Gedruckt mit Unterstützung aus dem Jerome und Margaret Stonborough-Fonds

Über die Methode der arithmetischen Mittel in der Theorie der verallgemeinerten Fourier'schen Integrale

Von

Hans Hahn in Wien

k. M. d. Akad. d. Wiss.

(Vorgelegt in der Sitzung am 3. Dezember 1925)

In einem Vortrag in der Wiener Mathematischen Gesellschaft im Februar 1924 sowie in einem Vortrag auf der Innsbrucker Naturforscherversammlung 1924 habe ich mich mit einer Verallgemeinerung des Fourier'schen Integraltheoremes beschäftigt, und die betreffenden Untersuchungen erscheinen demnächst an andrer Stelle in ausführlicher Darstellung. Diese Verallgemeinerung lautet folgendermaßen: Es gilt unter geeigneten Annahmen über die Funktion $f(x)$ die Formel:

$$f(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} (\cos \mu x_0 \, d\Phi_1(\mu) + \sin \mu x_0 \, d\Psi_1(\mu)), \tag{0}$$

wo:

$$\Phi_1(\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \frac{\sin \mu x}{x} dx; \quad \Psi_1(\mu) = \int_{-1}^{1} f(x) \frac{1-\cos \mu x}{x} dx -$$

$$- \int_1^{+\infty} f(x) \frac{\cos \mu x}{x} dx - \int_{-\infty}^{-1} f(x) \frac{\cos \mu x}{x} dx.$$

Insbesondere verlangt diese Formel zu ihrer Gültigkeit, daß $f(x)$ an der Stelle x_0 in die Fourier'sche Reihe entwickelbar sei.

Im folgenden soll nun eine noch weitertragende Formel entwickelt werden, die zu ihrer Gültigkeit nichts weiter verlangt, als daß $f(x)$ im Unendlichen beschränkt und an der Stelle x_0 stetig sei. Sie lautet:

$$f(x_0) = \lim_{\mu \to +\infty} \frac{1}{\mu\pi} \int_0^{\mu} \left(\int_0^{\lambda} \cos \mu x_0 \frac{d^2 \Phi_2(\tau)}{d\tau} + \sin \mu x_0 \frac{d^2 \Psi_2(\tau)}{d\tau} \right) d\lambda, \tag{00}$$

wo:

$$\Phi_2(\mu) = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin^2 \frac{\frac{\mu}{2} x}{x^2} dx; \quad \Psi_2(\mu) = \int_{-1}^{1} f(x) \frac{\mu x - \sin \mu x}{x^2} dx -$$

$$-\int_{1}^{+\infty} f(x)\frac{\sin \mu x}{x^2}\,dx - \int_{-\infty}^{-1} f(x)\frac{\sin \mu x}{x^2}\,dx.$$

Der darin auftretende Integralbegriff wird in § 1 erläutert.

Während Formel (0) in der Theorie der harmonischen Analyse beschränkter Funktionen dieselbe Stellung einnimmt, wie die Fourier-sche Reihe in der harmonischen Analyse periodischer Funktionen, so nimmt Formel (00) in der harmonischen Analyse beschränkter Funktionen dieselbe Stellung ein wie Fejér's Summierung durch arithmetische Mittel in der harmonischen Analyse periodischer Funktionen. In der Tat reduziert sich Formel (00), wenn $f(x)$ periodisch ist, auf Fejér's Summationsformel, so wie sich (0), wenn $f(x)$ periodisch ist, auf die Fourier'sche Reihe reduziert.

Ich hoffe, später noch eingehender auf diese Fragen zurückkommen zu können, da ich mich für diesmal begnügen muß, die nächstliegenden Folgerungen aus (00) zu ziehen.[0]

§ 1.

Seien die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ definiert und stetig im Intervalle $[a, b]$. Wir nehmen mit diesem Intervalle eine Zerlegung Z vor durch Einschalten der Punkte:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

und bilden den Ausdruck:

$$S(Z) = \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\left(\frac{g(x_{i+1})-g(x_i)}{x_{i+1}-x_i} - \frac{g(x_i)-g(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}\right).$$

Wir lassen nun Z eine ausgezeichnete Zerlegungsfolge[1] $\{Z_\nu\}$ durchlaufen und zeigen:

Hat $f(x)$ in $[a, b]$ eine Ableitung $f'(x)$, die stetig und von endlicher Variation ist, existiert ferner im Punkte a die rechtsseitige Ableitung $g'_+(a)$, im Punkte b die linksseitige Ableitung $g'_-(b)$, so existiert ein endlicher Grenzwert $\lim\limits_{\nu \to \infty} S(Z_\nu)$, der von der Wahl der ausgezeichneten Zerlegungsfolge $\{Z_\nu\}$ unabhängig ist.

In der Tat, es ist:

$$S(Z) = f(x_{n-1})\frac{g(x_n)-g(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}} - f(x_1)\frac{g(x_1)-g(x_0)}{x_1-x_0} -$$

---

[0] (Zusatz bei der Korrektur.) Es sei auf eine mittlerweile erschienene höchst bedeutungsvolle Arbeit von N. Wiener verwiesen: Math. Zeitschr. 24, p. 575.

[1] Im Sinne der Terminologie von G. Kowalewski, Grundz. d. Diff.- und Integr.-Rechnung, p. 171.

$$-\sum_{i=1}^{n-2}\frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{x_{i+1}-x_i}(g(x_{i+1})-g(x_i)) =$$

$$= f(x_{n-1})\frac{g(x_n)-g(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}-f(x_1)\frac{g(x_1)-g(x_0)}{x_1-x_0}+$$

$$+f'(\xi_1)(g(x_1)-g(x_0))+f'(\xi_n)(g(x_n)-g(x_{n-1}))-$$

$$-\sum_{i=1} f'(\xi_i)(g(x_i)-g(x_{i-1})),$$

wo ξ_i einen Punkt des Intervalles (x_{i-1}, x_i) bedeutet.

Durchläuft Z die ausgezeichnete Zerlegungsfolge $\{Z_\nu\}$, so gilt $x_1 \to a$, $x_{n-1} \to b$, $\xi_1 \to a$, $\xi_n \to b$, und somit wegen der gemachten Voraussetzungen:

$$f(x_{n-1})\frac{g(x_n)-g(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}} \to f(b)\,g'_-(b);\quad f(x_1)\frac{g(x_1)-g(x_0)}{x_1-x_0} \to f(a)\,g'_+(a);$$

$$f'(\xi_1)(g(x_1)-g(x_0)) \to 0;\quad f'(\xi_n)(g(x_n)-g(x_{n-1})) \to 0,$$

und gleichzeitig gilt:[2]

$$\sum_{i=1} f'(\xi_i)(g(x_i)-g(x_{i-1})) \to \int_a^b f'(x)\,dg(x).$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Bezeichnen wir noch den Grenzwert von $S(Z_\nu)$ mit $\int_a^b f(x)\frac{d^2 g(x)}{dx}$ so haben wir gefunden:

$$\int_a^b f(x)\frac{d^2 g(x)}{dx} = f(b)\,g'_-(b) - f(a)\,g'_+(a) - \int_a^b f'(x)\,dg(x). \tag{1}$$

Aus dieser Formel folgt sofort, wenn c gemäß $a < c < b$ so gewählt ist, daß $g'_+(c)$ und $g'_-(c)$ existieren:

$$\int_a^b f(x)\frac{d^2 g(x)}{dx} = \int_a^c f(x)\frac{d^2 g(x)}{dx} + \int_c^b f(x)\frac{d^2 g(x)}{dx} +$$

$$+ f(c)(g'_+(c)-g'_-(c)), \tag{2}$$

[2] Vgl. hierzu H. Hahn, Monatsh. f. Math. Phys., *32*, p. 69 ff.

also insbesondere wenn $f(c) = 0$, oder wenn in c eine Ableitung $g'(c)$ existiert:

$$\int^{b} f(x)\, \frac{d^2 g(x)}{dx} = \int_a^c f(x)\, \frac{d^2 g(x)}{dx} + \int_c^b f(x)\, \frac{d^2 g(x)}{dx} \tag{3}$$

Besitzt $g(x)$ in $[a, b]$ eine erste Ableitung $g'(x)$ und eine zweite Ableitung $g''(x)$, und gilt für jedes Teilintervall $[\alpha, \beta]$ von $[a, b]$:

$$g'(\beta) - g'(\alpha) = \int_\alpha^\beta g''(x)\, dx,$$

so ist:

$$\int_a^b f(x)\, \frac{d^2 g(x)}{dx} = \int_a^b f(x) g''(x)\, dx. \tag{4}$$

In der Tat, in (1) ist dann:

$$\int_a^b f'(x)\, dg(x) = \int_a^b f'(x) g'(x)\, dx = f(b) g'(b) - f(a) g'(a) - \int_a^b f(x) g''(x)\, dx,$$

und durch Einsetzen in (1) ergibt sich die Behauptung (4).

Besitzt $g(x)$ in $[a, b]$ eine stetige Ableitung $g'(x)$, so ist.

$$\int_a^b f(x)\, \frac{d^2 g(x)}{dx} = \int^b f(x)\, dg'(x). \tag{5}$$

In der Tat, es ist:

$$\int_a^b f(x)\, \frac{d^2 g(x)}{dx} = \lim \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \left(\frac{g(x_{i+1}) - g(x_i)}{x_{i+1} - x_i} - \frac{g(x_i) - g(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \right) =$$

$$= \lim \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\, (g'(\xi_{i+1}) - g'(\xi_i)),$$

wo ξ_i einen Punkt des Intervalles (x_{i-1}, x_i) bedeutet. Hierin ist weiter:

$$\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\, (g'(\xi_{i+1}) - g'(\xi_i)) =$$

$$= f(x_n) g'(\xi_n) - f(x_0) g'(\xi_1) - \sum_{i=1}^{n} g'(\xi_i)\, (f(x_i) - f(x_{i-1})),$$

also:

$$\lim \sum_{i=1}^{-1} f(x_i)\,(g'(\xi_{i+1})-g'(\xi_i)) = f(b)g'(b)-f(a)g'(a) - \int_a^b g'(x)\,df(x) =$$
$$= \int_a^b f(x)\,dg'(x),$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

Wir beweisen noch den Satz: Genügen $f(x)$ und $g_\nu(x)$ den eingangs gemachten Voraussetzungen, konvergiert $g_\nu(x)$ in $[a, b]$ gleichmäßig gegen $g(x)$, und ist:

$$g'_+(a) = \lim_{\nu\to\infty} g'_{\nu+}(a),\quad g'_-(b) = \lim_{\nu\to\infty} g'_{\nu-}(b), \tag{6}$$

so ist:

$$\int_a^b f(x)\frac{d^2 g(x)}{dx} = \lim_{\nu\to\infty}\int_a^b f(x)\frac{d^2 g_\nu(x)}{dx}. \tag{7}$$

In der Tat, nach (1) ist:

$$\int_a^b f(x)\frac{d^2 g_\nu(x)}{dx} = f(b)g'_{\nu-}(b) - f(a)\,g'_{\nu+}(a) - \int_a^b f'(x)\,dg_\nu(x).$$

Wegen (6) und wegen:[3]

$$\lim_{\nu\to\infty}\int_a^b f'(x)\,dg_\nu(x) = \int_a^b f'(x)\,dg(x)$$

geht hierin die rechte Seite für $\nu \to \infty$ in die rechte Seite von (1) über, womit (7) bewiesen ist.

§ 2.

Bekanntlich gilt der Satz: Existieren die Integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|\,dx \text{ und } \int_{-\infty}^{+\infty} (g(x))^2\,dx$$ und setzt man:

$$A(\mu) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\cos\mu x\,dx;\quad B(\mu) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\sin\mu x\,dx,$$

so ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (g(x))^2\,dx = \pi\int_0^{+\infty}\left\{(A(\mu))^2 + (B(\mu))^2\right\}d\mu. \tag{8}$$

[3] L. c. [2], p. 77 ff.

Sei nun $\{g_\nu(x)\}$ eine Folge von Funktionen, für die die Integrale $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |g_\nu(x)|\,dx$ und $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (g_\nu(x))^2\,dx$ existieren; außerdem sei die Folge $\{g_\nu(x)\}$ in $(-\infty, +\infty)$ im Mittel konvergent, d. h. zu jedem $\varepsilon > 0$ gehört ein N, so daß:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (g_{\nu'}(x) - g_{\nu''}(x))^2\,dx < \varepsilon \text{ für } \nu' \geqq N,\ \nu'' \geqq N. \tag{9}$$

Wir setzen:

$$A_\nu(\mu) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g_\nu(x)\cos\mu x\,dx;\ B_\nu(\mu) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g_\nu(x)\sin\mu x\,dx$$

und erkennen sofort: die beiden Folgen $\{A_\nu(\mu)\}$ und $\{B_\nu(\mu)\}$ sind in $[0, +\infty)$ im Mittel konvergent.

In der Tat, zufolge (8) ist:

$$\pi\int\limits_0^{+\infty} \left\{(A_{\nu'}(\mu) - A_{\nu''}(\mu))^2 + (B_{\nu'}(\mu) - B_{\nu''}(\mu))^2\right\} d\mu =$$
$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (g_{\nu'}(x) - g_{\nu''}(x))^2\,dx,$$

also zufolge (9):

$$\int\limits_0^{+\infty} (A_{\nu'}(\mu) - A_{\nu''}(\mu))^2\,d\mu < \varepsilon,\ \int\limits_0^{+\infty} (B_{\nu'}(\mu) - B_{\nu''}(\mu))^2\,d\mu < \varepsilon$$
$$\text{für } \nu' \geqq N,\ \nu'' \geqq N,$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

Sei nun $f(x)$ eine in jedem endlichen Intervalle integrierbare Funktion, die im Unendlichen beschränkt bleibt; d. h. es gebe ein p und ein q, so daß

$$|f(x)| \leqq p \text{ für } x \geqq q. \tag{10}$$

Wir setzen für $\mu \geqq 0$:

$$\Phi_2(\mu) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\frac{1 - \cos\mu x}{x^2}\,dx = 2\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\frac{\sin^2\frac{\mu}{2}x}{x^2}\,dx$$

$$\Psi_2(\mu) = \int_{1}^{1} f(x)\, \frac{\mu x - \sin \mu x}{x^2}\, dx - \int_{1}^{+\infty} f(x)\, \frac{\sin \mu x}{x^2}\, dx - \int_{-\infty}^{-1} f(x)\, \frac{\sin \mu x}{x^2}\, dx. \tag{11}$$

Hierdurch sind $\Phi_2(\mu)$ und $\Psi_2(\mu)$ für alle $\mu \geqq 0$ definiert, und zwar als stetige Funktionen von μ. Um dies einzusehen, setzen wir:

$$\begin{aligned} \Phi_{2,n}(\mu) &= \int_{-n}^{n} f(x)\, \frac{1 - \cos \mu x}{x^2}\, dx \\ \Psi_{2,n}(\mu) &= \int_{-1}^{1} f(x)\, \frac{\mu x - \sin \mu x}{x^2}\, dx - \int_{1}^{n} f(x)\, \frac{\sin \mu x}{x^2}\, dx - \int_{-n}^{-1} f(x)\, \frac{\sin \mu x}{x^2}\, dx. \end{aligned} \tag{12}$$

Offenbar ist jedes $\Phi_{2,n}(\mu)$ und jedes $\Psi_{2,n}(\mu)$ eine stetige Funktion von μ. Für hinlänglich große n gilt wegen (10):

$$|\Phi_{2,n}(\mu) - \Phi_2(\mu)| \leqq 2p \int_{n}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} + 2p \int_{-\infty}^{-n} \frac{dx}{x^2} < \varepsilon,$$

so daß die $\Phi_{2,n}(\mu)$ gleichmäßig für alle $\mu \geqq 0$ gegen $\Phi_2(\mu)$ konvergieren; ebenso konvergieren die $\Psi_{2,n}(\mu)$ gleichmäßig gegen $\Psi_2(\mu)$. Damit aber ist die Stetigkeit von $\Phi_2(\mu)$ und $\Psi_2(\mu)$ nachgewiesen.

Wir zeigen darüber hinaus, daß $\Phi_2(\mu)$ und $\Psi_2(\mu)$ für alle $\mu \geqq 0$, abgesehen von einer Nullmenge, eine Ableitung besitzen. Wir führen den Beweis etwa für $\Phi_2(\mu)$, da er für $\Psi_2(\mu)$ ganz analog verläuft.

Aus (12) entnehmen wir:

$$\Phi'_{2,n}(\mu) = \int_{-n}^{n} f(x)\, \frac{\sin \mu x}{x}\, dx.$$

Wir zeigen zunächst, daß die Folge der $\Phi'_{2,n}(\mu)$ in $[0, +\infty)$ im Mittel konvergiert. Es genügt, dies für die Folge

$\int_q^n f(x)\,\frac{\sin\mu x}{x}\,dx$ und für die Folge $\int_{-n}^{-q} f(x)\,\frac{\sin\mu x}{x}\,dx$ zu zeigen, wo q die in (10) auftretende Größe bedeutet; wir zeigen es etwa für die erste.

Wir setzen:

$$g_n(x) = \frac{f(x)}{x} \text{ für } q \leqq x \leqq n;\ g_n(x) = 0 \text{ für } x < q \text{ und } x > n.$$

Wegen (10) ist dann die Folge der $g_n(x)$ in $(-\infty, +\infty)$ im Mittel konvergent, und wie zu Beginn dieses Paragraphen gezeigt, ist somit auch die Folge

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(x) \sin\mu x\,dx = \int_q^n f(x)\,\frac{\sin\mu x}{x}\,dx$$

in $[0, +\infty)$ im Mittel konvergent, wie behauptet.

Da sowohl die Folge der $\Phi'_{2,n}(\mu)$, als auch die Folge der $\Psi'_{2,n}(\mu)$ in $[0, +\infty)$ im Mittel konvergiert, so konvergiert jede von ihnen (in jedem endlichen Intervalle aus $[0, +\infty)$) im Mittel gegen eine bestimmte Funktion $\Phi^*(\mu)$, beziehungsweise $\Psi^*(\mu)$, und es ist bekanntlich für jedes $\mu > 0$:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\mu \Phi'_{2,n}(\mu)\,d\mu = \int_0^\mu \Phi^*(\mu)\,d\mu;\ \lim_{n\to\infty}\int^\mu \Psi'_{2,n}(\mu)\,d\mu = \int_0^\mu \Psi^*(\mu)\,d\mu,$$

oder da:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\mu \Phi'_{2,n}(\mu)\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\Phi_{2,n}(\mu) = \Phi_2(\mu),$$

und ebenso:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\mu \Psi'_{2,n}(\mu)\,d\mu = \Psi_2(\mu),$$

so haben wir:

$$\Phi_2(\mu) = \int_0^\mu \Phi^*(\mu)\,d\mu;\ \Psi_2(\mu) = \int_0^\mu \Psi^*(\mu)\,d\mu. \tag{13}$$

Also gilt für alle $\mu \geqq 0$, abgesehen von einer Nullmenge:

$$\Phi'_2(\mu) = \Phi^*(\mu);\ \Psi'_2(\mu) = \Psi^*(\mu), \tag{14}$$

und die Behauptung ist bewiesen.

Da die Folge der $\Phi'_{2,n}(\mu)$ in jedem endlichen Intervalle aus $[0, +\infty)$ im Mittel gegen $\Phi^*(\mu)$ konvergiert und die Folge $\Psi'_{2,n}(\mu)$ gegen $\Psi^*(\mu)$, so gibt es in ihnen Teilfolgen $\Phi'_{2,n_i}(\mu)$, beziehungsweise $\Psi'_{2,n_i}(\mu)$, die in $[0, +\infty)$ überall, abgesehen von einer Nullmenge, gegen $\Phi^*(\mu)$, beziehungsweise $\Psi^*(\mu)$ konvergieren. Es gilt also dann auch für alle $\mu \geqq 0$, abgesehen von einer Nullmenge:

$$\lim_{i \to \infty} \Phi'_{2,n_i}(\mu) = \Phi'_2(\mu); \quad \lim_{i \to \infty} \Psi'_{2,n_i}(\mu) = \Psi'_2(\mu). \tag{15}$$

§ 3.

Sei wieder $f(x)$ eine in jedem endlichen Intervalle integierbare, im Unendlichen beschränkte Funktion. Außerdem sei $f(x)$ an der Stelle x_0 stetig. Dann gilt:

$$f(x_0) = \lim_{\mu \to +\infty} \frac{2}{\mu\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \frac{\sin^2 \frac{\mu}{2}(x-x_0)}{(x-x_0)^2} dx. \tag{16}$$

In der Tat, wegen:

$$\frac{2}{\mu\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \frac{\mu}{2}(x-x_0)}{(x-x_0)^2} dx = 1 \tag{17}$$

genügt es zu beweisen:

$$\lim_{\mu \to +\infty} \frac{2}{\mu\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (f(x)-f(x_0)) \frac{\sin^2 \frac{\mu}{2}(x-x_0)}{(x-x_0)^2} dx = 0. \tag{18}$$

Wir wählen $h > 0$ so klein, daß:

$$|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon \text{ für } |x-x_0| \leqq h.$$

Dann ist wegen (17):

$$\left| \frac{2}{\mu\pi} \int_{x_0-h}^{x_0+h} (f(x)-f(x_0)) \frac{\sin^2 \frac{\mu}{2}(x-x_0)}{(x-x_0)^2} dx \right| \leqq \varepsilon \text{ für alle } \mu. \tag{19}$$

Sodann gibt es, weil $f(x)$ im Unendlichen beschränkt bleibt, ein M, so daß für $\mu \geqq M$:

$$\left| \frac{2}{\mu\pi} \int_{x_0+h}^{+\infty} (f(x)-f(x_0)) \frac{\sin^2 \frac{\mu}{2}(x-x_0)}{(x-x_0)^2} dx \right| < \varepsilon; \tag{20}$$

$$\left| \frac{2}{\mu\pi} \int_{-\infty}^{x_0-h} (f(x)-f(x_0)) \frac{\sin^2 \frac{\mu}{2}(x-x_0)}{(x-x_0)^2} dx \right| < \varepsilon. \tag{20}$$

Aus (19) und (20) folgt.

$$\left| \frac{2}{\mu\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (f(x)-f(x_0)) \frac{\sin^2 \frac{\mu}{2}(x-x_0)}{(x-x_0)^2} dx \right. < 3\varepsilon \text{ für } \mu \geqq M.$$

Es ist also (18) und somit auch (16) bewiesen.

Nun ist:

$$2\int_{-n}^{n} f(x) \frac{\sin^2 \frac{\mu}{2}(x-x_0)}{(x-x_0)^2} dx = \int_{-n}^{n} \left(f(x) \int_0^{\mu} \frac{\sin \lambda (x-x_0)}{x-x_0} d\lambda \right) dx =$$

$$= \int_{-n}^{n} \left\{ f(x) \int_0^{\mu} \left(\int_0^{\lambda} \cos \tau (x-x_0)\, d\tau \right) d\lambda \right\} dx =$$

$$= \int_0^{\mu} \left\{ \int_0^{\lambda} \left(\cos \tau x_0 \int_{-n}^{n} f(x) \cos \tau x\, dx + \sin \tau x_0 \int_{-n}^{n} f(x) \sin \tau x\, dx \right) d\tau \right\} d\lambda.$$

Machen wir wieder von der Bezeichnungsweise (12) Gebrauch, so ist hierin:

$$\int_{-n}^{n} f(x) \cos \tau x\, dx = \Phi''_{2,n}(\tau); \quad \int_{-n}^{n} f(x) \sin \tau x\, dx = \Psi''_{2,n}(\tau).$$

Unter Berufung auf (4) können wir auch schreiben.

$$\begin{aligned} 2\int_{-n}^{n} f(x) \frac{\sin^2 \frac{\mu}{2}(x-x_0)}{(x-x_0)^2} dx = \int_0^{\mu} \left\{ \int_0^{\lambda} \left(\cos \tau x_0 \frac{d^2 \Phi_{2,n}(\tau)}{d\tau} \right. \right. & + \\ + \sin \tau x_0 \frac{d^2 \Psi_{2,n}(\tau)}{d\tau} & \left. \left. \right) \right\} d\lambda. \end{aligned} \tag{21}$$

Wir setzen nun für $\tau < 0$:

$$\Phi_{2,n}(\tau) = 0, \quad \Psi_{2,n}(\tau) = 0. \tag{22}$$

Da für $\tau \geqq 0$

$$\Phi'_{2,n}(\tau) = \int_{-n}^{-n} f(x) \frac{\sin \tau x}{x} dx,$$

also

$$\Phi'_{2,n}(0) = 0,$$

ist zufolge (3) in (21) für jedes $h > 0$:

$$\int_0^\lambda \left(\cos \tau x_0 \frac{d^2 \Phi_{2,n}(\tau)}{d\tau} + \sin \tau x_0 \frac{d^2 \Psi_{2,n}(\tau)}{d\tau}\right) =$$

$$= \int_{-h}^{\lambda} \left(\cos \tau x_0 \frac{d^2 \Phi_{2,n}(\tau)}{d\tau} + \sin \tau x_0 \frac{d^2 \Psi_{2,n}(\tau)}{d\tau}\right),$$

so daß wir (21) ersetzen können durch.

$$2 \int_{-n}^{n} f(x) \frac{\sin^2 \frac{\mu}{2}(x-x_0)}{(x-x_0)^2} dx = \int_0^\mu \left\{ \int_{-h}^{\lambda} \left(\cos \tau x_0 \frac{d^2 \Phi_{2,n}(\tau)}{d\tau} + \right.\right. \tag{23}$$

$$\left.\left. + \sin \tau x_0 \frac{d^2 \Psi_{2,n}(\tau)}{d\tau}\right)\right\} d\lambda.$$

Hierin ist nun der Grenzübergang $n \to \infty$ zu vollziehen. Wir setzen

$$\Phi_2(\tau) = 0, \quad \Psi_2(\tau) = 0 \quad \text{für } \tau < 0. \tag{24}$$

Es konvergiert, wie wir in § 2 sahen, in $[0, \lambda]$ die Folge $\Phi_{2,n}(\tau)$ gleichmäßig gegen $\Phi_2(\tau)$, und $\Psi_{2,n}(\tau)$ gegen $\Psi_2(\tau)$ und wegen (22) und (24) gilt dies auch in $[-h, \lambda]$. Ferner ist für alle n:

$$\Phi'_{2,n}(-h) = 0, \quad \Psi'_{2,n}(-h) = 0, \quad \Phi'_2(-h) = 0, \quad \Psi'_2(-h) = 0;$$

ferner gibt es nach (15) eine Folge n_i, so daß für alle $\lambda \geqq 0$, abgesehen von einer Nullmenge:

$$\lim_{i \to \infty} \Phi'_{2,n_i}(\lambda) = \Phi'_2(\lambda); \quad \lim_{i \to \infty} \Psi'_{2,n_i}(\lambda) = \Psi'_2(\lambda).$$

Zufolge (7) gilt also für alle $\lambda \geqq 0$, abgesehen von einer Nullmenge:

$$\lim_{i \to \infty} \int_{-h}^{\lambda} \left(\cos \tau x_0 \frac{d^2 \Phi_{2,n_i}(\tau)}{d\tau} + \sin \tau x_0 \frac{d^2 \Psi_{2,n_i}(\tau)}{d\tau}\right) =$$

$$= \int_{-h}^{\lambda} \left(\cos \tau x_0 \frac{d^2 \Phi_2(\tau)}{d\tau} + \sin \tau x_0 \frac{d^2 \Psi_2(\tau)}{d\tau}\right)$$

Wir zeigen weiter, daß auch:

$$\lim_{i \to \infty} \int_0^\mu \left\{ \int_{-h}^{\lambda} \cos \tau x_0 \frac{d^2 \Phi_{2, n_i}(\tau)}{d\tau} + \sin \tau x_0 \frac{d^2 \Psi_{2, n_i}(\tau)}{d\tau} \right\} d\lambda =$$
$$= \int_0^\mu \left\{ \int_{-h}^{\lambda} \cos \tau x_0 \frac{d^2 \Phi_2(\tau)}{d\tau} + \sin \tau x_0 \frac{d^2 \Psi_2(\tau)}{d\tau} \right\} d\lambda. \tag{25}$$

In der Tat, unter Benützung von (1) finden wir (abgesehen von einer Nullmenge):

$$\int_{-h}^{\lambda} \left(\cos \tau x_0 \frac{d^2 \Phi_{2, n_i}(\tau)}{d\tau} + \sin \tau x_0 \frac{d^2 \Psi_{2, n_i}(\tau)}{d\tau} \right) -$$
$$- \int_{-h}^{\lambda} \left(\cos \tau x_0 \frac{d^2 \Phi_2(\tau)}{d\tau} + \sin \tau x_0 \frac{d^2 \Psi_2(\tau)}{d\tau} \right) = \tag{26}$$
$$= \cos \lambda x_0 \left(\Phi'_{2, n_i}(\lambda) - \Phi'_2(\lambda) \right) + \sin \lambda x_0 \left(\Psi'_{2, n_i}(\lambda) - \Psi'_2(\lambda) \right) +$$
$$+ x_0 \int_{-h}^{\lambda} \sin \tau x_0 \, d \left(\Phi_{2, n_i}(\tau) - \Phi_2(\tau) \right) -$$
$$- x_0 \int_{h}^{\lambda} \cos \tau x_0 \, d \left(\Psi_{2, n_i}(\tau) - \Psi_2(\tau) \right).$$

Da wegen (13) und (14):

$$\Phi_2(\mu) = \int_0^\mu \Phi'_2(\mu) \, d\mu$$

ist, so ist:

$$\int_0^\mu \cos \lambda x_0 \left(\Phi'_{2, n_i}(\lambda) - \Phi'_2(\lambda) \right) d\lambda = \cos \lambda x_0 \left(\Phi_{2, n_i}(\lambda) - \Phi_2(\lambda) \right) \Big]_0^\mu +$$
$$+ x_0 \int_0^\mu \sin \lambda x_0 \left(\Phi_{2, n_i}(\lambda) - \Phi_2(\lambda) \right) d\lambda,$$

und mithin, da die $\Phi_{2, n}(\lambda)$ gleichmäßig gegen $\Phi_2(\lambda)$ konvergieren:

$$\lim_{i \to \infty} \int_0^\mu \cos \lambda x_0 \left(\Phi'_{2, n_i}(\lambda) - \Phi'_2(\lambda) \right) d\lambda = 0. \tag{27}$$

Analog findet man:

$$\lim_{i \to \infty} \int_0^{\mu} \sin \lambda x_0 \left(\Psi'_{2,n_i}(\lambda) - \Psi'_2(\lambda)\right) d\lambda = 0. \tag{28}$$

Bezeichnet M_n die obere Schranke von $|\Phi_{2,n}(\tau) - \Phi_2(\tau)|$ in $[-h, \lambda]$ und $V(\lambda)$ die Variation von $\sin \tau x_0$ in $[-h, \lambda]$, so gilt die Abschätzungsformel:[4]

$$\left| \int_{-h}^{\lambda} \sin \tau x_0 \, d\left(\Phi_{2,n}(\tau) - \Phi_2(\tau)\right) \right| \leqq \left(V(\lambda) + 1\right) M_n.$$

Wegen $\lim\limits_{n \to \infty} M_n = 0$ gilt also:

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^{\mu} \left\{ \int_{-h}^{\lambda} \sin \tau x_0 \, d\left(\Phi_{2,n}(\tau) - \Phi_2(\tau)\right) \right\} d\lambda = 0, \tag{29}$$

und ebenso findet man:

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^{\mu} \left\{ \int_{-h}^{\lambda} \cos \tau x_0 \, d\left(\Psi_{2,n}(\tau) - \Psi_2(\tau)\right) \right\} d\lambda = 0. \tag{30}$$

Aus (26) zusammen mit (27), (28), (29), (30) folgt nun:

$$\lim_{i \to \infty} \int_0^{\mu} \left\{ \int_{-h}^{\lambda} \left(\cos \tau x_0 \frac{d^2 \Phi_{2,n_i}(\tau)}{d\tau} + \sin \tau x_0 \frac{d^2 \Psi_{2,n_i}(\tau)}{d\tau} \right) - \right.$$

$$\left. - \int_{-h}^{\lambda} \left(\cos \tau x_0 \frac{d^2 \Phi_2(\tau)}{d\tau} + \sin \tau x_0 \frac{d^2 \Psi_2(\tau)}{d\tau} \right) \right\} d\lambda = 0;$$

damit ist (25) bewiesen.

Ersetzen wir in (23) n durch n_i und vollziehen den Grenzübergang $i \to \infty$, so erhalten wir:

$$2 \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \frac{\sin^2 \frac{\mu}{2}(x - x_0)}{(x - x_0)^2} dx = \int_0^{\mu} \left\{ \int_{-h}^{\lambda} \cos \tau x_0 \frac{d^2 \Phi_2(\tau)}{d\tau} + \right.$$

$$\left. + \sin \tau x_0 \frac{d^2 \Psi_2(\tau)}{d\tau} \right\} d\lambda. \tag{31}$$

[4] L. 2), p. 74.

Hierin kann h noch eine beliebige Zahl > 0 bedeuten, insbesondere beliebig klein gewählt werden.

Wir schreiben deshalb statt (31):

$$2\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \frac{\sin^2 \frac{\mu}{2}(x-x_0)}{(x-x_0)^2} dx = \int_0^{\mu}\left\{\int_{-0}^{\lambda} \cos \tau x_0 \frac{d^2\Phi_2(\tau)}{d\tau} + \right.$$
$$\left. + \sin \tau x_0 \frac{d^2\Psi_2(\tau)}{d\tau}\right\} d\lambda.$$

Formel (16) ergibt nun.

$$f(x_0) = \frac{1}{\pi} \lim_{\mu \to +\infty} \frac{1}{\mu} \int_0^{\mu}\left\{\int_{-0}^{\lambda} \cos \tau x_0 \frac{a^2\Phi_2(\tau)}{d\tau} + \right.$$
$$\left. + \sin \tau x_0 \frac{d^2\Psi_2(\tau)}{d\tau}\right\} d\lambda. \qquad (32)$$

Diese Formel gilt für jede Funktion $f(x)$, die in allen endlichen Intervallen integrierbar, im Unendlichen beschränkt und an der Stelle x_0 stetig ist.

§ 4.

Wir setzen nun für $\mu \geqq 0$ (vorausgesetzt, daß diese Ausdrücke einen Sinn haben):

$$\Phi_1(\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \frac{\sin \mu x}{x} dx$$

$$\Psi_1(\mu) = \int_{-1}^{1} f(x) \frac{1-\cos \mu x}{x} dx - \int_{1}^{+\infty} f(x) \frac{\cos \mu x}{x} dx -$$
$$- \int_{-\infty}^{-1} f(x) \frac{\cos \mu x}{x} dx.$$

An anderer Stelle habe ich gezeigt, daß für eine in jedem endlichen Intervalle integrierbare Funktion $f(x)$, die im Unendlichen geeignete Bedingungen erfüllt und an der Stelle x_0 in die Fouriersche Reihe entwickelbar ist, die Formel gilt:

$$f(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} (\cos \lambda x_0 \, d\Phi_1(\lambda) + \sin \lambda x_0 \, d\Psi_1(\lambda)).$$

Wir sind nun in der Lage, diesem Resultate ein anderes zur Seite zu stellen, das lediglich voraussetzt, daß $f(x)$ an der Stelle x_0 stetig sei.

Wir zeigen zunächst. Wenn $\Phi_1(\mu)$ und $\Psi_1(\mu)$ für $\mu \geqq 0$ existieren und stetig sind, so gilt für $\mu \geqq 0$:[5]

$$\Phi_1(\mu) = \Phi_2'(\mu), \quad \Psi_1(\mu) = \Psi_2'(\mu). \tag{33}$$

In der Tat, es ist, wenn wir von der Bezeichnungsweise (12) Gebrauch machen:

$$\Phi_1(\mu) = \lim_{n \to \infty} \int_{-n}^{n} f(x) \frac{\sin \mu x}{x} dx = \lim_{n \to \infty} \Phi'_{2,n}(\mu).$$

Also gilt, wegen (15), abgesehen von einer Nullmenge:

$$\Phi_1(\mu) = \Phi_2'(\mu). \tag{34}$$

Aus (13) und (14) folgt daher:

$$\Phi_2(\mu) = \int_0^{\mu} \Phi_1(\mu)\, d\mu,$$

und da $\Phi_1(\mu)$ stetig ist, gilt (34) überall. Damit ist die erste Gleichung (33) bewiesen, und analog beweist man die zweite.

Beachtet man die Festsetzung (24), so ergibt Formel (2), da (wie eben bewiesen, vgl. Anmerkung [5]) $\Phi'_{2+}(0)$ und $\Psi'_{2+}(0)$ existieren, und zufolge (33) $\Phi'_{2+}(0) = 0$ ist:

$$\int_{-0}^{\lambda} \left(\cos \tau x_0 \frac{d^2 \Phi_2(\tau)}{d\tau} + \sin \tau x_0 \frac{d^2 \Psi_2(\tau)}{d\tau}\right) =$$

$$= \int_{0}^{\lambda} \left(\cos \tau x_0 \frac{d^2 \Phi_2(\tau)}{d\tau} + \sin \tau x_0 \frac{d^2 \Psi_2(\tau)}{d\tau}\right);$$

und Formel (5) ergibt weiter, da $\Phi_1(\mu)$, $\Psi_1(\mu)$ für $\mu \geqq 0$ als stetig vorausgesetzt sind:

$$\int_0^{\lambda} \left(\cos \tau x_0 \frac{d^2 \Phi_2(\tau)}{d\tau} + \sin \tau x_0 \frac{d^2 \Psi_2(\tau)}{d\tau}\right) =$$

$$= \int_0^{\lambda} (\cos \tau x_0\, d\Phi_1(\tau) + \sin \tau x_0\, d\Psi_1(\tau)).$$

Und wir haben somit das Resultat:

---

[5] Für $\mu = 0$ ist unter $\Phi_2'(0)$ und $\Psi_2'(0)$ die rechtsseitige Ableitung $\Phi'_{2+}(0)$, beziehungsweise $\Psi'_{2+}(0)$ zu verstehen.

Ist die in jedem endlichen Intervalle integrierbare, im Unendlichen beschränkte Funktion $f(x)$ stetig an der Stelle x_0, existieren für $\mu \geqq 0$ die Ausdrücke $\Phi_1(\mu)$, $\Psi_1(\mu)$ und sind sie stetige Funktionen von μ, so gilt die Formel:

$$f(x_0) = \frac{1}{\pi} \lim_{\mu \to +\infty} \frac{1}{\mu} \int_0^\mu \left\{ \int_0^\lambda (\cos \tau x_0 \, d\Phi_1(\tau) + \sin \tau x_0 \, d\Psi_1(\tau)) \right\} d\lambda. \quad (35)$$

Wir setzen nun für $\mu \geqq 0$ (falls diese Ausdrücke existieren):

$$\varphi(\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos \mu x \, dx; \quad \psi(\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin \mu x \, dx.$$

Nehmen wir an, diese Ausdrücke existieren für alle $\mu \geqq 0$, abgesehen von einer Nullmenge, und es sei für jedes Intervall $0 \leqq \alpha \leqq \mu \leqq \beta$:

$$\Phi_1(\beta) - \Phi_1(\alpha) = \int_\alpha^\beta \varphi(\mu) \, d\mu; \quad \Psi_1(\beta) - \Psi_2(\beta) = \int_\alpha^\beta \psi(\mu) \, d\mu,$$

so kann (35) auch in der Form geschrieben werden:

$$f(x_0) = \frac{1}{\pi} \lim_{\mu \to \infty} \frac{1}{\mu} \int_0^\mu \left\{ \int_0^\lambda (\cos \tau x_0 \, \varphi(\tau) + \sin \tau x_0 \, \psi(\tau)) \, d\tau \right\} d\lambda.$$

§ 5.

Sei nun $f(x)$ eine integrierbare und beschränkte periodische Funktion; der Einfachheit halber nehmen wir an, sie habe die Periode 2π. Ihre Fourier'sche Reihe sei gegeben durch:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x). \quad (36)$$

Wir wollen zeigen, daß die zugehörigen Funktionen $\Phi_2(\mu)$ und $\Psi_2(\mu)$ aus dieser Fourier'schen Reihe durch gliedweise Integrationen berechnet werden können. Es wird genügen, dies für $\Phi_2(\mu)$ nachzuweisen. Offenbar können wir dabei ohneweiteres $a_0 = 0$ annehmen, so daß:

$$f(x) \sim \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x).$$

Wir haben nachzuweisen:

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(f(x) - \sum_{\nu=1} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x) \right) \frac{\sin^2 \frac{\mu}{2} x}{x^2} \, dx = 0.$$

Dazu genügt es, zu zeigen: zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein N, so daß für alle $n \geqq N$ und alle endlichen Intervalle $[p, q]$:

$$\left| \int_p^q \left(f(x) - \sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x) \right) \frac{\sin^2 \frac{\mu}{2} x}{x^2} dx \right| < \varepsilon.$$

Nun gilt, wenn $g(x)$ integrierbar, $h(x)$ von endlicher Variation in $[p, q]$ ist, die Abschätzung:

$$\left| \int_p^q g(x)\, h(x)\, dx \right| \leqq G\,(H' + H''),$$

wenn H' die Variation von $h(x)$, H'' die obere Schranke von $|h(x)|$ und G die obere Schranke von $\left| \int_p^x g(x) dx \right|$ in $[p, q]$ bedeutet. Bezeichnen wir also mit V die (sicherlich endliche) Variation von $\frac{1}{x^2} \sin^2 \frac{\mu}{2} x$ in $(-\infty, +\infty)$, mit M_n die obere Schranke von

$$\left| \int_0^x \left(f(x) - \sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x)\, dx \right| \right.$$

in $(-\infty, +\infty)$, so erhalten wir:

$$\left| \int_p^q \left(f(x) - \sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x) \right) dx \right| \leqq 2\, M_n \left(V + \frac{\mu^2}{4} \right),$$

und da hierin bekanntlich $\lim\limits_{n \to \infty} M_n = 0$ ist, so ist die Behauptung bewiesen.

Nun ist, wie unmittelbar zu sehen:

$$2 \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \nu x \frac{\sin^2 \frac{\mu}{2} x}{x^2} dx = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leqq \mu \leqq \nu \\ \pi(\mu - \nu) & \text{für } \quad\;\; \mu \geqq \nu \end{cases}$$

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} \sin \nu x \frac{\sin \mu x}{x^2} dx = \begin{cases} -\pi\mu & \text{für } 0 \leqq \mu \leqq \nu \\ -\pi\nu & \text{für } \quad\;\; \mu \geqq \nu \end{cases}$$

Berechnet man zu der durch (36) gegebenen Funktion $f(x)$ die zugehörigen Funktionen $\Phi_2(\mu)$ und $\Psi_2(\mu)$ durch gliedweise Integration, so ergibt sich leicht:

$$\left.\begin{aligned}\Phi_2(\mu) &= \Phi_2(n)+\pi\left(\frac{a_0}{2}+\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu\right)(\mu-n)\\ \Psi_2(\mu) &= \Psi_2(n)+\pi\left(C+\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu\right)(\mu-n)\end{aligned}\right\}\ \text{für } n\leqq\mu\leqq n+1 \quad (n=0,1,2,\ldots),$$

wo mit C eine Konstante bezeichnet ist, auf deren Wert es weiter nicht ankommt.

Auf Grund von (2) wird nun in Formel (32) für $n-1<\lambda\leqq n$

$$\int_{-0}^{\lambda}\left(\cos\tau x_0\frac{d^2\Phi_2(\tau)}{d\tau}+\sin\tau x_0\frac{d^2\Psi_2(\tau)}{d\tau}\right)=\int_{-h}^{0}\left(\cos\tau x_0\frac{d^2\Phi_2(\tau)}{d\tau}+\right.$$
$$\left.+\sin\tau x_0\frac{d^2\Psi_2(\tau)}{d\tau}\right)+\sum_{\nu=1}^{n-1}\int_{\nu-1}^{\nu}\left(\cos\tau x_0\frac{d^2\Phi_2(\tau)}{d\tau}+\right.$$
$$\left.+\sin\tau x_0\frac{d^2\Psi_2(\tau)}{d\tau}\right)+\int_{n-1}^{\lambda}\left(\cos\tau x_0\frac{d^2\Phi_2(\tau)}{d\tau}+\sin\tau x_0\frac{d^2\Psi_2(\tau)}{d\tau}\right)+$$
$$+\pi\left\{\frac{a_0}{2}+\sum_{\nu=1}^{n-1}(a_\nu\cos\nu x_0+b_\nu\sin\nu x_0)\right\},$$

und da in den einzelnen Intervallen $[-h, 0]$, $[0, 1]\ldots$, $[n-2, n-1]$, $[n-1, \lambda]$ die Funktionen $\Phi_2(\tau)$ und $\Psi_2(\tau)$ linear sind, fallen die betreffenden Integrale fort. Wir haben also für $n-1<\lambda\leqq n$:

$$\begin{aligned}&\int_{-0}^{\lambda}\left(\cos\tau x_0\frac{d^2\Phi_2(\tau)}{d\tau}+\sin\tau x_0\frac{d^2\Psi_2(\tau)}{d\tau}\right)=\\ &\qquad=\pi\left\{\frac{a_0}{2}+\sum_{\nu=1}^{n-1}(a_\nu\cos\nu x_0+b_\nu\sin\nu x_0)\right\}.\end{aligned}\tag{37}$$

Lassen wir in Formel (32) μ speziell die Folge $1, 2, \ldots, n, \ldots$ durchlaufen, so liefert sie:

$$f(x_0)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\frac{n a_0}{2}+\sum_{\nu=1}^{n-1}(n-\nu)(a_\nu\cos\nu x_0+b_\nu\sin\nu x_0)\right\}.\tag{37}$$

Wir sehen also: Ist $f(x)$ eine periodische Funktion, so reduziert sich Formel (32) auf Fejér's Summationsformel für die Fourier'sche Reihe.

Dies ist nur ein spezieller Fall des folgenden allgemeinen Resultates (das übrigens leicht noch weiter verallgemeinert werden könnte): Sei $q_1 < q_2 < . \; . < q_n < .$ eine ins Unendliche wachsende Folge positiver Zahlen und sei $f(x)$ eine in jedem endlichen Intervalle integrierbare, im Unendlichen beschränkte Funktion, deren zugehörige Funktionen $\Phi_2(\mu)$ und $\Psi_2(\mu)$ in den Intervallen $[0, q_1]$, $[q_1, q_2]$, $[q_{n-1}, q_n]$, linear sind. Setzt man:

$$\begin{gathered}\Phi'_{2+}(0) = \pi a_0, \quad \Phi'_{2+}(q_n) - \Phi'_{2-}(q_n) = \pi a_n, \\ \Psi'_{2+}(q_n) - \Psi'_{2-}(q_n) = \pi b_n,\end{gathered} \tag{38}$$

so gilt an jeder Stelle x_0, an der $f(x)$ stetig ist, die Darstellung:

$$f(x_0) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{q_n} \left\{ q_n a_0 + \sum_{\nu=1}^{n-1} (q_n - q_\nu)(a_\nu \cos q_\nu x_0 + b_\nu \sin q_\nu x_0) \right\}. \tag{39}$$

Der Beweis ergibt sich ganz ebenso wie der von (37) aus Formel (32).

Insbesondere gilt Formel (39), wenn $f(x)$ eine fastperiodische Funktion[6] ist, deren Fourierexponenten q_ν sich nirgends im endlichen häufen. Wir denken die q_ν wachsend geordnet:

$$0 < q_1 < q_2 < . \; . < q_\nu < .$$

Wie H. Bohr gezeigt hat, kann eine Folge endlicher trigonometrischer Summen

$$f_n(x) = a_0^{(n)} + \sum_{\nu=1} (a_\nu^{(n)} \cos q_\nu x + b_\nu^{(n)} \sin q_\nu x)$$

gefunden werden, die in $(-\infty, +\infty)$ gleichmäßig gegen $f(x)$ konvergieren. Ist:

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos q_\nu x + b_\nu \sin q_\nu x)$$

die verallgemeinerte Fourierreihe von $f(x)$, so gelten die Grenzbeziehungen:

$$\lim_{n \to \infty} a_\nu^{(n)} = a_\nu, \quad \lim_{n \to \infty} b_\nu^{(n)} = b_\nu.$$

Bezeichnen $\Phi_2^{(n)}(\mu)$, $\Psi_2^{(n)}(\mu)$ die zu $f_n(x)$ gehörigen Funktionen Φ_2, Ψ_2, so konvergieren die $\Phi_2^{(n)}(\mu)$ und $\Psi_2^{(n)}(\mu)$ in jedem endlichen

---

[6] H. Bohr, Acta Math., *45*, p. 29 ff.; *46*, p. 101 ff.

Intervalle gleichmäßig gegen $\Phi_2(\mu)$ und $\Psi_2(\mu)$. In jedem Intervalle $[0, q_1]$, $[q_1, q_2]$, . ., $[q_\nu, q_{\nu+1}]$, . sind aber alle $\Phi_2^{(n)}(\mu)$ und $\Psi_2^{(n)}(\mu)$ linear, dasselbe gilt daher für $\Phi_2(\mu)$ und $\Psi_2(\mu)$. Und zwar ist für $n > \nu$ in $[q_\nu, q_{\nu+1}]$:

$$\Phi_2^{(n)}(\mu) = \Phi_2^{(n)}(q_\nu) + \pi \sum_{i=0}^{\nu} a_i^{(n)} . (\mu - q_\nu);$$

$$\Psi_2^{(n)}(\mu) = \Psi_2^{(n)}(q_\nu) + \pi \left(C_n + \sum_{i=1}^{\nu} b_i^{(n)} \right) (\mu - q_\nu),$$

also

$$\Phi_2(\mu) = \Phi_2(q^\nu) + \pi \sum_{i=0}^{\nu} a_i (\mu - q_\nu);$$

$$\Psi_2(\mu) = \Psi_2(q_\nu) + \pi \left(C + \sum_{i=1}^{\nu} b_i \right) (\mu - q_\nu).$$

Es gelten somit die Formeln (38), womit (39) bewiesen ist.

§ 6.

Wir wollen zum Schlusse noch folgenden Satz beweisen:

Ist $f(x)$ in jedem endlichen Intervalle integrierbar und im Unendlichen beschränkt, und existiert für jede Folge von Intervallen $[p_\nu, q_\nu]$, deren Länge ins Unendliche wächst, der Grenzwert:

$$A(\mu) = \lim_{\nu \to \infty} \frac{1}{q_\nu - p_\nu} \int_{p_\nu}^{q_\nu} f(x) \cos \mu x \, dx, \tag{40}$$

so ist:

$$A(\mu) = \frac{1}{2\pi} \lim_{h \to 0} \frac{\Phi_2(\mu + h) - 2\,\Phi_2(\mu) + \Phi_2(\mu - h)}{h} \tag{41}$$

In der Tat, es ist:

$$\Phi_2(\mu + h) - \Phi_2(\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \frac{\cos \mu x - \cos (\mu + h) x}{x^2} dx =$$

$$= 2 \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \frac{\sin (\mu + \frac{h}{2}) x \sin \frac{h}{2} x}{x^2} dx =$$

$$= 2\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos\mu x \frac{\sin^2\frac{h}{2}x}{x^2}\,dx + \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin\mu x \frac{\sin hx}{x^2}\,dx.$$

Mithin ist:

$$\frac{\Phi_2(\mu+h)-2\,\Phi_2(\mu)+\Phi_2(\mu-h)}{h} = \frac{4}{h}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos\mu x \frac{\sin^2\frac{h}{2}x}{x^2}\,dx =$$

$$= 4\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{x}{h}\right)\cos\frac{\mu x}{h}\,\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}\,dx.$$

Wir haben also zu zeigen:

$$\lim_{h\to 0}\ \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{x}{h}\right)\cos\frac{\mu x}{h}\,\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}\,dx = A(\mu),$$

oder was dasselbe heißt:

$$\lim_{h\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(f\left(\frac{x}{h}\right)\cos\frac{\mu x}{h} - A(\mu)\right)\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}\,dx = 0.$$

Ist $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben, so gibt es, da $f(x)$ im Unendlichen beschränkt ist, ein a, so daß für alle $|h| \leqq 1$

$$\left|\int_{a}^{+\infty}\left(f\left(\frac{x}{h}\right)\cos\frac{\mu x}{h} - A(\mu)\right)\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}\,dx\right| < \varepsilon,$$

$$\left|\int_{-\infty}^{-a}\left(f\left(\frac{x}{h}\right)\cos\frac{\mu x}{h} - A(\mu)\right)\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}\,dx\right| < \varepsilon.$$

Es genügt also, zu zeigen, daß

$$\lim_{h\to 0}\int_{-a}^{a}\left(f\left(\frac{x}{h}\right)\cos\frac{\mu x}{h} - A(\mu)\right)\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}\,dx = 0. \tag{42}$$

Nun ist für jedes Intervall $[\alpha, \beta]$ wegen (40):

$$\lim_{h \to 0} \int_\alpha^\beta f\left(\frac{x}{h}\right) \cos \frac{\mu x}{h}\, dx = \lim_{h \to 0} h \int_{\frac{\alpha}{h}}^{\frac{\beta}{h}} f(x) \cos \mu x\, dx = (\beta - \alpha)\, A(\mu),$$

also:

$$\lim_{h \to 0} \int_\alpha^\beta \left(f\left(\frac{x}{h}\right) \cos \frac{\mu x}{h} - A(\mu)\right) dx = 0. \tag{43}$$

Ferner können wir leicht beweisen: Es gibt ein M und ein η, so daß für alle x von $[-a, a]$ und alle $|h| \leqq \eta$:

$$\left| \int^x \left(f\left(\frac{x}{h}\right) \cos \frac{\mu x}{h} - A(\mu)\right) dx \right| \leqq M. \tag{44}$$

In der Tat, andernfalls gäbe es eine Folge h_ν mit $\lim\limits_{\nu \to \infty} h_\nu = 0$ und eine Folge $\{x_\nu\}$ in $[-a, a]$, so daß:

$$\left| \int_0^{x_\nu} \left(f\left(\frac{x}{h_\nu}\right) \cos \frac{\mu x}{h_\nu} - A(\mu)\right) dx \right| > \nu,$$

oder was dasselbe heißt:

$$\left| h_\nu \int_0^{\frac{x_\nu}{h_\nu}} f(x) \cos \mu x\, dx - A(\mu) \,.\, x_\nu \right| > \nu \tag{45}$$

und somit:

$$\left| \frac{h_\nu}{x_\nu} \int_0^{\frac{x_\nu}{h_\nu}} f(x) \cos \mu x\, dx - A(\mu) \right| > \frac{\nu}{|x_\nu|};$$

da aber aus (45) folgt, daß $\left|\frac{x_\nu}{h_\nu}\right|$ über alle Grenzen wächst, steht dies in Widerspruch zu (40).

Aus (43) und (44) aber folgt bekanntlich (42), womit die Behauptung (41) bewiesen ist.

In ganz analoger Weise zeigt man:

Ist $f(x)$ in jedem endlichen Intervalle integrierbar und im Unendlichen beschränkt, und existiert für jede Folge von Intervallen $[p_\nu, q_\nu]$, deren Länge ins Unendliche wächst, der Grenzwert:

$$B(\mu) = \lim_{\nu \to \infty} \frac{1}{q_\nu - p_\nu} \int_{p_\nu}^{q_\nu} f(x) \sin \mu x\, dx,$$

so ist:

$$B(\mu) = \frac{1}{2\pi} \lim_{h \to 0} \frac{\Psi_2(\mu + h) - 2\, \Psi_2(\mu) + \Psi_2(\mu - h)}{h}$$