

# Über ein Existenztheorem der Variationsrechnung

Von

Hans Hahn in Wien

K. M. d. Akad. d. Wiss.

(Vorgelegt in der Sitzung am 3. Dezember 1925)

Die Variationsrechnung behandelt die Minima und Maxima gewisser Kurvenfunktionen. Ein Kurvenbogen in der Ebene ist gegeben durch:

$$x = x(t), y = y(t); a \leq t \leq b, \quad (1)$$

wo  $x(t)$ ,  $y(t)$  im Intervalle  $[a, b]$  stetige Funktionen bedeuten. Der Kurvenbogen (1) und der Kurvenbogen:

$$x = \xi(\tau), y = \eta(\tau); \alpha \leq \tau \leq \beta \quad (2)$$

gelten als derselbe Kurvenbogen, wenn es eine ähnliche Abbildung der Intervalle  $[a, b]$  und  $[\alpha, \beta]$  gibt, so daß für einander entsprechende Werte  $t$  und  $\tau$  dieser Intervalle:

$$x(t) = \xi(\tau), y(t) = \eta(\tau)$$

gilt. Dabei heißt eine Abbildung der Intervalle  $[a, b]$  und  $[\alpha, \beta]$  ähnlich, wenn sie umkehrbar eindeutig ist und aus  $t' < t''$  für die entsprechenden Werte  $\tau'$  und  $\tau''$  folgt:  $\tau' < \tau''$ .

Wir sagen ferner: der Kurvenbogen (2) liegt in der Umgebung  $\rho$  des Kurvenbogens (1), wenn es eine ähnliche Abbildung der Intervalle  $[a, b]$  und  $[\alpha, \beta]$  gibt, so daß für einander entsprechende Werte  $t$  und  $\tau$  dieser Intervalle der Abstand der zugehörigen Punkte  $(x(t), y(t))$  und  $(\xi(\tau), \eta(\tau))$  der beiden Kurvenbogen  $< \rho$  ausfüllt.

Wir sprechen im Folgenden nur von rektifizierbaren Kurvenbogenen.

Sei nun eine Menge  $\mathfrak{M}$  solcher Kurvenbogen gegeben. Ein Kurvenbogen  $\mathfrak{C}$  heißt Häufungselement von  $\mathfrak{M}$ , wenn für jedes  $\rho > 0$  in der Umgebung  $\rho$  von  $\mathfrak{C}$  unendlich viele Kurvenbogen von  $\mathfrak{M}$  liegen. Die Menge  $\mathfrak{M}$  heißt abgeschlossen, wenn sie jedes ihrer Häufungselemente enthält.

Ist  $\{\mathfrak{C}_\nu\}$  eine Folge von Kurvenbogen, so bedeutet die Beziehung  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \mathfrak{C}_\nu = \mathfrak{C}$ : für jedes  $\rho > 0$  liegen alle  $\mathfrak{C}_\nu$  von einem

gewissen an in der Umgebung  $\rho$  von  $\mathfrak{C}$ . Wir sagen dann: Die Bogen  $\mathfrak{C}_\nu$  konvergieren gegen  $\mathfrak{C}$ .

Sei  $\mathfrak{M}$  eine Menge von Kurvenbogen und es sei jedem Kurvenbogen  $\mathfrak{C}$  von  $\mathfrak{M}$  eine reelle Zahl  $f(\mathfrak{C})$  zugeordnet. Dann ist  $f(\mathfrak{C})$  eine auf  $\mathfrak{M}$  definierte Kurvenfunktion. Sie heißt unterhalb

stetig auf  $\mathfrak{M}$ , wenn, falls alle  $\mathfrak{C}_v$  und  $\mathfrak{C}$  zu  $\mathfrak{M}$  gehören, aus

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \mathfrak{C}_v = \mathfrak{C} \text{ folgt: } \lim_{v \rightarrow \infty} f(\mathfrak{C}_v) \geq f(\mathfrak{C}).$$

Sei nun, wie in der Variationsrechnung üblich, eine Funktion  $F(x, y, x', y')$  gegeben, die samt ihren partiellen Ableitungen  $F_{x'}(x, y, x', y')$  und  $F_{y'}(x, y, x', y')$  definiert und stetig ist für alle einer gewissen abgeschlossenen Menge  $\mathfrak{A}$  der  $xy$ -Ebene angehörigen  $(x, y)$  und alle Wertepaare  $x', y'$  (mit Ausnahme höchstens des Wertepaares  $x' = 0, y' = 0$ ); und zwar sei  $F$  positivhomogen, d. h. es sei

$$F(x, y, kx', ky') = k F(x, y, x', y') \text{ für alle } k > 0. \quad (3)$$

Ist dann  $\mathfrak{C}$  ein ganz in  $\mathfrak{A}$  gelegener rektifizierbarer Kurvenbogen, so gibt es für ihn unendlich viele Darstellungen der Form (1), bei denen  $x(t)$  und  $y(t)$  total stetige Funktionen des Parameters  $t$  sind.<sup>1</sup> Abgesehen von einer Nullmenge existieren dann überall in  $[a, b]$  die Ableitungen  $x'(t)$  und  $y'(t)$  und sind nicht gleichzeitig  $= 0$ . Es existiert ferner das Integral

$$J(\mathfrak{C}) = \int_a^b F(x(t), y(t), x'(t), y'(t)) dt,$$

und sein Wert ist für alle eben genannten unendlich vielen Parameterdarstellungen des Bogens  $\mathfrak{C}$  derselbe. Dieses Integral stellt also eine für alle in der Menge  $\mathfrak{A}$  gelegenen rektifizierbaren Kurvenbogen  $\mathfrak{C}$  definierte Kurvenfunktion dar.

Das Integral  $J(\mathfrak{C})$  heißt positiv definit (in  $\mathfrak{A}$ ), wenn für alle Punkte  $(x, y)$  von  $\mathfrak{A}$  und alle Wertepaare  $(x', y')$  — mit Ausnahme von  $x' = 0, y' = 0$  — die Ungleichung gilt:

$$F(x, y, x', y') > 0;$$

es heißt positiv semidefinit (in  $\mathfrak{A}$ ), wenn für alle genannten Werte von  $x, y, x', y'$  die Ungleichung gilt:

$$F(x, y, x', y') \geq 0.$$

Wir bilden nun die  $E$ -Funktion:

$$E(x, y, x', y', \cos \vartheta, \sin \vartheta) = F(x, y, \cos \vartheta, \sin \vartheta) - \\ - \cos \vartheta F_{x'}(x, y, x', y') - \sin \vartheta F_{y'}(x, y, x', y')$$

und definieren: Das Integral  $J(\mathfrak{C})$  heißt positiv quasiregulär (in  $\mathfrak{A}$ ), wenn für alle Punkte  $(x, y)$  von  $\mathfrak{A}$ , alle Wertepaare  $(x', y')$  —

<sup>1</sup> Eine solche Darstellung erhält man z. B., indem man für den Parameter  $t$  die Bogenlänge  $s$  auf  $\mathfrak{C}$  wählt.

mit Ausnahme von  $x' = 0$ ,  $y' = 0$  — und alle  $\vartheta$  die Ungleichung gilt:

$$E(x, y, x', y', \cos \vartheta, \sin \vartheta) \geq 0.$$

Dann gilt der Satz<sup>1</sup>:

Ist das Integral  $J(\mathcal{C})$  in  $\mathfrak{A}$  positiv semidefinit und positiv quasiregulär, so stellt es eine auf der Menge aller rektifizierbaren, in  $\mathfrak{A}$  gelegenen Kurvenbogen unterhalb stetige Funktion dar.

Für positiv definite Variationsprobleme gilt das folgende fundamentale Existenztheorem<sup>2</sup>:

Ist das Integral  $J(\mathcal{C})$  positiv definit und positiv quasiregulär in der beschränkten, abgeschlossenen Punktmenge  $\mathfrak{A}$ , und ist  $\mathfrak{M}$  eine abgeschlossene Menge von rektifizierbaren, in  $\mathfrak{A}$  gelegenen Kurvenbogen, so gibt es unter den Kurvenbogen von  $\mathfrak{M}$  mindestens einen, der das Integral  $J(\mathcal{C})$  zu einem Minimum macht gegenüber allen Kurvenbogen von  $\mathfrak{M}$ .

Für semidefinite Variationsprobleme hat L. Tonelli eine große Anzahl einzelner Existenztheoreme bewiesen,<sup>3</sup> die alle enthalten sind in dem folgenden, das wir nun beweisen wollen:

Sei das Integral  $J(\mathcal{C})$  positiv semidefinit und positiv quasiregulär in der beschränkten abgeschlossenen Menge  $\mathfrak{A}$ ; es gebe in  $\mathfrak{A}$  keinen Punkt  $(x_0, y_0)$ , in dem  $F(x_0, y_0, x', y') = 0$  ist für alle  $x'$ ,  $y'$ , und es sei die Länge aller in  $\mathfrak{A}$  liegenden rektifizierbaren Kurvenbogen  $\mathcal{C}$ , für die  $J(\mathcal{C}) = 0$  ist, nach oben beschränkt; dann gibt es in jeder abgeschlossenen Menge  $\mathfrak{M}$  rektifizierbarer, in  $\mathfrak{A}$  gelegener Kurvenbogen mindestens einen, der das Integral  $J(\mathcal{C})$  zu einem Minimum macht gegenüber allen Kurvenbogen von  $\mathfrak{M}$ .

Wir bezeichnen mit  $G$  irgendeine Zahl, die von mindestens einem auf der Menge  $\mathfrak{M}$  auftretenden Integralwerte  $J(\mathcal{C})$  unterschritten wird. Wir bezeichnen die Länge eines Kurvenbogens  $\mathcal{C}$  mit  $L(\mathcal{C})$  und beweisen zunächst den Hilfssatz:

Es gibt eine Zahl  $M$ , so daß für alle der Ungleichung  $J(\mathcal{C}) \leq G$  genügenden, rektifizierbaren, in  $\mathfrak{A}$  gelegenen Kurvenbogen auch die Ungleichung gilt:

$$L(\mathcal{C}) \leq M.$$

<sup>1</sup> L. Tonelli, *Fondamenti di calcolo delle variazioni* I, p. 275.

<sup>2</sup> L. Tonelli, a. a. O. II, p. 10.

<sup>3</sup> A. O. II, p. 12 ff.

Angenommen in der Tat, dies wäre nicht der Fall. Dann gäbe es eine Folge in  $\mathfrak{A}$  gelegener rektifizierbarer Kurvenbogen  $\mathfrak{C}_n$ , so daß:

$$J(\mathfrak{C}_n) \leq G; L(\mathfrak{C}_n) > n^2.$$

Offenbar kann  $\mathfrak{C}_n$  durch Einschalten der Zerlegungspunkte  $P_{n,0}, P_{n,1}, \dots, P_{n,n-1}, P_{n,n}$  (wo  $P_{n,0}$  den Anfangspunkt,  $P_{n,n}$  den Endpunkt von  $\mathfrak{C}_n$  bedeutet) so in  $n$  Teilbogen  $\mathfrak{C}_{n,1}, \mathfrak{C}_{n,2}, \dots, \mathfrak{C}_{n,n}$  zerlegt werden, daß:

$$J(\mathfrak{C}_{n,1}) = J(\mathfrak{C}_{n,2}) = \dots = J(\mathfrak{C}_{n,n}) = \frac{1}{n} J(\mathfrak{C}_n).$$

Dann ist:

$$L(\mathfrak{C}_n) = L(\mathfrak{C}_{n,1}) + L(\mathfrak{C}_{n,2}) + \dots + L(\mathfrak{C}_{n,n}) > n^2$$

und es muß daher unter den  $n$  Teilbogen  $\mathfrak{C}_{n,1}, \mathfrak{C}_{n,2}, \dots, \mathfrak{C}_{n,n}$  mindestens einen, etwa  $\mathfrak{C}_{n,\nu}$ , geben, so daß:

$$L(\mathfrak{C}_{n,\nu}) > n.$$

Setzen wir  $\mathfrak{C}_{n,\nu} = \mathfrak{C}'_n$ , so haben wir also:

$$J(\mathfrak{C}'_n) = \frac{1}{n} J(\mathfrak{C}_n) \leq \frac{1}{n} G; L(\mathfrak{C}'_n) > n. \quad (4)$$

Wegen der letzten Ungleichung kann  $\mathfrak{C}'_n$  durch Einschalten der Zerlegungspunkte  $A_{n,0}, A_{n,1}, \dots, A_{n,n}, A_{n,n+1}$  (wo  $A_{n,0}$  den Anfangspunkt,  $A_{n,n+1}$  den Endpunkt von  $\mathfrak{C}'_n$  bedeutet), so in  $n+1$  Teilbogen  $\mathfrak{C}'_{n,1}, \mathfrak{C}'_{n,2}, \dots, \mathfrak{C}'_{n,n+1}$  zerlegt werden, daß:

$$L(\mathfrak{C}'_{n,1}) = 1, L(\mathfrak{C}'_{n,2}) = 1, \dots, L(\mathfrak{C}'_{n,n+1}) = 1. \quad (5)$$

Wir betrachten die Folge von Bogen  $\mathfrak{C}'_{1,1}, \mathfrak{C}'_{2,1}, \dots, \mathfrak{C}'_{n,1}$ . Da sie alle in der beschränkten Menge  $\mathfrak{A}$  liegen und alle die Länge 1 haben, so folgt aus einem bekannten Satze,<sup>1</sup> daß es in dieser Folge eine Teilfolge gibt, etwa  $\mathfrak{C}'_{\nu,1} = \mathfrak{C}'_{n,\nu,1}$  ( $\nu = 1, 2, \dots$ ), die gegen einen rektifizierbaren Bogen  $\mathfrak{C}'_1$  konvergiert, der, da  $\mathfrak{A}$  abgeschlossen ist, gleichfalls in  $\mathfrak{A}$  liegt:

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \mathfrak{C}'_{\nu,1} = \mathfrak{C}'_1.$$

Sodann betrachten wir in der Folge  $\mathfrak{C}'_{2,2}, \mathfrak{C}'_{3,2}, \dots, \mathfrak{C}'_{n,2}$ , die den Bogen  $\mathfrak{C}'_{n,1}$  entsprechende Teilfolge der Bogen  $\mathfrak{C}'_{n,\nu,2}$ . Auch in dieser gibt es wieder eine Teilfolge, sie werde mit

$$\mathfrak{C}^{(2)}_1, \mathfrak{C}^{(2)}_2, \dots, \mathfrak{C}^{(2)}_{\nu},$$

<sup>1</sup> Vgl. z. B. L. Tonelli, a. a. O. I, p. 87.

bezeichnet, die gegen einen rektifizierbaren, in  $\mathfrak{A}$  gelegenen Bogen  $\mathfrak{C}_2^*$  konvergiert:

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \mathfrak{C}_\nu^{(2)} = \mathfrak{C}_2^*.$$

Da die Endpunkte der Bogen  $\mathfrak{C}_\nu^{(1)}$  gegen den Endpunkt von  $\mathfrak{C}_1^*$ , und die Anfangspunkte der Bogen  $\mathfrak{C}_\nu^{(2)}$  gegen den Anfangspunkt von  $\mathfrak{C}_2^*$  konvergieren, da ferner jeder Anfangspunkt eines Bogens  $\mathfrak{C}_\nu^{(2)}$  Endpunkt eines Bogens  $\mathfrak{C}_\nu^{(1)}$  ist, so muß der Endpunkt von  $\mathfrak{C}_1^*$  mit dem Anfangspunkt von  $\mathfrak{C}_2^*$  zusammenfallen. Indem wir in derselben Weise weiter schließen, sehen wir: für jedes  $k$  gibt es in der Folge

$$\mathfrak{C}'_{k,k}, \quad \mathfrak{C}'_{k+1,k}, \quad \mathfrak{C}'_{k+n,k},$$

eine Teilfolge  $\mathfrak{C}_\nu^{(k)}$ , die gegen einen rektifizierbaren, in  $\mathfrak{A}$  gelegenen Bogen  $\mathfrak{C}_k^*$  konvergiert:

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \mathfrak{C}_\nu^{(k)} = \mathfrak{C}_k^*, \quad (6)$$

und zwar so, daß der Endpunkt von  $\mathfrak{C}_k^*$  mit dem Anfangspunkt von  $\mathfrak{C}_{k+1}^*$  übereinstimmt.

Da  $\mathfrak{C}'_{n,1}, \mathfrak{C}'_{n,2}, \dots, \mathfrak{C}'_{n,n}$  Teilbogen von  $\mathfrak{C}'_n$  waren, und da das Integral  $J(\mathfrak{C})$  positiv semidefinit ist, folgt aus (4):

$$J(\mathfrak{C}'_{n,1}) \leq \frac{1}{n} G, \quad J(\mathfrak{C}'_{n,n}) \leq \frac{1}{n} G.$$

Es ist also für jedes  $k$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J(\mathfrak{C}'_{k+n,k}) = 0,$$

und da die Folge  $\mathfrak{C}_1^{(k)}, \mathfrak{C}_2^{(k)}, \dots, \mathfrak{C}_\nu^{(k)}, \dots$  eine Teilfolge von  $\mathfrak{C}'_{k,k}, \mathfrak{C}'_{k+1,k}, \dots, \mathfrak{C}'_{k+n,k}, \dots$  war, ist auch:

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} J(\mathfrak{C}_\nu^{(k)}) = 0. \quad (7)$$

Nach einem schon erwähnten Satze von Tonelli ist aber das Integral  $J(\mathfrak{C})$  unterhalb stetig. Aus (6) folgt also:

$$J(\mathfrak{C}_k^*) \leq \lim_{\nu \rightarrow \infty} J(\mathfrak{C}_\nu^{(k)}), \text{ d. h. } J(\mathfrak{C}_k^*) \leq 0,$$

und da  $J(\mathfrak{C})$  positiv semidefinit ist, folgt daraus weiter:

$$J(\mathfrak{C}_k^*) = 0.$$

Bezeichnen wir noch den aus  $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \dots, \mathfrak{C}_k$  zusammengesetzten gleichfalls in  $\mathfrak{A}$  gelegenen Kurvenbogen mit  $\mathfrak{C}_k^*$ , so ist also auch:

$$J(\mathfrak{G}_k^*) = 0, \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (8)$$

Nunmehr werden wir beweisen, daß die Länge von  $\mathfrak{C}_k^*$  mit  $k$  über alle Grenzen wächst:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} L(\mathfrak{G}_k^*) = +\infty. \quad (9)$$

Da:

$$L(\mathfrak{G}_k^*) = L(\mathfrak{G}_1^*) + L(\mathfrak{G}_2^*) + \dots + L(\mathfrak{G}_k^*)$$

ist, genügt es zu dem Zwecke nachzuweisen, daß nicht

$$\lim_{k \rightarrow \infty} L(\mathfrak{G}_k^*) = 0 \quad (10)$$

sein kann.

Würde nun (10) gelten, so müßte es einen in  $\mathfrak{A}$  gelegenen Punkt  $(x^*, y^*)$  geben, in dem sich die Bogen  $\mathfrak{G}_k^*$  häufen, und es gäbe daher weiter in der Folge der  $\mathfrak{G}_k^*$  eine Teilfolge  $\mathfrak{G}_{k_1}^*, \mathfrak{G}_{k_2}^*, \mathfrak{G}_{k_\lambda}^*$ , die gegen den Punkt  $(x^*, y^*)$  konvergiert; d. h. in jeder noch so kleinen Umgebung von  $(x^*, y^*)$  müßten alle  $\mathfrak{G}_{k_\lambda}^*$  von einem gewissen an ganz enthalten sein.

Wegen (6) kann nun der Index  $\nu_\lambda$  so groß gewählt werden, daß  $\mathfrak{G}_{\nu_\lambda}^{(k_\lambda)}$  ganz in der Umgebung  $\frac{1}{\lambda}$  von  $\mathfrak{C}_{k_\lambda}^*$  liegt, und wegen (7) kann  $\nu_\lambda$  auch so groß gewählt werden, daß

$$J(\mathfrak{G}_{\nu_\lambda}^{(k_\lambda)}) < \frac{1}{\lambda}. \quad (11)$$

Die Folge der Bogen  $\bar{\mathfrak{C}}_\lambda = \mathfrak{G}_{\nu_\lambda}^{(k_\lambda)}$  hat dann nachstehende Eigenschaften: auch die Bogen  $\bar{\mathfrak{C}}_\lambda$  konvergieren gegen den Punkt  $(x^*, y^*)$ ; wegen (11) ist:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} J(\bar{\mathfrak{C}}_\lambda) = 0, \quad (12)$$

und da der Bogen  $\mathfrak{G}_{\nu_\lambda}^{(k_\lambda)}$  ein Bogen  $\mathfrak{G}_{n, k}$  war, ist wegen (5):

$$L(\bar{\mathfrak{C}}_\lambda) = 1. \quad (13)$$

Nach Voraussetzung kann  $F(x^*, y^*, x', y')$  nicht für alle  $x', y'$  verschwinden: Deuten wir  $x', y'$  als laufende Koordinaten einer Ebene, so ist wegen (3):

$$z = F(x^*, y^*, x', y')$$

die Gleichung eines Kegels, und bekanntlich hat die Voraussetzung,  $J(\mathfrak{G})$  sei positiv semidefinit und positiv quasiregulär, zur Folge, daß dieser Kegel nirgends unterhalb der  $x'y'$ -Ebene verläuft und nach unten konvex ist.

Daraus folgt weiter unmittelbar, daß die Werte von  $\varphi$ , für die

$$F(x^*, y^*, \cos \varphi, \sin \varphi) = 0$$

ist, nur einen einzigen Bogen ausfüllen können, der notwendig  $< \pi$  ist. Es gibt also sicherlich einen Wert  $\varphi^*$  von  $\varphi$ , so daß für

$$\varphi^* + \frac{\pi}{2} - \varepsilon \leq \varphi \leq \varphi^* + \frac{3\pi}{2} + \varepsilon \quad (14)$$

$$F(x^*, y^*, \cos \varphi, \sin \varphi) \neq 0$$

ist und mithin oberhalb einer positiven Zahl  $m$  verbleibt:

$$F(x^*, y^*, \cos \varphi, \sin \varphi) > m (> 0).$$

Wegen der Stetigkeit gilt dann auch noch in einem Kreis um  $(x^*, y^*)$  von hinlänglich kleinem Radius  $\rho$ , für alle der Ungleichung (14) genügenden  $\varphi$ :

$$F(x, y, \cos \varphi, \sin \varphi) > m. \quad (15)$$

Für alle hinlänglich großen  $\lambda$  liegt  $\bar{\mathcal{C}}_\lambda$  ganz in diesem Kreise. Seien  $\bar{P}_\lambda, \bar{Q}_\lambda$  Anfangs- und Endpunkt von  $\bar{\mathcal{C}}_\lambda$ , sei  $s$  die Bogenlänge auf  $\bar{\mathcal{C}}_\lambda$ , gemessen von  $\bar{P}_\lambda$  an, und  $\varphi$  der Winkel, den die (positiv gerichtete) Tangente an  $\bar{\mathcal{C}}_\lambda$  mit der  $x$ -Achse bildet. Dann ist, bei Beachtung von (13) die Projektion  $l_\lambda$  von  $\bar{\mathcal{C}}_\lambda$  auf die Richtung  $\varphi^*$  gegeben durch

$$l_\lambda = \int_0^1 \cos(\varphi - \varphi^*) ds.$$

Bezeichnen wir noch mit  $\mathfrak{P}_\lambda$  die Menge der Punkte von  $\bar{\mathcal{C}}_\lambda$ , in denen

$$\varphi^* - \frac{\pi}{2} + \varepsilon < \varphi < \varphi^* + \frac{\pi}{2} - \varepsilon$$

gilt, mit  $\mathfrak{D}_\lambda$  die Menge der Punkte von  $\bar{\mathcal{C}}_\lambda$ , in denen (14) gilt, so erhalten wir für die Projektion von  $\bar{\mathcal{C}}_\lambda$  auf die Richtung  $\varphi^*$ :

$$l_\lambda = \int_{\mathfrak{P}_\lambda} \cos(\varphi - \varphi^*) ds + \int_{\mathfrak{D}_\lambda} \cos(\varphi - \varphi^*) ds,$$

und somit, wenn mit  $\mu(\mathfrak{P})$  der Inhalt der Menge  $\mathfrak{P}$  bezeichnet wird:

$$l_\lambda \geq \sin \varepsilon \cdot \mu(\mathfrak{P}_\lambda) - \mu(\mathfrak{D}_\lambda). \quad (16)$$

Da (für alle hinlänglich großen  $\lambda$ ) auf  $\mathfrak{D}_\lambda$  die Ungleichung (15) gilt, ist anderseits

$$J(\bar{\mathcal{C}}_\lambda) \geq m \cdot \mu(\mathfrak{D}_\lambda),$$

aus (12) folgt also.

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \mu(\mathfrak{D}_\lambda) = 0. \quad (17)$$

Da  $\mathfrak{B}_\lambda$  und  $\mathfrak{D}_\lambda$  den ganzen Bogen  $\overline{\mathfrak{C}}_\lambda$  ausfüllen, ist aber wegen (13).

$$\mu(\mathfrak{B}_\lambda) + \mu(\mathfrak{D}_\lambda) = 1,$$

so daß aus (17) folgt:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \mu(\mathfrak{B}_\lambda) = 1. \quad (18)$$

Wegen (17) und (18) ergibt nun (16), daß nicht  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} l_\lambda = 0$  sein kann, im Widerspruche damit, daß die Bogen  $\overline{\mathfrak{C}}_\lambda$  gegen einen Punkt konvergieren. Also kann tatsächlich die Beziehung (10) nicht bestehen, und es gilt somit (9).

Aber (8) zusammen mit (9) steht in Widerspruch zur Voraussetzung, daß die Länge aller in  $\mathfrak{A}$  liegenden rektifizierbaren Kurven  $\mathfrak{C}$ , für die  $J(\mathfrak{C}) = 0$  ist, nach oben beschränkt ist. Und somit ist der Hilfssatz bewiesen.

Nun ist es leicht, den Beweis unseres Satzes zu Ende zu führen. Sei  $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \dots, \mathfrak{C}_n$  eine aus der Menge  $\mathfrak{M}$  herausgegriffene Minimalfolge, d. h. es konvergiere  $J(\mathfrak{C}_n)$  gegen die untere Grenze  $g$  aller Werte, die  $J(\mathfrak{C})$  auf  $\mathfrak{M}$  annimmt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J(\mathfrak{C}_n) = g. \quad (19)$$

Zufolge des Hilfssatzes gibt es eine Zahl  $M$ , so daß:

$$L(\mathfrak{C}_n) \leq M \text{ für alle } n.$$

Die  $\mathfrak{C}_n$  bilden also eine Menge von Kurvenbögen, die alle der beschränkten Menge  $\mathfrak{A}$  angehören, und deren Länge nach oben beschränkt ist. Nach einem schon einmal benutzten Satze gibt es daher in der Folge der  $\mathfrak{C}_n$  eine Teilfolge  $\mathfrak{C}_{n_1}, \mathfrak{C}_{n_2}, \dots, \mathfrak{C}_{n_\nu}$ , die gegen einen rektifizierbaren Kurvenbogen  $\overline{\mathfrak{C}}$  konvergiert:

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \mathfrak{C}_{n_\nu} = \overline{\mathfrak{C}}, \quad (20)$$

und weil die Menge  $\mathfrak{M}$  abgeschlossen ist, gehört  $\overline{\mathfrak{C}}$  auch zu  $\mathfrak{M}$ . Aus (19) folgt:

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} J(\mathfrak{C}_{n_\nu}) = g,$$

aus (20) folgt, da  $J(\mathfrak{C})$  unterhalb stetig ist:

$$J(\bar{\mathcal{C}}) \leq \lim_{\nu \rightarrow \infty} J(\mathcal{C}_{n,\nu}) = g,$$

und da  $g$  die untere Schranke aller auf  $\mathfrak{M}$  vorkommenden Werte von  $J(\mathcal{C})$  war, muß

$$J(\bar{\mathcal{C}}) = g$$

sein. Es ist also  $J(\bar{\mathcal{C}})$  der kleinste auf  $\mathfrak{M}$  vorkommende Wert der Funktion  $J(\mathcal{C})$ , und das behauptete Existenztheorem ist bewiesen.

Wir wollen noch an Beispielen zeigen, daß die in diesem Theorem auftretenden Voraussetzungen wesentlich sind. Zuerst zeigen wir dies für die Voraussetzung, die Länge aller in  $\mathfrak{A}$  gelegenen Kurven  $\mathcal{C}$ , für die  $J(\mathcal{C}) = 0$  ist, sei nach oben beschränkt.<sup>1</sup>

Die Menge  $\mathfrak{A}$  bestehe aus allen der Ungleichung

$$0 < r_1^2 \leq x^2 + y^2 \leq r_2^2$$

genügenden Punkten. Bezeichnen wir mit  $k_1$  und  $k_2$  die beiden Kreise

$$x^2 + y^2 = r_1^2 \text{ und } x^2 + y^2 = r_2^2,$$

so ist  $\mathfrak{A}$  der von  $k_1$  und  $k_2$  begrenzte Kreisring. Die Menge  $\mathfrak{M}$  bestehe aus allen rektifizierbaren, ganz in  $\mathfrak{A}$  gelegenen Kurven, deren Anfangspunkt auf  $k_1$ , deren Endpunkt auf  $k_2$  liegt. Um die Funktion  $F(x, y, x', y')$  zu definieren, denken wir uns eine Schar  $S$  von Kurven gegeben, die den Kreisring  $\mathfrak{A}$  einfach überdecken und sich von innen asymptotisch dem Kreise  $k_2$  als Grenzykel annähern (wie z. B. die Schar  $r = r_2 - e^{-(\theta+c)}$ , wo  $r$  und  $\theta$  Polarkoordinaten bedeuten). Sei ihr Richtungsfeld gegeben durch:

$$\cos \vartheta = p(x, y), \quad \sin \vartheta = q(x, y).$$

Wir setzen:

$$F(x, y, x', y') = \sqrt{x'^2 + y'^2} - x' p(x, y) - y' q(x, y).$$

Man erkennt unmittelbar, daß dieses Variationsproblem positiv regulär und positiv semidefinit ist in  $\mathfrak{A}$ , und zwar ist  $F(x, y, x', y') = 0$  dann und nur dann, wenn

$$x' = k \cdot p(x, y), \quad y' = k \cdot q(x, y) \quad (k > 0),$$

d. h. wenn  $(x, y, x', y')$  Linienelement einer Kurve der Schar  $S$  oder des Kreises  $k_2$  ist. Jeder Bogen einer Kurve der Schar  $S$  erteilt also dem Integrale  $J$  den Wert 0, und da es beliebig lange solche Bogen gibt, ist hier die oben genannte Voraussetzung unseres Existenztheorems nicht erfüllt.

<sup>1</sup> Diese Voraussetzung ist insbesondere dann nicht erfüllt, wenn es eine in  $\mathfrak{A}$  gelegene geschlossene Kurve gibt, die dem Integrale  $J$  den Wert 0 erteilt. Denn diese geschlossene Kurve kann ja beliebig oft durchlaufen werden.

Ist nun  $\mathfrak{C}$  ein rektifizierbarer, in  $\mathfrak{M}$  gelegener Kurvenbogen, dessen Anfangspunkt auf  $k_1$ , dessen Endpunkt auf  $k_2$  liegt, so kann  $\mathfrak{C}$  nicht in seinem ganzen Verlaufe mit einer Kurve der Schar  $S$  zusammenfallen, es ist also für jeden Kurvenbogen  $\mathfrak{C}$  der Menge  $\mathfrak{M}$ :

$$J(\mathfrak{C}) > 0. \quad (21)$$

Bedeutet aber  $\mathfrak{C}$  insbesondere einen Kurvenbogen, der auf  $k_1$  beginnend zunächst bis zu einem Punkte  $(x^*, y^*)$  mit einer Kurve der Schar  $S$  zusammenfällt, und sodann mit dem von  $(x^*, y^*)$  auf den Kreis  $k_2$  gefällten Lote zusammenfällt, so konvergiert offenbar  $J(\mathfrak{C})$  gegen 0, wenn der Punkt  $(x^*, y^*)$  auf der Kurve der Schar  $S$  sich asymptotisch dem Kreise  $k_2$  nähert. Die untere Grenze der Werte, die  $J(\mathfrak{C})$  auf der Menge  $\mathfrak{M}$  annimmt, ist also 0; da aber für alle Kurven von  $\mathfrak{M}$  Ungleichung (21) gilt, ist hier ein Minimum nicht vorhanden.

Wir geben nun auch ein Beispiel eines positiv semidefiniten und quasiregulären Variationsproblems, bei dem ein Minimum nicht vorhanden ist, weil ein Punkt vorhanden ist, in dem  $F(x, y, x', y')$  für alle  $x'$  und  $y'$  verschwindet.

Wir gehen aus von dem Variationsproblem, unter allen auf dem Kreise  $x^2 + y^2 = 1$  beginnenden und (außerhalb dieses Kreises) ins Unendliche verlaufenden Kurven diejenigen zu finden, die dem Integrale

$$J = \int \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2}}{(x^2 + y^2)^3} dt.$$

den kleinstmöglichen Wert erteilen. Offenbar sind dies die Geraden  $x = at$ ,  $y = bt$ , und zwar erteilen sie dem Integrale  $J$  den Wert  $\frac{1}{5}$ .

Wir bemerken noch, daß dieses Variationsproblem für  $x^2 + y^2 \geq 1$  positiv definit und regulär ist.

Nunmehr führen wir Polarkoordinaten  $r$ ,  $\vartheta$  ein, in denen unser Integral die Form annimmt

$$J = \int \frac{\sqrt{dr^2 + r^2 d\vartheta^2}}{r^6}.$$

Und nunmehr machen wir die Punkttransformation:

$$r' = \frac{1}{r} \quad \vartheta' = \vartheta + r$$

Aus dem Bereiche  $x^2 + y^2 \geq 1$  wird der Bereich  $x^2 + y^2 \leq 1$ , aus den Geraden  $x = at$ ,  $y = bt$  werden Spiralen unendlicher Länge, die sich asymptotisch dem Nullpunkte nähern.

Die Umrechnung unseres Integrales ergibt:

$$J = \int r'^3 \sqrt{(1 + r'^2) dr'^2 + 2 r'^2 dr' d\vartheta' + r'^4 d\vartheta'^2}$$

oder indem wir wieder die rechtwinkligen Koordination einführen.

$$\begin{aligned} J = \int (x^2 + y^2) \sqrt{\{x^2 - 2\sqrt{x^2 + y^2} xy + (x^2 + y^2)^2\} x'^2 +} \\ + 2(xy + \sqrt{x^2 + y^2}(x^2 - y^2)) x' y' + \\ + \{y^2 + 2\sqrt{x^2 + y^2} xy + (x^2 + y^2)^2\} y'^2\} dt. \end{aligned}$$

Der Integrand  $F(x, y, x', y')$  dieses Integrales verschwindet im Nullpunkte für alle  $x'$  und alle  $y'$ . Da der definite und reguläre Charakter eines Integrales bei Punkttransformationen erhalten bleibt, ist dieses Integral positiv definit und regulär für  $0 < x^2 + y^2 \leq 1$ , und mithin positiv semidefinit und quasiregulär für  $x^2 + y^2 \leq 1$ . Die partiellen Ableitungen  $F_{x'}$  und  $F_{y'}$  sind überall stetig.

Wir wählen nun für  $\mathfrak{A}$  die Punktmenge  $x^2 + y^2 \leq 1$ , d. h. die Fläche des Einheitskreises, für  $\mathfrak{M}$  die Menge aller rektifizierbaren ganz in diesem Kreise gelegenen Kurvenbogen, die einen Punkt der Peripherie dieses Kreises mit dem Nullpunkte verbinden. Jeder solche Kurvenbogen erteilt dem Integrale  $J$  einen Wert  $> \frac{1}{5}$ , da er bei der vorgenommenen Punkttransformation nicht aus einer Geraden  $x = at$ ,  $y = bt$  entstanden sein kann, und nur diese Geraden dem Integrale  $J$  den Wert  $^1$  erteilen, alle anderen von der Peripherie des Einheitskreises ins unendliche verlaufenden Kurven aber dem Integrale  $J$  einen Wert  $> \frac{1}{5}$  erteilen. Gehen

wir aber auf einer der Spiralen, die Bild einer Geraden  $x = at$ ,  $y = bt$  sind, bis zum Punkte  $(x^*, y^*)$  und von da geradlinig zum Nullpunkt, und lassen den Punkt  $(x^*, y^*)$  auf der Spirale sich unbeschränkt dem Nullpunkte nähern, so konvergiert der Wert des

Integrales  $J$  gegen  $\frac{1}{5}$ . Es ist also  $\frac{1}{5}$  die untere Grenze der Werte, die das Integral  $J$  auf  $\mathfrak{M}$  annimmt; und da für keine Kurve aus  $\mathfrak{M}$  wirklich  $J = \frac{1}{5}$  wird, ist auch hier ein Minimum nicht vorhanden.

# ZOBODAT - [www.zobodat.at](http://www.zobodat.at)

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse](#)

Jahr/Year: 1925

Band/Volume: [134\\_2a](#)

Autor(en)/Author(s): Hahn Hans

Artikel/Article: [Über ein Existenztheorem der Variationsrechnung 437-447](#)