Gedruckt mit Unterstützung aus dem Jerome und Margaret Stonborough-Fond.

Über das Exner'sche Polarimeter und eine Anwendungsart dieses Instrumentes

Von

Dr. Otto Tomaschek

(Mit 5 Textfiguren)

(Aus dem II. physikalischen Institut der Universität Wien)

(Vorgelegt in der Sitzung am 9. Juli 1925)

I.

Das von Herrn Hofrat Exner bei seinen Untersuchungen vielfach verwendete Polarimeter ist dem von Cornu nahe verwandt.[1]

Beide Instrumente bestehen im wesentlichen aus einem Wollaston'schen Prisma (W. P.)[2] und einem Nikol (N.), deren Wirkungsweise und Anordnung kurz auseinandergesetzt werden möge.

Ein Lichtstrahlbündel tritt durch ein quatratisches Loch in den Tubus (Länge = 30 *cm*, deutliche Sehweite) des Apparates, durchsetzt das W. P., das bekanntlich aus zwei mit den Hypotenusenflächen aneinander gekitteten Kalkspatprismen besteht, deren Achsen senkrecht, beziehungsweise parallel zur brechenden Kante liegen, und wird dort im ersten Teilprisma in zwei zueinender senkrecht polarisierte Komponenten zerlegt; im zweiten vertauschen die Strahlen (o. und a. o.) ihre Rollen. Da der a. o. einen kleineren Brechungsexponenten besitzt, werden die Strahlen in entgegengesetzter Richtung abgelenkt. Die aus den W. P. austretenden Strahlen werden nun durch einen N. betrachtet. Das Auge nimmt zwei Quadrate wahr, deren Licht der eben gegebenen Erklärung gemäß normal zueinander polarisiert ist und die mit den Seiten aneinander liegen, was durch entsprechende Wahl der Seitenlänge leicht erreicht werden kann.

Ein Helligkeitsvergleich ist daher mit großer Genauigkeit möglich.

W P. und N. sind beim Cornu'schen Polarimeter sowohl gemeinsam, als auch einzeln drehbar, wobei die zwei zugehörigen Zeiger auf derselben Winkelskala spielen, die mitgedreht werden kann. Das Exner'sche Polarimeter hat dagegen für das W. P. und den N. je eine feste Skala. Zwei Skalen bedeuten zur Elimination von Beobachtungsfehlern einen nicht zu unterschätzenden Vorteil.

---

[1] G. Dimmer: »Zur Theorie des Photopol. von Cornu«. Sitzber. d. k. Akad. Wiss. in Wien, math.-naturw. Kl., CXXII. Bd., Jg. 1913.

[2] Die in den Klammern beigefügten Abkürzungen werden folgenden stets verwendet.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Aus diesen Unterschieden ergibt sich die Tatsache, daß die Dimmer'sche Formel nicht unmittelbar angewendet werden kann, sie somit für das Exner'sche Polarimeter zunächst unbrauchbar ist.

Gestützt auf einige einfachere Formeln, soll gezeigt werden, wie unter Zuhilfenahme mehrerer Einstellungen sämtliche Instrumentenfehler gleichzeitig eliminiert werden können, ohne sie erst berechnen zu müssen.

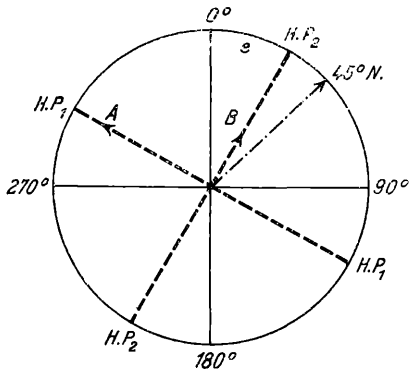

Fig. 1.

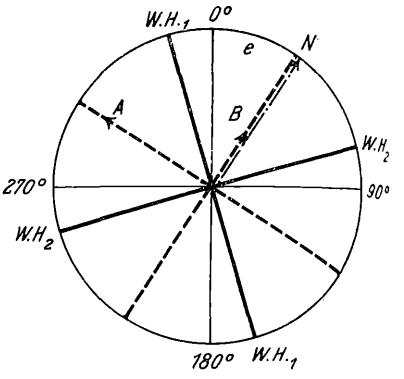

Fig. 2.

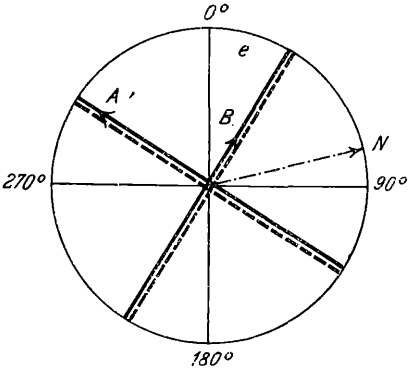

Fig. 3.

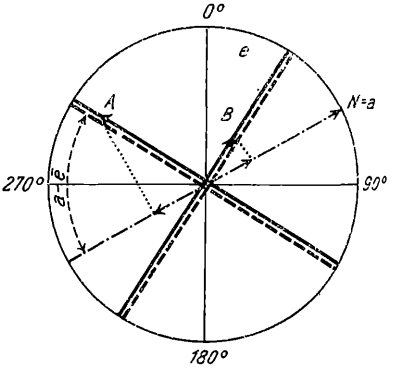

Fig. 4.

Unter der vorläufigen Voraussetzung eines fehlerlosen Instrumentes benützt man zweckmäßig die folgenden vier Stellungen:

1. N.-Zeiger (I) auf 45°, Zeiger des W P. (II) auf 0° Dabei setzen wir eben voraus, daß die N.-Ebene (N. E.) mit den zugehörigen Zeigern (I) und die W.-Hauptebenen (W. H.) mit 0°—180° beziehungsweise 90°—270° zusammenfallen (II). Die Hauptpolarisationsebenen (H. P.), jene Ebenen, welche die zwei aufeinander senkrecht stehenden Komponenten, durch welche man das partiell polarisierte Licht ersetzt denken kann, enthalten und

©Akademie der Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

die durch die Achse des Instrumentes gehen, mögen mit W. H. den Winkel e einschließen. »Ungleiche Helligkeit«!

2. Gemeinsame Drehung des W. P. und des N. im positiven Sinn bis zur »Helligkeitsgleichheit«. I zeigt nun auf e. Die Winkel zwischen W. H. und H. P. sind nun 45°

3. Weitere gemeinsame Drehung um 45° ergibt ein Zusammenfallen der Hauptebenen bei ungleicher Helligkeit.

4. N. wird in entgegengesetzter Richtung, jetzt aber allein bis zur Helligkeitsgleichheit gedreht. I zeige auf a.

Die beigefügten vier Figuren entsprechen den Stellungen 1 bis 4.

Bezeichnet man nun die Amplituden der obigen Komponenten mit A und B, so erhält man nach Malus die Beziehung:

$$A^2 \sin^2 (a—e) = B^2 \cos^2 (a—e)$$

und nach einfacher Umformung:

$$\frac{A^2—B^2}{A^2+B^2} = \cos 2\,(a—e) = p, \tag{1}$$

unter p versteht man nun »den Betrag der Polarisation«.

Für natürliches Licht ist $A = B$, also $p = 0$, für vollständig polarisiertes Licht ist $B = 0$, daher $p = 1$.

Läßt man die Voraussetzung der vollkommenen Exaktheit des Instrumentes fallen, so erhält man die weiteren Formeln, wobei zunächst h als der einzige Fehler auftreten und den Winkel zwischen W H. und H. P. bedeuten möge. Dann ist:

$$(A^2 \sin^2 h + B^2 \cos^2 h) \cos^2 (a—e) = (A^2 \cos^2 h + B^2 \sin^2 h) \sin^2 (a—e)$$

und nach einfacher Umformung:

$$p = \frac{\cos 2\,(a—e)}{\cos 2\,h}, \tag{2}$$

nur muß h bestimmbar sein.

Weiter verallgemeinert bedeutet g den Winkel zwischen N. E. und I. Ferner ebenso l den Winkel zwischen Skalennullpunkt und W H. Dann bestehen, wenn x die Ablesung bedeutet, die Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} a &= x—l—g \\ a—e &= x—t—e \\ t &= l+g \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Um (2) anwenden zu können, hat man t zu bestimmen: Gemeinsame Drehung (W P. und N.) um 90° und Einstellung mit

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

dem N. allein auf Helligkeitsgleichheit ergäbe die Ablesung y. Dann ist:

$$\left.\begin{aligned} e+\pi-f &= \bar{a} = y-t \\ a-e &= f \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Denn es ist $y-t = a$, Ablesung bei vollkommener Exaktheit des Instrumentes, ferner nach (3), (4),

$$a = x-t$$

$$2e-a+\pi = y-t$$

und durch Addition:

$$t = \frac{1}{2}(x+y)-e-\frac{1}{2}\pi. \tag{5}$$

Setzt man diesen Wert für t in (4) ein, so ergibt sich, da zunächst $\cos 2(x-e-t) = p \cos 2h$ ist, schließlich die folgende Form:

$$p = -\frac{\cos(x-y)}{\cos 2h}.$$

Hier ist zwar e bereits eliminiert, jedoch h noch zu bestimmen. Nun zur Erledigung des allgemeinen Falles.

Zwei beliebige Drehungen D_1 und D_2 mit den zugehörigen Ablesungen v und w (nach Einstellung auf Helligkeitsgleichheit mit dem Nikol allein) liefern die allgemeinen Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} \cos 2(\bar{v}-e-t) &= p \cos 2(h+D_1) \\ \cos 2(\bar{w}-e-t) &= p \cos 2(h+D_2) \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

wobei wegen fester Skala:

$$\left.\begin{aligned} \bar{v}-D &= v \\ \bar{w}-D &= w \end{aligned}\right\}$$

ist.

Eliminiert man aus den ersteren h, wählt für D_1, D_2 die speziellen Drehungen $D_1 = 0°$, $D_2 = 45°$, so erhält man, nachdem man noch für t den Wert aus (5) eingesetzt hat:

$$p^2 = \cos^2(x-y)+\sin^2(2z-x-y),$$

wobei y die Bedeutung wie in (6) hat und x, D_1, beziehungsweise D_2 als Ablesungen entsprechen.

Dieser Schlußformel kann man zweckentsprechend die für die Rechnung wesentlich bequemere Form geben:

$$p^2 = \cos^2(x-y)+\sin^2[2(z-x)+(x-y)] = .$$

©Akademie der Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Nach Zerspaltung des zweiten Terms und mehrerer elementaren Umformungen erhält man schließlich eine Formel von der besonderen und wichtigen Eigenschaft, daß das Verschwinden des zweiten Terms totale Polarisation anzeigt:

$$p^2 = 1 + \sin 2\,(z-x)\,\sin 2\,(z-y). \qquad (8)$$

II.

Im folgenden ist das Exner'sche Polarimeter zur Untersuchung des Polarisationsgrades des an spiegelnden Krystallflächen reflektierten Lichtes verwendet worden.

Die Bezeichnungsweise ist die gleiche wie oben.

Hier möge auch auf die ungemein große Leistungsfähigkeit der Instrumentes hingewiesen werden, wie aus dem folgenden noch hervorgehen wird.

Da das Instrument eine Skalenteilung besitzt, welche auf halbe Grade genau mißt, so ergibt sich aus (8), daß im ungünstigsten Fall in den Argumenten Abweichungen bis zu 1 Grad auftreten können. Berücksichtigt man dies und setzt zur Berechnung der maximalen Fehler einen Mittelwert statt verschiedener Argumente, so ergibt sich das Maximum des Fehlers mit Hilfe der Regeln der Differentialrechnung bei einem $M = 0$ Grad. Um den Fehler, der durch Einführung eines Mittelwertes (M) entsteht, auszugleichen, hat man M entsprechend größer einzusetzen.

Führt man diese Rechnung tatsächlich durch, so ergibt sich für Werte von M

zwischen	0°	und	30°	ein möglicher Fehler $< 0{\cdot}017$,
	30		60	$< 0{\cdot}015$,
	60		70	$< 0{\cdot}01$,
	70		90	$\sim 0{\cdot}00$.

Man ersieht daraus, daß die oben erwähnten Abweichungen bis zu 1 Grad, die auf den ersten Blick sehr groß erscheinen, trotzdem nur Fehler von einer Größe hervorbringen, die durchaus zu erwarten ist.

In der Gegend der Polarisationswinkel, wo die Messungen stets am besten auszuführen waren, wenn man nämlich, wie bereits erwähnt, den Polarisationsbetrag reflektierten — vor der Reflexion natürlichen — Lichtes bestimmt, beträgt dieser Fehler nur $1{\cdot}7\%$; bei optischen Beobachtungen auf photometrischer Grundlage wohl selten zu unterbieten.

Um nun alle diese experimentellen Betrachtungen theoretisch zu überprüfen, möge in der folgenden Weise vorgegangen werden.

Die Gleichungen der Polarisationskurven hängen nur vom Brechungsindex der betreffenden Substanz ab. Diese Kurven stellen also in ihrer Gesamtheit eine einparametrische Kurvenschar dar mit dem Parameter n.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Zum Beweis benützt man die Fresnel'schen Gleichungen, aus ihnen folgende Satz von Brewster, die Beziehung (1) und das Brechungsgesetz:

$$p = \frac{A^2 - B^2}{A^2 + B^2} \tag{1}$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n = \operatorname{tg} \alpha_p, \tag{2'}$$

$$\left.\begin{aligned} A &= -a \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} \\ B &= a \frac{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)} \end{aligned}\right\} \tag{3'}$$

Setzt man nun die Werte aus (3') in (1) ein, drückt tg durch sin, cos aus und kürzt so weit als möglich, so erhält man zunächst

$$p = \frac{\cos^2(\alpha-\beta) - \cos^2(\alpha+\beta)}{\cos^2(\alpha-\beta) + \cos^2(\alpha+\beta)} \tag{4'}$$

Verwandelt man den Zähler in ein Produkt und verwendet im Nenner die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} 2\cos^2(\alpha+\beta) &= 1+\cos 2(\alpha+\beta) \\ 2\cos^2(\alpha-\beta) &= 1+\cos 2(\alpha-\beta) \end{aligned}\right\} \tag{5'}$$

so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} 2\left(\cos^2(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha-\beta)\right) &= 2+\cos 2(\alpha+\beta)+\cos 2(\alpha-\beta) = \\ &= 2+2\cos 2\alpha \cos 2\beta \end{aligned}\right\} \tag{6'}$$

oder

$$\left.\begin{aligned} p &= \frac{\sin 2\alpha \sin 2\beta}{1+\cos 2\alpha \cos 2\beta} \\ \sin\alpha : \sin\beta &= n, \quad (2') \end{aligned}\right\} \tag{7'}$$

welche Formeln zusammen die Polarisationskurven eindeutig festlegen; damit ist aber auch gezeigt, daß diese durch n allein charakterisiert sind.

Um zu sehen, wie die experimentelle Formel (8) mit der durch theoretische Überlegungen gewonnen in einem tatsächlich durchgerechneten Fall übereinstimmt, wurden für Steinsalz ($n = 1{\cdot}55$) die beiden gefundenen Kolonnen in der Tabelle zusammengestellt und in der Figur veranschaulicht.

Die Kurve, welche die + verbindet, zeigt die experimentell gefundenen, jene, welche die 0 verbindet, die nach (7') berechneten Werte.

Einfallswinkel α:	Mit Berücksichtigung der max. Fehlergrenzen gefundene exper. Werte p_1	Theor. berechnete Werte p_2:
20°	—	0·16
25	0·28	0·26
30	0·39	0·38
35	0·53	0·52
40	0·67	0·67
45	0·81	0·81
50	0·93	0·93
55	0·99	0·99
60	0·99	0·99
65	0·91	0·91
70	0·78	0·78
75	0·61	0·61
80	0·39	0·41
85	—	0·21

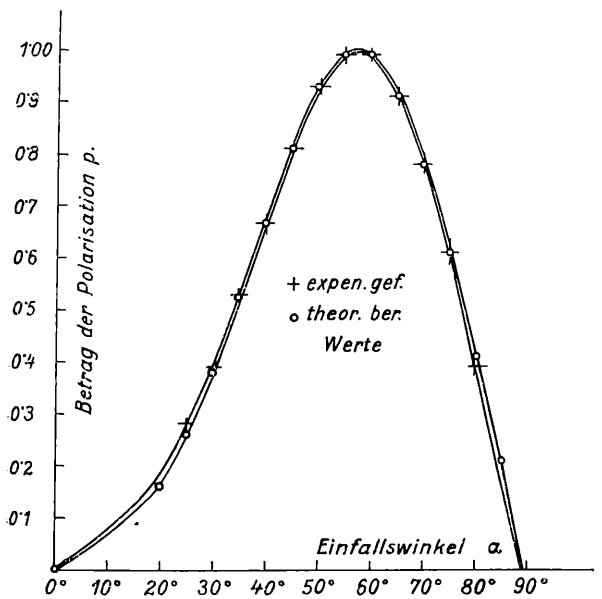

Fig. 5.

Mit Ausnahme der Enden des Intervalls, wo die Messungen wesentlich schwieriger auszuführen waren — es möge nur erwähnt werden, daß bei großem Einfallswinkel die quadratischen Felder, welche photometrisch verglichen werden müssen, nicht mehr ganz beleuchtet waren, denn hier kommt es ja wesentlich auf die Größe des Krystalls an —, stimmen beide Kolonnen (Kurven) in überraschender Weise überein.

Damit ist aber auch die ganz außerordentliche Leistungsfähigkeit des Exner'schen Polarimeters in einwandfreier Weise nachgewiesen.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1925

Band/Volume: 134_2a

Autor(en)/Author(s): Tomaschek Otto

Artikel/Article: Über das ExnerÂ'sche Polarimeter und eine Anwendungsart dieses Instrumentes 317-323