Gedruckt mit Unterstützung aus dem Jerome und Margaret Stonborough-Fonds

Die achsonometrischen Sätze von Kruppa und Pohlke's Satz im nichteuklidschen Raume

Von

Dr. Ludwig Hofmann in Wien

(Mit 10 Textfiguren)

(Vorgelegt in der Sitzung am 21. Jänner 1926)

E. Kruppa (Wien) hat in seiner Arbeit: »Zur achsonometrischen Methode der darstellenden Geometrie«[1] die lineare Achsonometrie begründet. Seine Betrachtungen gipfeln in einem Satze[2], der als die weitestgehende projektive Verallgemeinerung des Pohlke'schen Satzes aufzufassen ist. Es zeigt sich nun, daß der wesentliche Inhalt jenes von Kruppa aufgestellten Satzes mit rein projektiven Mitteln erwiesen werden kann. Der so erhaltene Satz trägt rein projektiven Charakter und soll hier als »Satz von Kruppa« bezeichnet werden.

Dieser Satz kann nun als Ausgangspunkt zum Aufbau der Achsonometrie genommen werden. Studiert man die projektiven Beziehungen des Satzes von Kruppa zu einer beliebigen als »absoluter Kegelschnitt« ausgezeichneten Kurve zweiter Ordnung, so ergeben sich in strenger Systematik alle von Kruppa in der erwähntnn Arbeit aufgestellten Sätze. In das so errichtete Gebäude fügt sich letzten Endes auch der Pohlke'sche Satz organisch ein.

Der Satz von Kruppa leistet aber noch viel mehr. Wegen seines projektiven Charakters kann dieser Satz nämlich auch einer nichteuklidschen Metrik zugrunde gelegt werden. Die projektiven Beziehungen des Satzes von Kruppa zu einer beliebigen als »absolute Fläche« ausgezeichneten Fläche zweiter Ordnung liefern eine Reihe von Sätzen, die den von Kruppa für den Fall der euklidschen Metrik abgeleiteten vollkommen analog sind. Schließlich kann man Sätze aufstellen, die eine vollkommene Analogie mit dem Pohlke'schen Satz (in seinen verschiedenen Formulierungen) aufweisen und geradezu als Pohlke's Satz im nichteuklidschen Raume zu bezeichnen sind.

Ich betrachte es als meine Pflicht, nicht unerwähnt zu lassen, daß mir die Anregung zu dieser Arbeit aus dem Studium der

---

[1] Sitzungsber. (math.-nat.) Wien, 1910, 119. Abt. IIa, p. 487 bis 506. Die daselbst aufgestellten Sätze finden sich in mancher Beziehung ergänzt und in übersichtlicher Weise zusammengestellt in dem fundamentalen Werk: E. Müller, Vorlesungen über darstellende Geometrie, I. Bd., Die linearen Abbildungen, bearbeitet von E. Kruppa, Leipzig und Wien, 1923, p. 172 ff. — Im folgenden zitieren wir dieses Buch kurz als »Vorlesungen.«

[2] Vorlesungen, p. 185, Satz 2.

»Vorlesungen« erwuchs. Die meisterhafte konstruktive Handhabung der euklidschen Metrik, wie sie Herr Professor Müller lehrt, bewog mich, auch eine konstruktive Behandlung der nichteuklidschen Metrik zu versuchen; daß es auf dem Gebiete der Achsonometrie geschah, dazu veranlaßten mich die eleganten Sätze, die hier Herr Professor Kruppa schuf.

1. Der Satz von Kruppa.

Das allgemeinste lineare Abbild[1] der Punkte des Raumes auf die Punkte einer Ebene Π wird erhalten, indem man die ersteren aus einem Punkte s des Raumes projiziert und das so erhaltene Strahlenbündel, wir nennen es das projizierende Bündel, kollinear auf das Punktfeld in Π abbildet. Jedem von s verschiedenen Punkt des Raumes ist dadurch ein Punkt von Π zugeordnet, jeder Punkt von Π aber ist das Bild der ∞^1 Punkte des ihm kollinear entsprechenden Strahles des projizierenden Bündels s.

Anstatt das projizierende Bündel s kollinear auf Π abzubilden, kann man es auch zunächst mit einer beliebigen nicht durch s hindurchgehenden Ebene Π_h schneiden und das so erhaltene Punktfeld kollinear auf Π abbilden. Jedes lineare Abbild der Punkte des Raumes auf die Punkte einer Ebene kann demnach immer als kollineare Übertragung eines Zentralrisses der ersteren aufgefaßt werden.

Es sei nun (Fig. 1) im Raume ein beliebiges projektives Koordinatensystem mit den Fundamentalpunkten $o_1\, o_2\, o_3\, o_4$ und den Einheitspunkten $e_1\, e_2\, e_3$ gegeben. Weiters sei in einer Ebene Π eine aus zwei perspektiven Dreiecken $o_1^l\, o_2^l\, o_3^l$ und $e_1^l\, e_2^l\, e_3^l$ und den drei Perspektivitätsstrahlen $(e_1^l\, o_1^l)$, $(e_2^l\, o_2^l)$, $(e_3^l\, o_3^l)$ bestehende Figur gezeichnet. Das Perspektivitätszentrum sei o_4^l genannt. Eine solche Figur soll nach dem Vorgange Kruppa's als »perspektives Dreibein« bezeichnet werden.

Wir legen durch die Punkte $e_1\, e_2\, e_3$ die Ebene $\varepsilon = (e_1\, e_2\, e_3)$ und bringen sie mit der Fundamentalebene $\omega = (o_1\, o_2\, o_3)$ des Koordinatensystems zum Schnitt. Die Schnittlinie U der beiden Ebenen geht durch die Schnittpunkte $u_1\, u_2\, u_3$ je zwei derselben Fundamentalebene angehörenden Seiten der Dreiecke $e_1\, e_2\, e_3$ und $o_1\, o_2\, o_3$ hindurch. Weiters konstruieren wir in der Ebene Π die Perspektivitätsachse U^l der beiden Dreiecke $e_1^l\, e_2^l\, e_3^l$ und $o_1^l\, o_2^l\, o_3^l$ als Verbindungslinie der Schnittpunkte $u_1^l\, u_2^l\, u_3^l$ je zwei entsprechender Seiten.

Wir beziehen nun die Ebenen ε und Π kollinear aufeinander, indem wir den Punkten $e_1\, e_2\, e_3$ und der Geraden U der ersteren, beziehungsweise die Punkte $e_1^l\, e_2^l\, e_3^l$ und die Gerade U^l der letzteren zuordnen. In ganz analoger Weise legen wir eine Kollineation

[1] Wir sagen »Abbild« und nicht »Abbildung«, denn zum Wesen einer Abbildung gehört die ein- oder mehrdeutige Umkehrbarkeit, von der hier natürlich nicht die Rede sein kann.

zwischen den Ebenen ω und Π fest, indem wir den Elementen $o_1\, o_2\, o_3\, U$ von ω die Elemente $o_1^l\, o_2^l\, o_3^l\, U^l$ von Π zuordnen. Jedem Punkt p von Π ist also ein Punkt von ε und ein Punkt von ω kollinear zugeordnet. Ordnet man nun die beiden letzteren Punkte einander zu, so sind, wenn der Punkt p die Ebene Π durchläuft, die Ebenen ε und ω ihrerseits kollinear aufeinander bezogen. In dieser Kollineation ist, wie unmittelbar einzusehen, jeder der Punkte $u_1\, u_2\, u_3$ selbstentsprechend und daher die Gerade U punktweise selbstentsprechend. Die Ebenen ε und ω sind demnach perspektiv

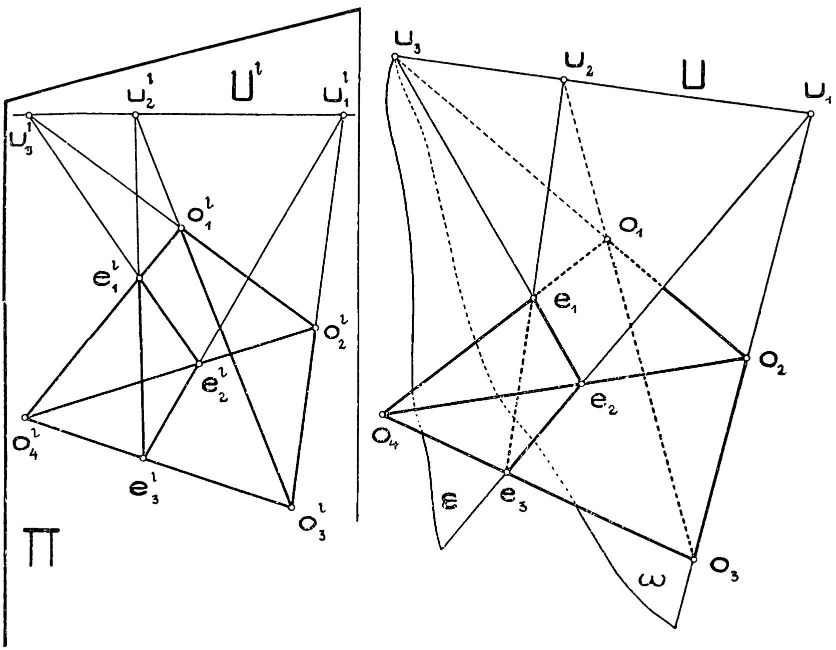

Fig. 1.

kollinear; ihr Kollineationszentrum sei mit s bezeichnet. Ordnet man dann jedem Punkt von Π die Verbindungsgerade der ihm entsprechenden Punkte von ε und ω zu, so ist damit das Strahlenbündel s kollinear auf das Punktfeld in Π bezogen und in dieser Kollineation entsprechen den Strahlen durch $e_1\, e_2\, e_3 \quad o_1\, o_2\, o_3$, respektive die Punkte $e_1^l\, e_2^l\, e_3^l\, o_1^l\, o_2^l\, o_3^l$ von Π. Dem Strahl durch o_4 entspricht dann natürlich der Punkt o_4^l von Π.

Das in Π gegebene perspektive Dreibein kann also erhalten werden, indem man das im Raume gegebene projektive Koordinatensystem aus dem Punkte s projiziert und das so entstehende Strahlenbündel kollinear auf Π abbildet. Nach unserer Bezeichnungsweise ist demnach das perspektive Dreibein ein lineares Abbild des projektiven Koordinatensystems.

Schneidet man das projizierende Bündel s mit einer beliebigen nicht durch s hindurch gehenden Ebene Π_h, so kann das in Π gegebene perspektive Dreibein auch erhalten werden, indem man die Projektion des gegebenen projektiven Koordinatensystems aus dem Zentrum s auf die Ebene Π_h in geeigneter Weise kollinear auf die Ebene Π abbildet. Kommt insbesondere das Projektionszentrum s nicht auf die Ebene Π zu liegen, so kann die Ebene Π_h mit Π identifiziert werden.

Damit ist der wesentliche Inhalt des in der Einleitung erwähnten, von Kruppa aufgestellten Satzes in projektiver Weise dargetan. Den so erwiesenen rein projektiven Sachverhalt bezeichnen wir als »Satz von Kruppa« und formulieren ihn folgendermaßen:

Jedes in einer Ebene Π gezeichnete perspektive Dreibein kann immer als lineares Abbild, d. h. als kollineare Übertragung einer Zentralprojektion eines beliebig vorgegebenen räumlichen projektiven Koordinatensystems aufgefaßt werden. Das Projektionszentrum s ist dabei eindeutig bestimmt und als Hilfsebene Π_h kann jede nicht durch s hindurchgehende Ebene, i. allg. also auch Π selbst gewählt werden.

Der obige Satz behält seine Gültigkeit bei, wenn in dem perspektiven Dreibein die Punkttripel $(e_1^l\, e_2^l\, e_3^l)$ und $(o_1^l\, o_2^l\, o_3^l)$ einzeln oder auch beide auf je eine Gerade zu liegen kommen, oder wenn zwei der drei Perspektivitätsstrahlen in eine Gerade fallen. In allen diesen Fällen gestaltet sich der Beweis ungemein einfach und soll hier übergangen werden.

Ist also im Raume ein beliebiges projektives Koordinatensystem und als dessen Bild in einer Ebene Π irgend ein perspektives Dreibein gegeben, so ist dadurch nach dem Satz von Kruppa ein lineares Abbild der Punkte des Raumes auf die Punkte der Ebene Π in dem von uns definierten Sinne festgelegt. Durch die nämliche Angabe ist nun aber auch eine linear-achsonometrische Abbildung des Raumes auf die Ebene Π festgelegt und das achsonometrische Bild eines Raumpunktes ist natürlich identisch mit seinem linearen Bild in obigem Sinne. Das Bild eines Raumpunktes kann daher in doppelter Weise gefunden werden. Entweder man projiziert den Punkt aus dem eindeutig bestimmten Punkt s und konstruiert zu dem so erhaltenen Strahl des projizierenden Bündels den ihm kollinear entsprechenden Punkt von Π, oder man sucht in der bekannten Weise durch Übertragen der projektiven Koordinaten des Raumpunktes dessen achsonometrische Nebenbilder und konstruiert aus diesen dann das Bild des Punktes.

Kennt man umgekehrt das Bild und ein Nebenbild oder zwei Nebenbilder eines Raumpunktes, so kann daraus der Punkt im Raume durch Übertragen seiner projektiven Koordination gefunden werden. Daraus ergibt sich eine Konstruktion für das Projektionszentrum s. Der Punkt s ist der einzige Raumpunkt, dem in der vorliegenden Abbildung kein Bild entspricht; jedoch stellen, wie unmittelbar klar ist, die Punkte $o_1^l\, o_2^l\, o_3^l$ die Nebenbilder von s dar. Es sind dann weiters die Punkte $s_1^l\, s_2^l\, s_3^l$ (Fig. 7) die Bilder der Achsenprojektionen des Punktes s und die Doppelverhältnisse $(o_1^l\, o_4^l\, e_1^l\, s_1^l)$, $(o_2^l\, o_4^l\, e_2^l\, s_2^l)$, $(o_3^l\, o_4^l\, e_3^l\, s_3^l)$ seine projektiven Koordinaten. Überträgt man diese auf die entsprechenden Kanten des Fundamentaltetraëders, so erhält man daselbst die Punkte s_1, s_2, s_3 und das Projektionszentrum s ergibt sich als Schnittpunkt der drei Ebenen $(s_1\, o_2\, o_3)$, $(s_2\, o_3\, o_1)$, $(s_3\, o_1\, o_2)$.

Die angegebene Konstruktion des Projektionszentrums s ist auch dann noch ausführbar, wenn bei reellem Koordinatensystem $o_1\, o_2\, o_3\, o_4\, e_1\, e_2\, e_3$ und reellen Bildpunkten $o_1^l\, o_2^l\, o_3^l\, o_4^l$ die Bildpunkte $e_1^l\, e_2^l\, e_3^l$ zum Teil oder insgesamt imaginär sind. Die imaginären Punkte denken wir uns natürlich als Doppelpunkte von gleichlaufenden Involutionen auf den entsprechenden Strahlen des perspektiven Dreibeines gegeben. Man kann dann, in der bekannten Weise mit imaginären Elementen konstruierend, das Projektionszentrum genau so wie im Falle durchwegs reeller Punkte erhalten. Es ergibt sich stets ein imaginäres Projektionszentrum, das als Doppelpunkt einer gleichlaufenden Involution festgelegt wird.

Was nun die Darstellung der Ebenen betrifft, so werden diese bekanntlich durch die linearen Bilder ihrer Spuren auf den Fundamentalebenen des Koordinatensystems festgelegt. Geht eine Ebene durch das Projektionszentrum S hindurch, so fallen die Bilder ihrer Spuren in eine Gerade und umgekehrt; man nennt solche Ebenen projizierend.

2. Die achsonometrischen Sätze des euklidschen Raumes.

Die euklidsche Metrik besteht bekanntlich aus den projektiven Beziehungen der Gebilde zur uneigentlichen Ebene und dem in ihr liegenden absoluten Kegelschnitt. Wir wollen hier schrittweise vorgehen und zunächst nur eine beliebig im Raume angenommene Ebene Ω als »uneigentliche Ebene« auszeichnen (affine Geometrie).

Wir denken uns im Raume ein projektives Koordinatensystem und in der Bildebene Π (Fig. 2) ein perspektives Dreibein beliebig gegeben. Nach dem Satz von Kruppa ist dadurch eine linear-achsonometrische Abbildung des Raumes auf die Ebene Π festgelegt und man kann das Projektionszentrum s in eindeutiger Weise konstruieren. Es besteht dann, wie wir gesehen haben, eine Kollineation zwischen dem projizierenden Bündel s und dem Punktfeld von Π.

Wir müssen nun zwei Fälle unterscheiden, je nachdem nämlich der Punkt s außerhalb Ω oder auf Ω zu liegen kommt. Im ersten Falle (Fig. 2) konstruieren wir die der uneigentlichen Geraden U von Π kollinear entsprechende Ebene ε des Bündels s. Legen wir dann die Hilfsebene Π_h durch die uneigentliche Gerade U_h von ε, so gehen bei der kollinearen Übertragung von Π_h nach Π die uneigentlichen Geraden dieser Ebenen ineinander über. Das perspektive Dreibein in Π kann demnach als affine Übertragung der Projektion des gegebenen Koordinatensystems aus dem Punkte s auf die Ebene Π_h erhalten werden.

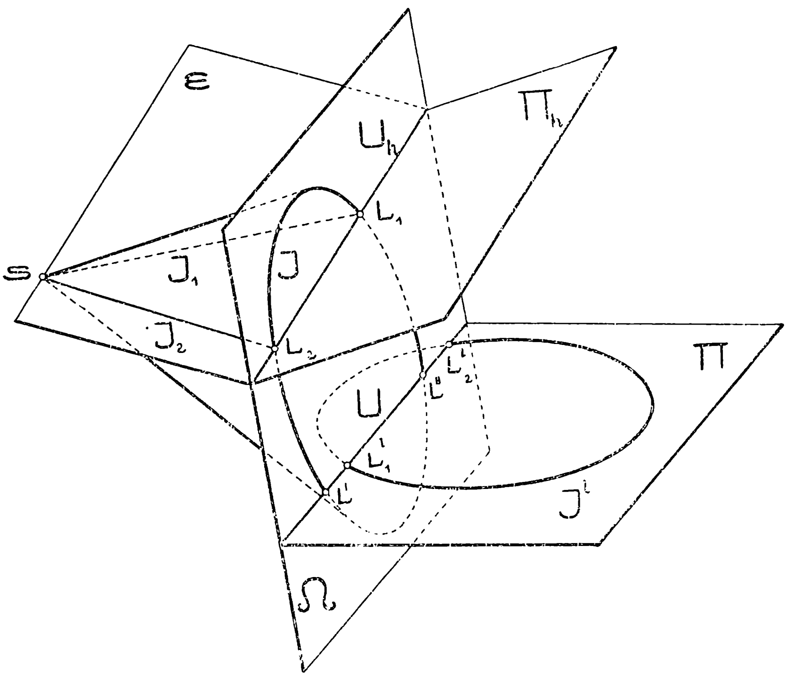

Fig. 2.

Kommt nun anderseits der Punkt s auf die uneigentliche Ebene Ω zu liegen, in welchem Falle Ω in der achsonometrischen Darstellung in Π projizierend wird, so ist das Bündel s ein Parallelstrahlenbündel. Das perspektive Dreibein in Π kann dann nach beliebiger Wahl der Hilfsebene Π_h als kollineare Übertragung einer Parallelprojektion des vorgegebenen Koordinatensystems aufgefaßt werden.

Entspricht insbesondere (Fig. 3) in der zwischen der Ebene Π und dem Bündel s bestehenden Kollineation der uneigentlichen Geraden U von Π die uneigentliche Ebene Ω im Bündel s, so ist die Kollineation zwischen Π_h und Π eine Affinität.

Je nachdem nun ein lineares Abbild der Punkte des Raumes auf die Punkte einer Ebene Π durch Zentral- oder Parallelprojektion der ersteren auf eine Hilfsebene Π_h und darauffolgende kollineare oder affine Übertragung von Π_h nach Π entsteht, soll von einem zentral-kollinearen, zentral-affinen, parallel-kollinearen, parallel-affinen Abbild gesprochen werden.

Im affinen Raume besteht also die folgende Verschärfung des Satzes von Kruppa: Jedes in einer Ebene Π gezeichnete perspektive Dreibein kann entweder als zentral-affines oder als parallel-kollineares (im besonderen als parallel-affines)

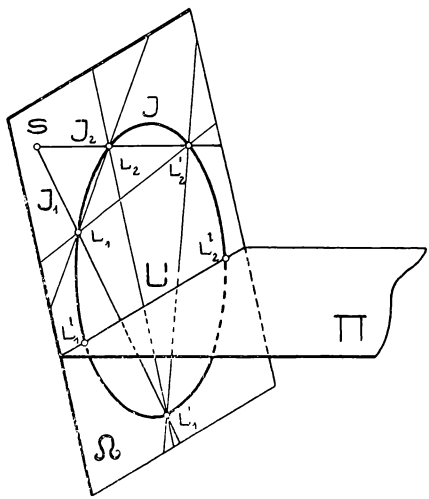

Fig. 3.

Abbild eines beliebig vorgegebenen räumlichen projektiven Koordinatensystems aufgefaßt werden.

Wir wollen nun den zweiten Schritt tun und in der uneigentlichen Ebene Ω (Fig. 2) einen beliebigen Kegelschnitt J als »absoluten Kegelschnitt« auszeichnen.

Betrachten wir zunächst den ersten der beiden oben unterschiedenen Fälle, wo also das Projektionszentrum s nicht auf die uneigentliche Ebene Ω zu liegen kommt. In der zwischen der Ebene Π und dem Bündel s bestehenden Kollineation wurde bereits oben zur uneigentlichen Geraden U von Π, die im Bündel s entsprechende Ebene ε konstruiert. Projizieren wir dann den absoluten Kegelschnitt J aus dem Punkte s und konstruieren zu dem so erhaltenen Kegel des Bündels s die ihm kollinear entsprechende

Kurve J^l von Π, so stellt diese das achsonometrische Bild von J vor. Den Schnitterzeugenden J_1 und J_2 der Ebene ε mit dem betrachteten Kegel entsprechen kollinear die Schnittpunkte i_1^l und i_2^l von J^l mit U. Legen wir nun wie oben die Hilfsebene Π_h durch die Gerade U_h hindurch, so entsprechen in der zwischen Π_h und Π bestehenden Affinität den absoluten Kreispunkten i_1 und i_2 von Π_h die Punkte i_1^l und i_2^l von Π. Diese Affinität wird also dann und nur dann eine Ähnlichkeit sein, wenn die Punkte i_1^l und i_2^l mit den absoluten Kreispunkten i' und i'' der Ebene Π zusammenfallen, wenn also der Kegelschnitt J^l ein Kreis ist.

Man kann dann insbesondere die Ebene Π_h durch U_h so legen, daß die zwischen Π und Π_h bestehende Ähnlichkeit eine Kongruenz wird; es kann dies auf zwei Arten geschehen.

Wir haben somit den Satz I:

Ein in einer Ebene Π gezeichnetes perspektives Dreibein ist dann und nur dann einer Zentralprojektion eines beliebig im Raume vorgegebenen projektiven Koordinatensystems kongruent, wenn das Bild des absoluten Kegelschnittes in der durch die Angabe festgelegten linear-achsonometrischen Abbildung ein Kreis ist. Es gibt dann eine Lage für das Projektionszentrum s und zwei zu s symmetrische Lagen für die Hilfsebene Π_h.

Es ist hier nun noch eine zweite Auffassung möglich. Sind nämlich die Bedingungen des Satzes I erfüllt, so kann das in Π gegebene perspektive Dreibein auch unmittelbar als Zentralprojektion eines zum vorgegebenen kongruenten Koordinatensystems aufgefaßt werden. Zum Beweise dessen braucht man ja nur das aus dem gegebenen Koordinatensystem, dem Projektionszentrum s und einer der beiden Hilfsebenen bestehende Gebilde derart kongruent zu transformieren, daß die in Π_h befindliche Zentralprojektion in das in Π gezeichnete perspektive Dreibein übergeht. Es kann dies in zweifacher Weise geschehen (Kongruenz und Symmetrie). Derselbe Vorgang kann dann auch für die andere Hilfsebene durchgeführt werden.

Der zweiten Auffassung von Satz I entsprechend gibt es also zwei zu Π symmetrische Lagen des Projektionszentrums s und zu jedem s zwei dazu zentrisch-symmetrisch liegende Koordinatensysteme, von denen das eine direkt, das andere invers kongruent ist dem gegebenen System.

Wir denken uns nun insbesondere das in Satz I ganz beliebig vorausgesetzte projektive Koordinatensystem $o_1\, o_2\, o_3\, o_4\, e_1\, e_2\, e_3$ als Kartesisches System gewählt. Die Fundamentalebene $\omega = (o_1\, o_2\, o_3)$

des Koordinatensystems fällt dann mit der uneigentlichen Ebene Ω des Raumes zusammen und das Dreieck $o_1\, o_2\, o_3$ ist ein Poldreieck bezüglich des absoluten Kegelschnittes J. Weiters ist, wie leicht einzusehen, der Pol der uneigentlichen Geraden U der Ebene $\varepsilon = (e_1\, e_2\, e_3)$ in bezug auf J mit dem harmonischen Pol dieser Geraden bezüglich des Dreieckes $o_1\, o_2\, o_3$ identisch.

Das perspektive Dreibein $o_1^l\, o_2^l\, o_3^l\, o_4^l\ e_1^l\, e_2^l\, e_3^l$ denken wir uns beliebig in der Ebene Π gewählt. Das achsonometrische Bild J^l von J ergibt sich in diesem Falle als Ordnungskurve jener Polarität in Π, für welche $o_1^l\, o_2^l\, o_3^l$ ein Poldreieck ist und die Perspektivitätsachse U^l des Dreibeines und ihr harmonischer Pol bezüglich des Dreieckes $o_1^l\, o_2^l\, o_3^l$ einander entsprechen. Die so definierte Polarität nennt Kruppa die »kovariante Fluchtpolarität« des perspektiven Dreibeines, da sie mit demselben in bezug auf alle Kollineationen kovariant verknüpft ist.

Aus Satz I ergibt sich somit der Satz I*a*:

Ein perspektives Dreibein ist dann und nur dann der Zentralprojektion eines im Raume beliebig angenommenen Kartesischen Koordinatensystems kongruent, wenn die Ordnungskurve der kovarianten Fluchtpolarität des Dreibeins ein Kreis ist.

Bezüglich der Lage des Projektionszentrums und der Hilfsebenen gilt dasselbe wie bei Satz I.

Auch hier kann das perspektive Dreibein unmittelbar als Zentralprojektion eines zum vorgegebenen kongruenten Kartesischen Systems aufgefaßt werden und es bestehen genau dieselben Verhältnisse wie dort.

Satz I*a* ist mit dem von Herrn Prof. Kruppa in den »Vorlesungen«, p. 183, aufgestellten Satz 1 identisch. Von diesem Satze ausgehend, ergibt sich dort durch schrittweise Verallgemeinerung als Endresultat der Satz 2 auf p. 185, dessen projektiven Inhalt wir als »Satz von Kruppa« bezeichnet und zum Ausgangspunkt unserer Beweisführung genommen haben. Wir gehen hier also gerade den umgekehrten Weg wie Herr Professor Kruppa in den »Vorlesungen.«

Wenn wir hier die von Kruppa aufgestellten achsonometrischen Sätze von dem oben angegebenen Gesichtspunkt aus beweisen, so geschieht es einerseits um den fundamentalen Charakter[1] des »Satzes von Kruppa« darzutun, anderseits, um auf die viel schwierigeren Verhältnisse der nichteuklidschen Metrik vorzubereiten.

Ein weiterer wesentlicher Unterschied zwischen der Beweisführung in den »Vorlesungen« und dem hier eingeschlagenen Weg

---

[1] Über die Bedeutung dieses Satzes außerhalb des Gebietes der Achsonometrie soll an anderer Stelle berichtet werden.

ist der folgende. Nach dem Satz von Kruppa besteht zwischen dem projizierenden Bündel s und der Bildebene Π eine Kollineation. Die hier in Betracht kommenden Sätze beinhalten nun im Wesen immer die Frage, unter welchen Bedingungen das Bündel s und die Ebene Π in perspektive Lage gebracht werden können. Während nun in den »Vorlesungen« bei festgehaltener Ebene Π das Bündel s zu Π in perspektive Lage gebracht wird, bringen wir hier umgekehrt bei festgehaltenem Bündel s die Ebene Π zu s in perspektive Lage.

Wir wenden uns nun dem zweiten der zu Beginn dieses Abschnittes unterschiedenen Fälle zu, wo also nach vorgenommener Annahme des projektiven Koordinatensystems im Raume und des perspektiven Dreibeines in der Bildebene Π das Projektionszentrum s in die uneigentliche Ebene Ω fällt.

Damit dann die kollineare Beziehung zwischen der beliebig gewählten Hilfsebene Π_h und der Bildebene Π eine Affinität werde, ist, wie wir gesehen haben, notwendig und hinreichend, daß (Fig. 3) in der Kollineation zwischen Π und dem Bündel s der uneigentlichen Geraden U von Π die uneigentliche Ebene Ω im Bündel s entspricht. Den absoluten Kreispunkten i_1^l und i_2^l von Π entsprechen dann respektive die Strahlen J_1 und J_2 des Bündels s, deren Schnittpunkte mit dem absoluten Kegelschnitt J wir respektive mit i_1, i_1', i_2, i_2' bezeichnen. Legt man nun die Hilfsebene Π_h durch eine der vier Geraden $(i_1\, i_2)$, $(i_1\, i_2')$, $(i_1'\, i_2)$, $(i_1'\, i_2')$, so wird die Affiniät zwischen Π_h und Π eine Ähnlichkeit sein, da ja dann die absoluten Kreispunkte dieser beiden Ebenen einander entsprechen. Man erkennt weiters sehr leicht, daß die beiden Parallel-Ebenenbüschel $(i_1\, i_2)$ und $(i_1'\, i_2')$ und ebenso die beiden Büschel $(i_1\, i_2')$ und $(i_1'\, i_2)$ zur Richtung s symmetrisch liegen. Dies ergibt den

Satz II: Ein perspektives Dreibein in einer Ebene Π ist dann und nur dann einer Parallelprojektion eines im Raume vorgegebenen projektiven Koordinatensystems ähnlich (im besonderen kongruent), wenn die uneigentliche Ebene des Raumes in der achsonometrischen Darstellung projizierend wird und ihr Bild ins unendliche fällt. Es gibt dann eine Lage für das uneigentliche Projektionszentrum s und vier Parallel-Ebenenbüschel von Hilfsebenen Π_h, die zu je zwei bezüglich der Richtung s symmetrisch liegen.

Sind die Bedingungen des Satzes II erfüllt, so kann anderseits auch das perspektive Dreibein in Π unmittelbar als Parallelprojektion eines zum vorgegebenen Koordinatensystem ähnlichen (im besonderen kongruenten) Systems aufgefaßt werden. Man braucht zu diesem Zwecke nur das aus dem Koordinatensystem, dem Projektionszentrum s und einer der Hilfsebenen Π_h bestehende Gebilde derart ähnlich zu transformieren, daß die in Π_h befindliche Parallelprojektion des Koordinatensystems in das in Π gezeichnete perspektive Dreibein übergeht. Es kann dies in zweifacher Weise geschehen (direkte und inverse Ähnlichkeit). Der angegebene Vorgang kann dann für jede Wahl der Hilfsebene durchgeführt werden.

Der zweiten Auffassung des Satzes II entsprechend gibt es also vier Projektionsrichtungen, die zu je zwei bezüglich Π symmetrisch liegen. Zu jeder Projektionsrichtung gehören zwei Lagen des Koordinatensystems, von denen die eine direkt, die andere invers ähnlich ist dem gegebenen Koordinatensystem. In jedem Falle kann natürlich das Koordinatenssystem in der Projektionsrichtung beliebig parallel verschoben werden.

Bezüglich der in Fig. 3 konstruierten Achsen $(i_1\,i_2)$, $(i_1\,i_2^{\prime})$, $(i_1^{\prime}\,i_2)$, $(i_1^{\prime}\,i_2^{\prime})$ der Parallelebenenbüschel von Hilfsebenen Π_h soll noch ein besonderer Fall des näheren betrachtet werden. Sind nämlich die absoluten Kreispunkte i_1^l und i_2^l von Π (Fig. 3) konjugiert imaginär, was im Falle eines nullteiligen Kegelschnittes J immer eintreten wird, so sind auch die ihnen kollinear entsprechenden Strahlen J_1 und J_2 des Bündels s konjugiert imaginär. Diese beiden Geraden sind nun mit dem Kegelschnitt J zu schneiden und die vier weiteren Verbindungslinien der Schnittpunkte aufzusuchen. Die Konstruktion kann vollkommen dual zur Aufsuchung der Brennpunkte einer Kurve zweiter Ordnung durchgeführt werden. Die vier Verbindungslinien ergeben sich wie dort die Brennpunkte als Doppelelemente von Involutionen, von denen immer eine gleichlaufend und eine ungleichlaufend ist. Man erhält mithin ein Paar reeller und ein Paar konjugiert imaginärer Verbindungslinien.

Setzen wir also den zunächst beliebig angenommenen »absoluten Kegelschnitt« J nullteilig voraus, welcher Fall eben für die euklidsche Metrik in Betracht kommt, so ist von den in Satz II erwähnten vier Parallel-Ebenenbüschel von Hilfsebenen Π_h immer ein Paar reell und ein Paar konjugiert imaginär.

Wir wenden uns nun dem Pohlke'schen Satz zu. Der Schwarz'schen Verallgemeinerung dieses Satzes entsprechend sei im Raum ein beliebiges Tetraëder $o_4\,e_1\,e_2\,e_3$ und in einer Ebene Π ein vollständiges Viereck $o_4^l\,e_1^l\,e_2^l\,e_3^l$ gegeben. Wir ergänzen nun, indem wir die Punkte $o_1\,o_2\,o_3$, respektive auf den Kanten $(o_4\,e_1)$, $(o_4\,e_2)$, $(o_4\,e_3)$ des Tetraëders beliebig annehmen, dieses zu einem projektiven Koordinatensystem und in analoger Weise durch beliebige Wahl der Punkte $o_1^l\,o_2^l\,o_3^l$, respektive auf den Seiten $(o_4^l\,e_1^l)$, $(o_4^l\,e_2^l)$, $(o_4^l\,e_3^l)$ des Viereckes in Π dieses zu einem perspektiven Dreibein. Nach dem Satz von Kruppa kann dann das perspektive Dreibein als lineares Abbild des projektiven Koordinatensystems aufgefaßt werden, wobei das gegebene Viereck das Bild des gegebenen Tetraëders darstellt.

Das gegebene Viereck kann demnach immer als lineares Abbild des gegebenen Tetraëders aufgefaßt werden; es kann dies auf ∞^3 Arten geschehen, die sich ergeben, wenn man bei beliebig gewählten aber festgehaltenen Punkten $o_1\, o_2\, o_3$ die Punkte $o_1^l\, o^l\, o_3^l$ unabhängig voneinander die entsprechenden Seiten des Viereckes durchlaufen läßt. Läßt man nun die Punkte $o_1\, o_2\, o_3$, respektive mit den uneigentlichen Punkten $u_1\, u_2\, u_3$ der entsprechenden Kanten des Tetraëders zusammenfallen, so daß also die uneigentliche Ebene Ω Fundamentalebene des entstehenden projektiven Koordinatensystems wird, so wird den Bedingungen des Satzes Π dann und nur dann entsprochen, wenn die Punkte $o_1^l\, o_2^l\, o_3^l$, respektive mit den uneigentlichen Punkten der entsprechenden Seiten des Viereckes zusammenfallen. Wählt man also die Punkte $o_1^l\, o_2^l\, o_3^l$ in der besagten Weise, so gilt Satz II, dessen Aussage bezüglich des gegebenen Viereckes und des gegebenen Tetraëders, dann die folgende ist: Das vollständige Viereck $o_4^l\, e_1^l\, e_2^l\, e_3^l$ in der Ebene Π ist einer Parallelprojektion des gegebenen Tetraëders $o_4\, e_1\, e_2\, e_3$ ähnlich. Dies ist aber der Pohlke'sche Satz in der von H. A. Schwarz gegebenen Verallgemeinerung.

Bezüglich der Lagen des Projektionszentrums s und der Hilfsebenen Π_h gilt alles oben Gesagte. Insbesondere also gibt es, falls der Kegelschnitt J nullteilig vorausgesetzt wird, immer ein Paar reeller und ein Paar konjugiert imaginärer Parallel-Ebenenbüschel von Hilfsebenen Π_h.

Auch hier kann das gegebene Viereck unmittelbar als Parallelprojektion eines zum vorgegebenen ähnlichen Tetraëders aufgefaßt werden und es gilt diesbezüglich alles anläßlich Satz II Gesagte.

Man sieht also, daß sich auch der Pohlke'sche Lehrsatz zwanglos in das auf dem Satz von Kruppa errichtete Gebäude einfügt.

Der hier gegebene Beweis des Satzes II schließt, wie man leicht erkennt, den Schur'schen Beweis des Pohlke'schen Satzes in sich. Ganz abgesehen davon nun, daß Satz II mehr aussagt als der Pohlke'sche Satz kommt es uns hier hauptsächlich darauf an, zu zeigen, daß sich alle in diesem Abschnitt bewiesenen Sätze, letzten Endes also der Pohlke'sche Satz selbst, in der natürlichsten Weise als projektive Beziehungen des Satzes von Kruppa zur uneigentlichen Ebene und zum absoluten Kegelschnitt ergeben.

3. Die achsonometrischen Sätze des nichteuklidschen Raumes.

Das absolute Gebilde eines »mit nichteuklidscher Metrik ausgestatteten« Raumes ist bekanntlich eine Fläche zweiter Ordnung und die Metrik eines solchen Raumes besteht aus den projektiven Beziehungen der Gebilde zur absoluten Fläche. So z. B. bezeichnet man alle Kollineationen des Raumes, welche die absolute Fläche in sich selbst überführen, als Kongruenzen. Weiters nennt man alle Flächen zweiter Ordnung, welche die absolute Fläche längs eines Kegelschnittes berühren, Kugeln usw.

Jede Ebene schneidet die absolute Fläche in einer Kurve zweiter Ordnung, die man den absoluten Kegelschnitt jener Ebene nennt. Zwei Ebenen sind vom Standpunkte der nichteuklidschen Metrik kongruent aufeinander abgebildet, wenn zwischen ihnen eine Kollineation besteht, die die absoluten Kegelschnitte der beiden Ebenen ineinander überführt. Die Kreise der nichteuklidschen Metrik schließlich sind jene Kurven zweiter Ordnung, die den absoluten Kegelschnitt ihrer Ebene doppelt berühren. Beiläufig sei noch erwähnt, daß die nichteuklidsche Metrik keine Ähnlichkeitstransformation kennt.

Wir zeichnen nun also eine beliebige Fläche zweiter Ordnung F als »absolute Fläche« aus und gründen auf sie eine nichteuklidsche Metrik des Raumes. Es sei weiters im Raume ein projektives Koordinatensystem und in einer Ebene Π ein perspektives Dreibein beliebig gegeben. Nach dem Satz von Kruppa kann das perspektive Dreibein als lineares Abbild des projektiven Koordinatensystems aufgefaßt werden und durch die Angabe ist somit eine linear-achsonometrische Abbildung des Raumes auf die Bildebene Π festgelegt. Das Projektionszentrum s kann in eindeutiger Weise konstruiert werden und es besteht eine Kollineation zwischen dem Strahlenbündel s und dem Punktfeld von Π.

Es können nun zwei Fälle eintreten, je nachdem nämlich das Projektionszentrum s der Fläche F nicht angehört oder aber ein Punkt dieser Fläche ist.

Legen wir im ersten Falle, den wir zunächst betrachten wollen, eine beliebige, nicht durch s hindurchgehende Hilfsebene Π_h, so ist das perspektive Dreibein in Π eine kollineare Übertragung der Projektion des gegebenen Koordinatensystems aus dem Zentrum s auf die Ebene Π_h. Wir fragen uns nun, unter welchen Bedingungen die zwischen Π_h und Π bestehende Kollineation eine Kongruenz (im nichteuklidschen Sinne natürlich) wird.

Zur Beantwortung dieser Fragen legen wir zunächst (Fig. 4) aus dem Punkte s an die Fläche F den berührenden Kegel U. Konstruiert man nun in der zwischen dem Bündel s und der Ebene Π bestehenden Kollineation zum Kegel U von s die entsprechende Kurve zweiter Ordnung U^l von Π, so ist diese der scheinbare Umriß der Fläche F in der durch die Angabe festgelegten linear-achsonometrischen Abbildung. Um U^l wirklich zu konstruieren, müßte die Fläche F in der erwähnten Abbildung etwa durch ein Poltetraëder und einmal Pol und Polarebene gegeben sein.

Weiters konstruieren wir zum absoluten Kegelschnitt K^l von Π den ihm kollinear entsprechenden (in Fig. 4 nicht gezeichneten)

Kegel K des Bündels s. Den Schnittpunkten von K^l und U^l in Π entsprechen kollinear die Schnitterzeugenden der Kegel K und U von s. Der Kegel K schneidet die Fläche F in einer Raumkurve vierter Ordnung, die in zwei Kegelschnitte zerfällt, wenn sich die beiden Flächen in zwei Punkten berühren. Die beiden Kegelschnitte liegen dann in zwei reell getrennten, zusammenfallenden oder konjugiert imaginären Ebenen. Jede dieser beiden Ebenen wird vom Kegel K in ihrer absoluten Kurve geschnitten.

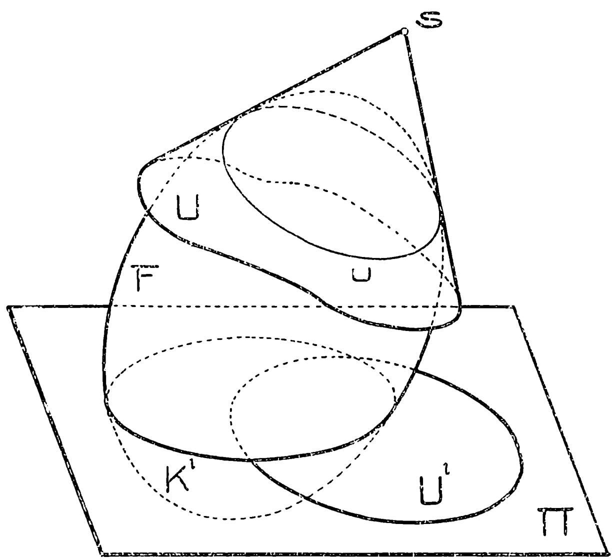

Fig. 4.

Wählt man nun eine dieser beiden Ebenen als Hilfsebene Π^h, so entspricht in der zwischen den Ebenen Π und Π_h bestehenden Kollineation dem absoluten Kegelschnitt K^l von Π der absolute Kegelschnitt von Π_h als Schnitt dieser Ebene mit dem Kegel K. Die obige Kollineation ist demnach eine Kongruenz.

Wenn nun aber der Kegel K des Bündels s die absolute Fläche F in zwei Punkten berührt, was natürlich nur auf dem wirklichen Umriß u von F geschehen kann, so müssen sich die beiden Kegel K und U längs zweier Erzeugenden berühren. Ist dies aber der Fall, so berühren sich die den Kegeln K und U des Bündels s kollinear entsprechenden Kegelschnitte K^l und U^l von Π in zwei Punkten. Der scheinbare Umriß U^l von F ist aber dann im nichteuklidschen Sinne ein Kreis.

Die obige Kette von Schlüssen im entgegengesetzten Sinne durchlaufend, ergibt sich demnach der

Satz I: Ein in einer Ebene Π gezeichnetes perspektives Dreibein ist dann und nur dann einer Zentralprojektion eines im Raume beliebig vorgegebenen projektiven Koordinatensystems kongruent, wenn der scheinbare Umriß der absoluten Fläche in der durch die Angabe bestimmten linear-achsonometrischen Abbildung ein Kreis ist. Es gibt dann eine Lage für das Projektionszentrum s und zwei zu s symmetrische Lagen für die Hilfsebene Π_h, welch letztere reell getrennt, zusammenfallend oder konjugiert imaginär sein können.

Die Begriffe »Kongruenz«, »Symmetrie zu einem Punkt« und »Kreis« sind dabei natürlich im Sinne der nichteuklidschen Metrik zu verstehen. Man beachte die starke Analogie des obigen Satzes mit Satz I des euklidschen Raumes.

So wie dort ist auch hier eine zweite Auffassung möglich. Sind die Bedingungen des Satzes I erfüllt, so kann nämlich das perspektive Dreibein in Π auch unmittelbar als Zentralprojektion eines zum vorgegebenen Koordinatensystem kongruenten Systems aufgefaßt werden. Dem Kongruenzbegriff der nichteuklidschen Metrik entsprechend müssen wir zum Beweis der obigen Behauptung das aus dem räumlichen Koordinatensystem, dem Projektionszentrum s und einer der beiden Hilfsebenen bestehende Gebilde derart kollinear transformieren, daß die in Π_h befindliche Zentralprojektion in das in Π gezeichnete perspektive Dreibein und die absolute Fläche F in sich selbst übergeführt wird.

Nun sind Satz I zufolge die Ebenen Π_h und Π bereits derart kollinear aufeinander bezogen, daß die in Π_h befindliche Zentralprojektion des gegebenen Koordinatensystems in das in Π gezeichnete perspektive Dreibein und außerdem die absoluten Kegelschnitte K^h und K^l der beiden Ebenen ineinander übergeführt werden. Wir konstruieren nun die Pole p^h und p^l (Fig. 5) der Ebenen Π^h und Π in Bezug auf die absolute Fläche F und verbinden sie respektive mit zwei kollinear entsprechenden Punkten q^h und q^l der beiden Ebenen. Die so erhaltenen Geraden schneiden die Fläche F, respektive in den Punktepaaren x_1^h, x_2^h und x_1^l, x_2^l. Ordnen wir dann drei beliebig gewählten Punkten von Π_h die ihnen kollinear entsprechenden Punkte von Π, weiters den Punkten p^h und x_1^h, respektive die Punkte p^l und x_1^l zu, so ist damit eine Kollineation des Raumes definiert, die den oben gestellten Bedingungen entspricht.

Konstruiert man dann in dieser Kollineation zum gegebenen Koordinatensystem und dem Projektionszentrum s die entsprechenden Gebilde, so ist damit die zweite Auffassung von Satz I dargetan.

In der obigen Kollineation entspricht, wie unmittelbar einzusehen, dem Punkt x_2^h der Punkt x_2^l. Ordnet man unter Beibehaltung alles übrigen dem Punkt x_1^h (x_2^h) den Punkt x_2^l (x_1^l) zu, so erhält man ebenfalls eine den oben gestellten Bedingungen entsprechende Kollineation. Wie früher ergibt sich daraus wieder ein der zweiten Auffassung von Satz I entsprechendes Koordinatensystem und das zugehörige Projektionszentrum.

Die zwei nunmehr konstruierten Koordinatensysteme liegen, wie sich leicht ergibt, bezüglich der Bildebene Π (im nichteuklidschen Sinne) symmetrisch. Dasselbe gilt auch für die beiden Projektionszentren. Eines der beiden Koordinatensysteme ist dem gegebenen, direkt das andere demselben invers kongruent.

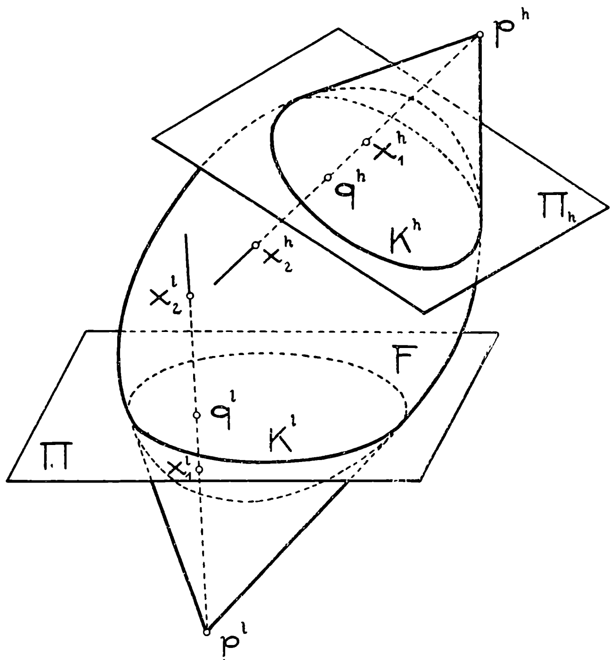

Fig. 5.

Wir haben uns früher für eine der beiden Hilfsebenen entschieden und man kann nun den ganzen Vorgang für die andere Hilfsebene wiederholen. Durch einfache projektive Betrachtungen ergibt sich, daß die beiden so erhaltenen Projektionszentren mit den beiden oben konstruierten zusammenfallen. Weiters zeigt sich, daß jedes der beiden neuen Koordinatensysteme mit einem der beiden oben konstruierten bezüglich eines Projektionszentrums zentrisch symmetrisch (im nichteuklidschen Sinne) ist.

Der zweiten Auffassung des Satzes I entsprechend gibt es also i. allg. zwei zu Π symmetrische Lagen des

Projektionszentrums s, und zu jedem s zwei dazu zentrisch-symmetrisch liegende Koordinatensysteme, von denen das eine direkt, das andere invers kongruent ist dem gegebenen Koordinatensystem.

Alle metrischen Begriffe sind dabei im nichteuklidschen Sinne zu verstehen. Es besteht also auch hier, wie man sieht, von den Realitätsverhältnissen abgesehen eine vollkommene Analogie mit dem entsprechenden Tatbestand des euklidschen Raumes.

Sind die in Satz I erwähnten Hilfsebenen Π_h konjugiert imaginär, so sind auch die beiden obigen Projektionszentren s konjugiert imaginär. Weiters sind dann auch von den vier Koordinatensystemen je zwei zur Bildebene Π symmetrisch liegende konjugiert imaginär.

Fallen insbesondere in Satz I die beiden Hilfsebenen Π_h zusammen, so gibt es auch hier nur ein Projektionszentrum s und zwei sowohl zu s als auch zur Bildebene Π symmetrisch liegende Koordinatensysteme. Es ist dann, wie man leicht erkennt, s der Pol von Π in bezug auf die absolute Fläche F.

Bisher war das projektive Koordinatensystem $o_1\, o_2\, o_3\, o_4\, e_1\, e_2\, e_3$ ganz beliebig im Raume vorgegeben. Es sei nun insbesondere das Fundamentaltetraëder $o_1\, o_2\, o_3\, o_4$ ein Poltetraëder der absoluten Fläche F. Bei jeder beliebigen Wahl der Punkte $e_1\, e_2\, e_3$ auf den entsprechenden Kanten des Tetraëders ist dann ein solches Koordinatensystem im Sinne der nichteuklidschen Metrik bekanntlich als rechtwinkelig zu bezeichnen. Wir wählen nun insbesondere als Punkte $e_1\, e_2\, e_3$, respektive je einen der beiden Schnittpunkte der Kanten $o_4\, o_1$, $o_4\, o_2$, $o_4\, o_3$ mit der Fläche F. Ein solches System wollen wir als »rechtwinkeliges Fluchtsystem« bezeichnen, da seine Punkte $e_1\, e_2\, e_3$ uneigentlich sind.

Ist nun in der Bildebene Π ein beliebiges perspektives Dreibein $o_1^l\, o_2^l\, o_3^l\, o_4^l\, e_1^l\, e_2^l\, e_3^l$ gegeben, so kann dasselbe nach dem Satz von Kruppa als lineares Bild des gegebenen rechtwinkeligen Fluchtsystems aufgefaßt werden. Der scheinbare Umriß der Fläche F kann dann als Ordnungskurve einer Polarität konstruiert werden,[1] die durch das perspektive Dreibein vollkommen bestimmt und mit ihm gegenüber Kollineationen kovariant verknüpft ist.[2] Diese Polarität soll nach dem Vorbilde Kruppas als die »kovariante Umrißpolarität« des perspektiven Dreibeines bezeichnet werden.

Aus Satz I folgt dann unmittelbar der

Satz I*a*: Ein perspektives Dreibein ist dann und nur dann der Zentralprojektion eines rechtwinkeligen Fluchtsystemes kongruent, wenn die Ordnungskurve der kovarianten Umrißpolarität des Dreibeines ein Kreis ist.

---

[1] Vorlesungen, p. 194 ff.

[2] Ebenda, p. 197, Satz 6.

Die Begriffe »kongruent« und »Kreis« sind natürlich wieder im nichteuklidschen Sinne gemeint. Bezüglich der Lage des Projektionszentrums und der Hilfsebenen gilt dasselbe wie bei Satz I.

Bezüglich der zweiten dort möglichen Auffassung ist hier folgendes zu bemerken. Wie man leicht erkennt, sind alle rechtwinkeligen Fluchtsysteme im Sinne der auf die Fläche F begründeten nichteuklidschen Metrik kongruent. Anderseits geht jedes rechtwinkelige Fluchtsystem bei Ausübung einer kongruenten Transformation immer wieder in ein solches über.

Der zweiten Auffassung entsprechend ist also Satz I*a* folgendermaßen zu formulieren:

Ein perspektives Dreibein kann dann und nur dann als Zentralprojektion eines rechtwinkeligen Fluchtsystems aufgefaßt werden, wenn die Ordnungskurve der kovarianten Umrißpolarität des Dreibeines ein Kreis ist.

Der soeben ausgesprochene Satz ist, wie man sieht, vollkommen analog dem von Herrn Prof. Kruppa in den »Vorlesungen«, p. 183 aufgestellten Satz 1, den wir im euklidschen Teile dieser Arbeit als Satz I*a* bezeichnet haben.

Wir wenden uns nun dem zweiten der zu Beginn dieses Abschnittes unterschiedenen Fälle zu, wo nämlich nach Annahme des räumlichen, projektiven Koordinatensystems und des perspektiven Dreibeines in der Bildebene Π das aus der Annahme konstruierbare Projektionszentrum s auf die uneigentliche Fläche F zu liegen kommt. Nach dem Satz von Kruppa kann dann das perspektive Dreibein als kollineare Übertragung einer Parallelprojektion des Koordinatensystems aufgefaßt werden, und wir fragen uns nun wieder, unter welchen Bedingungen die erwähnte kollineare Beziehung in eine Kongruenz übergeht.

Der wahre Umriß der Fläche F (Fig. 6) für das Projektionszentrum s besteht aus den beiden durch s hindurchgehenden Erzeugenden U und V von F. Konstruiert man nun in der zwischen dem Bündel s und der Bildebene Π bestehenden Kollineation zu den Geraden U und V von s die ihnen entsprechenden Punkte u^l und v^l von Π, so stellt dieses Punktepaar den scheinbaren Umriß der Fläche F dar. Die Gerade $\sigma^l_{=} (u^l, v^l)$ ist das Bild der Tangentialebene σ der Fläche F im Punkte s. In der oben erwähnten Kollineation konstruieren wir weiters zum absoluten Kegelschnitt K^l von Π den ihm entsprechenden (in Fig. 6 nicht gezeichneten) Kegel K des Bündels s.

Die Flächen F und K schneiden sich in einer Raumkurve vierter Ordnung, die in s einen Doppelpunkt hat. Geht nun insbespndere der Kegel K durch die Erzeugenden U und V von F hindurch, so zerfällt die Raumkurve vierter Ordnung in diese beiden Geraden und einen Kegelschnitt K^h. Die Ebene Π^h dieses Kegelschnittes wird also vom Kegel K in ihrer absoluten Kurve K^h geschnitten. Wählt man nun Π_h als Hilfsebene, so werden durch die zwischen Π_h und Π bestehende Kollineation die absoluten Kegelschnitte K^h und K^l der beiden Ebenen ineinander übergeführt; die Kollineation zwischen Π_h und Π ist demnach eine Kongruenz.

Damit nun der Kegel K durch die Erzeugenden U und V hindurchgehe, ist wegen der zwischen dem Bündel s und der Ebene Π bestehenden Kollineation notwendig und hinreichend, daß das Punktepaar u^l, v^l dem Kegelschnitt K^l angehöre.

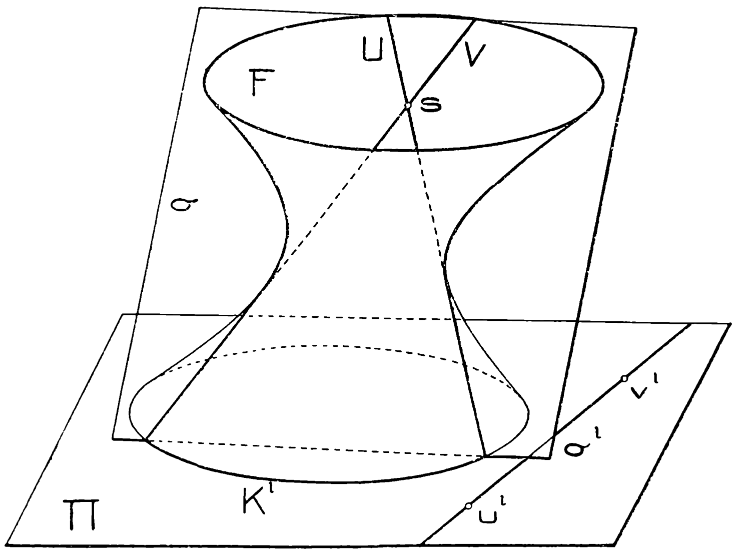

Fig. 6.

Es folgt daraus der

Satz II: Ein perspektives Dreibein ist dann und nur dann einer Parallelprojektion eines im Raume beliebig gegebenen projektiven Koordinatensystems kongruent, wenn der scheinbare Umriß der absoluten Fläche in der durch die Angabe bestimmten linear-achsonometrischen Abbildung in ein absolutes Punktepaar ausartet. Sowohl das uneigentliche Projektionszentrum s als auch die Hilfsebene Π_h sind dabei eindeutig bestimmt.

Alle metrischen Begriffe sind natürlich wieder im nichteuklidschen Sinne aufzufassen.

Auch hier ist eine zweite Auffassung möglich. Sind nämlich die Bedingungen des Satzes II erfüllt, so kann das perspektive Dreibein in Π unmittelbar als Parallelprojektion eines zum vorgegebenen kongruenten Koordinatensystemes aufgefaßt werden. Es gibt dabei, wie leicht gezeigt werden kann, zwei zu Π symmetrische Lagen für das uneigentliche Projektionszentrum s und zu jedem s eine Lage für das Koordinatensysteme. Die beiden Koordinatensysteme sind ebenfalls zu Π symmetrisch und eines von ihnen ist dem gegebenen System direkt, das andere demselben invers kongruent.

Wir wollen nun noch den Fall betrachten, daß das gegebene projektive Koordinatensystem ein rechtwinkeliges Fluchtsystem sei. Satz II erhält dann, wie unmittelbar klar ist, die folgende Form:

Satz IIa: Ein perspektives Dreibein ist dann und nur dann einer Parallelprojektion eines beliebig im Raume gegebenen rechtwinkeligen Fluchtsystmes kongruent, wenn die Ordnungskurve der kovarianten Fluchtpolarität des Dreibeines in ein absolutes Punktepaar ausartet.

Wegen der Wichtigkeit für das Folgende, soll dieser Fall noch genauer untersucht werden.

Es sei also im Raume ein rechtwinkeliges Fluchtsystem $o_1\, o_2\, o_3\, o_4$ $e_1\, e_2\, e_3$ und als dessen Bild in der Zeichenebene (Fig. 7) ein perspektives Dreibein $o_1^l\, o_2^l\, o_3^l\, o_4^l$ $e_1^l\, e_2^l\, e_3^l$ gegeben. Nach dem Satz von Kruppa kann das Dreibein als lineares Abbild des rechtwinkeligen Fluchtsystems aufgefaßt werden, wobei das Projektionszentrum s eindeutig bestimmt ist.

Das vollständige Viereck $o_1^l\, o_2^l\, o_3^l\, o_4^l$ ist das Bild des Poltetraëders $o_1\, o_2\, o_3\, o_4$ der absoluten Fläche F und der Punkt e_1^l zum Beispiel ist das Bild des Schnittpunktes e_1 der Kante $o_1\, o_4$ des Tetraëders mit F. Das Bild des zweiten Schnittpunktes $\bar{e}_1$ dieser Kante mit F ergibt sich, indem man zu e_1^l bezüglich des Paares $o_1^l\, o_4^l$ den vierten harmonischen Punkt $\bar{e}_1^l$ aufsucht. Die Involution konjugierter Punkte bezüglich F auf der Kante $o_1\, o_4$ des Tetraëders ist dann im Bilde durch die Doppelpunkte e_1^l und $\bar{e}_1^l$ festgelegt und Analoges gilt bezüglich der Kanten $o_2\, o_4$ und $o_3\, o_4$.

Weiters ist, wie schon gelegentlich des Satzes von Kruppa erwähnt wurde, der Punkt s_1^l z. B. das Bild der Projektion s_1 des Zentrums s aus der Kante $o_2\, o_3$ des Tetraëders $o_1\, o_2\, o_3\, o_4$ auf die Kante $o_1\, o_4$, desselben und analog verhält es sich mit den Punkten s_2^l und s_3^l. Die Polarebene σ des Projektionszentrums s in bezug auf die absolute Fläche F schneide die Kanten $o_1\, o_4$, $o_2\, o_4$, $o_3\, o_4$ des Poltetraëders $o_1\, o_2\, o_3\, o_4$ von F, respektive in den Punkten $\bar{s}_1$, $\bar{s}_2$, $\bar{s}_3$. Das Bild des Punktes $\bar{s}_1$ z. B. ergibt sich nun, indem man zum Punkte s_1^l bezüglich des Paares $e_1^l\, \bar{e}_1^l$ den vierten harmonischen Punkt $\bar{s}_1^l$ konstruiert und in analoger Weise kann man die Punkte $\bar{s}_2^l$ und $\bar{s}_3^l$ erhalten. Durch die drei Punkte $\bar{s}_1^l\, \bar{s}_2^l\, \bar{s}_3^l$ ist dann die

Ebene σ im Bilde festgelegt. Die Ebene σ schneidet F im wahren Umriß dieser Fläche.

Ist nun der Punkt s uneigentlich, d. h. ein Punkt von F, wie dies in Satz IIa verlangt wird, so ist σ die Tangentialebene von F im Punkte s und umgekehrt. Dann und nur dann geht die Ebene σ durch s hindurch, ist also projizierend und die drei Punkte $\bar{s}_1^l\ \bar{s}_2^l\ \bar{s}_3^l$ liegen auf einer Geraden σ^l dem Bilde von σ.

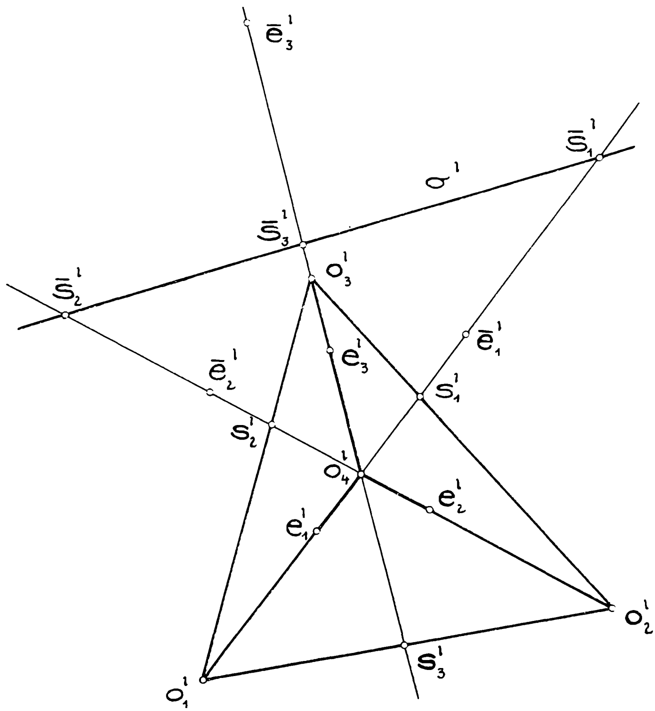

Fig.

Der wahre Umriß von F besteht dann aus den beiden Erzeugenden dieser Fläche, die sich im Punkte s schneiden. Sie können als Doppelstrahlen der Involution polarer Tangenten auf σ erhalten werden. Der scheinbare Umriß aber besteht, wie man leicht erkennt, aus den Doppelpunkten jener Involution, die von dem vollständigen Viereck $o_1^l\ o_2^l\ o_3^l\ o_4^l$ auf der Geraden σ^l ausgeschnitten wird.

Satz IIa verlangt nun, daß jenes Punktepaar mit dem Paar der uneigentlichen Punkte der Geraden σ^l identisch sei.

Zusammenfassend ergibt sich also der

Satz IIb: Ein perspektives Dreibein $o_1^l\ o_2^l\ o_3^l\ o_4^l\quad e_1^l\ e_2^l\ e_3^l$ ist dann und nur dann einer Parallelprojektion eines rechtwinkeligen Fluchtsystems $o_1\, o_2\, o_3\, o_4\, e_1\, e_2\, e_3$ kongruent, wenn die in der oben angegebenen Art konstruierten Punkte $\bar{s}_1^l\, \bar{s}_2^l\, \bar{s}_3^l$ auf einer Geraden σ^l liegen und wenn weiters die Doppelpunkte jener Involution, die von dem vollständigen Viereck $o_1^l\, o_2^l\, o_3^l\, o_4^l$ auf σ^l ausgeschnitten werden, mit dem Paare der uneigentlichen Punkte dieser Geraden identisch sind.

4. Pohlkes Satz im nichteuklidschen Raume.

Im euklidschen Raume kann der Schwarz'schen Verallgemeinerung des Pohlke'schen Satzes entsprechend ein beliebiges Tetraëder immer so auf eine passend gewählte Hilfsebene parallel projiziert werden, daß das entstehende Bild einem vorgegebenen vollständigen Viereck ähnlich wird. Gemäß dem Wegfallen der Ähnlichkeitstransformation im nichteuklidschen Raume müssen wir hier statt der Ähnlichkeit Kongruenz fordern. Diese Verschärfung auf der einen Seite soll nun anderseits dadurch kompensiert werden, daß wir uns auf Poltetraëder der absoluten Fläche beschränken. Wir können dies um so eher tun, als ja jedem rechtwinkelig-gleichschenkeligen Dreibein des nichteuklidschen Raumes ein Poltetraëder der absoluten Fläche zugrunde liegt.

Wir zeichnen wieder eine beliebige Fläche zweiter Ordnung F als »absolute Fläche« aus und gründen auf sie eine nichteuklidsche Metrik des Raumes. Es sei nun irgend ein Poltetraëder $o_1\, o_2\, o_3\, o_4$ von F gegeben und in einer Ebene Π ein vollständiges Viereck $o_1^l\, o_2^l\, o_3^l\, o_4^l$ beliebig[1] gezeichnet. Der Pohlke'sche Satz des nichteuklidschen Raumes beinhaltet dann die folgende Frage: Gibt es einen Punkt s von F und eine Ebene Π_h, so daß die Projektion des gegebenen Poltetraëders aus dem Punkte s auf die Ebene Π_h dem in Π gezeichneten vollständigen Viereck im Sinne der auf die Fläche F begründeten nichteuklidschen Metrik kongruent ist?

Wir ergänzen zunächst das gegebene Poltetraëder zu einem rechtwinkeligen Fluchtsystem, indem wir als Punkte $e_1\, e_2\, e_3$, respektive je einen der beiden Schnittpunkte der Kanten $o_1\, o_4$, $o_2\, o_4$, $o_3\, o_4$ des Tetraëders mit der Fläche F wählen. Wie wir bereits wissen, kann nun das Viereck o_1^l, o_2^l, o_3^l, o_4^l, als lineares Bild des Tetraëders $o_1\, o_2\, o_3\, o_4$ auf ∞^3 Arten aufgefaßt werden, die sich alle ergeben, wenn man die Bilder $e_1^l\, e_2^l\, e_3^l$ der Punkte $e_1\, e_2\, e_3$ beliebig auf den entsprechenden Seiten des Viereckes wählt. Die obige Frage wird also dann und nur dann im bejahenden Sinne zu beantworten sein, wenn es uns gelingt, die Punkte $e_1^l\, e_2^l\, e_3^l$ so an-

[1] Vorläufig mit der Einschränkung, daß keine drei Punkte desselben auf einer Geraden liegen.

zunehmen, daß den Bedingungen des Satzes II *b* entsprochen wird. Dies kann nun tatsächlich geleistet werden!

Hätten wir nämlich die Punkte $e_1^l\, e_2^l\, e_3^l$ bereits in der geforderten Weise angenommen, so könnten wir, wie anläßlich Satz II *b* gezeigt wurde, die Gerade σ^l als Verbindungslinie der drei Punkte $\bar{s}_1^l\, \bar{s}_2^l\, \bar{s}_3^l$ konstruieren. Nehmen wir umgekehrt die Gerade σ^l an, so können daraus die Punkte $e_1^l\, e_2^l\, e_3^l$ konstruiert werden. So z. B. ist (Fig. 7) der Punkt e_1^l als Doppelpunkt der Involution $(o_1\, o_4)$, $(s_1^l\, \bar{s}_1^l)$ in zweideutiger Weise festgelegt und Analoges gilt für die Punkte e_2^l, e_3^l. Durch Annahme der Geraden σ^l ist also das Tripel $e_1^l\, e_2^l\, e_3^l$ in

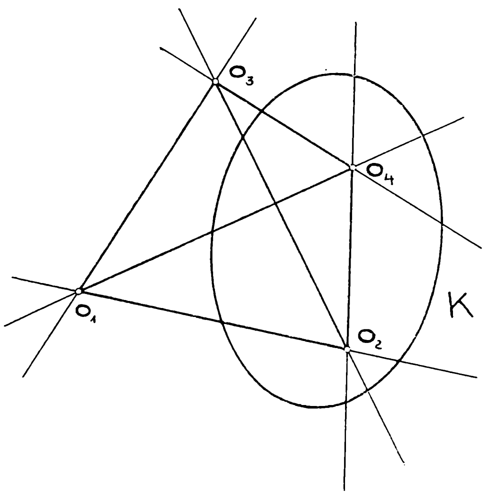

Fig. 8.

achtdeutiger Weise bestimmt. Nehmen wir nun die Gerade σ^l insbesondere so an, daß die Doppelpunkte jener Involution, die von dem vollständigen Viereck $o_1^l\, o_2^l\, o_3^l\, o_4^l$ auf σ^l ausgeschnitten wird, mit den uneigentlichen Punkten dieser Geraden, d. h. mit ihren Schnittpunkten mit dem uneigentlichen Kegelschnitt K^l von Π zusammenfallen, so wird den Bedingungen des Satzes II *b* entsprochen.

Die oben geforderte Annahme der Geraden σ^l beinhaltet demnach die folgende Aufgabe: In einer Ebene ist ein vollständiges Viereck $o_1\, o_2\, o_3\, o_4$ und ein Kegelschnitt K gegeben (Fig. 8); man konstruiere jene Geraden σ, auf welchen die von dem Viereck ausgeschnittene Involution identisch ist mit der Involution konjugierter Punkte bezüglich K.[1]

Zur Lösung dieser Aufgabe bezeichnen wir die Seite $(o_i\, o_k)$ des gegebenen Viereckes kurz mit A_{ik} und ordnen nun jedem

[1] Der Kürze halber wird hier durchwegs der Index l weggelassen.

winkeligen Fluchtsystems $o_1\ o_2\ o_3\ o_4\ e_1\ e_2\ e_3$ kongruent, wenn die in der oben angegebenen Art konstruierten Punkte $\bar{s}_1^l\ \bar{s}_2^l\ \bar{s}_3^l$ auf einer Geraden σ^l liegen und wenn weiters die Doppelpunkte jener Involution, die von dem vollständigen Viereck $o_1^l\ o_2^l\ o_3^l\ o_4^l$ auf σ^l ausgeschnitten werden, mit dem Paare der uneigentlichen Punkte dieser Geraden identisch sind.

4. Pohlkes Satz im nichteuklidschen Raume.

Im euklidschen Raume kann der Schwarz'schen Verallgemeinerung des Pohlke'schen Satzes entsprechend ein beliebiges Tetraëder immer so auf eine passend gewählte Hilfsebene parallel projiziert werden, daß das entstehende Bild einem vorgegebenen vollständigen Viereck ähnlich wird. Gemäß dem Wegfallen der Ähnlichkeitstransformation im nichteuklidschen Raume müssen wir hier statt der Ähnlichkeit Kongruenz fordern. Diese Verschärfung auf der einen Seite soll nun anderseits dadurch kompensiert werden, daß wir uns auf Poltetraëder der absoluten Fläche beschränken. Wir können dies um so eher tun, als ja jedem rechtwinkelig-gleichschenkeligen Dreibein des nichteuklidschen Raumes ein Poltetraëder der absoluten Fläche zugrunde liegt.

Wir zeichnen wieder eine beliebige Fläche zweiter Ordnung F als »absolute Fläche« aus und gründen auf sie eine nichteuklidsche Metrik des Raumes. Es sei nun irgend ein Poltetraëder $o_1\ o_2\ o_3\ o_4$ von F gegeben und in einer Ebene Π ein vollständiges Viereck $o_1^l\ o_2^l\ o_3^l\ o_4^l$ beliebig[1] gezeichnet. Der Pohlke'sche Satz des nichteuklidschen Raumes beinhaltet dann die folgende Frage: Gibt es einen Punkt s von F und eine Ebene Π_h, so daß die Projektion des gegebenen Poltetraëders aus dem Punkte s auf die Ebene Π_h dem in Π gezeichneten vollständigen Viereck im Sinne der auf die Fläche F begründeten nichteuklidschen Metrik kongruent ist?

Wir ergänzen zunächst das gegebene Poltetraëder zu einem rechtwinkeligen Fluchtsystem, indem wir als Punkte $e_1\ e_2\ e_3$, respektive je einen der beiden Schnittpunkte der Kanten $o_1\ o_4$, $o_2\ o_4$, $o_3\ o_4$ des Tetraëders mit der Fläche F wählen. Wie wir bereits wissen, kann nun das Viereck $o_1^l,\ o_2^l,\ o_3^l,\ o_4^l$, als lineares Bild des Tetraëders $o_1\ o_2\ o_3\ o_4$ auf ∞^3 Arten aufgefaßt werden, die sich alle ergeben, wenn man die Bilder $e_1^l\ e_2^l\ e_3^l$ der Punkte $e_1\ e_2\ e_3$ beliebig auf den entsprechenden Seiten des Viereckes wählt. Die obige Frage wird also dann und nur dann im bejahenden Sinne zu beantworten sein, wenn es uns gelingt, die Punkte $e_1^l\ e_2^l\ e_3^l$ so an-

[1] Vorläufig mit der Einschränkung, daß keine drei Punkte desselben auf einer Geraden liegen.

zunehmen, daß den Bedingungen des Satzes II b entsprochen wird. Dies kann nun tatsächlich geleistet werden!

Hätten wir nämlich die Punkte $e_1^l\, e_2^l\, e_3^l$ bereits in der geforderten Weise angenommen, so könnten wir, wie anläßlich Satz II b gezeigt wurde, die Gerade σ^l als Verbindungslinie der drei Punkte $\bar{s}_1^l\, \bar{s}_2^l\, \bar{s}_3^l$ konstruieren. Nehmen wir umgekehrt die Gerade σ^l an, so können daraus die Punkte $e_1^l\, e_2^l\, e_3^l$ konstruiert werden. So z. B. ist (Fig. 7) der Punkt e_1^l als Doppelpunkt der Involution $(o_1\, o_4)$, $(s_1^l\, \bar{s}_1^l)$ in zweideutiger Weise festgelegt und Analoges gilt für die Punkte e_2^l, e_3^l. Durch Annahme der Geraden σ^l ist also das Tripel $e_1^l\, e_2^l\, e_3^l$ in

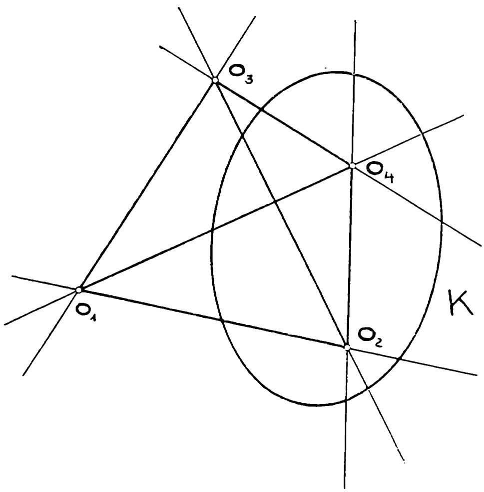

Fig. 8.

achtdeutiger Weise bestimmt. Nehmen wir nun die Gerade σ^l insbesondere so an, daß die Doppelpunkte jener Involution, die von dem vollständigen Viereck $o_1^l\, o_2^l\, o_3^l\, o_4^l$ auf σ^l ausgeschnitten wird, mit den uneigentlichen Punkten dieser Geraden, d. h. mit ihren Schnittpunkten mit dem uneigentlichen Kegelschnitt K^l von Π zusammenfallen, so wird den Bedingungen des Satzes II b entsprochen.

Die oben geforderte Annahme der Geraden σ^l beinhaltet demnach die folgende Aufgabe: In einer Ebene ist ein vollständiges Viereck $o_1\, o_2\, o_3\, o_4$ und ein Kegelschnitt K gegeben (Fig. 8); man konstruiere jene Geraden σ, auf welchen die von dem Viereck ausgeschnittene Involution identisch ist mit der Involution konjugierter Punkte bezüglich K.[1]

Zur Lösung dieser Aufgabe bezeichnen wir die Seite $(o_i\, o_k)$ des gegebenen Viereckes kurz mit A_{ik} und ordnen nun jedem

[1] Der Kürze halber wird hier durchwegs der Index l weggelassen.

Punkt der Seite A_{12} den ihm bezüglich K konjugierten Punkt der Gegenseite A_{34} zu. Die auf den Gegenseiten A_{12} und A_{34} so entstehenden projektiven Punktreihen erzeugen einen Kegelschnitt J und jede Tangente desselben wird von A_{12} und A_{34} in einem Paar bezüglich K konjugierter Punkte geschnitten. Wiederholt man denselben Vorgang für die Gegenseiten A_{13} und A_{24} des gegebenen Viereckes, so ergibt sich ein Kegelschnitt J' mit der analogen Eigenschaft. Die vier gemeinsamen Tangenten von J und J' sind dann, wie man leicht erkennt, die vier Lösungen der oben gestellten Aufgabe, die natürlich auch teilweise oder insgesamt paarweise konjugiert-imaginär sein können.

Zum Ausgangspunkt zurückkehrend, können wir also die Gerade σ^l in vierfacher Weise so annehmen, daß sie zu dem gegebenen Viereck $o_1^l\, o_2^l\, o_3^l\, o_4^l$ in der dort geforderten Beziehung steht. Von einer beliebigen der vier Geraden σ^l ausgehend, kann dann, wie wir gesehen haben, das Tripel $(e_1^l\, e_2^l\, e_3^l)$ in achtdeutiger Weise konstruiert werden. Jedes der acht Tripel ergänzt das gegebene Viereck zu einem perspektiven Dreibein $(o_1^l\, o_2^l\, o_3^l\, o_4^l\, e_1^l\, e_2^l\, e_3^l)$, das den Bedingungen des Satzes II *b* entspricht. Nach diesem Satze ist also jedes der acht so erhaltenen Dreibeine einer Parallelprojektion des rechtwinkeligen Fluchtsystems $(o_1\, o_2\, o_3\, o_4\, e_1\, e_2\, e_3)$ kongruent, wobei das gegebene Viereck $o_1^l\, o_2^l\, o_3^l\, o_4^l$ das Bild des gegebenen Poltetraëders $o_1\, o_2\, o_3\, o_4$ der absoluten Fläche F darstellt.

Konstruiert man nun, wie dies im ersten Abschnitt dieser Arbeit gezeigt wurde, die acht Projektionszentren s, so erkennt man sehr leicht, daß sie symmetrisch (im nichteuklidschen Sinne natürlich) auf die Oktanten des gegebenen Poltetraëders verteilt sind. Dasselbe gilt auch für die acht Hilfsebenen Π_h.

Die hier durchgeführte Schlußweise kann nun für jede der vier Geraden σ^l wiederholt werden.

Es ergibt sich somit der

Pohlke'sche Satz des nichteuklidschen Raumes:

Jedes in einer Ebene Π gezeichnete vollständige Viereck $o_1^l\, o_2^l\, o_3^l\, o_4^l$ ist immer einer Parallelprojektion eines beliebig vorgegebenen Poltetraëders $o_1\, o_2\, o_3\, o_4$ der absoluten Fläche F kongruent. Es gibt dabei 4×8 Lagen für das uneigentliche Projektionszentrum s und zu jedem s eine Hilfsebene Π_h. Sowohl die Punkte s als auch die zugehörigen Ebenen Π_h sind symmetrisch auf die Oktanten des gegebenen Poltetraëders verteilt.

Wir setzen nun insbesondere voraus, daß die absolute Fläche F ein Ellipsoid sei und der Eckpunkt o_4 des gegebenen Poltetraëders im Innern von F liege. Es werden dann die oben konstruierten Punkte $e_1\, e_2\, e_3$ durchwegs reell und man kann über die 32 Projektionszentren s nähere Aussagen machen.

Von einer beliebigen der vier Geraden σ^l ausgehend, ergeben sich für jeden der drei Punkte e_1^l zwei Lösungen, nämlich die Doppelpunkte einer Involution auf der Seite $o_1^l\, o_4^l$ des gegebenen Viereckes $o_1^l\, o_2^l\, o_3^l\, o_4^l$. Gehen wir nun insbesondere von einer reellen Geraden σ^l aus, so ist jede der drei Involutionen durch zwei reelle Punktepaare bestimmt und ihre Doppelpunkte sind daher reell oder konjugiert imaginär. Zu jedem Tripel $(e_1^l\, e_2^l\, e_3^l)$, das imaginäre Punkte enthält, ist also auch das dieselben reellen und die konjugiert imaginären Punkte enthaltende Tripel vorhanden; wir nennen zwei solche Tripel konjugiert.

Bei der obigen Voraussetzung bezüglich F und o_4 ergibt nun, wie man leicht erkennt, jedes reelle Tripel $o_1^l\, o_2^l\, o_3^l$ ein reelles, zwei konjugierte Tripel aber zwei konjugiert imaginäre Projektionszentren.

Die acht Projektionszentren, die man von einer reellen Geraden σ^l ausgehend erhält, sind also entweder durchwegs reell oder durchwegs paarweise konjugiert imaginär.

Gehen wir nun von einer imaginären Geraden σ^l aus, so ist jede der drei oben erwähnten Involutionen durch ein reelles Punktepaar und ein aus einem reellen und einem imaginären Punkt bestehendes Paar bestimmt. Die Doppelpunkte einer solchen Involution aber sind zwei imaginäre Punkte, die nicht konjugiert sind. Die acht zu einer imaginären Geraden σ^l gehörenden Tripel $(e_1^l\, e_2^l\, e_3^l)$ sind durchwegs imaginär und die zu σ^l konjugiert imaginäre Gerade liefert die acht den ersteren konjugierten Tripel.

Von einer imaginären Geraden σ^l ausgehend, ergeben sich also acht imaginäre Projektionszentren und die zu σ^l konjugiert imaginäre Gerade liefert die acht den ersteren konjugiert imaginären Projektionszentren.

Zusammenfassend können wir also sagen, **die 32, dem Pohlke'schen Satz entsprechenden Projektionszentren sind entweder reell oder zum Teil oder insgesamt paarweise konjugiert imaginär.** Auf die Konstruktion imaginärer Projektionszentren haben wir schon gelegentlich des Satzes von Kruppa hingewiesen.

Wir hatten beim Beweis des Pohlke'schen Satzes vorausgesetzt, daß die vier in der Ebene Π gegebenen Punkte $o_1^l\, o_2^l\, o_3^l\, o_4^l$ ein vollständiges Viereck bilden, daß sie also nicht zu dreien auf einer Geraden liegen. Wir wollen nun noch in Kürze den Fall betrachten, daß eben drei der gegebenen Punkte auf einer Geraden liegen (Fig. 9). In diesem Falle ist, wie sich leicht zeigen läßt, die Gerade σ^l eindeutig bestimmt. Es gilt auch hier der Pohlke'sche Satz, jedoch gibt es nur acht Projektionszentren s.

Schließlich soll noch der Fall erwähnt werden, daß zwei der gegebenen Punkte identisch sind (Fig. 10). Während nun in der euklidschen Metrik auch hier noch der Pohlke'sche Satz gilt, ist dies in der euklidschen Metrik i. allg. nicht mehr der Fall. Eine Figur, wie die in Fig. 10 gezeichnete, ist im allgemeinen nicht der Parallelprojektion eines Poltetraëders kongruent.

Wie alle bisherigen Sätze läßt auch der Pohlke'sche Satz eine zweite Auffassung zu. Man kann nämlich das aus dem gegebenen Polteraëder, einem der 32 Projektionszentren s und der zugehörigen Hilfsebene Π_h bestehende Gebilde derart kollinear transformieren, daß die in Π_h befindliche Projektion des Tetraëders in das in der Ebene Π gegebene vollständige Viereck und die absolute Fläche F in sich selbst übergeführt wird. Es gibt, wie wir schon gesehen haben, zwei solche Kollineationen, die vom Standpunkte der nichteuklidschen Metrik als direkte, respektive inverse Kongruenz zu bezeichnen sind. Jede der beiden Kollineationen führt das gegebene Poltetraëder wieder in ein solches und den uneigentlichen Punkt s wieder in einen solchen über.

Das in der Ebene Π gegebene vollständige Viereck ist dann eine Parallelprojektion von jedem der beiden erhaltenen Poltetraëder

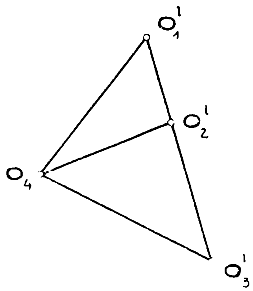

Fig. 9.

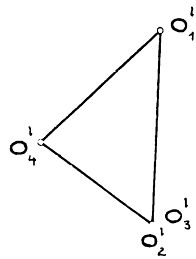

Fig. 10.

aus dem entsprechenden uneigentlichen Zentrum. Sowohl die beiden Poltetraëder als auch die zugehörigen Projektionszentren sind bezüglich Π symmetrisch.

Der hier durchgeführte Vorgang kann nun für jedes der 32 Projektionszentren und die zugehörige Hilfsebene wiederholt werden und es bestehen dabei die folgenden Verhältnisse. Wir haben früher, von einer Geraden σ^l ausgehend, acht der ersten Auffassung des Pohlke'schen Satzes entsprechende Projektionszentren s gefunden. Diese acht Zentren liefern nun, wie man leicht erkennt, bei dem oben erwähnten Vorgang dieselben zwei Poltetraëder und dieselben Projektionszentren. Wie sich weiters leicht ergibt, erhält man die beiden Projektionszentren als die Berührungspunkte jener beiden Tangentialebenen, die sich aus der Geraden σ^l in der Ebene Π an die absolute Fläche F legen lassen.

Die erhaltenen Ergebnisse zusammenfassend, können wir also dem Pohlke'schen Satz auch die folgende Form geben:

Jedes in einer Ebene Π gezeichnete vollständige Viereck kann als Parallelprojektion eines Poltetraëders der absoluten Fläche aufgefaßt werden. Es gibt dabei acht uneigentliche Projektionszentren und zu jedem von ihnen ein Poltetraëder. Je zwei Zentren und die zugehörigen Poltetraëder sind bezüglich Π symmetrisch.

Es sei nun wieder ein beliebiges Poltetraëder $(o_1\, o_2\, o_3\, o_4)$ der absoluten Fläche F gegeben. Wählt man dann die Punkte $e_1\, e_2\, e_3$ beliebig, respektive auf den Seiten $(o_1\, o_4)$, $(o_2\, o_4)$, $(o_3\, o_4)$ des Tetraëders, so ist das Dreibein $(o_4\, e_1\, e_2\, e_3)$ im Sinne der auf die Fläche F begründeten nichteuklidschen Metrik als rechtwinkelig zu bezeichnen. Wenn insbesondere die Fläche zweiter Ordnung Φ, die $(o_1\, o_2\, o_3\, o_4)$ zum Poltetraëder hat und durch die Punkte $e_1\, e_2\, e_3$ hindurchgeht, die absolute Fläche F in ihrem Schnitt mit der Ebene $\omega_4 = (o_1\, o_2\, o_3)$ berührt,[1] so ist das Dreibein $(o_4\, e_1\, e_2\, e_3)$ im obigen Sinne rechtwinkelig-gleichschenkelig.

Es sei nun ein beliebiges rechtwinkeliges Dreibein $(o_4\, e_1\, e_2\, e_3)$ im Raume gegeben und in einer Ebene Π ein Dreibein $(o_4^l\, e_1^l\, e_2^l\, e_3^l)$ beliebig[2] gezeichnet. Wir konstruieren das dem gegebenen Dreibein zugrunde liegende Poltetraëder $(o_1\, o_2\, o_3\, o_4)$ von F und wählen die Punkte $o_1^l\, o_2^l\, o_3^l$ beliebig, respektive auf den Schenkeln $(o_4^l\, e_1^l)$, $(o_4^l\, e_2^l)$, $(o_4^l\, e_3^l)$ des in Π gezeichneten Dreibeines. Das in Π so entstehende vollständige Viereck $(o_1^l\, o_2^l\, o_3^l\, o_4^l)$ ist dann der ersten Formulierung des Pohlke'schen Satzes entsprechend einer Parallelprojektion des Poltetraëders $(o_1\, o_2\, o_3\, o_4)$ kongruent. Die Bilder der gegebenen Punkte $e_1\, e_2\, e_3$ werden dabei drei Punkte $\bar{e}_1^l, \bar{e}_2^l, e_3^l$ sein, die respektive auf den Schenkeln $(o_4^l\, e_1^l)$, $(o_4^l\, e_2^l)$, $(o_4^l\, e_3^l)$ des in Π gezeichneten Dreibeines $(o_4^l\, e_1^l\, e_2^l\, e_3^l)$ liegen.

Läßt man nun das Punkttripel $(o_1^l\, o_2^l\, o_3^l)$ alle ∞^3 in Betracht kommenden Lagen durchlaufen und wiederholt für jede von ihnen den obigen Vorgang, so durchläuft offenbar auch das Punkttripel $(\bar{e}_1^l\, \bar{e}_2^l\, \bar{e}_3^l)$ alle ∞^3, respektive aus Punkten der Geraden $(o_4^l\, e_1^l)$, $(o_4^l\, e_2^l)$, $(o_4^l\, e_3^l)$ bestehenden Tripel. Durch passende Wahl der Punkte $o_1^l\, o_2^l\, o_3^l$ kann man also erreichen, daß die Punkte $e_1^l\, e_2^l\, e_3^l$, respektive mit den Punkten $e_1^l\, e_2^l\, e_3^l$ zur Deckung kommen.

Das in Π gezeichnete Dreibein $(o_4^l\, e_1^l\, e_2^l\, e_3^l)$ ist dann, wie unmittelbar einzusehen, der entsprechenden Parallelprojektion des im Raume gegebenen rechtwinkeligen Dreibeines $(o_4\, e_1\, e_2\, e_3)$ kongruent. Führt man dann noch, wie dies schon mehrfach gezeigt wurde, eine geeignete kongruente Transformation des Raumes durch, so kann man ein dem gegebenen kongruentes rechtwinkeliges Dreibein erhalten, das, aus einem passenden uneigentlichen Zentrum auf die Ebene Π projiziert, das in Π gezeichnete Dreibein $(o_4^l\, e_1^l\, e_2^l\, e_3^l)$ ergibt.

---

1 Φ ist dann im Sinne der nichteuklidschen Metrik eine Kugel.

Mit der Einschränkung, daß k der drei Schenkel eine G rade fallen.

Es gilt also offenbar auch der folgende Satz:

Jedes in einer Ebene Π gezeichnete Dreibein $(o_4^l\, e_1^l\, e_2^l\, e_3^l)$ kann immer als Parallelprojektion eines rechtwinkeligen Dreibeines aufgefaßt werden, das einem im Raume beliebig vorgegebenen rechtwinkeligen Dreibein (insbesondere also auch einem rechtwinkelig-gleichschenkeligen) kongruent ist.

Während die beiden früher bewiesenen Sätze in gewissem Sinne das nichteuklidsche Analogon der Schwarz'schen Verallgemeinerung des Pohlke'schen Satzes darstellen, ist der eben ausgesprochene Satz das direkte Analogon des Pohlke'schen Satzes in seiner ursprünglichen Form.

Allerdings bezüglich Anzahl und Lage der Projektionszentren und der zum vorgegebenen kongruenten Dreibeine können wir hier zum Unterschied von den beiden ersten Sätzen nichts Näheres aussagen.

Mit dem Beweis des Pohlke'schen Satzes sind die Grundlagen für eine darstellend-geometrische Behandlung des nichteuklidschen Raumes geschaffen.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1926

Band/Volume: 135_2a

Autor(en)/Author(s): Hofmann Ludwig

Artikel/Article: Die achsonometrischen Sätze von Kruppa und Pohlke's Satz im nichteuklidschen Raume. 33-60