

# Zur Konstruktion der Krümmungsmittelpunkte ebener Kurven

Von

Karl Federhofer in Graz

(Mit 8 Textfiguren)

(Vorgelegt in der Sitzung am 4. März 1926)

Das Problem der Konstruktion der Tangente und des Krümmungsmittelpunktes für eine beliebige ebene Kurve wurde in umfassender Weise von Joh. Petersen<sup>1</sup> und R. v. Mises<sup>2</sup> in Angriff genommen und durch geometrische Verwertung eines neuen Begriffes, der Fluxion, beziehungsweise der Charakteristik eines veränderlichen geometrischen Elementes, der die Darstellung eines einheitlichen Konstruktionsprinzips gestattete, zu einer allgemein gültigen Lösung gebracht. Im folgenden soll gezeigt werden, daß man durch eine einfache kinematische Betrachtung zu einer allgemein gültigen Konstruktion für den Krümmungshalbmesser ebener Kurven gelangt, die bequem zu verwenden ist in den in der zeichnenden Kinematik vielfach vorkommenden Fällen, wo die zu untersuchende Kurve (Schaulinie der Bewegung) nur gezeichnet vorliegt und aus der nach geeigneter Abänderung das Verfahren von R. v. Mises hervorgeht.

Die Anwendung des Verfahrens für mehrere wichtige Kurvenklassen (allgemeine Konchoiden, Spiralen, Radialen, Integralkurven) führt zu bemerkenswerten Beziehungen, die wesentliche Vereinfachungen bei der Ermittlung der Krümmungsmittelpunkte dieser Kurven ermöglichen.

## I. Ableitung des allgemeinen Verfahrens.

Wir betrachten die durch Zeichnung oder durch ihre analytische Gleichung gegebene ebene Kurve  $l$ , Fig. 1, als Bahn eines auf ihr bewegten Punktes  $P$ , dessen Bewegungsverhältnisse dadurch bestimmt werden, daß  $P$  als Schnitt der Kurve  $l$  mit einem um den beliebig gewählten festen Punkt  $O$  mit konstanter Winkelgeschwindigkeit  $\omega = 1$  umlaufenden Strahl  $p$  angesehen wird. Die

---

<sup>1</sup> Eine Besprechung der in dänischer Sprache erschienenen Abhandlung: Grundprinciper for den infinitesimale Descriptivgeometri med Anvendelse paa Laeren om variable Figurer (Inauguraldiss. Kjöb., 1897) enthält das Jahrbuch ü. d. Fortschritte der Mathem., 1897, p. 505 f.

Zur konstruktiven Infinitesimalgeometrie der ebenen Kurven. Zeitschr. für Math. Physik, 52. Bd. (1905), p. 44—85.

Bestimmung der Normalbeschleunigung  $\frac{v^2}{\rho}$  führt dann zur Kenntnis von  $\rho$ .

Zerlegen wir die Geschwindigkeit  $v_P$  des Punktes  $P$  in die Richtung des Fahrstrahles  $r = OP$  und senkrecht hierzu, und nennen diese Komponenten  $v_r$  und  $v_\varphi$ , so ist

$$\bar{v}_P = \bar{v}_r + \bar{v}_\varphi, \quad (1)$$

worin  $v_r = \frac{dr}{dt}$ ,  $v_\varphi = r \frac{d\varphi}{dt}$ , oder zufolge  $\omega = \frac{d\varphi}{dt} = 1$

$$v_r = \frac{dr}{d\varphi}, \quad v_\varphi = r. \quad (2)$$

Bringt man die in  $O$  zu  $OP$  errichtete Senkrechte mit der Kurvennormalen  $u$  in  $V$  zum Schnitte, so gibt das Dreieck  $OPV$  die geometrische Interpretation der Gleichung (1); denn es ist nun  $OP = r = v_\varphi$ ,  $OV = v_r$ ,  $PV = v_P$  und es sind die Geschwindigkeiten im gleichen Sinne um  $\frac{\pi}{2}$  gedreht.

Ist  $u$  der Winkel zwischen dem Fahrstrahl  $r$  und der Tangente  $t$  in  $P$ , so folgt aus dem bezeichneten Dreiecke:

$$\text{tang } u = \frac{v_\varphi}{v_r} = \frac{r d\varphi}{dr} \quad (3)$$

Bezeichnen  $b_r$  und  $b_\varphi$  die Komponenten der Beschleunigung  $b_P$  von  $P$  nach den Richtungen  $r$  und  $\varphi$ , so gelten hierfür die bekannten Gleichungen:

$$b_r = \frac{dv_r}{dt} - \frac{v_\varphi^2}{r}$$

$$b_\varphi = \frac{dv_\varphi}{dt} + \frac{v_r v_\varphi}{r}$$

oder mit Beachtung der Gleichung (2) und wegen  $dt = d\varphi$ :

$$b_\varphi = 2 \frac{dr}{d\varphi} = 2 v_r = 2 \cdot \overline{OV} \quad (3)$$

$$b_r = \frac{d^2 r}{d\varphi^2} - r. \quad (4)$$

Der Wert  $b_r$  kann in folgender Art zeichnerisch bestimmt werden. Bewegt sich  $P$  auf  $l$ , dann beschreibt  $V$  eine Kurve, die wir die Subnormalkurve  $l_1$  von  $l$  nennen wollen, da sie geometrischer Ort für die Endpunkte der Polarsubnormalen von  $l$  ist.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Sie ist auch, da  $OV = \frac{dr}{d\varphi}$ , die polare Differentialkurve von  $l$ .

Ist  $n_1$  die Normale zur Kurve  $l_1$  und schneidet sie den Polstrahl  $r$  in  $C$ , dann ist, da sich auch der Strahl  $OV$  mit  $\omega = 1$  um  $O$  dreht,

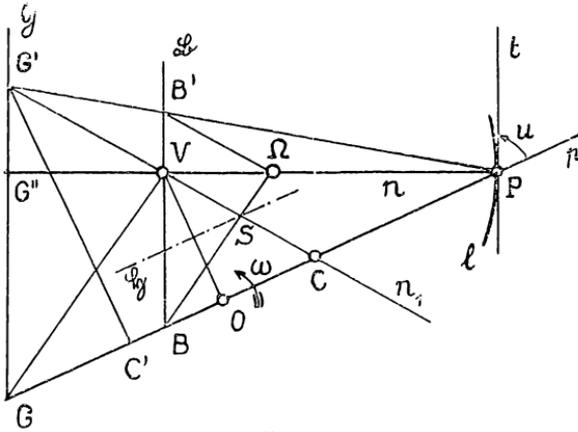


Fig. 1.

$VC$  die um  $\pi/2$  gedrehte senkrechte Geschwindigkeit von  $V$  auf der Bahn  $l_1$  und es ist daher nach Gleichung (2) ihre radiale Komponente gleich

$$OC = \frac{d}{d\varphi} (OV) = \frac{d^2 r}{d\varphi^2} \quad (5)$$

Man überzeugt sich leicht, daß bei positivem  $\frac{dr}{d\varphi}$  der Wert  $\frac{d^2 r}{d\varphi^2} < 0$  ist, wenn  $\vec{OC}$  die Richtung  $\vec{OP}$  besitzt. Damit folgt aus Gleichung (4):

$$b_r = PO + OC' = PC',$$

wobei in Fig. 1  $OC = OC'$  gemacht ist. Wird auf der in  $C'$  errichteten Normalen zu  $OP$  im Sinne des wachsenden Winkels  $\varphi$  die Strecke

$$C'G' = b_\varphi = 2 \cdot \overline{OV}$$

aufgetragen, so ist  $PG' = \sqrt{b_r^2 + b_\varphi^2}$ , d. h.  $G'$  ist der Endpunkt des in  $P$  angesetzten Beschleunigungsvektors  $b_p$ .

Da  $\overline{CC'} = 2 \cdot \overline{OC}$  und  $\overline{C'G'} = 2 \cdot \overline{OV}$ , so folgt, daß  $G'$  auf der Normalen  $n_1$  der Kurve  $l_1$  liegt, und zwar so, daß  $CV = VG'$  ist.<sup>1</sup>

Die Projektion  $PG''$  von  $b_p$  auf die Normale  $n$  der gegebenen Kurve ist  $\frac{v^2}{\rho}$ ; zieht man nun  $VB' \parallel G'G''$  und  $B'\Omega \parallel G'V$ , so ist

<sup>1</sup> Daß  $G'$  auf  $n_1$  liegt, ist auf anderem Wege bewiesen worden von M. Grübler (Lehrbuch der technischen Mechanik, Bd. I, p. 44).

Zum gleichen Ergebnis führen auch zwei von A. Lauffer stammende Sätze über den Geschwindigkeitsplan der Bewegung eines Punktes in einer Ebene (Zeitschrift f. angew. Math. u. Mech. Bd. 4, p. 521).

wegen  $PV = v$  die Strecke  $P\Omega$  gleich dem Krümmungshalbmesser  $\rho$ , daher ist  $\Omega$  der gesuchte Krümmungsmittelpunkt. Damit ist die angekündigte einfache Konstruktion für  $\Omega$  abgeleitet und es ist die Aufgabe der Bestimmung von  $\Omega$  zurückgeführt auf eine Normalenkonstruktion für die Subnormalkure  $l_1$ , d. h. auf die Ermittlung des Punktes  $C$  auf  $OP$ , der bestimmt ist durch  $OC = \frac{d^2 r}{d\varphi^2}$ .

Die abgeleitete Konstruktion kann durch folgende Überlegung ein wenig vereinfacht werden. Bewegt sich bei festgehaltenem Punkte  $\Omega$  der Punkt  $B'$  auf der Geraden  $\mathfrak{B}$ , dann beschreiben die zugehörigen Punkte  $G'$  die Gerade  $\mathfrak{G}$  ( $\perp n$ ); der Schnittpunkt von  $\mathfrak{G}$ , beziehungsweise von  $\mathfrak{B}$  mit  $OP$  sei  $G$ , beziehungsweise  $B$ . Dann ist  $GV \parallel B\Omega$  und es wird die Strecke  $VC$  in ihrem Schnitte  $S$  mit  $B\Omega$  halbiert, da  $GB = BC$  sein muß.  $\Omega$  liegt daher im Schnitte von  $BS$  mit  $n$ .<sup>1</sup>

Die Umkehrung des Verfahrens gestattet bei gegebenem  $\Omega$  die Konstruktion der Normalen  $n_1$  an die Kurve  $l_1$ . Man bringt die Symmetrale  $\mathfrak{H}$  der Strecke  $OV$  mit  $B\Omega$  in  $S$  zum Schnitte; dann ist  $VS$  die gesuchte Normale  $n_1$ . Oder man bringt  $B\Omega$  mit der durch  $V$  zu  $OP$  gezogenen Parallelen in  $C'$  zum Schnitt und zieht  $C''C \parallel VB$ ; dann gibt  $CV$  die Normale  $n_1$ .

## II. Krümmungsmittelpunkte der allgemeinen Konchoiden.

Sei  $l$  in Fig. 2 die durch Zeichnung oder durch ihre analytische Gleichung gegebene beliebige Basis,  $O$  der Pol, so entstehen die

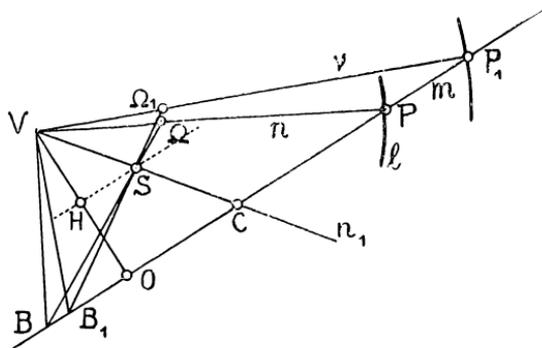


Fig. 2.

allgemeinen Konchoiden dadurch, daß jeder Fahrstrahl  $OP$  um ein konstantes »Zwischstück«  $m$  verlängert oder verkürzt wird.

Da  $r_1 = \overline{OP_1} = r + m$ , und demnach  $\frac{dr}{d\varphi} = \frac{dr_1}{d\varphi}$ , so besitzen die allgemeinen Konchoiden und die Basis in homologen Punkten

<sup>1</sup> Man erkennt, daß die Diagonale  $BC'$  des Parallelogrammes  $VBCC'$  den Punkt  $\Omega$  enthalten muß. Vgl. die Arbeit von R. v. Mises, p. 76.

gleiche Polarsubnormalen, demnach ist  $P_1V$  die Normale  $\nu$  im Punkte  $P_1$ . Ist also der Krümmungsmittelpunkt  $\Omega$  der Basis bekannt, so liefert das vorstehende Verfahren zunächst die Normale  $\nu$  an die Subnormalenkurve  $l_1$  und damit den Krümmungsmittelpunkt  $\Omega_1$  der allgemeinen Konchoide für den Punkt  $P_1$ . Man zieht  $VB \perp VP_1$ , bringt  $B\Omega$  mit  $\mathfrak{H}$  in  $S$  zum Schnitt, dann gibt  $VS$  die Normale  $n_1$  in  $V$ . Bringt man die in  $V$  zu  $VP_1$  errichtete Normale mit  $OP_1$  in  $B_1$  zum Schnitt und zieht  $B_1S$ , so liefert der Schnitt dieser Geraden mit  $P_1V$  den gesuchten Krümmungsmittelpunkt  $\Omega_1$ .

Durchläuft das Zwischenstück  $m$  alle Werte von  $-\infty$  bis  $+\infty$ , so können wir fragen nach dem geometrischen Orte der zugehörigen Krümmungsmittelpunkte  $\Omega_1$ . Die Punkte  $P, V, C, O, S, H$  sind dann gegebene feste Punkte.

Die Kurve der  $\Omega_1$  ergibt sich als Schnitt der beiden Strahlenbüschel mit den Scheiteln  $V, S$ ; diese Büschel sind aber projektiv,

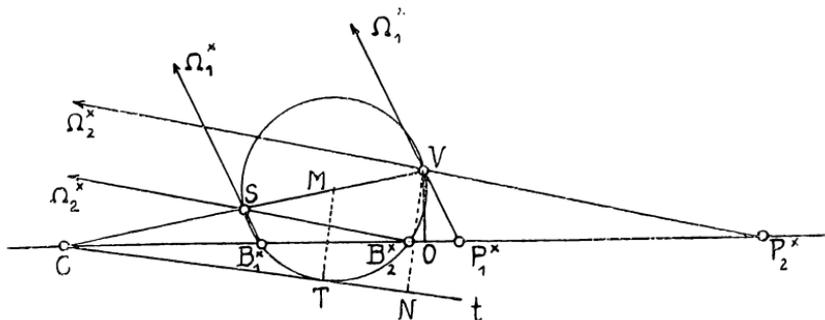


Fig. 3.

weil die Reihe der Punkte  $P, B$  projektiv ist, daher ist das Erzeugnis ein Kegelschnitt, der die beiden Scheitel  $V, S$  sowie den Punkt  $H$  (Mitte von  $OV$ ) enthält, der den Krümmungsmittelpunkt für die spezielle Lage  $P_1 \equiv 0$  darstellt. Die Art dieses Kegelschnittes ist bedingt durch das Verhältnis der beiden, die festen Punkte  $V$  und  $C$  festlegenden Strecken  $\bar{OV} = b$  und  $OC = c$ . Es läßt sich zeigen, daß für  $c \geq b\sqrt{8}$  der Kegelschnitt beziehungsweise eine Hyperbel, Parabel oder Ellipse ist.

Für den Beweis ist es wesentlich, jene Punkte  $P^*$  der Reihe  $PP_1$  aufzusuchen, für die die zugehörigen  $\Omega^*$  im Unendlichen liegen. Sie sind dadurch ausgezeichnet, daß sie Wendepunkte der betreffenden Konchoiden sind. Für diese muß offenbar  $B^*S \parallel VP^*$ , d. h. der Winkel  $SB^*V$  muß ein rechter sein. Der Punkt  $B^*$ , der die Lage von  $P^*$  eindeutig bestimmt, liegt somit auf dem Kreise mit dem Durchmesser  $SV$  und dem Mittelpunkte  $M$  (Fig. 3). Liegt die Gerade  $OC$  außerhalb dieses Kreises, so gibt es keine reellen Schnittpunkte  $B^*$ , es fällt demnach kein  $\Omega_1$  ins Unendliche: der Ort der  $\Omega_1$  ist eine Ellipse. Berührt der Kreis die Gerade  $OC$ , dann entspricht dem Berührungspunkte  $B^*$  ein Punkt  $P_1^*$ , dessen  $\Omega^*$  ins

Unendliche zu liegen kommt: der Ort der  $\Omega_1$  ist eine Parabel mit der Achsenrichtung  $B^*S$ , und  $S$  ist der Scheitel der Parabel. Ziehen wir von  $C$  aus die Tangente  $t$  an den Kreis, die im Punkte  $T$  berührt, und fällen wir aus  $V$  das Lot  $VN$  auf  $t$ , so muß für diese besondere Lage  $VN = b$  und  $CN = c$  werden und es folgt aus der Fig. 3 die Beziehung:

$$VN \cdot CN = MT \cdot CT$$

oder

$$b \cdot c = MT : CT.$$

Da aber  $CM = 3 \cdot MT$ , somit  $CT = MT \sqrt{8}$ , so ergibt sich  $c = b \sqrt{8}$ . Für  $c > b \sqrt{8}$  schneidet der Kreis die Gerade  $CO$  in zwei Punkten  $B_1^*$  und  $B_2^*$ : der Ort für  $\Omega_1$  wird eine Hyperbel, deren Asymptotenrichtungen durch  $SB_1^*$  und  $SB_2^*$  gegeben sind.

Die beiden Wendepunkte  $P_1^*$  und  $P_2^*$  haben von  $O$ , wie man leicht nachrechnet, die Entfernung

$$x_{1,2} = \frac{c}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{c^2 - 8b^2}. \quad (6)$$

Die Punkte  $P^*$  liegen entgegengesetzt zu  $C$  bezüglich des Punktes  $O$ . Die Konstruktion dieser Kegelschnitte unterliegt keiner Schwierigkeit.

Es ist also folgender Satz bewiesen:

»Konstruiert man bei festem Pole  $O$  zu einer beliebigen Basis die  $\infty^1$  allgemeinen Konchoiden, indem das Zwischenstück  $m$  alle Werte von  $-\infty$  bis  $+\infty$  durchläuft, so liegen die Krümmungsmittelpunkte aller, von einem durch  $O$  gelegten Fahrstrahl aus der Konchoidenschar ausgeschnittenen Punkte auf einem Kegelschnitte, der die Punkte  $V, S$  und  $H$  und den gegebenen Krümmungsmittelpunkt  $\Omega$  der Basis enthält; er ist eine Hyperbel, Parabel oder Ellipse, je nachdem  $\overline{OC} \cong \overline{OV} \sqrt{8}$  ist.«

### Sonderfälle.

a) Die Basiskurve ist eine Gerade. (Fig. 4.)

Dann entsteht bekanntlich als abgeleitete Kurve die Konchoide des Nikomedes. Sei  $l$  in Fig. 4 die gegebene Basisgerade und  $a$  ihr senkrechter Abstand vom Pol  $O$ . Da  $\Omega$  im Unendlichen liegt, so fällt  $P$  zusammen mit  $P_1^*$  und es ist  $x_1 = \overline{OP_1^*}$ . Die Lage des Punktes  $P_2^*$  ist gemäß Gleichung (6) festgelegt durch:

$$x_2 = c - x_1.$$

Nun ist  $c = OB_1^* + B_1^*C = OB_1^* + B_1^*P$ , oder wegen  $B_1^*P = OB_1^* + OP$ :

$$c = 2 \cdot OB_1^* + OP; \text{ somit folgt } \underline{x_2 = 2 \cdot OB_1^*}$$

Der geometrische Ort der Wendepunkte der Konchoidenschar ist daher die gerade Basis  $l$  und eine Kurve mit der Polargleichung:

$$x_2 = 2 \cdot \overline{OB}_1^x = 2 a \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^3 \varphi} \quad (7)$$

oder in kartesischen Koordinaten:

$$x^3 - 2 a y^2 = 0;$$

sie hat den Ursprung  $O$  als Spitze und ist zufolge (7) leicht zu konstruieren. Wegen

$$b = \overline{OV} = \frac{a \sin \varphi}{\cos^2 \varphi}; \quad c = \overline{OC} = \frac{a}{\cos^3 \varphi} (1 + \sin^2 \varphi)$$

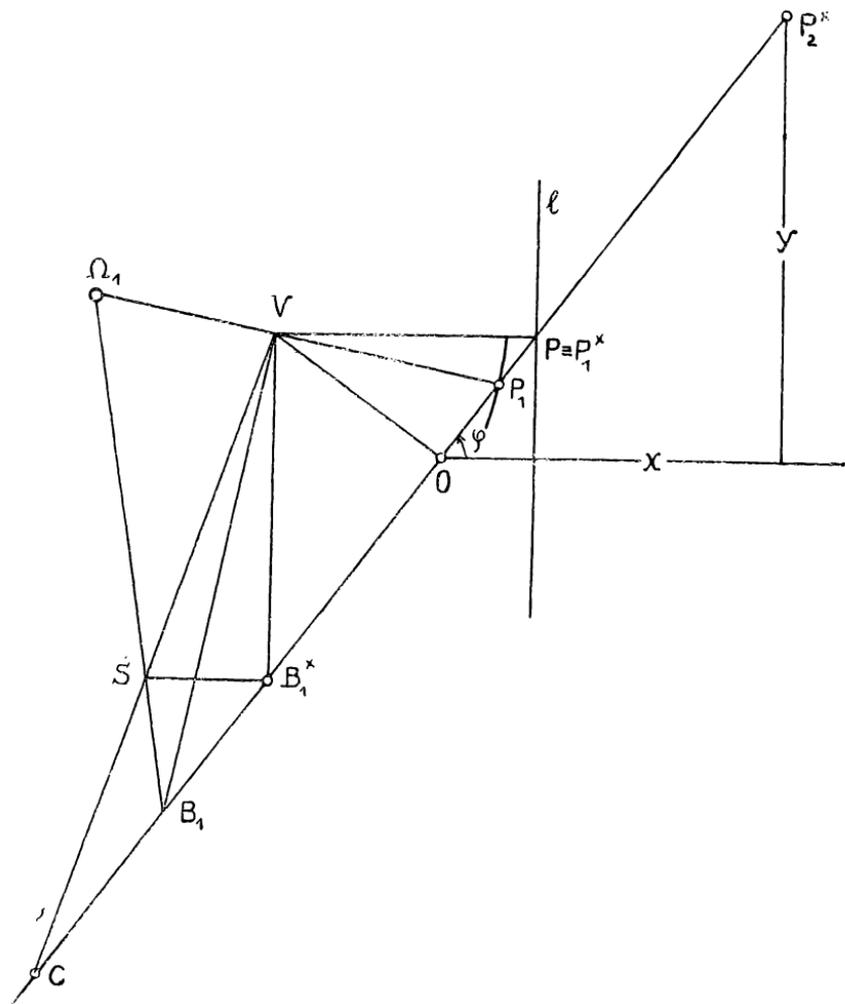


Fig. 4.

lautet das Kriterium für die Existenz von Wendepunkten:

$$\frac{1 + \sin^2 \varphi}{\cos^3 \varphi} \geq \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi} \sqrt{8}, \text{ woraus folgt: } 3 \cos 2 \varphi - 1 \geq 0.$$

Mit Ausnahme des Winkels  $\varphi_1 = 35^\circ 45'$ , für den  $\cos 2 \varphi_1 = \frac{1}{3}$ , ist der Wert  $3 \cos 2 \varphi - 1$  stets größer wie Null, da  $2 \varphi$  in den Grenzen 0 bis  $\pm \frac{\pi}{4}$  schwankt. Die Orte der Krümmungsmittelpunkte der Konchoiden des Nikomedes sind daher Hyperbeln; nur für die Punkte des Polstrahles  $\pm \varphi_1$ , liegen die Krümmungsmittelpunkte auf einer Parabel, denn es fallen dann beide Punkte  $P_{1,2}^*$  mit  $P$  auf der Basis zusammen.

Der Krümmungsmittelpunkt  $\Omega_1$  für den Kurvenpunkt  $P_1$  der Konchoide wird durch folgende Konstruktion gewonnen:  $VP \perp l$ ,  $OV \perp OP$ ,  $VB_1^* \parallel l$ ,  $B_1^* P_1 = B_1^* C$ ,  $B_1^* S \parallel VP_1^*$ ,  $B_1 V \perp P_1 V$ ; dann liegt  $\Omega_1$  im Schnitte von  $B_1 S$  mit der Normalen  $P_1 V$ .

Die Subnormalkurve  $l_1$  ist eine Parabel mit dem Scheitel  $O$  und dem Parameter  $a$ , deren Scheiteltangente parallel zur Basis  $l$  ist.

b) Die Basiskurve ist ein Kreis vom Halbmesser  $a$ . (Fig. 5.)

Liegt der Pol  $O$  auf der Basis und ist das konstante Zwischenstück  $m \neq 2a$ , dann sind die allgemeinen Konchoiden Pascal'sche Schnecken. Die Subnormalkurve ist der gegebene Basiskreis und

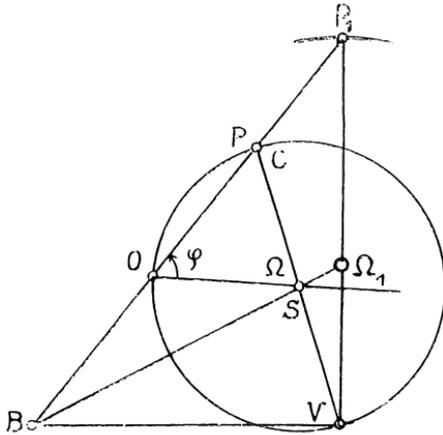


Fig.

es fällt  $C$  mit  $P$ ,  $S$  mit  $\Omega$  zusammen. Zieht man daher  $VB$  senkrecht zu  $P_1 V$  und verbindet  $B$  mit  $S$ , dann schneidet diese Linie die Normale  $P_1 V$  im gesuchten Krümmungsmittelpunkt  $\Omega_1$ .

Die Polargleichung des Ortes der Wendepunkte der Konchoidenschar erhält man aus der Gleichung (6), wenn dort  $c = 2a \cos \varphi$ ,  $b = 2a \sin \varphi$  eingetragen wird; sie lautet

$$x_{1,2} = a (\cos \varphi \pm \sqrt{\cos^2 \varphi - 8 \sin^2 \varphi}).$$

Jene Konchoidenpunkte, die auf Polstrahlen mit dem Argumente  $\varphi > \varphi_1$  liegen, wo  $\cotg \varphi_1 = \sqrt{8}$  ( $\varphi_1 = 19^\circ 30'$ ), können nicht Wendepunkte sein; der Bereich der Wendepunkte ist demnach auf  $\varphi \leq \varphi_1$  beschränkt. Der Punkt  $S$  ist hier für alle Kegelschnitte, die als geometrische Örter der  $\Omega_1$  in Betracht kommen, ein fester Punkt.

Für den besonderen Fall  $m = 2a$  entsteht die Kardioiden (Fig. 6.)

Die Konstruktion von  $\Omega_1$  bleibt unverändert; die Zeichnung bestätigt ohneweiters für  $P_1\Omega_1$  den bekannten Wert  $\frac{8a}{3} \cos \frac{\varphi}{2}$ , wobei  $\varphi = \sphericalangle \Omega OP$ . Zum Punkte  $P$  auf der Kreisbasis gehört außer  $P_1$  noch der Punkt  $P_2$  der Kardioiden; er fällt mit  $B_1$  zusammen. Der

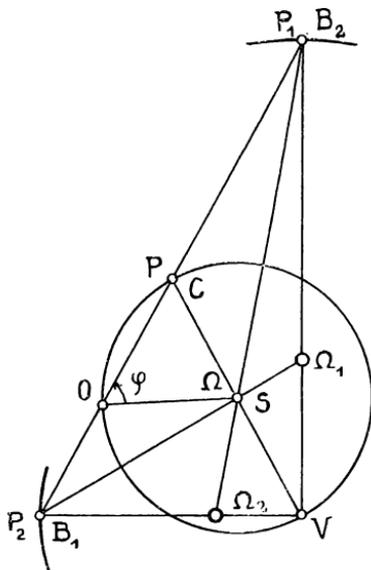


Fig. 6.

Ort der Punkte  $B$  ist die Kardioiden selbst. Der Krümmungsmittelpunkt  $\Omega_2$  im Punkte  $P_2$  liegt daher im Schnitte von  $B_2S$  mit der Kurvennormalen  $P_2V$ .

Liegt der Pol nicht auf der Kreisbasis, so sind die zugehörigen Subnormalkurven Jeřabek'sche Kurven, für die das in I. angegebene Verfahren zu einer sehr einfachen Normalenkonstruktion führt, da  $\Omega$  des Kreises bekannt ist; damit sind aber auch die Krümmungsmittelpunkte  $\Omega_1$  der zugehörigen Konchoiden konstruierbar.

c) Ist die Basis ein beliebiges Kegelschnitt und der Pol ein Brennpunkt oder ein Scheitel desselben, dann sind die zugehörigen Konchoiden Kurven der vierten, beziehungsweise sechsten Ordnung,<sup>1</sup> für die nach dem angegebenen Verfahren die Punkte  $\Omega_1$

<sup>1</sup> Sie sind erforscht worden von: F. Gomes, Teixeira, J. Cardinaal und H. Wieleitner. Vgl. G. Loria, Spezielle algebraische und transzendente Kurven, II. Aufl., Bd. 1, Fußnote auf p. 146.

und die Konstante  $\frac{k^2}{a}$  hat, wenn  $k^2$  die Potenz der Inversion ist.

Variiert hierbei  $k$  von 0 bis  $\infty$ , so liegen mit Rücksicht auf das in (8) erhaltene Ergebnis die Krümmungsmittelpunkte aller zu einem festen Werte  $\varphi$  gehörigen Punkte der  $\infty^1$  Inversen auf einer durch den Pol  $O$  gehenden Geraden.

Auch die aufeinanderfolgenden Fußpunktkurven der Sinusspiralen gehören derselben Klasse an.

Für die durch Gleichung (8) ermöglichte einfache Konstruktion von  $\Omega$  besteht somit ein großer Anwendungsbereich.

#### IV. Spiralen höheren Grades.

Sie haben die Polargleichung:

$$r^n = a^n \frac{\varphi}{2\pi} \quad (9)$$

wo  $n$  eine ganze positive Zahl ist.

Man bekommt aus (3) und (9):

$$\text{tang } u = n\varphi$$

und es wird aus Gleichung (5):

$$OC = \frac{r(1-n)}{n^2\varphi^2} = r(1-n) \cotg^2 u.$$

Da aber  $\overline{OB} = r \cotg^2 u$ , so ist der Punkt  $C$ , der für die Konstruktion von  $\Omega$  wesentlich ist, durch die einfache Beziehung festgelegt

$$\overline{OC} = (1-n) \overline{OB}. \quad (10)$$

Für  $n=1$  stellt Gleichung (9) die archimedische Spirale dar; hier wird nach (10):  $OC=0$ . Es fällt also der Punkt  $C$  zusammen mit dem Pole  $O$ , wodurch die Konstruktion von  $\Omega$  besonders einfach wird. Die Subnormalkurve ist ein Kreis um  $O$  mit dem Halbmesser  $\frac{a}{2\pi}$ .

Mit  $n=2$  haben wir die Fermat'sche Spirale; es wird  $\overline{OC} = -\overline{OB}$ , somit liegt  $C$  symmetrisch zu  $B$  bezüglich des Poles  $O$ . Die Subnormalkurve ist ein Lituus (Krummstab), für den hiermit eine neue Erzeugungsweise und eine einfache Normalenkonstruktion gefunden ist.

#### V. Hyperbolische Spiralen höheren Grades.

Aus der Polargleichung  $r = \frac{a}{\varphi^n}$ , worin  $n$  eine positive ganze Zahl ist, berechnet sich gemäß Gleichung (5):



Setzen wir zur Zeichnung des nach (12) bestehenden Geschwindigkeitsdreieckes  $|v_P| = \rho$ , so ist wegen (13):  $|v_\Omega| = R_1$  und es gibt, wenn  $OV_R \parallel \Omega\Omega_1 = R_1$  gemacht wird,  $OR$  die senkrechte Geschwindigkeit von  $P$ ,  $OV_R$  jene von  $\Omega$  an, daher liefert gemäß (12)  $V_R R$  die Richtung der senkrechten Geschwindigkeit von  $R$ , die in ihrer Richtung übereinstimmt mit der Normalen  $n_R$  in  $R$ .

Hieraus folgt, daß die Subnormalkurve der Radialen von  $l$  übereinstimmt mit der Radialen der I. Evolute von  $l$ .<sup>1</sup>

Nach diesem Satze ist daher die Konstruktion des Krümmungshalbmessers der Radialen in  $R$  sehr einfach. Ist  $R_2 = \Omega_1\Omega_2$  der Krümmungshalbmesser der zweiten Evolute von  $l$ , so macht man  $\bar{OC} = \bar{R}_2$ , wodurch  $C$  bestimmt ist, zieht  $V_R B \perp R V_R$  und verbindet  $B$  mit dem Halbierungspunkte  $S$  von  $V_R C$ , dann schneidet diese Gerade die Normale  $n_R$  im gesuchten Punkte  $\Omega_R$ .

## VII.

Nimmt man die Subnormalkurve  $OV = r_1 = \frac{dr}{d\varphi}$  als gegeben an, so ist die Kurve  $l$  zufolge

$$r = \int r_1 d\varphi + \text{Konst.}$$

eine ihrer  $\infty^1$  Integralkurven und es schneiden sich gemäß (II) die zu den Punkten eines durch  $O$  gehenden Strahles gehörigen Normalen im Punkte  $V$ . Betrachtet man die Integralkurve mit  $\text{Konst.} = 0$  als Basis, so sind die übrigen Integralkurven nach II die zugehörigen allgemeinen Konchoiden und es können daher die dort angeführten Sätze über den Ort der Krümmungsmittelpunkte und über die Wendepunkte unverändert übernommen werden.<sup>2</sup> Ist z. B. die  $V$ -Kurve ein Kreis und liegt der Pol im Mittelpunkt, dann ergibt sich als Integralkurve mit  $c = 0$  die archimedische Spirale.

Ist die  $V$ -Kurve eine Parabel vom Parameter  $p$  und liegt  $O$  im Brennpunkte, dann hat man  $r_1 = \frac{p}{1 + \cos \varphi}$ , daher  $r = p \tan \frac{\varphi}{2}$

die Integralkurve ist somit eine durch den Brennpunkt der Parabel gehende gerade Strophoide, für die nach I eine neue Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes folgt.

<sup>1</sup> Mit Benützung der magischen Gleichung einer Kurve ist der Satz bewiesen von P. Ernst, Arch. d. Math. u. Phys., 14. Bd. (1909), p. 95.

Zum Teil findet sich der auf p. 6 gewonnene Satz schon bei I. Sobotka, Beitrag zur infinitesimalen Geometrie der Integralkurven. Diese Sitzungsberichte, Bd. 107, Abt. 2a. Dort wird zu dessen Herleitung eine kinematisch-geometrische Betrachtung über die ebene Systembewegung und die Grübler'sche Konstruktion für den Wendepol benutzt.

# ZOBODAT - [www.zobodat.at](http://www.zobodat.at)

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse](#)

Jahr/Year: 1926

Band/Volume: [135\\_2a](#)

Autor(en)/Author(s): Federhofer Karl

Artikel/Article: [Zur Konstruktion der Krümmungsmittelpunkte ebener Kurven. 79-92](#)