Gedruckt mit Unterstützung aus dem Jerome und Margaret Stonborough-Fonds

Neue Probleme der Projektivität

Von

Wilhelm Olbrich in Wien

(Mit 1 Textfigur)

(Vorgelegt in der Sitzung am 12. Juni 1925)

Unter dem ebenen Problem der Projektivität (Homographie) versteht man das Problem,[1] »zu zwei Gruppen von einer gleichen Anzahl Punkte einer Ebene zwei zueinander gehörige (korrespondierende) Punkte zu finden, welche resp. mit den Punkten der einen und der andern Gruppe verbunden entsprechende Strahlen von zwei projektivischen Strahlbüscheln liefern«.

Sind in einer Ebene π sechs beliebige Punkte gegeben, so gehört zu jedem Punkt p von π ein »sechselementiger Projektionswurf«, der aus den Strahlen besteht, durch die p die gegebenen Punkte projiziert. Über die sechselementigen Projektionswürfe soll diese Arbeit dadurch einen besseren Einblick gewähren, daß gezeigt wird, daß sich durch eine räumliche Abbildung alle sechselementigen Projektionswürfe einer solchen Punktgruppe auf die Punkte einer Regelfläche zweiter Ordnung abbilden lassen.

Dadurch wird es sofort möglich, Fragen zu beantworten über die Anzahl der Paare beziehungsweise Tripel entsprechender Punkte, aus denen zwei oder drei sechselementige Punktgruppen durch gleiche Würfe projiziert werden.

Eine ohne die Abbildung wohl schwer lösbare Aufgabe wird zum Schluß behandelt: Über die Anzahl der Würfe, die angenommen werden müssen, um eine Gruppe von sechs Punkten in der Ebene zu bestimmen, die die gegebenen Würfe als Projektionswürfe besitzt.

Nr. 1. Der fünfelementige Projektionswurf und seine Abbildung im Raum.

In einer Ebene π (siehe Fig.) seien 5 Punkte $1'$, $2'$, $3'$, $4'$, $5'$ gegeben, durch die sich ein nicht zerfallender Kegelschnitt legen lassen soll. Zu jedem von diesen »Grundpunkten in π« ver-

[1] Nach R. Sturm, Das Problem der Projektivität und seine Anwendung auf die Flächen zweiten Grades. Math. Ann. 1 (1869), p. 533.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

schiedenen Punkt p_i gehört der aus den Verbindungsstrahlen von p_i mit den Grundpunkten bestehende fünfelementige Projektionswurf $\mathfrak{P}_i$ (im Sinne von G. Kohn).[1] Jeden in $\mathfrak{P}_i$ enthaltenen vierelementigen Wurf nennen wir einen Teilwurf von $\mathfrak{P}_i$.

Unter den den Punkten von π auf diese Art zugeordneten fünfelementigen Projektionswürfen $\mathfrak{P}_i$ sind jene einander gleich, die zu den Punkten des »Grundkegelschnittes K^2« durch die Grundpunkte gehören. Der einem Grundpunkt zugeordnete Projektionswurf besteht jetzt aus den Verbindungsstrahlen mit den übrigen Grundpunkten und aus der Tangente an K^2 in dem Grundpunkt.

Zu einer räumlichen Abbildung der fünfelementigen Projektionswürfe gelangt man nun auf folgende Weise: Wir ordnen den Grundpunkten $1'$, . . ., $5'$ fünf Punkte 1, . . ., 5 des Raumes zu, von denen keine vier einer Ebene angehören, und nennen sie die »Grundpunkte im Raum«.

Durch diese räumlichen Grundpunkte lassen sich bekanntlich ∞^2 kubische Raumkurven legen, nämlich durch jeden Punkt des Raumes eine. Auf jeder dieser Kurven bestimmen die Grundpunkte einen binären Wurf. Es soll gezeigt werden, daß die kubische Raumkurve durch die Forderung eindeutig bestimmt ist, daß dieser Wurf einem vorgegebenen binären Wurf, etwa $\mathfrak{P}_i$, gleich sei.

Wir benützen dazu die bekannten Eigenschaften einer kubischen Raumkurve, daß ihre Punkte aus jeder ihrer Bisekanten durch projektive Ebenenbüschel projiziert werden und daß es eine einzige solche Kurve gibt, die durch fünf Punkte geht und eine vorgegebene Gerade zur Bisekante hat. Projizieren wir nun die räumlichen Grundpunkte aus einem von ihnen verschiedenen Punkt o, der auf keiner von ihren Verbindungsgeraden oder -ebenen liegt, auf eine nicht durch o gehende Ebene π nach $\bar{1}$, $\bar{2}$, $\bar{3}$, $\bar{4}$, $\bar{5}$, so gibt es, wie leicht erkenntlich[2], in π nur einen Punkt $\bar{p}$, aus dem diese Punkte durch einen Wurf projiziert werden, der einem gegebenen, etwa $\mathfrak{P}_i$, gleich ist. Die kubische Raumkurve C_i^3 durch die Grundpunkte, welche die Gerade $[o\bar{p}]$ als Bisekante hat, besitzt offenbar die Eigenschaft, daß die Grundpunkte auf ihr den Wurf $\mathfrak{P}_i$ bilden. Jedem Punkt p_i in π oder jedem fünfelementigen Projektionswurf $\mathfrak{P}_i$ ist auf diese Weise eine einzige C_i^3 durch die räumlichen Grundpunkte zugeordnet. Da umgekehrt auf jeder C_i^3 durch die räumlichen Grundpunkte diese einen binären Wurf bestimmen und es in π im allgemeinen nur einen Punkt p_i gibt, dessen Projektionswurf jenem gleich ist, so ist die Beziehung

---

[1] Vgl. G. Kohn, Über eine Erweiterung eines Grundbegriffs der Geometrie der Lage. Math. Ann. 46 (1895), p. 286 ff.

[2] Vgl. etwa H. Müller, Zur Geometrie auf den Flächen zweiter Ordnung. Math. Ann. 1 (1869), p. 414 ff.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

zwischen den fünfelementigen Projektionswürfen in π und den kubischen Raumkurven durch die Grundpunkte im allgemeinen eineindeutig, mit Ausnahme der Punkte von K^2 (siehe Nr. 2).

Jene Punkte p in π, für die ein fünfelementiger Projektionswurf nicht mehr zustande kommt, liegen auf den zehn Verbindungslinien der Grundpunkte in π. Für diese Punkte zerfällt aber auch die zugehörige kubische Raumkurve durch die fünf räumlichen Grundpunkte in eine Gerade durch zwei der räumlichen Grundpunkte und einen Kegelschnitt durch die drei übrigen Grundpunkte im Raum, der die Gerade schneidet.

Fällt im besondern der Punkt p in den Schnittpunkt zweier nicht durch einen Grundpunkt in π gehender Verbindungslinien der Grundpunkte, so zerfällt auch die kubische Raumkurve weiter in die beiden Verbindungsgeraden der entsprechenden Grundpunkte im Raum und eine dritte durch den fünften Punkt gehende Gerade, welche die beiden ersteren schneidet.

Nr. 2. Der sechselementige Projektionswurf und seine Abbildung im Raum.

Nehmen wir in π zu den Punkten $1'$, $2'$, $3'$, $4'$, $5'$ noch einen Punkt $6'$ hinzu, so gehört zu jedem Punkt p_i in π der »sechselementige Projektionswurf« $\mathfrak{P}_i = p_i\,(1', \quad 6')$. Ein solcher besitzt fünfelementige Teilwürfe.

Wir wollen nun eine Abbildung der ∞^2 sechselementigen Projektionswürfe $\mathfrak{P}_i$ auf den Raum dadurch herstellen, daß wir dem fünfelementigen Teilwurf p_i $(1', 2'\ 3', 4', 5')$ die nach Nr. 1 bestimmte C_i^3 zuordnen und auf dieser jenen Punkt 6 aufsuchen, der mit 1, 2, 3, 4, 5 einen mit $\mathfrak{P}_i$ gleichen Wurf bildet. Den Teilwürfen p_i $(1', 2', 3', 4', 5')$ entsprechen im allgemeinen ∞^2 voneinander verschiedene C_i^3; nur den Punkten p_i des Grundkegelschnittes K^2 entspricht dieselbe kubische Raumkurve K^3, die die »Grundkurve im Raum« heißen soll. Mithin entsprechen den ∞^2 sechselementigen Projektionswürfen in π die Punkte einer Fläche durch K^3, die wir die Bildfläche Φ der Projektionswürfe nennen.

Nr. 3. Art der Bildfläche Φ.

A) Legt man durch einen Punkt o der räumlichen Grundkurve K^3 eine beliebige Unisekante, so bildet diese zusammen mit den fünf Strahlen nach den Grundpunkten 1, 2, 3, 4, 5 einen sechselementigen Wurf im Bündel (o). Alles, was über Würfe von Punkten oder Strahlen in der Ebene gesagt wurde, gilt dual für die Würfe von Strahlen oder Ebenen im Bündel.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Nun soll zuerst folgender Hilfsatz bewiesen[1] werden:

„Alle Unisekanten der K^3, die mit den Verbindungsstrahlen ihres Treffpunktes auf K^3 mit den fünf Grundpunkten denselben sechselementigen Wurf (im Bündel) bestimmen, liegen auf einer Regelfläche zweiter Ordnung.“

K^3 wird aus je zweien ihrer Punkte o, o' durch kollineare Bündel projiziert; jeder Unisekante U_o durch o entspricht in dieser Kollineation eine Unisekante $U_{o'}$ durch o'. Solche zwei Unisekanten bilden mit den aus o beziehungsweise o' nach den Grundpunkten auf K^3 gehenden Strahlgruppen gleiche sechselementige Würfe. Die die Punkte von K^3 aus U_o und $U_{o'}$ projizierenden Ebenen bilden zwei in den obigen kollinearen Bündeln einander entsprechende Büschel und erzeugen ein aus Bisekanten der K^3 bestehendes Hyperboloid Φ^2. Es enthält alle U_o schneidenden Bisekanten von K^3, die jedoch zugleich auch $U_{o'}$ schneiden. Da o' als jeder von o verschiedene Punkt auf K^3 gewählt werden darf, enthält Φ^2 alle Unisekanten von K^3, die U_o in den sämtlichen kollinearen Bündeln obiger Art entsprechen. Weil ferner diese Unisekanten identisch sind mit den im Hilfsatz erwähnten, so ist dieser bewiesen.

Umgekehrt ist auf jeder durch die Grundkurve K^3 gehenden Regelfläche zweiter Ordnung Φ^2 der Wurf, den die Φ^2 angehörige Unisekante eines Punktes o_i von K^3 mit den von o_i nach den fünf Grundpunkten gehenden Strahlen bildet, konstant für alle Punkte o_i.

Den ∞^2 Unisekanten durch einen Punkt o von K^3 sind also ∞^2 Hyperboloide Φ^2 durch K^3 zugeordnet. Jedes Φ^2 enthält sämtliche Unisekanten von K^3, die mit den nach den Grundpunkten gehenden Strahlen den gleichen sechselementigen Wurf bilden. Dieser Wurf bestimmt aber in π zu den fünf Grundpunkten einen sechsten Punkt. Umgekehrt gehört zu jedem den fünf Grundpunkten in π hinzugefügten sechsten Punkt ein Hyperboloid durch K^3, das »Bildhyperboloid des sechsten Punktes«.

Wählen wir nun eine der ∞^2 von K^3 verschiedenen durch die Grundpunkte gehenden kubischen Raumkurven C^3, die also nach Nr. 1 das Bild eines fünfelementigen Projektionswurfes ist, so wird sie ein beliebig angenommenes Bildhyperboloid Φ^2 eines sechsten Punktes, das also einer sechselementigen Punktgruppe der Ebene zugeordnet ist, in einem von den räumlichen Grundpunkten 1, 2, 3, 4, 5 verschiedenen Punkt 6 treffen; 6 bestimmt zusammen mit den fünf Grundpunkten einen sechselementigen Wurf auf dieser Raumkurve C^3, der natürlich aus jeder Bisekante von C^3 durch sechs Ebenen gleichen Wurfes projiziert wird. Nach

---

[1] Die Anregung zum nachfolgenden Beweis erhielt der Verfasser durch Prof. Dr. G. Kohn in Wien kurz vor dessen Tode.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Nr. 2 stellt also 6 das Bild eines sechselementigen Projektionswurfes der Ebene dar. Durch diesen Punkt 6 geht eine einzige Unisekante von K^3, die dem angenommenen Bildhyperboloide eines sechsten Punktes angehört. Durch den Treffpunkt o dieser Unisekante mit K^3 läßt sich sodann eine einzige Bisekante an die gewählte Raumkurve C^3 legen, aus der mithin die sechs Punkte auf C^3 durch sechs Ebenen gleichen Wurfes projiziert werden. Diese sechs Ebenen projizieren aber auch die sechs Strahlen $[o\,1]$, $[o\,2]$, $[o\,3]$, $[o\,4]$, $[o\,5]$ und die Unisekante $[o\,6]$, die der vorliegenden sechselementigen Punktgruppe zugeordnet sind. Denn der Projektionswurf der sechs Punkte auf C^3 ist gleich einem Projektionswurf von sechs Bündelstrahlen aus einem Punkt von K^3; wenn diese Strahlen aus einer Unisekante ($[o\,6]$) von Φ^2 und den Strahlen nach den fünf Grundpunkten bestehen, ist aber nach dem Hilfsatz der Wurf stets der gleiche und damit ist er auch dem Wurf der sechs Punkte in der Ebene, die den sechs Bündelstrahlen (oder dem Bildhyperboloid) entsprechen, gleich.

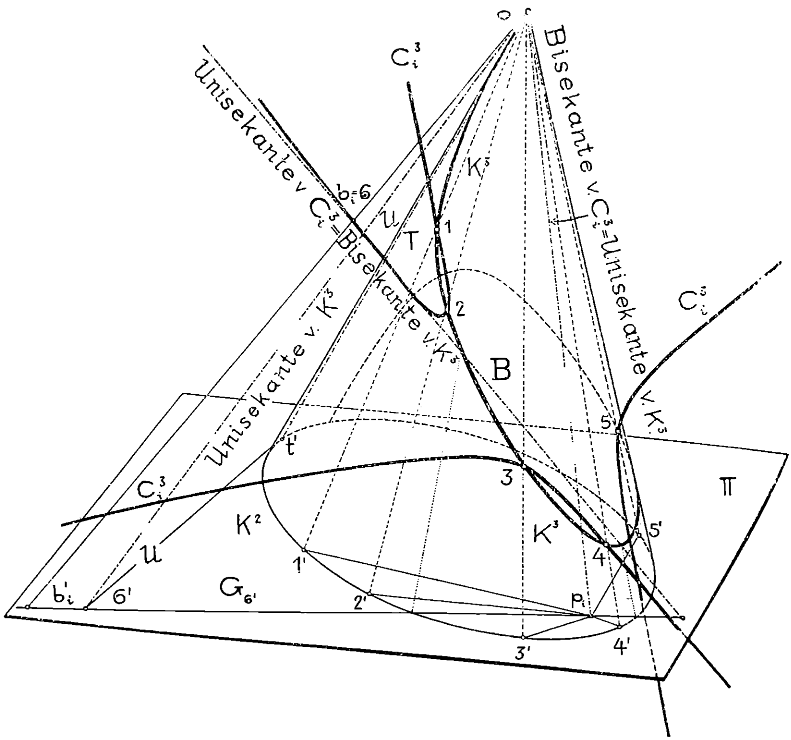
Zusammenfassend können wir also sagen:

Ist eine Gruppe von sechs Punkten in π gegeben, so ist ihr ein Bildhyperboloid durch fünf Grundpunkte im Raum zugeordnet. Zu jedem (sechselementigen) Projektionswurfe $\mathfrak{P}_i$ der Punkte in π gehört ein ausgezeichneter fünfelementiger Teilwurf, dessen Bild eine kubische Raumkurve C_i^3 durch die fünf räumlichen Grundpunkte ist, auf der die fünf Punkte einen dem Projektionswurf gleichen Wurf bilden; der auf dieser C_i^3 zugeordnete sechste Punkt gleichen Wurfes liegt auf dem Bildhyperboloid des gegebenen sechselementigen Punktwurfes. Alle Projektionswürfe einer sechselementigen Punktgruppe in π haben mithin ihre Bildpunkte auf einem durch die fünf räumlichen Grundpunkte gehenden Hyperboloide.

B) Ein zweiter Beweis für die gefundene Fläche der Bildpunkte der sechselementigen Projektionswürfe führt gleichzeitig zu einer verwertbaren Konstruktion der Bildpunkte. Wir projizieren (siehe Fig.) die Grundpunkte $1'$, $2'$, $3'$, $4'$, $5'$ in π und den Grundkegelschnitt K^2 aus einem außerhalb der Ebene liegenden Punkt o und wählen auf dem projizierenden Kegel eine durch o gehende Raumkurve K^3 derart, daß ihre Tangente T in o den Kegelschnitt K^2 in einem der Berührungspunkte t' der aus $6'$ an K^2 legbaren Tangenten trifft. Die Schnittpunkte der Projektionsstrahlen $[o\,1']$, $[o\,2']$, $[o\,3']$, $[o\,4']$, $[o\,5']$ mit K^3 wählen wir als die »räumlichen Grundpunkte« 1, 2, 3, 4, 5 und K^3 als die »Grundkurve« in der Bedeutung wie in Nr. 2. Wir suchen nun vorerst die Linie der Bildpunkte einer durch $6'$ gehenden Geraden $G_{6'}$ der Ebene π. Bezeichnet p_i einen beliebigen Punkt auf $G_{6'}$, so ist

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

die kubische Raumkurve C_i^3, auf der die fünf Grundpunkte den Projektionswurf p_i ($1'$, $2'$, $3'$, $4'$, $5'$) besitzen, eindeutig dadurch bestimmt, daß sie durch die Punkte 1, 2, 3, 4, 5 gehen und $[o p_i]$ zur Bisekante haben muß. Die Ebenen, die aus $[o p_i]$ die fünf Grundpunkte projizieren, gehen auch durch die Punkte $1'$, $2'$, $3'$, $4'$, $5'$; daher geht die Ebene, die den gesuchten Punkt 6 auf C



Figur.

projiziert, auch durch den Punkt $6'$; oder 6 ergibt sich als Schnitt von C_i^3 mit der Ebene $[o\, G_{6'}] = [o\, p_i\, 6']$. Um seine Lage festzustellen, machen wir von dem Satze Gebrauch, daß sich durch zwei kubische Raumkurven, die durch dieselben fünf Punkte gehen, nur ein einziges Hyperboloid legen läßt und daß jede seiner Erzeugenden Unisekante für die eine und Bisekante für die andere Raumkurve ist. Dem Hilfshyperboloid durch K^3 und $C_i^3 = [K^3\, C_i^3]$ gehört nun die Gerade $[o\, p_i]$ an, weil sie Bisekante für C_i^3 und Unisekante für K^3 ist. Die Ebene $[o\, p_i\, 6']$ schneidet daher aus dem Hyperboloide eine zweite Erzeugende B aus, die Bisekante für K^3, jedoch Unisekante für C_i^3 ist. Ihr Schnitt mit C ist der gesuchte sechste Punkt. Da nun die Ebene $[o\, p_i\, 6'] = [o\, G_{6'}]$ für alle Punkte p_i auf $G_{6'}$ dieselbe ist und in ihr eine einzige

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

nicht durch o gehende Bisekante B von K^3 liegt, so ist sie zugleich Unisekante für alle zugehörigen Kurven C_i^3 und man hat das Teilergebnis: Alle den verschiedenen Punkten p_i von t'_6, entsprechenden Bildpunkte der Projektionswürfe p_i (1′, 2′, 3′, 4′, 5′, 6′) liegen auf der die Gerade $[o\,6']$ schneidenden, nicht durch o gehenden Bisekante B von K^3.

Wenden wir diese Überlegungen auf sämtliche Geraden des Büschels 6′ an, so erfassen wir damit die Bildpunkte aller den ∞^2 Punkten p_i der Ebene zugehörigen sechselementigen Projektionswürfe p_i (1′, . . ., 6′). Diese Bildpunkte liegen auf allen Bisekanten von K^3, die die Gerade $[o\,6']$ außerhalb o schneiden, gehören also dem Hyperboloide an, das durch K^3 und ihre Unisekante $[o\,6']$ legbar ist.

Auf diesem Hyperboloid liegt die Kurve K^3 derart, daß ihre Tangente T in o die eine Erzeugende ist, $[o\,6'] = U$, als Unisekante von K^3, die zweite Erzeugende, so daß also die Berührebene $[T\,U]$ in o zugleich Schmiegebene von K^3 in o ist. Die Spur dieser Schmiegebene ist demnach wirklich Tangente in t' an K^2, was am Beginn dieser Nummer als notwendig angeführt wurde. Jedem Punkt 6′ einer sechselementigen Punktgruppe ist mithin eine Gerade $[o\,6']$ und damit ein Bisekantenhyperboloid von K^3 zugeordnet. Den ∞^2 Punkten 6′ entsprechen die ∞^2 durch K^3 gehenden derartigen Bisekantenhyperboloide als Bildhyperboloide der zugehörigen sechselementigen Projektionswürfe.

Nr. 4. Punkte in der Ebene, aus denen zwei oder drei sechselementige Punktgruppen durch gleiche Würfe projiziert werden.

Die in Nr. 3 gezeigte Abbildung erlaubt eine Reihe von Fragen über sechselementige Projektionswürfe zu beantworten.

a) Es seien zwei beliebige, in derselben Ebene oder in verschiedenen Ebenen gelegene sechselementige Punktgruppen $\mathfrak{G}_6^1$ und $\mathfrak{G}_6^2$ gegeben; gefragt wird nach der Zahl der Punktepaare s_1, s_2, aus denen $\mathfrak{G}_6^1$, beziehungsweise $\mathfrak{G}_6^2$ durch gleiche Würfe projiziert werden.

Wählen wir nach Nr. 3, *A)* dieselben räumlichen Grundpunkte für je einen der fünfelementigen Teilwürfe von $\mathfrak{G}_6^1$ und $\mathfrak{G}_6^2$, so erfüllen die Bildpunkte der Projektionswürfe nach $\mathfrak{G}_6^1$ ein Bildhyperboloid $\mathfrak{H}_1$, alle Bildpunkte von Projektionswürfen nach der zweiten Gruppe $\mathfrak{G}_6^2$ ein zweites von $\mathfrak{H}_1$ verschiedenes, aber ebenfalls durch die räumlichen Grundpunkte gehendes Hyperboloid $\mathfrak{H}_2$. Die gemeinsamen Punkte von $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$, die im allgemeinen auf einer durch die Grundpunkte gehenden Raumkurve vierter Ordnung C^4 liegen, sind Punkte, die mit den Grundpunkten verbunden ∞^1 C^3 ergeben, auf denen die jeweiligen (auf C^4 liegenden)

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

sechsten Punkte gleiche Projektionswürfe darstellen, deren entsprechende Scheitel also $\mathfrak{G}_6^1$ und auch $\mathfrak{G}_6^2$ durch gleiche Würfe projizieren. Wir haben also den Satz:

„Sind zwei beliebige sechselementige Punktgruppen gegeben, so gibt es ∞^1 *Paare von Punkten, für welche die beiden sechselementigen Würfe gleich sind."*

b) Es seien drei sechselementige Punktgruppen $\mathfrak{G}_6^1$, $\mathfrak{G}_6^2$, $\mathfrak{G}_6^3$ in derselben oder in verschiedenen Ebenen gegeben; wie viel gleiche Projektionswürfe gibt es, welche die gegebenen drei Punktgruppen projizieren?

Jeder Gruppe entspricht nach Nr. 3 ein durch die Grundpunkte gehendes Bildhyperboloid. Die drei so entstehenden Bildhyperboloide $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$, $\mathfrak{H}_3$ haben nun acht gemeinsame Punkte, von denen aber fünf die allen gemeinsamen Grundpunkte sind, so daß im allgemeinen nur drei Punkte als gemeinsame Bildpunkte der drei Bildhyperboloide erscheinen.

Wir haben also den Satz:

„Sind in derselben oder in verschiedenen Ebenen drei sechselementige Punktgruppen gegeben, so gibt es zu jeder der drei Punktgruppen nur je drei Punkte, aus denen die Punktgruppen durch gleiche Würfe projiziert werden."

Die eben erhaltenen Resultate können mit Benützung von Nr. 3, *B)* in einer für konstruktive Zwecke durchsichtigeren Weise dargestellt werden. Nehmen wir zuerst zwei sechselementige Gruppen $\mathfrak{G}_6^1$ und $\mathfrak{G}_6^2$ in zwei verschiedenen Ebenen π_1 und π_2 an, so können wir für $\mathfrak{G}_6^1$ die Auffindung des Bildhyperboloides $\mathfrak{H}_1$ in der in Nr. 3, *B)* gezeigten Weise (mit Benützung des Punktes *o*) vornehmen; stellen wir für $\mathfrak{G}_6^2$ in π_2 durch Wahl von fünf neuen räumlichen Grundpunkten das Bildhyperboloid $\mathfrak{H}_2$ her, so können wir nun durch eine räumliche Kollineation die zu π_2 gehörigen fünf räumlichen Grundpunkte in die zu π_1 gehörigen Grundpunkte transformieren, wodurch gleichzeitig das Bildhyperboloid $\mathfrak{H}_2$ in ein neues $\mathfrak{H}_2^*$ übergeht, dessen Punkte denen von $\mathfrak{H}_2$ kollinear entsprechen. Die Hyperboloide $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2^*$ haben nun eine durch die fünf Grundpunkte, die zu π_1 gehören, gehende Raumkurve vierter Ordnung C^4 gemeinsam. Die aus *o* an die C_i^3, die zu den Punkten von C^4 gehören, legbaren Bisekanten liefern dann in π_1 die Linie der Scheitel der Projektionswürfe. Überträgt man durch diese benützte räumliche Kollineation die C^4 von $\mathfrak{H}_2^*$ wieder auf $\mathfrak{H}_2$, so können in π_2 die Scheitel der Projektionswürfe — wie vorher angegeben — gefunden werden, wenn man es nicht vorzieht, von der Kurve der Scheitel in π_1 direkt überzugehen auf die Kurve der Scheitel in π_2.

Sind drei Ebenen π_1, π_2, π_3 und in jeder eine sechselementige Punktgruppe $\mathfrak{G}_6^1$, $\mathfrak{G}_6^2$ und $\mathfrak{G}_6^3$ gegeben, so können zuerst durch dreimalige Wahl von je fünf räumlichen Grundpunkten auf den

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

strahlen aus o_1, o_2, o_3 (Nr. 3, *B*) die Bildhyperboloide $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$ und $\mathfrak{H}_3$ gefunden werden. Führt man nun die zu π_2 und π_3 gehörigen räumlichen Grundpunkte durch je eine räumliche Kollineation in die zu π_1 gehörigen über, so entsprechen in diesen Kollineationen den Hyperboloiden $\mathfrak{H}_2$ und $\mathfrak{H}_3$ die Hyperboloide $\mathfrak{H}_2^*$ und $\mathfrak{H}_3^*$, die mit $\mathfrak{H}_1$ außer den allen gemeinsamen Grundpunkten noch drei Punkte gemeinsam haben. Zu jedem dieser drei Punkte gehört eine durch die räumlichen Grundpunkte gehende C_l^3 und die an diese aus o_1 (Nr. 3, *B*) legbare Bisekante liefert den Scheitel jenes Projektionswurfes, der den entsprechenden in π_2 und π_3 gleich ist. Die direkte Übertragung dieser drei Scheitel in die Ebenen π_2 und π_3 (durch Benützung der in π_1 enthaltenen Würfe) liefert dann die in π_2 und π_3 dem ersteren gleichen Projektionswürfe der gegebenen sechselementigen Punktgruppen.

Nr. 5. **Anzahl der Projektionswürfe, die eine sechselementige Punktgruppe bestimmen.**

Ist in π eine sechselementige Punktgruppe gegeben, so gehört zu jedem Punkt von π ein bestimmter sechselementiger Projektionswurf. Wir wollen umgekehrt fragen, wie viele sechselementige Würfe angenommen werden müssen, um eine sechselementige Punktgruppe in π zu bestimmen, die die gegebenen Würfe als Projektionswürfe besitzt.

Die besprochene räumliche Abbildung gibt folgende Lösung: Nach Annahme der fünf räumlichen Grundpunkte hat jeder Projektionswurf bei vorgeschriebener Zuordnung seinen Bildpunkt im Raume; wenn die gegebenen Würfe Projektionswürfe von ein und derselben sechselementigen Punktgruppe sein sollen, so müssen ihre Bildpunkte auf ein und demselben Hyperboloid durch die fünf Grundpunkte im Raume liegen. Durch vier Punkte neben den fünf Grundpunkten im Raum ist aber im allgemeinen eindeutig ein Hyperboloid bestimmt; da man jede der beiden durch die angenommenen fünf Grundpunkte auf dem Hyperboloid verlaufenden kubischen Raumkurven als »Grundkurve im Raum« wählen darf, so bestimmt das Hyperboloid als »Bildhyperboloid« (nach Nr. 3) die sechselementige Punktgruppe zweideutig.

Wir haben also den Satz:

„Durch Annahme von vier sechselementigen Würfen werden zwei sechselementige Punktgruppen in der Ebene bestimmt, die diese Würfe als Projektionswürfe besitzen.“

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1925

Band/Volume: 134_2a

Autor(en)/Author(s): Olbrich Wilhelm

Artikel/Article: Neue Probleme der Projektivität 325-333