

Über spezielle ametrische Mannigfaltigkeiten

Von

Josef Lense in Wien

(Vorgelegt in der Sitzung am 18. Februar 1926)

In einer im Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung erscheinenden Abhandlung¹ habe ich die Integralmannigfaltigkeiten der Monge'schen Gleichung

$$dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_n^2 = 0$$

untersucht. Deutet man die x als rechtwinklige Koordinaten in einem euklidischen R_n , so handelt es sich um Mannigfaltigkeiten mit identisch verschwindendem Bogenelement, also um die Verallgemeinerung der sogenannten Minimalkurven des R_3 . Ich habe diese Mannigfaltigkeiten ametrisch genannt. In der Arbeit ist folgender Satz bewiesen:

In einem euklidischen R_{2n} gibt es ametrische Mannigfaltigkeiten von den Dimensionen 1 bis n , die von der höchsten Dimension n sind linear; in einem euklidischen R_{2n+1} gibt es ametrische Mannigfaltigkeiten von den Dimensionen 1 bis n , wobei jedoch die von der höchsten Dimension nicht linear zu sein brauchen.

Auf meine Anregung hat Herr M. Pinl unter meiner Anleitung in seiner Inauguraldissertation die allgemeinsten ametrischen Flächen des R_5 , ferner sämtliche ametrischen Schiebflächen des R_n aufgestellt. Diese Untersuchungen samt einigen von Herrn K. Brauner und mir herrührenden Ergänzungen sollen im folgenden mitgeteilt werden.

I.

Wir wollen zuerst in den niedrigsten Fällen (R_2 bis R_6) die ametrischen Mannigfaltigkeiten höchstmöglicher Dimension auf synthetischem Wege aufstellen. In der Ebene (R_2) gibt es nur ametrische Geraden, die isotropen Geraden. Denn, soll eine ebene Kurve ametrisch sein, so müssen ihre sämtlichen Tangenten isotrop sein, d. h. aus Stetigkeitsgründen durch einen der absoluten Punkte der Ebene gehen. Im R_3 dagegen sind nichtlineare ametrische Kurven möglich, die sogenannten isotropen oder Minimalkurven, deren Tangenten sämtlich den absoluten Kegelschnitt treffen. Wohl aber gibt es keine derartigen Flächen, da die

¹ Jahresbericht der DMV, Bd. 35, 1926.

uneigentlichen Punkte ihrer Tangentialebenen lauter Punkte des absoluten Kegelschnittes sein müßten; das ist jedoch unmöglich, weil das absolute Gebilde des R_3 nicht zerfällt.

In R_4 gibt es ametrische Ebenen, nämlich jene, welche die Erzeugenden der absoluten V_2^2 ausschneiden. Nichtlineare ametrische Flächen können im R_4 nicht auftreten. Das sieht man folgendermaßen ein: Es sei

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}(u_1, u_2)$$

die Vektorgleichung der ametrischen Fläche.

Da sie ametrisch ist, muß

$$\mathfrak{E}_{u_\alpha} \mathfrak{E}_{u_\beta} = 0 \quad (\alpha, \beta = 1, 2).$$

Durch Differentiation und Elimination ergibt sich

$$\mathfrak{E}_{u_\alpha} \mathfrak{E}_{u_\beta} u_\gamma = 0 \quad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2).$$

Diese beiden Gleichungen sagen aber aus, daß die Normalenebene in einem Flächenpunkt mit der Tangentialebene in diesem Punkt zusammenfällt und sämtliche benachbarten Tangentialebenen enthält, d. h. daß die Fläche eben ist.

Im R_5 gibt es nichtlineare ametrische Flächen. Denn, analog wie im R_4 , folgt hier, daß der Normalraum N_3 eines Flächenpunktes die Tangentialebene E_2 dieses Punktes und sämtliche benachbarten E_2' enthält. Der uneigentliche N_2 des N_3 schneidet die absolute V_3^2 in einem Kegelschnitt, und zwar in einer Doppelgeraden, weil der N_3 sämtliche ∞^1 zu E_2 benachbarten E_2' enthält. Es gibt also nur ∞^1 Tangentialebenen der ametrischen Fläche überhaupt, d. h. sie ist eine Torse.

Analog enthält im R_6 der Normal- N_4 eines Punktes einer ametrischen Fläche die Tangentialebene E_2 und sämtliche benachbarten E_2' . Der uneigentliche N_3 des N_4 schneidet die absolute V_4^2 in einem Ebenenpaar, d. h. hier gibt es wirklich ∞^1 verschiedene benachbarte Tangentialebenen E_2' , daher im ganzen ∞^2 Tangentialebenen der Fläche; es gibt also ametrische Flächen, die keine Torsen sind. Ganz analog wie im R_4 schließt man, daß es im R_6 ametrische Räume gibt, die nur linear sein können.¹

Die allgemeine ametrische Fläche des R_5 ist nach dem eben Gesagten eine Torse, kann also in der Gestalt angesetzt werden

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}(u) + v \mathfrak{E}'(u),$$

wo

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}(u)$$

eine ametrische Kurve des R_5 bedeutet. Es ist somit

¹ In analoger Weise lassen sich die Verhältnisse im R_n darstellen. Darüber soll bei anderer Gelegenheit berichtet werden.

$$\eta^{1/2} = 0$$

$$\eta' \eta'' = 0,$$

und weil das Bogenelement der Fläche identisch verschwinden soll,
muß auch

$$\eta''^2 = 0.$$

Wir erhalten infolgedessen für die fünf Komponenten des Vektors η zwei unabhängige Gleichungen, d. h. die allgemeinste ametrische Torse des R_5 enthält zwei willkürliche Funktionen, da wir eine Komponente noch durch Normierung des Parameters u wegbringen können. Damit sind sämtliche Integralflächen der Monge'schen Gleichung

$$dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_n^2 = 0$$

aufgestellt. Herr Pinl hat in seiner Doktordissertation das Problem durch direkte Integration dieser Gleichung gelöst, worauf hier nicht näher eingegangen werden soll.

II.

Wir wollen jetzt sämtliche ametrischen Schiebflächen des R_n aufstellen. Die Gleichung der Schiebfläche kann in Vektorform in der Gestalt

$$x = \eta(u) + \lambda(v)$$

angesetzt werden, wobei wegen des verschwindenden Bogenelementes die Beziehungen

$$\eta'^2 = 0, \eta' \lambda' = 0, \lambda'^2 = 0$$

gelten. Die erste und dritte dieser Gleichungen sagt aus, daß die beiden Schiebkurven η und ζ ametrisch sind, die zweite, daß sie wechselseitig in allen Punkten aufeinander senkrecht stehen. Liegt also die eine in einem R_p , so muß die andere in seinem Normal- R_{n-p} liegen. Die allgemeinste ametrische Schiebfläche des R_n entsteht also folgendermaßen:

Man nimmt eine ametrische Kurve in einem linearen R_p ($1 \leq p \leq n-1$), zieht durch einen ihrer Punkte eine ametrische Kurve, die in dem Normal- R_{n-p} des R_p liegt, und verschiebt die eine Kurve parallel längs der anderen. Da der R_2 nur ametrische Geraden enthält, entstehen für $n \leq 5$ nur Zylinder. Erst für $n = 6$ gibt es ametrische Schiebflächen, die keine Zylinder sind. Sie entstehen durch Parallelverschiebung einer ametrischen Kurve des R_3 längs einer im Normal- R_3 gelegenen ametrischen Kurve.

Ein interessanter Satz aus der erwähnten Dissertation, dessen Beweis wegen seines rein rechnerischen Charakters hier übergangen werden soll, ist folgender:

Verschiebt man eine ametrische V_n längs einer anderen im euklidischen R_{2n+1} , so entsteht eine Minimal- V_{2n} , d. h. eine V_{2n} , bei der

$$\delta \int \sqrt{g} dx_1 dx_2 \dots dx_n = 0,$$

wenn $x_1, x_2, \dots, x_{2n}$ die Gauß'schen Parameter der V_{2n} sind und g die Diskriminante ihres Bogenelementes bedeutet.

Der Beweis stützt sich auf die Arbeit von H. Kühne: Über die Krümmung einer beliebigen Mannigfaltigkeit, Archiv f. Math. u. Phys., 1904, Bd. 6, p. 251. Es handelt sich einfach darum, rechnerisch darzutun, daß die linearen Glieder in der Gleichung der Krümmungsspur der V_{2n} verschwinden.

Durch Parallelverschiebung ametrischer Mannigfaltigkeiten längs nichtametrischer von niedrigerer Dimension entstehen Mannigfaltigkeiten, deren Bogenelement eine verschwindende Diskriminante hat, wie eine leichte Rechnung zeigt. Verschiebt man z. B. eine ametrische Fläche längs einer nichtametrischen Kurve, so entsteht eine V_3 , bei der die Diskriminante des Bogenelementes den Rang 2 hat. Eine V_3 , bei der diese Diskriminante vom Rang 1 ist, kann man in folgender Weise erzeugen: Man nimmt im euklidischen R_6 einen euklidischen R_5 und in diesem eine ametrische Fläche. Verschiebt man die Normale des R_5 parallel längs der ametrischen Fläche, so entsteht eine derartige V_3 .

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse](#)

Jahr/Year: 1926

Band/Volume: [135_2a](#)

Autor(en)/Author(s): Lense Josef

Artikel/Article: [Über spezielle ametrische Mannigfaltigkeiten. 29-32](#)