durch Z und Λ_O, $\mathfrak{E}$ in der Höhe h durch Z und Λ in der Höhe h, unabhängig davon, wie Λ zwischen der Erdoberfläche und der Höhe h sich ändert. ρ ist gegeben durch die Art der Abnahme von Λ mit der Höhe und $V - V_O$ durch einen Mittelwert von P zwischen O und h. Versetzen wir diese Atmosphäre künstlich in einen Zustand, der vom stationären Zustand abweicht, dann stellt sich der stationäre Zustand bei einer Leitfähigkeit, die der Größenordnung der wirklichen Leitfähigkeit der Luft entspricht, in Bruchteilen einer Stunde wieder her.

Dann wurde der Fall besprochen, daß Λ zeitlich variabel, Z aber konstant ist. Hier gewinnt man eine Annäherung, wenn man Λ durch seinen zeitlichen Mittelwert $\ddot{\Lambda}$ ersetzt. Eine zeitliche Änderung von Λ läßt sich in ihrer Wirkung ersetzen durch ein entsprechend variables Z.

Drittens wird der Fall behandelt, daß Z zeitlich variabel ist. Bei langsamer Änderung von Z folgen alle Größen den Schwankungen von Z; bei rascheren Schwankungen bleiben sie in einem angebbaren Maße hinter Z zurück.

Schließlich wird eine Nutzanwendung der gefundenen Sätze auf die wirkliche Atmosphäre gemacht. Es wird gezeigt, daß, wenn man exakt definierte räumliche und zeitliche Mittelwerte der elektrischen Größen einführt, ganz streng für beliebig komplizierte Verhältnisse für diese Mittelwerte der elektrischen Größen dieselben Beziehungen gelten, wie bei der homogenen Atmosphäre, daß also insbesondere $\overline{\overline{j}}$ nur von $\overline{}$ und $\overline{\overline{\mathfrak{E}}}$ nur von $\overline{z}$ und $\overline{\tilde{\Lambda}}$ in derselben Höhe abhängt.

Wir haben damit einen Einblick in den Elektrizitätshaushalt der Erde im ganzen gewonnen, freilich noch keine Theorie der örtlichen Verschiedenheiten auf der Erde. Diese anzubahnen, soll in den nächsten Abschnitten versucht werden.