Gedruckt mit Unterstützung aus dem Jerome und Margaret Stonborough-Fonds

Über das Newton'sche Näherungsverfahren

Von

Anton Huber in Wien

(Vorgelegt in der Sitzung am 19. November 1925)

In dieser Arbeit wird jene größte Umgebung einer Wurzel α der Gleichung $f(w) = 0$ aufgesucht, deren sämtliche Punkte gegen α konvergierende Folgen von Newton'schen Näherungspunkten liefern. Der Newton'sche Näherungspunkt z, den der Ausgangspunkt w bestimmt, ist dabei durch die Gleichung

$$z = \varphi(w) = \frac{w . f'(w) - f(w)}{f'(w)}$$

erklärt, wo $f(w)$ und daher auch $\varphi(w)$ eindeutige Funktionen sein sollen, die später noch genauer erklärt werden. Die Gleichung $z = \varphi(w)$ heißen wir die Iterationsformel. Besteht zwischen den zwei Werten z_0 und w_0 die Beziehung $z_0 = \varphi(w_0)$, so nennen wir w_0 ein Rückbild von z_0.

Ferner werden jene Stellen und Bereiche untersucht, von denen aus das Newton'sche Verfahren überhaupt gegen keine Wurzel von $f(w) = 0$ konvergiert, also die Divergenzstellen, beziehungsweise -bereiche. Zu den ersteren gehören offenbar die Nullstellen von $f'(w)$, sofern sie nicht auch solche von $f(w)$ selber sind, und die Periodenpunkte sowie deren Rückbilder. Unter einem Periodenpunkt l-ter Ordnung verstehen wir eine solche Stelle p, so daß $p = \varphi_l(p)$ gilt, wenn $\varphi_l(w)$ die l-te Iterierte von $z = \varphi(w)$ bezeichnet.

Für reelle Gleichungen wurde die Untersuchung im Reellen gesondert durchgeführt, da man dort einerseits die Funktion $f(w)$ als analytisch voraussetzen kann und andrerseits die Ergebnisse sich anschaulich geometrisch deuten lassen.[1] Die Erweiterung einer sicher vorhandenen Konvergenzumgebung zur maximalen läßt sich dort Schritt für Schritt verfolgen, indem man in gewisser Weise Tangenten an die Kurve $z = f(w)$ legt. Auf diese geometrische Deutung soll jedoch nicht eingegangen werden, zumal da sie sich aus den unten folgenden analytischen Überlegungen leicht gewinnen läßt.

---

[1] Über die Interpretation des Newton'schen Verfahrens im Komplexen vgl. G. Faber, J. f. Math., Bd. 138 (1910), p. 1 bis 21. Die bekannte mechanische Interpretation dürfte wohl schon Gauß gekannt haben. Vgl. dessen gesammelte Werke, Bd. 3, p. 112.

I. Bestimmung der maximalen Konvergenzumgebung.

a) Im Reellen.

Wir legen die zu untersuchende Wurzel in den Ursprung und geben unserer Gleichung die Form:

$$f(w) = w^k + c_l w^l + \ldots \qquad = 0 \quad (l > k \geqq 1).$$

Ferner bezeichnen wir mit q und $\bar{q}$ die kleinste positive, beziehungsweise absolut kleinste negative Wurzel von $f'(w) = 0$; sollte q, beziehungsweise $\bar{q}$ nicht vorhanden sein, so setzen wir $q = +\infty$, beziehungsweise $\bar{q} = -\infty$. Das endliche oder unendliche offene Intervall $(q\,\bar{q})$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{J}$. Wegen

$$sgn \frac{f(w)}{f'(w)} = sgn\, w$$

wird für die Iterationsformel

$$\varphi(w) = w - \frac{f(w)}{f'(w)},$$

wenn q und $\bar{q}$ endlich sind und w in $\mathfrak{J}$ bleibt:

$$\lim_{w \to q} \varphi(w) = -\infty \text{ und } \lim_{w \to \bar{q}} \varphi(w) = +\infty.$$

Wir stellen nun noch einige für das Folgende zweckmäßige Hilfssätze zusammen, deren einfache Beweise wir unterdrücken.

I. Hilfssatz. »Ist $\bar{q}$ endlich und $0 < a < q$, so hat die Gleichung $\varphi(w) = a$ stets eine negative Wurzel b im Intervalle $0 > b > \bar{q}$.«

II. Hilfssatz. »Es sei $0 < a < q$ und die absolut kleinste negative Wurzel von $\varphi(w) = a$ sei b, beziehungsweise sei $b = -\infty$, wenn $\varphi(w) = a$ keine negative Wurzel hat. Dann ist für $0 > w > b$ stets $\varphi(w) < a$.«

III. Hilfssatz. »Es sei $0 < a < q$ und im Intervalle $(0, a)$ konvergiere das Newton'sche Verfahren gegen $w = 0$. Ist dann b die absolut kleinste negative Wurzel von $\varphi(w) = a$, beziehungsweise $b = -\infty$, wenn $\varphi(w) = a$ keine negative Wurzel hat, so konvergiert das Newton'sche Verfahren auch im Intervalle $(b, 0)$ gegen $w = 0$.«

In allen drei Hilfssätzen gilt Entsprechendes auch bei Vertauschung der positiven mit der negatien Halbachse der w.

Aus der in der Umgebung des Ursprunges gültigen Entwicklung:

$$\varphi(w) = \frac{k-1}{k} \quad w + \ldots$$

wenn $k > 1$, beziehungsweise

$$\varphi(w) = (l-1) \, . \, c_l \, w^l + .$$

wenn $k = 1$, entnehmen wir leicht die folgenden vier Möglichkeiten für das Verhalten von $\varphi(w)$ in der Umgebung von $w = 0$.

$$\varphi(+0) > 0, \quad \varphi(-0) < 0; \tag{1}$$

dann muß entweder $k > 1$ sein oder es muß:

$$k = 1, \; l \equiv 1 \; (2) \text{ und } c_l > 0$$

sein.

$$\varphi(+0) > 0, \quad \varphi(-0) > 0; \tag{2}$$

dann muß $k = 1$, $l \equiv 0\,(2)$ und $c_l > 0$ sein.

$$\varphi(+0) < 0, \quad \varphi(-0) > 0; \tag{3}$$

dann muß $k = 1$, $l \equiv 1$ (2) und $c_l < 0$ sein.

$$\varphi(+0) < 0, \quad \varphi(-0) < 0; \tag{4}$$

dann muß $k = 1$, $l \equiv 0\,(2)$ und $c_l < 0$ sein. Der Fall (4) kann durch Vertauschung von $f(w)$ mit $-f(w)$ auf den Fall (2) zurückgeführt werden, seine weitere Betrachtung ist also überflüssig.

Wir trennen nun die Fälle:

α) q und $\bar{q}$ sind beide endlich.

β) q und $\bar{q}$ sind beide unendlich.

γ) q oder $\bar{q}$ ist unendlich.

Der Fall γ) läßt sich durch Kombination von α) und β) erledigen.

α) q und $\bar{q}$ sind endlich.

In den beiden Fällen (1) und (2) besitzt die Gleichung $\varphi(w) = 0$ wegen $\varphi(+0) > 0$ und $\lim\limits_{w \to q} \varphi(w) = -\infty$ eine kleinste positive Wurzel a_1 im Intervalle $(0, q)$. Das Newton'sche Verfahren konvergiert sodann im Intervalle $(0, a_1)$ gegen $w = 0$; denn ist $0 < w_0 < a_1$, so ist wegen $\dfrac{f(w_0)}{f'(w_0)} > 0$:

$$0 < w_1 = \varphi(w_0) < w_0.$$

Wir bilden nun die beiden Folgen:

$$a_1, \ a_2, \ a_3 .$$

$$b_1, \ b_2, \ b_3 .$$

wobei b_i die absolut kleinste negative Wurzel von $\varphi(w) = a_i$ und a_i die kleinste positve Wurzel von $\varphi(w) = b_{i-1}$ bedeuten. Zufolge des Hilfssatzes I existieren die Zahlen a_i und b_i und, nach Hilfssatz III konvergiert das Newton'sche Verfahren sowohl im Intervalle $(0, a_i)$ als auch in $(b_i, 0)$ gegen die Wurzel $w = 0$.

Wir zeigen noch, daß stets:

$$a_{i+1} > a_i \text{ und } b_{i+1} < b_i.$$

Aus dem Hilfssatz II folgt:

$$\text{»Ist } 0 < w < a_i, \text{ dann ist } \varphi(w) > b_{i-1}.\text{«} \tag{A}$$

$$\text{»Ist } 0 > w > b_i, \text{ dann ist } \varphi(w) < a_i,\text{«} \tag{B}$$

wo $i = 1, 2, \ldots$ und $b_0 = 0$. Wäre nun $a_2 < a_1$, so wäre wegen (A). $\varphi(a_2) = b_1 > b_0 = 0$, während doch $b_1 < 0$ sein muß, es muß also $a_2 > a_1$ sein. Wäre ferner $b_2 > b_1$, so wäre wegen (B): $\varphi(b_2) = a_2 < a_1$, im Widerspruch mit dem eben gefundenen Ergebnisse, es muß also $b_2 < b_1$ sein. Da sich auf dieselbe Art auch die allgemeinen Ungleichungen beweisen lassen und alle $a_i < q$, sowie alle $b_i > \bar{q}$ sein müssen, so konvergiert die Folge $\{a_i\}$ gegen einen Grenzwert $a < q$ und ebenso die Folge $\{b_i\}$ gegen einen Grenzwert $b > \bar{q}$ und dafür gilt:

$$\varphi(a) = b \text{ und } \varphi(b) = a$$

oder:

$$\varphi[\varphi(a)] = \varphi_2(a) = a \text{ und } \varphi[\varphi(b)] = \varphi_2(b) = b,$$

d. h. a und b bilden ein Paar von Periodenpunkten zweiter Ordnung und zwar das der Wurzel $w = 0$ am nächsten gelegene Paar, sie sind daher auch die Grenzen der gesuchten maximalen Konvergenzumgebung.

Es bleibt nun noch der Fall (3) zu erledigen, wo die Gleichung $\varphi(w) = 0$ keine Wurzel im Intervalle $\mathfrak{J}$ zu haben braucht. Wir können aber auch hier unser Verfahren so einrichten, daß es zum selben Ergebnisse wie oben führt.

Zunächst folgt aus:

$$z = \varphi(w) = (l-1)\, c_l\, w^l + \ldots$$

$$[l \equiv 1 \ (2); \ l > 1; \ c_l < 0]$$

$$w = \left[\frac{z}{(l-1).c_l}\right]^{\frac{1}{l}} + .$$

wo der einzige reelle Wert der l-ten Wurzel zu nehmen ist. Wählt man nun $z = a_1 > 0$ genügend klein, so wird mit Beibehaltung der früheren Bezeichnungsweise:

$$b_1 = \left[\frac{a_1}{(l-1)\,c_l}\right]^{\frac{1}{l}} + .$$

$$a_2 = \left[\frac{b_1}{(l-1)\,c_l}\right]^{\frac{1}{l}} + .. \quad = c.a_1^{\frac{1}{l^2}} + .$$

wo c eine von l und c_l abhängende Konstante bedeutet. Wie klein auch c ausfallen mag, man kann doch a_1 immer so klein wählen, daß $a_2 > a_1$ wird, man braucht ja nur $0 < a_1 < c^{\frac{l^2}{l^2-1}}$ zu nehmen. Außerdem wähle man a_1 so klein, daß im Intervalle $(0, a_1)$ das Newton'sche Verfahren gegen $w = 0$ konvergiert. Man kann sodann genau so wie oben die Folgen $\{a_i\}$ und $\{b_i\}$ bilden, von denen man auch in derselben Weise zeigt, daß sie monoton sind. Aus ihrer Geschränktheit durch das Intervall $\mathfrak{J}$ ergibt sich dann auch hier die Existenz der Grenzwerte a und b, die dieselben Eigenschaften wie die früheren aufweisen.

β) q und $\bar{q}$ sind unendlich.

Die Funktion $f(w)$ behält dann entweder stets dasselbe Vorzeichen oder wächst monoton von $w = -\infty$, und man zeigt leicht, daß das Newton'sche Verfahren für jedes $w < 0$ konvergiert, falls dies für jedes $w > 0$ zutrifft. Hat in den Fällen (1) und (2) die Gleichung $\varphi(w) = 0$ keine positive Wurzel, so reicht die Konvergenzumgebung von $-\infty$ bis $+\infty$; denn für jedes $w > 0$ ist ja

$$0 < \varphi(w) < w,$$

es konvergiert also das Newton'sche Verfahren für alle $w > 0$ und daher auch für alle $w < 0$.

Den Fall, daß $\varphi(w) = 0$ eine positive Wurzel hat, kann man wie unter α) zugleich mit (3) erledigen. Wenn die Folgen $\{a_i\}$ und $\{b_i\}$ unendlich viele Glieder haben, so »konvergieren« sie gegen endliche oder unendliche Grenzwerte oder es ergibt sich einmal eine Gleichung $\varphi(w) = b_i$, beziehungsweise $\varphi(w) = a_i$, die keine positive, beziehungsweise negative Wurzel besitzt, so daß sich dann die Konvergenzumgebung bis ins Unendliche erstreckt.

γ) $q = +\infty$ und $\bar{q}$ ist endlich.

Man sieht leicht, daß hier beide Folgen $\{a_i\}$ und $\{b_i\}$ aus unendlich vielen Gliedern bestehen können, und daß es wie früher zwei Häufungsstellen a und b geben kann oder daß es einmal eine Gleichung etwa $\varphi(w) = b_i$ gibt, die keine positive Wurzel mehr hat. Wir setzen dann $a_{i+1} = +\infty$ und bemerken, daß das Newton'sche Verfahren für alle $w > \bar{q}$ gegen $w = 0$ konvergiert. Entsprechendes gilt natürlich, wenn q endlich $\bar{q} = -\infty$ ist.

Zusammenfassend können wir also das folgende Ergebnis aussprechen:

»Zu jeder reellen Wurzel der reellen Gleichung $f(w) = 0$ läßt sich eine maximale Konvergenzumgebung $\mathfrak{K}$ angeben, die von dem der Wurzel am nächsten liegenden und sie einschließenden Paare von Periodenpunkten zweiter Ordnung begrenzt wird. Für die größte und kleinste reelle Wurzel hingegen kann sich die Konvergenzumgebung von der größten Nullstelle von $f'(w)$ bis $+\infty$, beziehungsweise von der kleinsten Nullstelle von $f'(w)$ bis $-\infty$ erstrecken.«

Im allgemeinen gibt es auch noch außerhalb der eben gefundenen zu einer Wurzel α gehörigen Konvergenzumgebung $\mathfrak{K}$ unendlich viele Intervalle, deren Punkte gegen α konvergierende Folgen von Newton'schen Näherungspunkten liefern. Diese Intervallmengen sind jedoch meist sehr kompliziert.

Für quadratische Gleichungen liegen die Verhältnisse sehr einfach. Sind beide Wurzeln reell, so trennt die Nullstelle der ersten Ableitung des Gleichungspolynomes die zu den beiden Wurzeln gehörigen Konvergenzgebiete, ist eine Doppelwurzel vorhanden, so konvergiert das Verfahren für jeden reellen Wert, sind aber die beiden Wurzeln komplex, so ist jeder Punkt ein Divergenzpunkt.

Wir betrachten noch die kubischen Gleichungen und fassen zunächst den Fall von drei reellen Wurzeln $\alpha < \beta < \gamma$ ins Auge. Das Konvergenzgebiet für die mittlere Wurzel β wird bloß von der zu β gehörigen maximalen Konvergenzumgebung gebildet, die von den zwei einzigen reellen Periodenpunkten zweiter Ordnung p und p' begrenzt wird, wobei $p' < p$ sein soll. Daß von keinem außerhalb des Intervalles (p', p) liegenden Punkte Konvergenz gegen β eintreten kann, ergibt sich daraus, daß das einzige reelle Rückbild eines Punktes von (p', p) wieder in (p', p) liegen muß. Bedeuten q' und q die Nullstellen der ersten Ableitung des Gleichungspolynoms und ist $q' < q$, so sind die unendlichen Intervalle $(-\infty, q')$ und (q, ∞) die maximalen Konvergenzumgebungen der Wurzeln α, beziehungsweise Wie man sich am einfachsten geometrisch klar macht, besitzen diese beiden maximalen Konvergenzumgebungen unendlich viele Rückbilder in den Intervallen (q', p') und (p, q), die sich links von p' und rechts von p häufen, wobei immer auf ein Rückbild von $(-\infty, q')$ ein solches von (q, ∞) folgt und deren Gesamtheit die Intervalle (q', p') und (p, q) gänzlich ausfüllt.

Hat die kubische Gleichung $f(w) = 0$ eine Doppelwurzel, so trennt offenbar die von dieser verschiedene Wurzel von $f'(w) = 0$ die beiden Konvergenzgebiete, wie bei der quadratischen Gleichung mit zwei verschiedenen reellen Wurzeln. Hat schließlich $f(w) = 0$ eine dreifache Wurzel, so tritt für jeden reellen Anfangswert Konvergenz ein.

Sind in den bisher betrachteten Fällen die Verhältnisse noch leicht zu übersehen, so werden sie für kubische Gleichungen mit bloß einer reellen Wurzel schon bedeutend verwickelter. Nur um zu zeigen, was für Möglichkeiten hier schon eintreten können, betrachten wir die folgenden Beispiele.

Es sei zunächst $f(w) = w^3 - 3w + 3 = 0$, so daß $\varphi(w) = = \frac{2w^3 - 3}{3(w^2 - 1)}$ wird. Die Kurve $z = f(w)$ hat für $w = 0$ einen Wendepunkt, dessen Tangente die w-Achse in $w = 1$ schneidet, also in einer Nullstelle von $f'(w)$, deren andere bei $w = -1$ liegt. Die einzige reelle Wurzel von $f(w) = 0$ bezeichnen wir mit α und es ist $\alpha < -1$. Ihre maximale Konvergenzumgebung ist $(-\infty, -1)$ und wir wollen nun nachsehen, was sich in diesem Beispiel über die Gesamtheit der Konvergenzstellen aussagen läßt, wobei wir unter einer Konvergenzstelle einen solchen Punkt k verstehen, daß sich stets eine, wenn auch noch so große natürliche Zahl N angeben läßt, so daß $\varphi_N(k) < -1$ wird. Wir bemerken noch, daß eine Konvergenzstelle niemals ein Häufungspunkt von Divergenzstellen sein kann, da ja sonst auch im Intervalle $(-\infty, -1)$ Divergenzstellen vorhanden sein müßten. Es muß sich also um jede Konvergenzstelle ein — notwendigerweise offenes — Konvergenzintervall abgrenzen lassen.

Wir wollen nun die Gesamtheit aller Konvergenzintervalle herstellen, indem wir alle möglichen Rückbilder der maximalen Konvergenzumgebung $(-\infty, -1)$ aufsuchen. Bezeichnen wir mit a_2 das einzige reelle Rückbild von $w = -1$, so ist $a_2 > 1$, und wenn man $a_1 = 1$ setzt, so ist offenbar (a_1, a_2) ein Konvergenzintervall. Ist ferner $a_{\varkappa+2}$ das rechts von $+1$ liegende Rückbild des Punktes $a_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, 3, \ldots)$, so sind auch die $(a_{2\varkappa-1}, a_{2\varkappa})$ Konvergenzintervalle. Nun seien $b_\varkappa$ und $c_\varkappa$ die zwischen -1 und 0, beziehungsweise zwischen 0 und $+1$ liegenden Rückbilder eines Punktes $a_\varkappa$, dann wird $b_{\varkappa+1} < b_\varkappa$ und $c_{\varkappa+1} > c_\varkappa$ und es sind auch $(b_{2\varkappa}, b_{2\varkappa-1})$ sowie $(c_{2\varkappa-1}, c_{2\varkappa})$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots)$ wieder Konvergenzintervalle. Dabei häufen sich die Punkte $b_\varkappa$ rechts von -1 und die $c_\varkappa$ links von $+1$, es sind also -1 und $+1$ Häufungsstellen von Divergenzpunkten, da ja die $a_\varkappa$ und daher auch die $b_\varkappa$ und $c_\varkappa$ solche sind. Daraus folgt aber, daß auch die $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ und $c_\varkappa$ selber Häufungsstellen von Divergenzpunkten sein müssen, weil sie anderseits wieder Rückbilder von -1, beziehungsweise $+1$ sind.

Die zwischen a_2 und a_3 liegenden Rückbilder der Intervalle $(b_{2\varkappa}, b_{2\varkappa-1})$ und $(c_{2\varkappa-1}, c_{2\varkappa})$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots)$ sind wieder Konvergenzintervalle und es häufen sich die der ersteren rechts von a_2 und die der letzteren links von a_3. Von diesen eben gewonnenen Konvergenzintervallen suchen wir nun die zwischen a_4 und a_5 gelegenen Rückbilder und fahren so ad inf. fort. Von diesen neuen Konvergenzintervallen suchen wir wieder die zwischen -1 und 0, beziehungsweise die zwischen 0 und $+1$ liegenden Rückbilder, von diesen wieder die rechts von $+1$ befindlichen Rückbilder u. s. f. ad inf. Man erkennt, daß man auf diese Weise immer neue Konvergenzintervalle gewinnt, von denen keines mit einem früher erhaltenen Punkte gemein haben kann und deren Endpunkte als Rückbilder von -1, beziehungsweise $+1$ nicht bloß selber Divergenzpunkte, sondern sogar einseitige Häufungsstellen von solchen sein müssen.

Die Menge $\mathfrak{N}$ der Endpunkte der so erhaltenen Konvergenzintervalle ist sicher *in sich dicht*, da jeder Punkt von $\mathfrak{N}$ Häufungspunkt von Punkten von $\mathfrak{N}$ ist. Fügen wir noch zur Menge $\mathfrak{N}$ die ihr nicht angehörigen Häufungsstellen ihrer Punkte hinzu, so erhalten wir eine *abgeschlossene*, also *perfekte* Menge $\mathfrak{M}$, von der wir leicht zeigen können, daß sie *nirgends dicht* sein kann. Da nämlich jeder Punkt von $\mathfrak{M}$ Häufungsstelle von Endpunkten von Konvergenzintervallen ist, so muß zwischen zwei beliebigen Punkten von $\mathfrak{M}$ mindestens ein Konvergenzintervall liegen, das dann keinen Punkt von $\mathfrak{M}$ enthalten kann. Da $\varphi(0) = 1$, so können wir sagen, daß bei unserem Beispiele *die Menge der Konvergenzpunkte aus der um den Nullpunkt verminderten Komplementärmenge einer perfekten und nirgends dichten Menge* besteht.

Wir wollen noch für einen besonderen Fall zeigen, daß sich unter den Punkten der Menge $(\mathfrak{M}-\mathfrak{N})$, also unter den Häufungsstellen der Endpunkte der Konvergenzintervalle, die nicht der Menge $\mathfrak{N}$ angehören, die Periodenpunkte und deren Rückbilder befinden. Es ist zunächst klar, daß der Näherungspunkt eines das Intervall $(0, a_3)$ durchlaufenden Punktes die ganze w-Achse durchläuft, so daß das Intervall $(0, a_1)$ ein Rückbild der rechts von a_1 und (a_1, a_3) im Rückbild der links von a_1 liegenden Hälfte der w-Achse wird. Ist d_1 das rechts von a_1 liegende einzige reelle Rückbild von $w = 0$ und setzen wir der Gleichförmigkeit halber $a_5 = d_2$, so ist das Intervall (d_1, d_2) ein Rückbild des Intervalles $(0, a_3)$. Sind ferner e_1 und e_2 die zwischen 0 und $+1$ liegenden Rückbilder von d_1, beziehungsweise d_2, dann ist auch das Intervall (e_1, e_2) ein Rückbild von $(0, a_3)$ und dabei ist $0 < e_1 < e_2 < 1$. Ebenso gilt für die rechts von $+1$ liegenden Rückbilder d_3 und d_4

von e_1, beziehungsweise e_2, daß: $d_1 < d_3 < d_4 < d_2$. Daraus folgt wieder, daß auch für die zwischen 0 und $+1$ liegenden Rückbilder e_3 und e_4 von d_3, beziehungsweise d_4 die Ungleichungen $e_1 < e_3 < e_4 < e_2$ bestehen müssen. Indem wir in dieser Weise fortfahren, erhalten wir links und rechts vom Punkte $+1$ je eine Folge von ineinandergeschachtelten Intervallen $(e_{2\varkappa-1}, e_{2\varkappa})$, beziehungsweise $(d_{2\varkappa-1}, d_{2\varkappa})$, die notwendigerweise gegen je einen Grenzpunkt konvergieren müssen, da ja vorher schon festgestellt wurde, daß die Menge der Divergenzstellen nirgends dicht sein kann. Würden nämlich die beiden Intervallfolgen gegen je ein Grenzintervall konvergieren, so müßten alle Näherungspunkte, die ein Punkt eines der beiden Intervalle liefert, in ihnen verbleiben, wir hätten also im Widerspruch mit dem obigen Ergebnisse zwei Divergenzintervalle.

Übrigens läßt sich auch durch direkte Rechnung zeigen, daß diese beiden Intervallfolgen gegen je einen Grenzpunkt konvergieren, wenn man beachtet, daß

$$\lim_{w \to w_1} \frac{\varphi(w_1) - \varphi(w)}{w_1 - w} = \varphi'(w_1) = \frac{f(w_1) \cdot f''(w_1)}{f'(w_1)^2}$$

das Verhältnis eines unendlich kleinen Intervalles mit dem Endpunkte $\varphi(w_1)$ zu seinem Rückbilde mit dem Endpunkte w_1 darstellt. Man rechnet für unser Beispiel leicht nach, daß $\varphi'(w)$ für das in Betracht kommende Intervall stets kleiner bleibt als $1 - \varepsilon$, wo ein fester positiver echter Bruch ist, so daß die Rückbilder der fraglichen Intervalle sich tatsächlich auf zwei Punkte zusammenziehen müssen.

Es seien also $p' < 1$ und $p > 1$ diese beiden Grenzpunkte, dann gilt

$$\varphi(p') = p \text{ und } \varphi(p) = p'$$

oder

$$\varphi_2(p) = p \text{ und } \varphi_2(p') = p',$$

es bilden also p und p' ein Paar von Periodenpunkten zweiter Ordnung. Aus ihrer Entstehung erkennt man, daß sie Häufungsstellen von Rückbildern aller Punkte der w-Achse sein müssen, insbesonders also auch der Endpunkte der oben gefundenen Konvergenzintervalle. Es gibt daher auch in jeder Umgebung von p und p' stets Punkte, aus denen sich eine Folge von Näherungspunkten herstellen läßt, die einen beliebig vorgegebenen Punkt der w-Achse enthält. Man sieht leicht, daß man auf ähnliche Weise Periodenpunkte von beliebiger Ordnung herstellen kann. Daß man hier durch eine geeignete Umkehrung des Newton'schen Näherungsverfahrens die Periodenpunkte erhält, ist keineswegs eine bloß an unserem Beispiele zutage tretende zufällige Erscheinung, sondern nur ein Sonderfall der Iteration von

Zweigen einer algebraischen Funktion vom Geschlechte Null, die vielleicht in einer späteren Arbeit ausführlicher behandelt werden wird.

Von den eben angetroffenen gänzlich verschiedene Verhältnisse können jedoch dann eintreten, wenn der von der Nullstelle von $f''(w)$ gelieferte Näherungspunkt mit keiner Nullstelle von $f'(w)$ zusammenfällt, wie wir an dem Beispiel $f(w) \equiv w^3 - 2w + 2 = 0$ sehen werden. Es wird hier

$$\varphi(w) = 2 \, . \, \frac{w^3 - 1}{3w^2 - 2},$$

also $\varphi(0) = +1$ und $\varphi(+1) = 0$, es bilden somit die Nullstelle $p' = 0$ von $f''(w)$ und der rechts von der größten Wurzel von $f'(w) = 0$ liegende Punkt $p = +1$ ein Paar von Periodenpunkten zweiter Ordnung. Diese weisen aber ein ganz anderes Verhalten auf als die Periodenpunkte des vorigen Beispieles. Entwickeln wir nämlich

$$\varphi[\varphi(w)] = 2 \cdot \frac{8(w^3 - 1)^3 - (3w^2 - 2)^3}{(3w^2 - 2) . [4(w^3 - 1)^2 - 2(3w^2 - 2)^2]}$$

an der Stelle $w = 0$, so kommt

$$\varphi[\varphi(w)] = 9w^2 + \ldots$$

Ist also $|w_1|$ genügend klein gewählt, so wird

$$w_3 = \varphi(w_2) = \varphi[\varphi(w_1)] < w_1$$

Es muß daher auch eine größte Umgebung $\mathfrak{U}'$ von $p' = 0$ vorhanden sein, so daß jeder Punkt aus $\mathfrak{U}'$ eine Folge von Näherungspunkten liefert, welche die beiden Punkte p' und p zu Häufungsstellen hat. Die Punkte des Rückbildes $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{U}'$, das den Punkt p in seinem Innern enthält, besitzen offenbar die gleiche Eigenschaft. Es sind also $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{U}'$ Divergenzintervalle, und indem wir alle möglichen Rückbilder von $\mathfrak{U}$ herstellen, die natürlich wieder Divergenzintervalle sein müssen, sehen wir, daß bei unserem Beispiele sogar unendlich viele Divergenzintervalle auftreten.

Wir werden später allgemein zeigen, daß immer dann, wenn ein Periodenpunkt beliebiger Ordnung in genügender Nähe einer Nullstelle von $f''(w)$ liegt oder gar mit einer solchen zusammenfällt, Divergenzintervalle auftreten müssen. Wenn wir dieses Ergebnis jetzt schon benützen, so können wir leicht einsehen, daß auch in dem Falle, wo der Schnittpunkt der Wendetangente der kubischen Parabel $z = f(w)$ zwischen die beiden Nullstellen von $f'(w)$ fällt, unendlich viele Divergenzintervalle vorhanden sein können. Nehmen wir zunächst an, $f(w) = 0$ habe die Doppelwurzel β und es sei $\gamma < \beta$ die zweite Nullstelle von $f'(w)$;

wobei $f(\gamma) > 0$ sein soll. Ferner sei $f''(\delta) = 0$, dann ist offenbar $\varphi(\delta) = \delta_1 < \beta$ und allgemein $\varphi(\delta_\varkappa) = \delta_{\varkappa+1} < \beta$ $(\varkappa = 1, 2, . \; .)$. Die Gleichung $f(w) + \varepsilon = 0$, wo $\varepsilon > 0$, hat dann nur mehr eine reelle Wurzel und die den Punkten $\delta_\varkappa$ entsprechenden Punkte $\delta'_\varkappa$ sind bis zu einem gewissen $\varkappa = n(\varepsilon)$ nach rechts gerückt und außer δ'_n selber noch kleiner als β. Wir können dann ε sicher so wählen,[1] daß $\varphi(\delta'_n) = \delta$ wird, so daß $\delta, \delta'_1, \; . \; \delta'_n$ ein $(n+1)$-Tupel von Periodenpunkten $(n+1)$-ter Ordnung bilden. Nach dem vorweggenommenen Satz gibt es daher auch $n+1$ Divergenzintervalle, deren Rückbilder unendlich viele weitere liefern. Da es schon genügen würde, wenn bloß in genügender Nachbarschaft von δ ein Punkt δ'_0 vorhanden wäre, so daß $\varphi_{n+1}(\delta'_0) = \delta'_0$, also $\delta'_\varkappa = \varphi(\delta'_{\varkappa-1})$ $(\varkappa = 1, 2 \quad n+1)$ Periodenpunkte von der gewünschten Beschaffenheit werden, so sieht man, daß das Auftreten von Divergenzintervallen bei kubischen Gleichungen mit bloß einer reellen Wurzel keine Seltenheit sein wird, wenn nicht der im vorigen Beispiel erledigte Fall eintritt, wo $\varphi(\delta) = \beta$ wird. Diesen Fall außeracht gelassen, wäre noch die Frage zu erledigen, ob nicht für jedes $\varepsilon > 0$ Divergenzintervalle vorhanden sind. Diese Frage müssen wir jedoch offen lassen.

In ähnlicher Weise könnte man auch für Gleichungen höheren Grades die Konvergenzintervalle aufsuchen, doch werden schon für Gleichungen vierten Grades so viele Fallunterscheidungen nötig, daß die Betrachtungen äußerst verwickelt werden. In den folgenden Überlegungen lassen wir daher die Beschränkung auf reelle Werte fallen und legen ihnen die komplexe Zahlenebene zugrunde.

b) Im Komplexen.

Wir gehen aus von der Gleichung

$$f(w) \quad w^n + a_1 w^{n-1} + \qquad + a_{n-1} w + a_n = 0,$$

deren Koeffizienten irgendwelche komplexe Zahlen sein sollen. Für die Newton'sche Iterationsformel ergibt sich sodann:

$$= \varphi(w) = \frac{w \cdot f'(w) - f(w)}{f'(w)} =$$

$$= \frac{(n-1)\, w^n + (n-2)\, a_1 w^{n-1} + \;\; .. + a_{n-2} w^2 - a_n}{n\, w^{n-1} + (n-1)\, a_1 w^{n-2} + \qquad + 2\, a_{n-2} w + a_{n-1}},$$

welche Beziehung wir in die Form setzen:

$$F(w, z) \equiv (n-1)\, w^n + [(n-2)\, a_1 - n z]\, w^{n-1} +$$

$$+ [(n-3)\, a_2 - (n-1)\, a_1 z]\, w^{n-2} +$$

[1] Man sieht nämlich unmittelbar, daß die Gleichung, aus der so bestimmt werden kann, daß $\varphi(\delta'_n) = \delta$ wird, von ungeradem Grade sein muß.

$$+ [(\nu - 1)\, a_{n-\nu} - (\nu + 1)\, a_{n-\nu-1}\, z]\, w^{\nu} +$$

$$+ [a_{n-2} - 3\, a_{n-3}\, z]\, w^2 - 2\, a_{n-2}\, z\, w -$$

$$- a_{n-1}\, z - a_n = 0, \qquad (1)$$

wo wir w als Funktion von betrachten. Aus den beiden Gleichungen

$$F(w, z) = (z - w) \,.\, f'(w) + f(w) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial w} = (z - w) \,.\, f''(w) = 0$$

erkennt man sofort, daß die Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \quad \alpha_n$ von $f(w) = 0$ kritische Stellen von $F(w, z) = 0$ sind. Ferner ist leicht zu sehen, daß die $n - 2$ übrigen kritischen Stellen von den Punkten $\gamma_{\varkappa} = \varphi(\beta_{\varkappa})$ $(\varkappa = 1, 2, \quad n - 2)$ gebildet werden, wo $f''(\beta_{\varkappa}) = 0$.

Wir untersuchen nun, ob und welche Verzweigungen an diesen kritischen Stellen stattfinden, und beginnen dabei mit den Wurzeln $\alpha_{\varkappa}$. Setzen wir

$$f(w) = (w - \alpha_1)^{\nu_1} \quad (w - \alpha_2)^{\nu_2} \qquad (w - \alpha_r)^{\nu_r},$$

$$(\nu_1 + \nu_2 + \quad . + \nu_r = n)$$

ferner

$$\psi(w) = \prod_{i=1}^{r} (w - \alpha_i),$$

so ergibt sich für die Iterationsformel

$$z = \varphi(w) = w - \frac{\psi(w)}{\sum\limits_{i=1}^{r} \dfrac{\psi(w)}{w - \alpha_i} \quad \nu_i}$$

oder

$$(z - w) \quad \sum_{i=1}^{r} \frac{\psi(w)}{w - \alpha_i} \quad \nu_i + \psi(w) = 0,$$

wofür wir auch schreiben können

$$F(w, z) \equiv \sum_{i=1}^{r} \nu_i \quad \psi_i(w, z) + \psi(w) = 0,$$

wobei gesetzt wurde

$$\psi_i(w, z) = (w - \alpha_1) \,. \quad .\, (w - \alpha_{i-1})\, (w - z) \;\, (w - \alpha_{i+1}) \qquad (w - \alpha_r)$$

Die Funktion $F(w, z)$ reduziert sich also in dem Falle, wo die Gleichung $f(w) = 0$ mehrfache Wurzeln besitzt, auf eine Funktion r-ten Grades in w, die irreduzibel ist. Jede ν-fache Wurzel von $f(w) = 0$ bewirkt die Abspaltung von $\nu - 1$ konstant bleibenden Zweigen von $w = w(z)$, was ja im Reellen geometrisch unmittelbar einleuchtet. Schon daraus erkennt man, daß eine mehrfache Wurzel von $f(w) = 0$ keine Verzweigungstelle von $w = w(z)$ sein kann, was auch die Entwicklung an dieser Stelle sofort zeigt; denn sei etwa

$$f(w) \equiv w^\nu \,.\, g(w),$$

$$(g[0] \neq 0, \ \nu > 1)$$

so wird aus (1)

$$F(w, z) \equiv (n-1)\, w^n + \quad + [\nu \,.\, a_{n-\nu-1} - (\nu+2)\, a_{n-\nu-2}\, z]\, w^{\nu+1} +$$
$$+ [(\nu-1)\, a_{n-\nu} - (\nu+1)\, a_{n-\nu-1} \quad z]\, w^\nu -$$
$$- \nu \,.\, a_{n-\nu} \,.\, z \,.\, w^{\nu-1} = 0,$$

also $F(w, z)$ wird reduzibel und es ergibt sich nach Abspaltung von $w^{\nu-1}$ eine Entwicklung

$$w = \frac{\nu}{\nu-1} \,.\, z +$$

während die übrigen mit nicht verschwindenden konstanten Gliedern beginnen, die wir als untereinander verschieden voraussetzen wollen, es sei also kein $\gamma_\varkappa = 0$.

Ist aber $\nu = 1$, so wird, wenn wir uns diese Wurzel in den Ursprung verschoben denken, in (1) $a_n = 0$ und $a_{n-1} \neq 0$, so daß wir, wenn noch $a_{n-2} \neq 0$ vorausgesetzt wird, im Ursprung die beiden adjungierten Entwicklungen erhalten:

$$w_1 = + \sqrt{\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}} \qquad +$$

$$w_2 = - \sqrt{\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}} \,.\, z^{1/2} +$$

Wir haben somit das Ergebnis:

»Eine einfache Wurzel α von $f(w) = 0$ ist ein einfacher Verzweigungspunkt von $w = w(z)$, wenn $f''(\alpha) \neq 0$ und kein $\gamma_\varkappa = \alpha$ ist.«

Nun sei α eine solche Wurzel von $f(w) = 0$, für die

$$f'(\alpha) \neq 0;\ f''(\alpha) = \qquad = f^{(\varkappa)}(\alpha) = 0;\ f^{(\varkappa+1)}(\alpha) \neq 0.$$

Denken wir uns α wieder in den Nullpunkt verschoben, so haben wir in (1)

$$a_n = 0;\ a_{n-1} \neq 0;\ a_{n-2} = \qquad = a_{n-\varkappa} = 0;\ a_{n-\varkappa-1} \neq 0$$

zu setzen, so daß:

$$F(w, z) \equiv (n-1)\, w^n + \ldots + [\varkappa\, a_{n-\varkappa-1} - (\varkappa+2)\, a_{n-\varkappa-2}\, z]\, w^{\varkappa+1}$$

$$- (\varkappa+1)\, a_{n-\varkappa-1}\, z\, w^{\varkappa} - a_{n-1}\, z = 0 \tag{2}$$

Es ergeben sich sodann die folgenden adjungierten Entwicklungen:

$$w_j = \zeta^j_{\varkappa+1} \cdot \left| \left(\frac{a_{n-1}}{\varkappa \,.\, a_{n-\varkappa-1}} \right)^{\frac{1}{\varkappa+1}} \right| . z^{\frac{1}{\varkappa+1}} + \ldots, (j = 1, 2, \qquad \varkappa+1)$$

wo $\zeta_{\varkappa+1}$ eine primitive $(\varkappa+1)$-te Einheitswurzel ist, und wir können daher sagen:

»Ist eine einfache Wurzel α von $f(w) = 0$ eine $(\varkappa - 1)$-fache Nullstelle von $f''(w)$ und sind die übrigen $\gamma_\varkappa \neq \alpha$, so ist α ein $\varkappa$-facher Verzweigungspunkt von $w = w(z)$.«

Wir untersuchen nun die Stellen $\gamma_\varkappa$ und nehmen an, die Stelle β sei so beschaffen, daß

$$f(\beta) \neq 0;\ f'(\beta) \neq 0;\ f''(\beta) = \qquad = f^{(\varkappa+1)}(\beta) = 0;\ f^{(\varkappa+2)}(\beta) \neq 0.$$

Verschieben wir β in den Nullpunkt, so wird

$$a_n \neq 0;\ a_{n-1} \neq 0;\ a_{n-2} = \qquad = a_{n-\varkappa-1} = 0;\ a_{n-\varkappa-2} \neq 0$$

und daher

$$F(w, z) \equiv (n-1)\, w^n + \qquad + [(\varkappa+1)\, a_{n-\varkappa-2} -$$

$$- (\varkappa+3)\, a_{n-\varkappa-3}\, z]\, w^{\varkappa+2} - (\varkappa+2)\, a_{n-\varkappa-2}\, z \,.\, w^{\varkappa+1} -$$

$$- a_{n-1}\, z - a_n = 0.$$

Da nun $\gamma = \varphi(0) = -\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$ wird, so wird, wenn wir $z = \zeta +$ setzen

$$\overline{F}(w, \zeta) \equiv (n-1)\, w^n + \qquad - (\varkappa+2)\, a_{n-\varkappa-2}\, (\gamma + \zeta)\, w^{\varkappa+1} -$$

$$- a_{n-1}\, \zeta = 0,$$

woraus wir die folgenden adjungierten Entwicklungen finden:

$$w_j = \zeta^j_{\varkappa+1} \left| \left(\frac{-a_{n-1}}{\gamma . (\varkappa+2)\, a_{n-\varkappa-2}} \right)^{\frac{1}{\varkappa+1}} . (z-\gamma)^{\frac{1}{\varkappa+1}} + \right.$$

$$(j = 1, 2, \quad \varkappa + 1)$$

wo $\zeta_{\varkappa+1}$ wieder eine primitive $(\varkappa+1)$-te Einheitswurzel ist.

Ist auch $f'(\beta) = 0$, so setzen wir $\quad = \frac{1}{\zeta}$ und erkennen, daß dann im Unendlichen ein $\varkappa$-facher Verzweigungspunkt vorhanden ist und ein Zweig, der dort mit keinem anderen zusammenhängt, einen Pol erster Ordnung aufweist. Das Ergebnis fassen wir nun in den Satz:

»Ist β eine $\varkappa$-fache Nullstelle von $f''(w)$ und $f(\beta) \neq 0$, so ist $\gamma = \varphi(\beta)$ ein $\varkappa$-facher Verzweigungspunkt von $w = w(z)$, wenn die übrigen $\gamma_\varkappa \neq \gamma$ sind.«

Um schließlich noch den Fall zu erledigen, daß in den bisher immer außer acht gelassenen Entwicklungen unter den konstanten Anfangsgliedern mehrere gleiche vorhanden sind, nehmen wir an, es sei

$$f(\alpha) = 0;\ f'(\alpha) \neq 0;\ f''(\alpha) = \quad = f^{(\varkappa)}(\alpha) = 0;\ f^{(\varkappa+1)}(\alpha) \neq 0.$$

Denken wir uns α wieder in den Nullpunkt verlegt, so ergibt sich aus (2) zur Bestimmung der konstanten Anfangsglieder der übrigen Entwicklungen die folgende Gleichung:

$$c^{\varkappa+1} . h(c) = (n-1)\, c^n + (n-2)\, a_1\, c^{n-1} + \quad + \varkappa . a_{n-\varkappa-1} c^{\varkappa+1} =$$

$$= c f'(c) - f(c) = 0.$$

Soll nun $h(c) = (c-\beta)^l . \overline{h}(c)$ werden, wo $\overline{h}(\beta) \neq 0$, so muß β eine $(l-1)$-fache Wurzel von $f''(w) = 0$ sein. Es folgt nämlich einerseits aus

$$c^{\varkappa+1} . h(c) = c . f'(c) - f(c),$$

daß

$$\frac{d\,[c^{\varkappa+1} . h(c)]}{d\,c} = c . f''(c),$$

anderseits aber aus

$$c^{\varkappa+1} . h(c) = c^{\varkappa+1} . (c-\beta)^l . \overline{h}(c),$$

daß

$$\frac{d\,[c^{\varkappa+1} . h(c)]}{d\,c} = c^\varkappa . (c-\beta)^{l-1} \quad \overline{\overline{h}}(c),$$

so daß tatsächlich

$$f''(c) = c^{\varkappa-1}.(c-\beta)^{l-1}.h(c).$$

Nach den bereits ausgesprochenen Sätzen liegen daher in $z = \alpha$ ein $\varkappa$-facher und ein $(l-1)$-facher Verzweigungspunkt übereinander, wenn nicht noch weitere Anfangsglieder der übrigen Entwicklungen gleich werden. Ähnlich verhält es sich natürlich auch in einem Punkte $\gamma = \varphi(\beta) = \varphi(\beta')$, wo $f''(\beta) = f''(\beta') = 0$, und es ist leicht zu sehen, wie noch kompliziertere Verzweigungen entstehen können.

Wir konstruieren nun in der üblichen Weise die Riemann'sche Fläche von $F(w, z) = 0$, indem aus einem regulären Punkt s der z-Ebene nach den einfachen Wurzeln $\alpha_\varkappa$ und nach den Punkten $\gamma_\varkappa$ doppelpunktfreie und einander nicht schneidende Linien $L_\varkappa$ ziehen. Indem wir dann r solche entlang der Linien $L_\varkappa$ aufgeschnittene Blätter übereinanderlegen und den Verzweigungen entsprechend untereinander verbinden, erhalten wir die Riemann'sche Fläche, die hier natürlich vom Geschlechte $p = 0$ ist. Jenen Zweig, der im Unendlichen den Pol erster Ordnung hat, bezeichnen wir mit $w_1(z)$ und denken uns seinen Wertevorrat über dem ersten Blatte $\mathfrak{B}_1$ ausgebreitet. Jeder Zweig $w_\varkappa(z)$ bildet sodann das Blatt $\mathfrak{B}_\varkappa$, auf dem er ausgebreitet ist, auf einen endlichen Bereich $\mathfrak{B}'_\varkappa$ der w-Ebene ab, ausgenommen $w_1(z)$, der das Blatt $\mathfrak{B}_1$ auf einen das Unendliche enthaltenden Bereich $\mathfrak{B}'_1$ der w-Ebene, beziehungsweise w-Kugel abbildet. Es ist ferner klar, daß die Gesamtheit der Bereiche $\mathfrak{B}'_\varkappa$ die w-Ebene einfach und lückenlos überdeckt, wenn für eine geeignete Ränderzuordnung der Blätter gesorgt worden ist. Es soll noch bemerkt werden, daß die Ränder der Bereiche durch die Punkte $\alpha_\varkappa$ und $\beta_\varkappa$ hindurchgehen und dort Ecken aufweisen können, sowie daß jeder Bereich $\mathfrak{B}'_\varkappa$ $(\varkappa \neq 1)$ in seinem Inneren eine Nullstelle von $f'(w)$ enthalten muß. Da bei der angedeuteten Konstruktion der Riemann'schen Fläche jedes Blatt offenbar nur einen einzigen Rand bekommt, wenn wir es entlang der Übergangslinien aufschneiden, so müssen die Bereiche $\mathfrak{B}'_\varkappa$ in der w-Ebene alle einfach zusammenhängend sein.

Nach diesen Vorbereitungen wollen wir nun die zur einfachen Wurzel α gehörige maximale Konvergenzumgebung herstellen. Um gleich den allgemeinsten Fall zu erledigen, nehmen wir an, daß α ein mehrfacher Verzweigungspunkt sei und daß die Zweige $w_{\varkappa_1}(z), w_{\varkappa_2}(z), \quad w_{\varkappa_h}(z)$ einen h-gliedrigen Zyklus bilden, wobei

$$w_{\varkappa_1}(\alpha) = w_{\varkappa_2}(\alpha) = \ldots = w_{\varkappa_h}(\alpha) = \alpha$$

sein soll. Um die anderen Zweige, die etwa noch in α zusammenhängen, haben wir uns vorläufig nicht zu kümmern. Wir legen nun die Riemann'sche Fläche so auf die w-Ebene, daß entsprechende Punkte sich decken und ziehen in der w-Ebene um α als Mittelpunkt einen Kreis $\mathfrak{K}'_0$, dessen Radius ρ wir so klein wählen, daß für $|w-\alpha| \leqq \rho$ stets $|\varphi(w) - \alpha| = |z-\alpha| < \rho$ bleibt, es soll also in $\mathfrak{K}'_0$ das Newton'sche Verfahren gegen α konvergieren. Nun errichten wir über $\mathfrak{K}'_0$ einen Zylinder und schneiden mit seinem Mantel alle Blätter der über der w-Ebene liegenden Riemann'schen Fläche durch. Von den innerhalb jenes Zylinders liegenden, getrennten Stücken der Riemann'schen Fläche nehmen wir jenes, das von den Blättern $\mathfrak{B}_{\varkappa_1}, \mathfrak{B}_{\varkappa_2}, \ldots \mathfrak{B}_{\varkappa_h}$ herrührt und an dem eventuell auch andere Blätter noch beteiligt sind, wenn innerhalb $\mathfrak{K}'_0$ außer α noch ein Verzweigungspunkt γ liegt, in dem das eine oder andere der Blätter $\mathfrak{B}_{\varkappa_1}, \mathfrak{B}_{\varkappa_2}, \ldots \mathfrak{B}_{\varkappa_h}$ mit anderen Blättern zusammenhängt. Wegen $p = 0$ ist das in Rede stehende Stück der Fläche einfach zusammenhängend und wir bezeichnen es mit $\mathfrak{K}_1$. Nun bilden wir durch $w(z)$ diesen mehrblättrigen Bereich $\mathfrak{K}_1$ auf die w-Ebene ab, wodurch wir dort einen schlichten, einfach zusammenhängenden Bereich $\mathfrak{K}'_1$ erhalten, der natürlich $\mathfrak{K}'_0$ als Teilbereich enthält. Mit $\mathfrak{K}'_1$ verfahren wir genau so wie oben mit $\mathfrak{K}'_0$ und bezeichnen den so erhaltenen mehrblätterigen Bereich, der $\mathfrak{K}_1$ als Teilbereich enthält, mit $\mathfrak{K}_2$. Die Abbildung von $\mathfrak{K}_2$ durch $w(z)$ liefert uns in der w-Ebene einen $\mathfrak{K}'_1$ enthaltenden, schlichten und einfach zusammenhängenden Bereich $\mathfrak{K}'_2$. Indem wir mit $\mathfrak{K}'_2$ dasselbe Verfahren fortsetzen und so ad inf. fortfahren, erhalten wir in der w-Ebene eine Folge von einander einschließenden Bereichen:

$$\mathfrak{K}'_0 < \mathfrak{K}'_1 < \mathfrak{K}'_2 < \ldots\ldots,$$

welche gegen einen sich eventuell auch nach einer oder mehreren Richtungen ins Unendliche erstreckenden Grenzbereich $\mathfrak{K}'$ »konvergieren«, der sodann offenbar unsere gesuchte maximale Konvergenzumgebung darstellt und dessen Randkurve R' durch das Newton'sche Verfahren in sich übergehen muß, es ist somit jeder ihrer Punkte ein Divergenzpunkt.

Wenn das Blatt $\mathfrak{B}_1$ zu keinem der Bereiche $\mathfrak{K}_n$ einen Betrag liefert, dann muß die Konvergenzumgebung ganz im Endlichen liegen. In diesem Fall ist auch leicht zu erkennen, daß alle $\mathfrak{K}$ von einem bestimmten Index n angefangen außer α noch einen oder mehrere Verzweigungspunkte γ enthalten müssen, da sich sonst die unmögliche Folgerung ergäbe, daß auf der Randkurve R' eine Wurzel von $f(w) = 0$ läge. In gewissen Fällen kann man noch zeigen, daß auf R' Periodenpunkte jeder Ordnung liegen müssen, aber damit dürften wohl alle allgemeinen wichtigeren Aussagen über die Randkurve R' erschöpft sein.

Aus der eben gefundenen maximalen Konvergenzumgebung kann man nun leicht die Gesamtheit aller zur Wurzel α gehörigen Konvergenzbereiche herstellen. Wir nehmen zunächst an, es schneide der über $\mathfrak{K}'$ errichtete Zylinder aus der Riemann'schen Fläche außer $\mathfrak{K}$ noch andere voneinander getrennte Stücke $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots \mathfrak{M}g_1$ aus, die ebenfalls einfach zusammenhängend sind. Wir bilden diese Stücke durch $w(z)$ auf die schlichten

Bereiche $\mathfrak{M}'_1, \mathfrak{M}'_2, \ldots \mathfrak{M}'_{g_1}$ der w-Ebene ab, die weder untereinander noch mit $\mathfrak{K}'$ innere Punkte gemein haben und für die offenbar

$$\mathfrak{K}' = \varphi(\mathfrak{M}'_{i_1}) \quad (i_1 = 1, 2, \ldots g_1).$$

Mit jedem $\mathfrak{M}'_{i_1}$ können wir nun dasselbe wie mit $\mathfrak{K}'$ machen und erhalten so die neuen Konvergenzbereiche

$$\sum_{i_1=1}^{g_1} \sum_{i_2=1}^{g_2} \mathfrak{M}'_{i_1 i_2},$$

wobei g_2 von i_1 abhängen wird. Indem wir in der angegebenen Weise fortfahren, erhalten wir eine unendliche Menge von Konvergenzbereichen, so daß wir die Gesamtheit aller Bereiche, von denen aus das Newton'sche Verfahren gegen die Wurzel α konvergiert, symbolisch in folgender Weise angeben können:

$$\sum_{i_1=0}^{g_1} \sum_{i_2=0}^{g_2} \sum_{i_3=0}^{g_3} \ldots \mathfrak{M}'_{i_1 i_2 \ldots}$$

wobei $g_1 \leqq r - h$, $g_\varkappa \leqq r$ aber von den Indizes $i_1, i_2, \ldots i_{\varkappa-1}$ abhängig ist und alle $i_{\varkappa+p} = 0$ $(p = 1, 2, \ldots)$ zu setzen sind, wenn $i_\varkappa = 0$, wo dann

$$\mathfrak{M}'_{i_1 i_2 \ldots i_{\varkappa-1} 0} = \mathfrak{M}'_{i_1 i_2 \ldots i_{\varkappa-1}}$$

und insbesondere $\mathfrak{M}'_{0, 0, 0, \ldots} = \mathfrak{K}'$.

Wenn aber der Zylinder über $\mathfrak{K}'$ nur ein einziges Stück $\mathfrak{K}$ ausschneidet, dann ist offenbar eine derartige Erweiterung der maximalen Konvergenzumgebung nicht möglich. Ist also insbesonders α eine einfache Wurzel der Gleichung $f(w) = 0$, die im ganzen r verschiedene Wurzeln hat, und eine $(r-2)$-fache Nullstelle von $f''(w)$, dann hängen in α alle r-Blätter in einem Zyklus zusammen, und die Gesamtheit der Konvergenzstellen reduziert sich bloß auf die maximale Konvergenzumgebung, die sich allerdings hier nach $(r-1)$-Richtungen ins Unendliche erstrecken kann. Ein solches Verhalten zeigt insbesonders die Gleichung $w^n + a\,w = 0$ hinsichtlich der Wurzel $w = 0$.

Unsere Betrachtungen zeigen, daß die Menge aller zu einer Wurzel gehörigen Konvergenzbereiche einen recht verwickelten Bau haben muß und daß es daher wohl ein aussichtsloses Bemühen wäre, wollte man für die Konvergenz des Newton'schen Verfahrens notwendige Bedingungen aufsuchen in Form von Relationen zwischen den Koeffizienten der Gleichung und dem Anfangswert.

Von den Rändern der Konvergenzbereiche haben wir schon gesehen, daß alle ihre Punkte Divergenzstellen sein müssen. Es gibt tatsächlich Gleichungen, deren sämtliche Divergenzstellen nur eindimensionale Kontinua erfüllen, es gibt aber auch solche, deren Divergenzstellen zweidimensionale Kontinua bilden. Dabei spielen die Periodenpunkte eine wichtige Rolle, die wir nun untersuchen wollen.

II. Periodenpunkte.

Bezeichnen wir mit $\varphi_l(w)$ die l-te Iterierte von $\varphi(w)$, so ist jede Wurzel von $w = \varphi_l(w)$ ein Periodenpunkt l-ter Ordnung. Darunter befinden sich natürlich auch die Wurzeln von $f(w) = 0$ selbst sowie alle Periodenpunkte, deren Ordnung ein Teiler von l ist. Von diesen wollen wir jedoch absehen und p_l nur dann einen Periodenpunkt l-ter Ordnung nennen, wenn $p_l = \varphi_\varkappa(p_l)$ nur für $\varkappa \equiv 0\,(l)$ gilt, also für kein $\varkappa < l$.

Es sei $w = 0$ ein Periodenpunkt l-ter Ordnung, so daß die Entwicklung von $\varphi_l(w)$ in der Umgebung dieses Punktes folgende Gestalt bekommt:

$$z_l = q_1 w + q_2 w^2 + \ldots$$

Wir unterscheiden nun drei Arten von Periodenpunkten je nachdem $|q_1| \lesseqgtr 1$, und zwar:

$|q_1| < 1$. Für genügend kleine $|w|$ wird dann $|z_l| < |w|$ und wir sprechen von einem anziehenden Periodenpunkt.

$|q_1| > 1$. Für genügend kleine $|w|$ wird dann $|z_l| > |w|$, und wir nennen den Periodenpunkt abstoßend.

$|q_1| = 1$. Das Verhalten von $|z_l|$ ist ungewiß, und wir nennen den Periodenpunkt neutral.

Indem wir $q_1 = \left(\dfrac{d\varphi_l(w)}{dw}\right)_{w=0}$ durch f, f' und f'' ausdrücken, können wir leicht sehen, wie die Beschaffenheit eines Periodenpunktes von seiner Lage gegen die Nullstellen von $f''(w)$ abhängt. Beachten wir, daß $\varphi_\varkappa(w) = \varphi_1[\varphi_{\varkappa-1}(w)]$, so ergibt sich unmittelbar:

$$\frac{d\,\varphi_l(w)}{d\,w} = \prod_{\varkappa=0}^{l-1} \frac{d\,\varphi(\varphi_\varkappa)}{d\,\varphi_\varkappa},$$

wobei insbesondere $\varphi_1 = \varphi$ und $\varphi_0 = w$ zu setzen sind. Nun ist aber:

$$\frac{d\,\varphi}{d\,w} = \frac{d}{d\,w}\left[w - \frac{f(w)}{f'(w)}\right] = \frac{f(w).f''(w)}{f'(w)^2},$$

wodurch:

$$\frac{d\,\varphi_l(w)}{d\,w} = \prod_{\varkappa=0}^{l-1} \frac{f(\varphi_\varkappa)\cdot f''(\varphi_\varkappa)}{f'(\varphi_\varkappa)^2}.$$

Daraus entnehmen wir, daß die Wurzeln von $f(w) = 0$ die Rolle von anziehenden Periodenpunkten spielen, doch wollen wir davon absehen und uns nur mit den früher definierten eigentlichen Periodenpunkten l-ter Ordnung befassen. Ein solcher wird also ein anziehender sein, wenn er sich in genügender Nähe einer Nullstelle von $f''(w)$ befindet. Es ist ferner klar, daß man stets Gleichungen vom Grade $n > 2$ bilden kann, die anziehende Periodenpunkte irgendwelcher Ordnung aufweisen. Wenn aber eine Gleichung anziehende Periodenpunkte hat, dann ist auch schon die Existenz von zweidimensionalen Divergenzkontinuen sichergestellt. Denn jeder Punkt einer genügend kleinen Umgebung eines anziehenden Periodenpunktes l-ter Ordnung liefert offenbar eine Folge von Näherungspunkten, welche die Periodenpunkte des l-Tupels, zu dem der erste gehört, als Häufungsstellen hat. Durch ein entsprechendes Verfahren, wie wir früher die maximale Konvergenzumgebung einer Wurzel der Gleichung $f(w) = 0$ ermittelt hatten, ließen sich auch hier die maximalen Divergenzumgebungen finden, die zu den einzelnen anziehenden Periodenpunkten gehören. Wir können also sagen:

»Es gibt Gleichungen von jedem Grade $n > 2$, die anziehende Periodenpunkte haben, und wenn eine Gleichung anziehende Periodenpunkte aufweist, dann besitzt sie auch zweidimensionale Divergenzkontinua.«

Mußten wir die anziehenden Periodenpunkte in der Umgebung der Nullstellen von $f''(w)$ suchen, so werden wir abstoßende hingegen in der Nähe der Nullstellen von $f'(w)$ antreffen können. Wie aus der Entwicklung von $\varphi(w)$ in der Umgebung von $w = \infty$ unmittelbar zu ersehen ist, spielt $w = \infty$ die Rolle eines abstoßenden Periodenpunktes erster Ordnung. Ferner ist klar, daß man Gleichungen jeden Grades mit abstoßenden Periodenpunkten angeben kann.

Für die quadratische Gleichung kann man leicht direkt zeigen, daß alle Periodenpunkte abstoßend sind und auf der Symmetralen der Verbindungsstrecke der beiden Wurzeln überall dicht liegen. Es ist nämlich zunächst, wenn wir $f(w) \equiv w^2 + a$ setzen, wo $a > 0$, was ohne Beschränkung der Allgemeinheit geschehen kann, ohneweiters aus Symmetriegründen klar, daß die reelle Achse die Grenze der Konvergenzgebiete für die beiden Wurzeln ist, es muß also jeder Periodenpunkt auf ihr liegen und abstoßend sein. Wenn man ferner durch

$$\overline{w} = \frac{w + i\sqrt{a}}{w - i\sqrt{a}}$$

die reelle Achse auf den Einheitskreis abbildet, kann man leicht erkennen, daß auf ihm die Bilder der Periodenpunkte überall dicht liegen, also auch die Periodenpunkte selbst auf der reellen Achse. Beachtet man nämlich, daß wegen $w_1 = \varphi(w) = \frac{1}{2}\left(w - \frac{a}{w}\right)$

$$[\overline{w}(w)]^2 = \overline{w}(w_1) = \frac{w^2 + 2iw\sqrt{a} - a}{w^2 - 2iw\sqrt{a} - a}$$

wird, so erkennt man, daß zwischen der Amplitude ψ_1 von $\overline{w}(w_1)$ und der Amplitude ψ von $\overline{w}(w)$ die einfache Beziehung besteht:

$$\psi_1 = 2\psi.$$

Soll also Ψ_l die Amplitude des Bildes eines Periodenpunktes l-ter Ordnung sein, so muß

$$\psi_l + 2\varkappa\pi = 2^l . \psi_l$$

oder

$$\psi_l = \frac{2\varkappa\pi}{2^l - 1} \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots \; 2^l - 1)$$

für $\varkappa = 2^l - 1$ wird $\psi_l = 2\pi \sim 0$, wir erhalten also unter unseren Periodenpunkten auch den unendlich fernen Punkt der reellen Achse. Sehen wir von diesem ab, so bleiben noch $2^l - 2$ übrig, was damit übereinstimmt, daß die Gleichung 2^l-ten Grades $\varphi_l(w) = w$ die Periodenpunkte l-ter Ordnung und die Wurzeln $\pm i\sqrt{a}$ von $f(w) = 0$ zu Wurzeln hat. Die auf dem Einheitskreis liegenden Bilder der — eigentlichen und uneigentlichen — Periodenpunkte l-ter Ordnung sind also $(2^l - 1)$-te Einheitswurzeln und liegen daher für $l = 2, 3,$ sicher überall dicht auf dem Einheitskreis.

Über das Verhalten des Newton'schen Verfahrens in der Umgebung eines neutralen Periodenpunktes, wo $|q_1| = 1$ war, ließ sich vorläufig keine Einsicht gewinnen, wenn nicht über die anderen Entwicklungskoeffizienten $q_2, q_3, \ldots$ weitgehende Voraussetzungen gemacht werden.