Fourier'sche Integrale als Grenzfälle Fourier'scher Reihen betrachtet

Von

Werner Dorn

(Vorgelegt in der Sitzung am 18. März 1926)

Der Zweck der vorliegenden Arbeit ist, einen tieferen Einblick in den Grenzübergang von Fourier'schen Reihen zu Fourier'schen Integralen zu gewinnen. Während man sich nämlich üblicherweise damit begnügt, diesen Grenzübergang nur formal anzudeuten und sodann die Theorie der Fourier'schen Integrale selbständig aufzubauen, soll hier der Grenzübergang wirklich durchgeführt werden.¹

Wir werden uns wiederholt auf folgenden aus der Theorie der singulären Integrale bekannten Hilfssatz stützen:

Hilfssatz: Sei die reelle Funktion $f(\xi)$ integrierbar im Intervalle $[a, b]$ im Sinne von Lebesgue. Sei ferner $\varphi_n(\xi, \rho, \sigma)$ eine Folge von Funktionen der Veränderlichen ξ und der Parameter ρ und σ , die folgenden Bedingungen genügt:

1. Für jedes Teilintervall $[\alpha, \beta]$ von $[a, b]$ gilt

$$\lim_{n=\infty} \int_{\alpha}^{\beta} \varphi_n(\xi, \rho, \sigma) d\xi = 0$$

gleichmäßig für alle betrachteten Werte der Parameter ρ und σ ;

2. Es gibt eine Zahl M , so daß

$$|\varphi_n(\xi, \rho, \sigma)| \leq M$$

für alle n und alle betrachteten Werte von ξ , ρ und σ .

Dann gilt auch:

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b f(\xi) \varphi_n(\xi, \rho, \sigma) d\xi = 0$$

gleichmäßig für alle betrachteten Werte von ρ und σ .

¹ Diese Arbeit ist auf Anregung von Prof. H. Hahn entstanden, der mich auch bei ihrer Redigierung unterstützt hat. — In ähnlicher Weise ließen sich wohl auch die Summationsmethoden für Fourier'sche Integrale aus den Summationsmethoden für Fourier'sche Reihen durch Grenzübergang ableiten und Hausdorff's Verallgemeinerungen des Parseval'schen Theorems (Math. Zeitschr., 16 (1923), p. 163) auf Fourier'sche Integrale übertragen.

§ 1. Fourier'sche Reihen und Integrale.

Mit $f(\xi)$ bezeichnen wir im Folgenden eine für alle reellen ξ definierte, reelle Funktion, die in jedem endlichen Intervalle integrierbar ist im Sinne von Lebesgue. Setzen wir:

$$A(\rho, \lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{\rho}}^{\frac{\pi}{\rho}} f(\xi) \cos \lambda \xi d\xi, \quad B(\rho, \lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{\rho}}^{\frac{\pi}{\rho}} f(\xi) \sin \lambda \xi d\xi, \quad (1)$$

so lautet die Fourierreihe von $f(x)$ im Intervalle $\left(-\frac{\pi}{\rho}, \frac{\pi}{\rho}\right)$:

$$f(x) \sim \frac{\rho A(\rho, 0)}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \rho (A(\rho, \nu\rho) \cos \nu\rho x + B(\rho, \nu\rho) \sin \nu\rho x).$$

Wir setzen, wenn p irgendeine positive Zahl bedeutet:

$$S(\rho, x, p) = \frac{\rho A(\rho, 0)}{2} + \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{p}{\rho}\right]} \rho (A(\rho, \nu\rho) \cos \nu\rho x + B(\rho, \nu\rho) \sin \nu\rho x), \quad (2)$$

wo $\left[\frac{p}{\rho}\right]$ die größte ganze Zahl in $\frac{p}{\rho}$ bedeutet. Es gilt der Satz:

Satz I. Genügt die Funktion $f(\xi)$ einer der beiden Bedingungen:

a) $\frac{f(\xi)}{\xi}$ ist im Unendlichen absolut integrierbar;¹

b) $f(\xi)$ konvergiert im Unendlichen monoton² gegen 0, bedeutet $\bar{p}$ irgendeine positive Zahl, x_1 eine der Ungleichung $0 < x_1 < \frac{\pi}{\bar{p}}$ genügende Zahl und ist $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben, so gibt es ein p_0 , so daß:

$$|S(\rho, x, p) - S(\rho', x, p)| < \varepsilon$$

für alle $p \geq p_0$, für alle ρ und ρ' des Intervalles $(0, \bar{p}]$ und für alle x des Intervalles $[-x_1, x_1]$.

¹ D. h. für $a > 0$ existieren die beiden Integrale

$$\int_a^{\infty} \left| \frac{f(\xi)}{\xi} \right| d\xi, \quad \int_{-\infty}^{-a} \left| \frac{f(\xi)}{\xi} \right| d\xi.$$

² D. h. es gibt ein $a > 0$, so daß $f(\xi)$ für $\xi \geq a$ und $\xi \leq -a$ monoton ist.

Auf Grund einer Ähnlichkeitstransformation können wir ohne weiteres $\bar{\rho} = 1$ annehmen. Ferner genügt es, zu zeigen: bedeutet p_n eine Folge mit $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \infty$, so gibt es ein n_0 , so daß:

$$|S(1, x, p_n) - S(\rho, x, p_n)| < \varepsilon$$

für alle $n \geq n_0$, für alle ρ aus $(0, 1]$ und für alle x aus $[-x_1, x_1]$.

Bekanntlich ist:

$$S(\rho, x, p_n) = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{\rho}}^{\frac{\pi}{\rho}} f(\xi) \frac{\sin\left(\left[\frac{p_n}{\rho}\right] + \frac{1}{2}\right) \rho (\xi - x)}{2 \sin \frac{\rho}{2} (\xi - x)} d\xi.$$

Setzen wir:

$$[p_n] - \left[\frac{p_n}{\rho}\right] \rho = \vartheta_n,$$

so ist:

$$|\vartheta_n| = \left| \frac{[p_n]}{\rho} - \left[\frac{p_n}{\rho}\right] \right| \rho \leq \left| \frac{[p_n]}{\rho} - \frac{p_n}{\rho} \right| \rho + \left| \frac{p_n}{\rho} - \left[\frac{p_n}{\rho}\right] \right| \rho < 2,$$

und wir erhalten:

$$\begin{aligned} S(1, x, p_n) - S(\rho, x, p_n) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) \frac{\sin\left([p_n] + \frac{1}{2}\right) (\xi - x)}{2 \sin \frac{1}{2} (\xi - x)} d\xi - \\ &- \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{\rho}}^{\frac{\pi}{\rho}} f(\xi) \frac{\sin\left([p_n] + \frac{\rho}{2} - \vartheta_n\right) (\xi - x)}{2 \sin \frac{\rho}{2} (\xi - x)} d\xi. \end{aligned}$$

Da wir $f(\xi)$ additiv zusammensetzen können aus einem Summanden der $= 0$ ist für $\xi < 0$ und einem Summanden der $= 0$ ist für $\xi \geq 0$, können wir im Folgenden ohne weiteres annehmen: $f(\xi) = 0$ für $\xi < 0$.

Dann wird weiter:

$$S(1, x, p_n) - S(\rho, x, p_n) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(\xi) \frac{\sin\left([p_n] + \frac{1}{2}\right) (\xi - x)}{2 \sin \frac{1}{2} (\xi - x)} d\xi -$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\rho}} f(\xi) \frac{\sin\left([p_n] + \frac{\rho}{2} - \vartheta_n\right)(\xi-x)}{\frac{2}{\rho} \sin \frac{\rho}{2}(\xi-x)} d\xi = \\
& = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} f(\xi) \left\{ \frac{1}{\sin \frac{1}{2}(\xi-x)} - \frac{\rho}{\sin \frac{\rho}{2}(\xi-x)} \right\} \sin\left([p_n] + \frac{1}{2}\right)(\xi-x) d\xi + \\
& + \frac{\rho}{2\pi} \int_0^{\pi} f(\xi) \frac{1}{\sin \frac{\rho}{2}(\xi-x)} \left\{ \sin\left([p_n] + \frac{1}{2}\right)(\xi-x) - \sin\left([p_n] + \right. \right. \quad (3) \\
& \qquad \left. + \frac{\rho}{2} - \vartheta_n\right)(\xi-x) \left. \right\} d\xi - \\
& - \frac{\rho}{2\pi} \int_{\pi}^{\frac{\pi}{\rho}} f(\xi) \frac{1}{\sin \frac{\rho}{2}(\xi-x)} \sin\left([p_n] + \frac{\rho}{2} - \vartheta_n\right)(\xi-x) d\xi.
\end{aligned}$$

Wir schätzen nun der Reihe nach die drei hier auftretenden Integrale ab.

Sei $[\alpha, \beta]$ ein Teilintervall von $[0, \pi]$. Dann ist:

$$\begin{aligned}
& \int_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{1}{\sin \frac{1}{2}(\xi-x)} - \frac{\rho}{\sin \frac{\rho}{2}(\xi-x)} \right) \sin\left([p_n] + \frac{1}{2}\right)(\xi-x) d\xi = \\
& = \int_{\alpha-x}^{\beta-x} \left(\frac{1}{\sin \frac{1}{2}t} - \frac{\rho}{\sin \frac{\rho}{2}t} \right) \sin\left([p_n] + \frac{1}{2}\right)t dt.
\end{aligned}$$

Wir wählen M so groß, daß

$$\left| \frac{1}{\sin \frac{1}{2}t} - \frac{\rho}{\sin \frac{\rho}{2}t} \right| \leq M \text{ für } 0 < \rho \leq 1 \text{ und } -x_1 \leq t \leq \pi + x_1;$$

ferner wählen wir V so groß, daß für alle ρ aus $(0, 1]$ die Variation von $\frac{1}{\sin \frac{1}{2}t} - \frac{\rho}{\sin \frac{\rho}{2}t}$ in $[-x_1, \pi + x_1]$ kleiner als V ausfällt. Eine

bekannte Verallgemeinerung des zweiten Mittelwertsatzes ergibt dann:

$$\left| \int_x^\beta \left(\frac{1}{\sin \frac{1}{2}(\xi-x)} - \frac{\rho}{\sin \frac{\rho}{2}(\xi-x)} \right) \sin \left([p_n] + \frac{1}{2} \right) (\xi-x) d\xi \right| \leq$$

$$\leq (M+V) \frac{2}{[p_n] + \frac{1}{2}}.$$

Es gilt also:

$$\lim_{n=\infty} \int_x^\beta \left(\frac{1}{\sin \frac{1}{2}(\xi-x)} - \frac{\rho}{\sin \frac{\rho}{2}(\xi-x)} \right) \sin \left([p_n] + \frac{1}{2} \right) (\xi-x) d\xi = 0$$

gleichmäßig für alle ρ aus $(0, 1]$ und alle x aus $[-x_1, x_1]$.

Nach dem in der Einleitung angeführten Hilfssatze gilt daher auch:

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi f(\xi) \left(\frac{1}{\sin \frac{1}{2}(\xi-x)} - \frac{\rho}{\sin \frac{\rho}{2}(\xi-x)} \right) \sin \left([p_n] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \right) (\xi-x) d\xi = 0 \quad (4)$$

gleichmäßig für alle ρ aus $(0, 1]$ und alle x aus $[-x_1, x_1]$.

Ferner ist:

$$\rho \int_0^\pi f(\xi) \frac{1}{\sin \frac{\rho}{2}(\xi-x)} \left(\sin \left([p_n] + \frac{1}{2} \right) (\xi-x) - \sin \left([p_n] + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{\rho}{2} - \vartheta_n \right) (\xi-x) \right) d\xi =$$

$$= 2 \int_0^\pi f(\xi) \frac{\rho}{\sin \frac{\rho}{2}(\xi-x)} \sin \left(\frac{1}{2} - \frac{\rho}{2} + \vartheta_n \right) \frac{\xi-x}{2} \cos \left(2 [p_n] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} + \frac{\rho}{2} - \vartheta_n \right) \frac{\xi-x}{2} d\xi.$$

Wählen wir hier M so groß, daß

$$\left| \frac{\rho \sin \left(\frac{1}{2} - \frac{\rho}{2} + \vartheta_n \right) \frac{t}{2}}{\sin \frac{\rho}{2} t} \right| \leq M \text{ für } 0 < \rho \leq 1 \text{ und } -x_1 \leq t \leq \pi + x_1,$$

und V so groß, daß für alle ρ aus $(0, 1]$ die Variation von

$\frac{\sin\left(\frac{1}{2} - \frac{\rho}{2} + \vartheta_n\right)t}{\sin \frac{\rho}{2} t}$ kleiner als V ausfällt, so lehrt dieselbe Argumentation wie vorhin, daß:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\rho}{2\pi} \int_0^\pi f(\xi) \frac{1}{\sin \frac{\rho}{2}(\xi-x)} \left(\sin\left([p_n] + \frac{1}{2}\right)(\xi-x) - \sin\left([p_n] + \frac{\rho}{2} - \vartheta_n\right)(\xi-x) \right) d\xi = 0 \tag{5}$$

gleichmäßig für alle ρ aus $(0, 1]$ und alle x aus $[-x_1, x_1]$.

Endlich betrachten wir das Integral:

$$\int_\pi^{\frac{\pi}{\rho}} f(\xi) \frac{\rho}{\sin \frac{\rho}{2}(\xi-x)} \sin\left([p_n] + \frac{\rho}{2} - \vartheta_n\right)(\xi-x) d\xi = \int_\pi^\infty f(\xi) \varphi(\xi, x, \rho) \sin\left([p_n] + \frac{\rho}{2} - \vartheta_n\right)(\xi-x) d\xi, \tag{6}$$

wo gesetzt ist:

$$\varphi(\xi, \rho, x) = \begin{cases} \frac{\rho}{\sin \frac{\rho}{2}(\xi-x)} & \text{für } \pi \leq \xi \leq \frac{\pi}{\rho} \\ 0 & \text{für } \xi > \frac{\pi}{\rho} \end{cases}$$

Wir zeigen zunächst, daß wir q so groß wählen können, daß:

$$\left| \int_q^\infty f(\xi) \varphi(\xi, x, \rho) \sin\left([p_n] + \frac{\rho}{2} - \vartheta_n\right)(\xi-x) d\xi \right| < \varepsilon \tag{7}$$

für alle ρ aus $(0, 1]$, alle x aus $[-x_1, x_1]$ und alle n . In der Tat, wenn $\frac{\pi}{\rho} \leq q$, ist diese Ungleichung sicher erfüllt, da dann ihre linke Seite = 0 ist.

Wir nehmen also sogleich $\frac{\pi}{\rho} > q$ an; dann ist sie gleichbedeutend mit:

$$\left| \int_q^{\frac{\pi}{\rho}} f(\xi) \frac{\rho}{\sin \frac{\rho}{2}(\xi-x)} \sin\left([p_n] + \frac{\rho}{2} - \vartheta_n\right)(\xi-x) d\xi \right| < \varepsilon. \tag{8}$$

Erfülle zunächst $f(\xi)$ die Bedingung a) von Satz I. Dann können wir q so wählen, daß:

$$\int_0^{\infty} \left| \frac{f(\xi)}{\xi} \right| d\xi < \eta.$$

Sodann gibt es ein A , so daß in $\left[q, \frac{\pi}{\rho} \right]$

$$\left| \frac{\rho \xi}{\sin \frac{\rho}{2}(\xi-x)} \right| \leq A \text{ für alle } \rho \text{ aus } (0, 1] \text{ und alle } x \text{ aus } [-x_1, x_1].$$

Dann aber ist:

$$\left| \int_q^{\frac{\pi}{\rho}} f(\xi) \frac{\rho}{\sin \frac{\rho}{2}(\xi-x)} \sin \left([p_n] + \frac{\rho}{2} - \vartheta_n \right) (\xi-x) d\xi \right| < A\eta,$$

womit im Falle der Voraussetzung a) Ungleichung (8) und somit auch (7) bewiesen ist.

Nunmehr beweisen wir sie für den Fall der Bedingung b) von Satz I. Dann können wir q so groß wählen, daß $f(\xi)$ monoton ist für $\xi \geq q$, daß ferner in $\left[q, \frac{\pi}{\rho} \right]$

$$\left| f(\xi) \frac{\rho}{\sin \frac{\rho}{2}(\xi-x)} \right| < \eta \text{ für alle } \rho \text{ aus } (0, 1] \text{ und alle } x \text{ aus } [-x_1, x_1]$$

und daß endlich für alle ρ aus $(0, 1]$ und alle x aus $[-x_1, x_1]$ die Variation von $f(\xi) \frac{\rho}{\sin \frac{\rho}{2}(\xi-x)}$ in $\left[q, \frac{\pi}{\rho} \right]$ kleiner als η ausfällt. Dann

aber ist:

$$\left| \int_q^{\frac{\pi}{\rho}} f(\xi) \frac{\rho}{\sin \frac{\rho}{2}(\xi-x)} \sin \left([p_n] + \frac{\rho}{2} - \vartheta_n \right) (\xi-x) d\xi \right| < \frac{4\eta}{[p_n] + \frac{\rho}{2} - \vartheta_n},$$

und es ist wieder (8) und somit (7) bewiesen.

Nun beweisen wir noch, daß

$$\lim_{n=\infty} \int_{\pi}^q f(\xi) \varphi(\xi, x, \rho) \sin \left([p_n] + \frac{\rho}{2} - \vartheta_n \right) (\xi-x) d\xi = 0$$

gilt, gleichmäßig für alle ρ aus $(0, 1]$ und alle x aus $[-x_1, x_1]$. Zu dem Zwecke wählen wir M so groß, daß

$$|\varphi(\xi, x, \rho)| \leq M \text{ für alle } \xi \text{ aus } [\pi, q], \text{ alle } \rho \text{ aus } (0, 1] \\ \text{und alle } x \text{ aus } [-x_1, x_1];$$

sodann wählen wir V so groß, daß für alle ρ aus $(0, 1]$ und alle x aus $[-x_1, x_1]$ die Variation von $\varphi(\xi, x, \rho)$ in $[\pi, q]$ kleiner als V ausfällt. Dann ist für jedes Teilintervall $[\alpha, \beta]$ von $[\pi, q]$:

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(\xi, x, \rho) \sin\left([p_n] + \frac{\rho}{2} - \vartheta_n\right)(\xi - x) d\xi \right| \leq \\ \leq (M + V) \frac{2}{[p_n] + \frac{\rho}{2} - \vartheta_n},$$

es gilt als:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(\xi, x, \rho) \sin\left([p_n] + \frac{\rho}{2} - \vartheta_n\right)(\xi - x) d\xi = 0$$

gleichmäßig für alle ρ aus $(0, 1]$ und alle x aus $[-x_1, x_1]$. Aus dem Hilfssatz der Einleitung folgt daher wieder:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\pi}^q f(\xi) \varphi(\xi, x, \rho) \sin\left([p_n] + \frac{\rho}{2} - \vartheta_n\right)(\xi - x) d\xi = 0 \quad (9)$$

gleichmäßig für alle ρ und $(0, 1]$ und alle x aus $[-x_1, x_1]$.

Aus (7) und (9) aber folgt: es ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\pi}^{\infty} f(\xi) \varphi(\xi, x, \rho) \sin\left([p_n] + \frac{\rho}{2} - \vartheta_n\right)(\xi - x) d\xi = 0,$$

oder was nach (6) dasselbe heißt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\pi}^{\frac{\rho}{2}} f(\xi) \frac{\rho}{\sin \frac{\rho}{2}(\xi - x)} \sin\left([p_n] + \frac{\rho}{2} - \vartheta_n\right)(\xi - x) d\xi = 0 \quad (10)$$

gleichmäßig für alle ρ aus $(0, 1]$ und alle x aus $[-x_1, x_1]$.

Durch Einsetzen von (4), (5), (10) in (3) erkennt man: es ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S(1, x, p_n) - S(\rho, x, p_n)) = 0$$

gleichmäßig für alle ρ aus $(0, 1]$ und alle x aus $[-x_1, x_1]$. Damit aber ist Satz I bewiesen.

Wir wenden uns nun der Betrachtung des Fourier'schen Integrals zu. Dabei machen wir über $f(\xi)$ eine der drei folgenden Voraussetzungen:

$\alpha)$ $\frac{f(\xi)}{\xi}$ ist im Unendlichen absolut integrierbar und es gibt zwei in jedem Intervalle $0 \leq a \leq \lambda \leq b$ integrierbare Funktionen $A(0, \lambda)$, $B(0, \lambda)$, für die:

$$\lim_{\rho \rightarrow +0} \int_a^b |A(\rho, \lambda) - A(0, \lambda)| d\lambda = 0, \\ \lim_{\rho \rightarrow +0} \int_a^b |B(\rho, \lambda) - B(0, \lambda)| d\lambda = 0. \quad (11)$$

$\beta)$ $f(\xi)$ konvergiert im Unendlichen monoton gegen 0.

Bedingung $\alpha)$ ist erfüllt, wenn $f(\xi)$ in $(-\infty, \infty)$ absolut integrierbar ist, und zwar ist dann:

$$A(0, \lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos \lambda \xi d\xi, \quad B(0, \lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \sin \lambda \xi d\xi. \quad (12)$$

Bedingung $\alpha)$ ist auch erfüllt, wenn $(f(\xi))^2$ in $(-\infty, \infty)$ integrierbar ist. Denn dann ist, wie die Schwarz'sche Ungleichung lehrt, $\frac{f(\xi)}{\xi}$ im Unendlichen absolut integrierbar und es ist¹ für jede gegen 0 konvergierende Folge positiver Zahlen ρ_m :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} (A(\rho_m, \lambda) - A(0, \lambda))^2 d\lambda = 0, \\ \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} (B(\rho_m, \lambda) - B(0, \lambda))^2 d\lambda = 0,$$

also auch für das Intervall $[a, b]$:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_a^b (A(\rho_m, \lambda) - A(0, \lambda))^2 d\lambda = 0, \\ \lim_{m \rightarrow \infty} \int_a^b (B(\rho_m, \lambda) - B(0, \lambda))^2 d\lambda = 0,$$

und da nach der Schwarz'schen Ungleichung:

$$\left(\int_a^b |\varphi(\lambda)| d\lambda \right)^2 \leq \int_a^b (\varphi(\lambda))^2 d\lambda \cdot (b-a)$$

¹ M. Plancherel, Rend. Pal., 30, p. 289 ff. Wir kommen hierauf in § 2 zurück.

ist, folgt daraus:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_a^b |A(\rho_m, \lambda) - A(0, \lambda)| d\lambda = 0,$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_a^b |B(\rho_m, \lambda) - B(0, \lambda)| d\lambda = 0,$$

was mit (11) gleichbedeutend ist.

Im Falle β) existieren die Integrale (12).

Für jedes Intervall $[0, p]$ gilt:

$$\lim_{\rho \rightarrow +0} \int_0^p (A(\rho, \lambda) \cos \lambda x + B(\rho, \lambda) \sin \lambda x) d\lambda = \quad (13)$$

$$= \int_0^p (A(0, \lambda) \cos \lambda x + B(0, \lambda) \sin \lambda x) d\lambda$$

gleichmäßig für alle x des beliebigen Intervalles $[-x_1, x_1]$.

Im Falle α) folgt dies unmittelbar aus (11), im Falle β) wurde es von Pringsheim bewiesen.¹

Wir setzen nun in Analogie zu (2):

$$S(0, x, p) = \int_0^p (A(0, \lambda) \cos \lambda x + B(0, \lambda) \sin \lambda x) d\lambda$$

und beweisen:

Satz II. Genügt $f(\xi)$ einer der Voraussetzungen α) und β), so gilt:

$$S(0, x, p) = \lim_{\rho \rightarrow +0} S(\rho, x, p)$$

gleichmäßig für alle x des beliebigen Intervalles $[-x_1, x_1]$.

Beim Beweise können wir wieder annehmen $f(\xi) = 0$ für $\xi < 0$. Zunächst ist offenbar:

$$\lim_{\rho \rightarrow +0} \frac{\rho A(\rho, 0)}{2} = 0. \quad (14)$$

Im Falle β) ist dies evident, denn es ist

$$\rho A(\rho, 0) = \rho \int_0^{\frac{\pi}{\rho}} f(\xi) d\xi,$$

und aus $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ folgt bekanntlich

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(\xi) d\xi = 0.$$

¹ A. Pringsheim, Math. Ann., 68, p. 367 ff.

Im Falle α) wähle man q so groß, daß

$$\pi \int_q^\infty \left| \frac{f(\xi)}{\xi} \right| d\xi < \varepsilon, \quad (15)$$

Für $\frac{\pi}{\rho} > q$ hat man dann:

$$\begin{aligned} |\rho A(\rho, 0)| &\leq \left| \rho \int_0^q f(\xi) d\xi \right| + \left| \rho \int_q^{\frac{\pi}{\rho}} f(\xi) d\xi \right| \leq \\ &\leq \left| \rho \int_0^q f(\xi) d\xi \right| + \pi \int_q^{\frac{\pi}{\rho}} \left| \frac{f(\xi)}{\xi} \right| d\xi, \end{aligned}$$

somit wegen (15) für alle hinlänglich kleinen ρ :

$$|\rho A(\rho, 0)| < 2\varepsilon,$$

womit (14) bewiesen ist.

Zufolge (13) ist für hinlänglich kleines ρ^* :

$$\left| \int_0^p (A(\rho^*, \lambda) \cos \lambda x + B(\rho^*, \lambda) \sin \lambda x) d\lambda - S(0, x, p) \right| < \varepsilon \quad (16)$$

für alle x aus $[-x_1, x_1]$. Das hierin auftretende Integral ist, weil $A(\rho^*, \lambda)$, $B(\rho^*, \lambda)$ stetig sind, ein Riemann'sches und kann daher unbeschränkt durch Riemann'sche Summen approximiert werden. Es gibt also ein $\bar{\rho}$, so daß:

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^p (A(\rho^*, \lambda) \cos \lambda x + B(\rho^*, \lambda) \sin \lambda x) d\lambda - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{p}{\rho} \right]} \rho (A(\rho^*, \nu\rho) \cos \nu\rho x + B(\rho^*, \nu\rho) \sin \nu\rho x) \right| < \varepsilon \end{aligned}$$

für $0 < \rho \leq \bar{\rho}$ und alle x aus $[-x_1, x_1]$. Zusammen mit (14) ergibt das, wenn $\bar{\rho}$ hinlänglich klein gewählt ist:

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^p (A(\rho^*, \lambda) \cos \lambda x + B(\rho^*, \lambda) \sin \lambda x) d\lambda - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\rho A(\rho^*, 0)}{2} - \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{p}{\rho} \right]} \rho (A(\rho^*, \nu\rho) \cos \nu\rho x + B(\rho^*, \nu\rho) \sin \nu\rho x) \right| < 2\varepsilon. \end{aligned} \quad (17)$$

Ferner ist:

$$\begin{aligned} \frac{\rho A(\rho^*, 0)}{2} + \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{p}{\rho}\right]} \rho (A(\rho^*, \nu\rho) \cos \nu\rho x + B(\rho^*, \nu\rho) \sin \nu\rho x) - S(\rho, x, p) = \\ = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{\rho^*}}^{\frac{\pi}{\rho^*}} f(\xi) \frac{\sin\left(\left[\frac{p}{\rho}\right] + \frac{1}{2}\right) \rho(\xi-x)}{\frac{2}{\rho} \sin \frac{\rho}{2} (\xi-x)} d\xi - \\ - \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{\rho}}^{\frac{\pi}{\rho}} f(\xi) \frac{\sin\left(\left[\frac{p}{\rho}\right] + \frac{1}{2}\right) \rho(\xi-x)}{\frac{2}{\rho} \sin \frac{\rho}{2} (\xi-x)} d\xi. \end{aligned}$$

Berücksichtigen wir, daß $f(\xi) = 0$ für $\xi < 0$, so ist das weiter

$$= - \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{\rho^*}}^{\frac{\pi}{\rho}} f(\xi) \frac{\sin\left(\left[\frac{p}{\rho}\right] + \frac{1}{2}\right) \rho(\xi-x)}{\frac{2}{\rho} \sin \frac{\rho}{2} (\xi-x)} d\xi.$$

Ganz wie beim Integral (8) erkennen wir, daß, wenn ρ^* hinlänglich klein gewählt ist, dies Integral seinem absoluten Betrage nach $< \varepsilon$ ist für $0 < \rho < \rho^*$ und alle x aus $[-x_1, x_1]$. Es ist somit:

$$\left| \frac{\rho A(\rho^*, 0)}{2} + \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{p}{\rho}\right]} \rho (A(\rho^*, \nu\rho) \cos \nu\rho x + B(\rho^*, \nu\rho) \sin \nu\rho x) - S(\rho, x, p) \right| < \varepsilon \quad (18)$$

für alle hinlänglich kleinen positiven ρ und alle x aus $[-x_1, x_1]$.

Aus (16), (17), (18) folgt nun:

$$| S(0, x, p) - S(\rho, x, p) | < 4\varepsilon$$

für alle hinlänglich kleinen positiven ρ und alle x aus $[-x_1, x_1]$. Damit ist Satz II bewiesen.

Satz III. Genügt die Funktion $f(\xi)$ einer der beiden Bedingungen $\alpha)$ und $\beta)$, bedeutet $\bar{\rho}$ irgendeine positive Zahl, x_1 eine der Ungleichung $0 < x_1 < \frac{\pi}{\rho}$ genügende Zahl

und ist $\eta > 0$ beliebig gegeben, so gibt es ein p_0 , so daß:

$$|S(\rho, x, p) - S(0, x, p)| < \eta$$

für alle $p \geq p_0$, für alle ρ des Intervalles $(0, \bar{\rho}]$ und für alle x des Intervalles $[-x_1, x_1]$.

Zum Beweise setzen wir $\eta = 2\varepsilon$ und es habe sodann p_0 dieselbe Bedeutung wie in Satz I und es sei ein ρ aus $(0, \bar{\rho}]$, ein x aus $[-x_1, x_1]$ und ein $p \geq p_0$ beliebig gegeben. Nach Satz II gibt es in $(0, \bar{\rho}]$ ein ρ' , so daß:

$$|S(\rho', x, p) - S(0, x, p)| < \varepsilon,$$

und nach Satz I ist:

$$|S(\rho, x, p) - S(\rho', x, p)| < \varepsilon,$$

es ist somit:

$$|S(\rho, x, p) - S(0, x, p)| < 2\varepsilon = \eta,$$

womit Satz III bewiesen ist.

Insbesondere folgt aus Satz III:

Satz IV. Genügt $f(\xi)$ einer der Bedingungen $\alpha)$ und $\beta)$ und ist x ein Punkt des Intervalles $\left(-\frac{\pi}{\rho}, \frac{\pi}{\rho}\right)$, so gelten die Fourier'sche Reihenentwicklung

$$f(x) = \frac{\rho A(\rho, 0)}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \rho (A(\rho, \nu\rho) \cos \nu\rho x + B(\rho, \nu\rho) \sin \nu\rho x) \quad (19)$$

und die Fourier'sche Integraldarstellung

$$f(x) = \int_0^{\infty} (A(0, \lambda) \cos \lambda x + B(0, \lambda) \sin \lambda x) d\lambda \quad (20)$$

immer gleichzeitig. Ebenso findet gleichmäßige Konvergenz dieser beiden Darstellungen in einem Teilintervalle $[a, b]$ von $\left(-\frac{\pi}{\rho}, \frac{\pi}{\rho}\right)$ immer gleichzeitig statt.

Man hat, um das einzusehen, nur zu berücksichtigen, daß (19) gleichbedeutend ist mit

$$f(x) = \lim_{p=\infty} S(\rho, x, p)$$

und (20) mit:

$$f(x) = \lim_{p=\infty} S(0, x, p).$$

§ 2. Das Parseval'sche Theorem.

Sei nun $(f(\xi))^2$ in $(-\infty, \infty)$ integrierbar. Wir setzen (bei Festhaltung der Bezeichnungsweise (1)):

$$T(\rho, p) = \rho \frac{(A(\rho, 0))^2}{2} + \rho \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{p}{\rho}\right]} \{(A(\rho, \nu\rho))^2 + (B(\rho, \nu\rho))^2\}, \quad (21)$$

$$T(\rho) = \rho \frac{(A(\rho, 0))^2}{2} + \rho \sum_{\nu=1}^{\infty} \{(A(\rho, \nu\rho))^2 + (B(\rho, \nu\rho))^2\}. \quad (22)$$

Dann ist bekanntlich, wenn wir wieder die Bezeichnungsweise (2) verwenden:

$$T(\rho, p) = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{\rho}}^{\frac{\pi}{\rho}} (S(\rho, \xi, p))^2 d\xi, \quad (23)$$

$$T(\rho) = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{\rho}}^{\frac{\pi}{\rho}} (f(\xi))^2 d\xi. \quad (24)$$

Wir wollen nun den Satz beweisen:

Satz I. Ist $(f(\xi))^2$ in $(-\infty, +\infty)$ integrierbar, so gibt es zu jedem $\bar{\rho} > 0$ und jedem $\varepsilon > 0$ ein p_0 , so daß:

$$|T(\rho, p) - T(\rho)| < \varepsilon \quad (25)$$

für $0 < \rho \leq \bar{\rho}$ und alle $p \geq p_0$.

Wir zeigen zunächst: zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\bar{\rho}$ und ein p_1 , so daß Ungleichung (25) für $0 < \rho \leq \bar{\rho}$ und $p \geq p_1$ gilt.

Zu dem Zwecke wählen wir x_1 so groß, daß:

$$\frac{1}{\pi} \int_{x_1}^{\infty} (f(\xi))^2 d\xi < \eta, \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{-x_1} (f(\xi))^2 d\xi < \eta. \quad (26)$$

Sodann wählen wir $\bar{\rho}$ so klein, daß:

$$\frac{\pi}{\bar{\rho}} > x_1.$$

Wie aus der Theorie der Fourier'schen Reihen bekannt ist, gilt dann:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_{-x_1}^{x_1} (S(\bar{\rho}, \xi, p))^2 d\xi = \int_{-x_1}^{x_1} (f(\xi))^2 d\xi.$$

Wir können daher p_1 so groß wählen, daß für $p \geq p_1$:

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_{-x_1}^{x_1} (S(\bar{\rho}, \xi, p))^2 d\xi - \frac{1}{\pi} \int_{-x_1}^{x_1} (f(\xi))^2 d\xi \right| < \eta. \quad (27)$$

Nach Satz I von § 1 können wir p_1 auch so groß wählen,¹ daß für $p \geq p_1$ und $0 < \rho \leq \bar{\rho}$:

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_{-x_1}^{x_1} (S(\bar{\rho}, \xi, p))^2 d\xi - \frac{1}{\pi} \int_{-x_1}^{x_1} (S(\rho, \xi, p))^2 d\xi \right| < \eta. \quad (28)$$

Aus (27) und (28) folgt, daß für $p \geq p_1$ und $0 < \rho \leq \bar{\rho}$:

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_{-x_1}^{x_1} (S(\rho, \xi, p))^2 d\xi - \frac{1}{\pi} \int_{-x_1}^{x_1} (f(\xi))^2 d\xi \right| < 2\eta, \quad (29)$$

also wegen (26):

$$\frac{1}{\pi} \int_{-x_1}^{x_1} (S(\rho, \xi, p))^2 d\xi > \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (f(\xi))^2 d\xi - 4\eta. \quad (30)$$

Anderseits ist, wegen (23) und (24), da nach (21) und (22) $T(\rho, p) \leq T(\rho)$ ist:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{\rho}}^{\frac{\pi}{\rho}} (S(\rho, \xi, p))^2 d\xi \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (f(\xi))^2 d\xi. \quad (31)$$

Aus (30) und (31) aber folgt sofort:

$$\frac{1}{\pi} \int_{x_1}^{\frac{\pi}{\rho}} (S(\rho, \xi, p))^2 d\xi < 4\eta; \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{\rho}}^{-x_1} (S(\rho, \xi, p))^2 d\xi < 4\eta. \quad (32)$$

¹ Wir dürfen Satz I von § 1 anwenden, da, wenn $(f(\xi))^2$ in $(-\infty, \infty)$ integrierbar ist, $\frac{f(\xi)}{\xi}$ im Unendlichen absolut integrierbar ist.

Nach (26) ist ferner:

$$\frac{1}{\pi} \int_{x_1}^{\frac{\pi}{\rho}} (f(\xi))^2 d\xi < \eta; \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{\rho}}^{-x_1} (f(\xi))^2 d\xi < \eta. \quad (33)$$

Aus (29), (32), (33) aber folgt:

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{\rho}}^{\frac{\pi}{\rho}} (S(\rho, \xi, p))^2 d\xi - \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{\rho}}^{\frac{\pi}{\rho}} (f(\xi))^2 d\xi \right| < 12 \eta$$

für $0 < \rho \leq \bar{\rho}$ und $p \geq p_1$. Das aber ist wegen (23), (24) die Behauptung.

Nachdem auf diese Weise $\bar{\rho}$ bestimmt ist, zeigen wir: es gibt ein p_2 , so daß (25) gilt für $\bar{\rho} \leq \rho \leq \bar{\rho}$ und $p \geq p_2$. Auf Grund des Borel'schen Überdeckungssatzes genügt es dazu offenbar, folgendes zu zeigen: zu jedem ρ^* aus $[\bar{\rho}, \bar{\rho}]$ gibt es ein p^* und ein δ , so daß (25) für alle der Ungleichung $|\rho - \rho^*| < \delta$ genügenden ρ und alle $p \geq p^*$ gilt. Dies aber liegt auf der Hand. Denn da für jedes $\rho > 0$:

$$T(\rho) = \lim_{p \rightarrow \infty} T(\rho, p)$$

ist, kann p^* so gewählt werden, daß

$$T(\rho^*, p^*) > T(\rho^*) - \varepsilon;$$

da, wie (23) und (24) zeigen, $T(\rho)$ und $T(\rho, p)$ stetig von ρ abhängen, gibt es dann ein $\delta > 0$, so daß auch für $|\rho - \rho^*| < \delta$:

$$T(\rho, p^*) > T(\rho) - \varepsilon$$

und somit, da $T(\rho, p)$ mit p monoton wächst, erst recht:

$$T(\rho) \geq T(\rho, p) > T(\rho) - \varepsilon \text{ für } p \geq p^*,$$

wie behauptet.

Wir haben nun zuerst gezeigt, daß (25) gilt für $0 < \rho \leq \bar{\rho}$ und $p \geq p_1$; sodann, daß (25) gilt für $\bar{\rho} \leq \rho \leq \bar{\rho}$ und $p \geq p_2$; indem wir unter p_0 die größere der beiden Zahlen p_1 und p_2 verstehen, ist Satz I bewiesen.

Sei nun $f(\xi)$ nur in einem endlichen Intervalle $\neq 0$, etwa in $[a, b]$. Dann kann man ohne weiteres $A(0, \lambda)$ und $B(0, \lambda)$ gemäß (12) bilden und diese beiden Ausdrücke sind stetige Funktionen von λ .

Wir setzen:

$$T(0, p) = \int_0^p [(A(0, \lambda))^2 + (B(0, \lambda))^2] d\lambda, \quad (34)$$

und zeigen:

Satz II. Ist $f(\xi)$ nur in einem endlichen Intervalle $\neq 0$, so ist:

$$T(0, p) = \lim_{\rho \rightarrow +0} T(\rho, p). \quad (35)$$

In der Tat, sei $\bar{\rho}$ so klein gewählt, daß das Intervall $[a, b]$ ganz in $\left[-\frac{\pi}{\bar{\rho}}, \frac{\pi}{\bar{\rho}}\right]$ liegt. Dann ist für $0 < \rho \leq \bar{\rho}$:

$$A(\rho, \lambda) = A(0, \lambda), \quad B(\rho, \lambda) = B(0, \lambda)$$

und somit:

$$T(\rho, p) = \rho \frac{(A(0, 0))^2}{2} + \rho \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{p}{\rho}\right]} \{(A(0, \rho\nu))^2 + (B(0, \rho\nu))^2\}. \quad (36)$$

Hierin ist:

$$\lim_{\rho \rightarrow +0} \rho \frac{(A(0, 0))^2}{2} = 0$$

und, wegen der Stetigkeit von $A(0, \lambda)$ und $B(0, \lambda)$:

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow +0} \rho \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{p}{\rho}\right]} \{(A(0, \rho\nu))^2 + (B(0, \rho\nu))^2\} = \\ = \int_0^p \{(A(0, \lambda))^2 + (B(0, \lambda))^2\} d\lambda \xi = T(0, p). \end{aligned}$$

Aus (36) ergibt sich also tatsächlich (35) und Satz II ist bewiesen.

Satz III. Ist $f(\xi)$ nur in einem endlichen Intervalle $\neq 0$, so ist:

$$\int_0^\infty \{(A(0, \lambda))^2 + (B(0, \lambda))^2\} d\lambda = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty (f(\xi))^2 d\xi.$$

In der Tat, wählen wir $\bar{\rho}$ wie beim Beweise von Satz II, so ist nach (24) für $0 < \rho \leq \bar{\rho}$:

$$T(\rho) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty (f(\xi))^2 d\xi.$$

Nach Satz I gibt es also ein p_0 , so daß für $0 < \rho \leq \bar{\rho}$ und $p \geq p_0$:

$$\left| T(\rho, p) - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (f(\xi))^2 d\xi \right| < \varepsilon.$$

Nach Satz II folgt daraus, daß für $p \geq p_0$:

$$\left| T(0, p) - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (f(\xi))^2 d\xi \right| \leq \varepsilon.$$

Wegen der Bedeutung (34) von $T(0, p)$ aber ist dies die Behauptung von Satz III. Insbesondere ist damit auch bewiesen, daß, wenn $f(\xi)$ nur in einem endlichen Intervalle $\neq 0$ ist, $(A(0, \lambda))^2$ und $(B(0, \lambda))^2$ in $[0, \infty)$ integrierbar sind.

Aus Satz III folgt unmittelbar: Ist $(f(\xi))^2$ in $(-\infty, \infty)$ integrierbar, bedeutet ρ_n eine gegen 0 konvergierende Folge positiver Zahlen und bezeichnen wir mit $f_n(\xi)$ die Funktion, die in $\left[-\frac{\pi}{\rho_n}, \frac{\pi}{\rho_n}\right]$ mit $f(\xi)$ übereinstimmt, sonst = 0 ist, setzen wir endlich

$$A_n(0, \lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(\xi) \cos \lambda \xi d\xi, \quad B_n(0, \lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(\xi) \sin \lambda \xi d\xi, \quad (37)$$

so konvergieren die $A_n(0, \lambda)$ in $[0, \infty)$ im Mittel gegen eine Funktion, die wir mit $A(0, \lambda)$ bezeichnen, und ebenso die $B_n(0, \lambda)$ gegen eine Funktion $B(0, \lambda)$. Es genügt zu dem Zwecke, nachzuweisen: zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein N , so daß: für $N \leq n < n'$

$$\int_0^{\infty} \left\{ (A_n(0, \lambda) - A_{n'}(0, \lambda))^2 + (B_n(0, \lambda) - B_{n'}(0, \lambda))^2 \right\} d\lambda < \varepsilon. \quad (38)$$

Nun sind aber $A_n(0, \lambda) - A_{n'}(0, \lambda)$, $B_n(0, \lambda) - B_{n'}(0, \lambda)$ die zu folgender Funktion $g(\xi)$ gehörigen $A(0, \lambda)$, $B(0, \lambda)$:

$$g(\xi) = f(\xi) \text{ in } \left[-\frac{\pi}{\rho_n}, -\frac{\pi}{\rho_{n'}}\right] \text{ und in } \left[\frac{\pi}{\rho_n}, \frac{\pi}{\rho_{n'}}\right]$$

$$g(\xi) = 0 \text{ außerhalb dieser beiden Intervalle.}$$

Also ist nach Satz III:

$$\int_0^{\infty} \left\{ (A_n(0, \lambda) - A_{n'}(0, \lambda))^2 + (B_n(0, \lambda) - B_{n'}(0, \lambda))^2 \right\} d\lambda =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{\rho_n'}}^{\frac{\pi}{\rho_n}} (f(\xi))^2 d\xi + \int_{\frac{\pi}{\rho_n}}^{\frac{\pi}{\rho_n'}} (f(\xi))^2 d\xi;$$

da $(f(\xi))^2$ in $(-\infty, \infty)$ integrierbar ist, folgt daraus (38).

Nun können wir Satz II und III auf alle Funktionen ausdehnen, für die $(f(\xi))^2$ in $(-\infty, \infty)$ integrierbar ist.

Satz IV. Ist $(f(\xi))^2$ in $(-\infty, \infty)$ integrierbar, so gilt:

$$T(0, p) = \lim_{\rho \rightarrow +0} T(\rho, p). \tag{39}$$

In der Tat, da die durch (37) definierten Ausdrücke $A_n(0, \lambda)$, $B_n(0, \lambda)$ in $(0, \infty)$ im Mittel gegen $A(0, \lambda)$, $B(0, \lambda)$ konvergieren, gilt bekanntlich für jedes endliche Intervall $[0, p]$:

$$\int_0^p [(A(0, \lambda))^2 + (B(0, \lambda))^2] d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^p [(A_n(0, \lambda))^2 + (B_n(0, \lambda))^2] d\lambda.$$

Wir denken uns demgemäß n so gewählt, daß:

$$\left| \int_0^p [(A_n(0, \lambda))^2 + (B_n(0, \lambda))^2] d\lambda - \int_0^p [(A(0, \lambda))^2 + (B(0, \lambda))^2] d\lambda \right| < \varepsilon. \tag{40}$$

Bezeichnen wir mit $S_n(\rho, \xi, p)$ den gemäß (2) der Funktion $f_n(\xi)$ zugeordneten Ausdruck $S(\rho, \xi, p)$, so gilt gleichmäßig für alle $\rho > 0$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\frac{\pi}{\rho}}^{\frac{\pi}{\rho}} [(S_n(\rho, \xi, p))^2 - (S(\rho, \xi, p))^2] d\xi = 0. \tag{41}$$

In der Tat ist nach der Schwarz'schen Ungleichung, wenn:

$S_n(\rho, \xi, p) - S(\rho, \xi, p) = S^*(\rho, \xi, p)$; $S_n(\rho, \xi, p) + S(\rho, \xi, p) = S^{**}(\rho, \xi, p)$ gesetzt wird:

$$\begin{aligned} & \int_{-\frac{\pi}{\rho}}^{\frac{\pi}{\rho}} [(S_n(\rho, \xi, p))^2 - (S(\rho, \xi, p))^2] d\xi \leq \\ & \leq \sqrt{\int_{-\frac{\pi}{\rho}}^{\frac{\pi}{\rho}} (S_n^*(\rho, \xi, p))^2 d\xi \cdot \int_{-\frac{\pi}{\rho}}^{\frac{\pi}{\rho}} (S_n^{**}(\rho, \xi, p))^2 d\xi}. \end{aligned} \tag{42}$$

Nun sind $S_n^*(\rho, \xi, p)$, $S_n^{**}(\rho, \xi, p)$ die zu $f_n(\xi) - f(\xi)$ und $f(\xi) + f(\xi)$ gehörigen Ausdrücke $S(\rho, \xi, p)$.

Wie aus (21), (22), (23), (24) ersichtlich, gilt aber stets:

$$\int_{-\frac{\pi}{\rho}}^{\frac{\pi}{\rho}} (S(\rho, \xi, p))^2 d\xi \leq \int_{-\infty}^{\infty} (f(\xi))^2 d\xi,$$

in unserem Falle also:

$$\int_{-\frac{\pi}{\rho}}^{\frac{\pi}{\rho}} (S_n^*(\rho, \xi, p))^2 d\xi \leq \int_{-\infty}^{\infty} (f_n(\xi) - f(\xi))^2 d\xi,$$

$$\int_{-\frac{\pi}{\rho}}^{\frac{\pi}{\rho}} (S_n^{**}(\rho, \xi, p))^2 d\xi \leq \int_{-\infty}^{\infty} (f_n(\xi) + f(\xi))^2 d\xi$$

und da offenbar:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} (f_n(\xi) - f(\xi))^2 d\xi = 0,$$

während

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f_n(\xi) + f(\xi))^2 d\xi$$

unter einer endlichen Schranke bleibt, folgt aus (42) die behauptete Beziehung (41).

Wir können also wegen (41) n auch so groß wählen, daß:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{\rho}}^{\frac{\pi}{\rho}} [(S_n(\rho, \xi, p))^2 - (S(\rho, \xi, p))^2] d\xi < \varepsilon \text{ für alle } \rho. \quad (43)$$

Da $f_n(\xi) = 0$ ist außerhalb $\left[-\frac{\pi}{\rho_n}, \frac{\pi}{\rho_n}\right]$ gilt ferner (35) von Satz II, d. h. es gibt ein $\bar{\rho}$, so daß für $0 < \rho \leq \bar{\rho}$:

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{\rho}}^{\frac{\pi}{\rho}} (S_n(\rho, \xi, p))^2 d\xi - \int_0^p [(A_n(0, \lambda))^2 + (B_n(0, \lambda))^2] d\lambda \right| < \varepsilon. \quad (44)$$

Aus (40), (43), (44) aber folgt für $0 < \rho \leq \bar{\rho}$:

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{\rho}}^{\frac{\pi}{\rho}} (S(\rho, \xi, \rho))^2 d\xi - \int_0^{\rho} [(A(0, \lambda))^2 + (B(0, \lambda))^2] d\lambda \right| < \varepsilon,$$

womit (39) bewiesen ist.

Satz V. Ist $(f(\xi))^2$ in $(-\infty, \infty)$ integrierbar, so gilt:

$$\int_0^{\infty} [(A(0, \lambda))^2 + (B(0, \lambda))^2] d\lambda = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (f(\xi))^2 d\xi. \quad (46)$$

In der Tat, nach Satz III ist:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} [(A_n(0, \lambda))^2 + (B_n(0, \lambda))^2] d\lambda &= \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (f_n(\xi))^2 d\xi = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{\rho_n}}^{\frac{\pi}{\rho_n}} (f(\xi))^2 d\xi. \end{aligned} \quad (47)$$

Da $A_n(0, \lambda)$ und $B_n(0, \lambda)$ in $[0, \infty)$ im Mittel gegen $A(0, \lambda)$ und $B(0, \lambda)$ konvergieren, so ist bekanntlich:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} [(A_n(0, \lambda))^2 + (B_n(0, \lambda))^2] d\lambda = \int_0^{\infty} [(A(0, \lambda))^2 + (B(0, \lambda))^2] d\lambda;$$

also geht (47) durch den Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ in (46) über.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse](#)

Jahr/Year: 1926

Band/Volume: [135_2a](#)

Autor(en)/Author(s): Dorn Werner

Artikel/Article: [Fourier'sche Integrale als Grenzfälle Fourier'scher Reihen betrachtet. 127-147](#)