Gedruckt mit Unterstützung aus dem Jerome und Margaret Stonborough-Fonds

Über das Zerfallen der Striktionslinie von Regelflächen

Von

Josef Krames in Wien

(Mit 2 Textfiguren)

(Vorgelegt in der Sitzung am 29. April 1926)

Die vorliegende Arbeit bildet die Fortsetzung zu vier vorangehenden Arbeiten[1] des Verfassers, in welchen eine Reihe von Sätzen über das Zerfallen der Striktionslinie von algebraischen Regelflächen angegeben[2] und zum Teil mittels geometrischer Überlegungen abgeleitet wurde.[3] Im folgenden soll vor allem die bereits in »III«, p. 165 ausgesprochene Verallgemeinerung des Satzes von Sturm[4] auf streng analytischem Weg bewiesen werden. Danach ist die Ordnung der Striktionslinie einer algebraischen Regelfläche stets gleich der doppelten Rangzahl derselben, und zwar auch dann, wenn diese Kurve zerfällt und einige (spezielle) Erzeugende der Fläche zur Striktionslinie zu zählen sind.

Zu diesem Zweck wird zunächst (in Nr. 1) die Punktgleichung der Striktionslinie einer beliebigen Regelfläche nach den Prinzipien der Graßmannschen Ausdehnungslehre ermittelt, insbesondere unter Verwendung einiger noch nicht publizierter Ergebnisse der von E. Müller (Wien) ersonnenen Weiterbildung dieser Lehre im Sinne der Invariantentheorie.[5] Hierauf werden (in

---

[1] »Die Regelfläche dritter Ordnung, deren Striktionslinie eine Ellipse ist.« Diese Ber., Bd. 127 (1918) IIa, p. 563—584 (I); »Die Striktionslinie der Normalenfläche des Tours längs eines Loxodromenkreises.« Ebenda, Bd. 128 (1919), IIa, p. 623—634 (II); »Die Regelflächen dritter Ordnung mit einem geraden kubischen Kreis als Striktionslinie.« Ebenda, Bd. 132 (1923), IIa, p. 165—175 (III) und »Die Regelflächen dritter Ordnung, deren unendlichferne Kurve den absoluten Kegelschnitt doppelt oskuliert.« Ebenda, Bd. 133 (1924), IIa, p. 65—90. Auf diese Arbeiten wird in der Folge mittels der in den Klammern beigesetzten Zahlen I, II, III, beziehungsweise IV verwiesen werden.

[2] Vgl. »III«, p. 165 sowie »IV«, p. 65.

[3] Vgl. »I«, p. 580 f.

[4] Vgl. R. Sturm, Ueber Fußpunkts-Curven und -flächen, Normalen und Normalebenen. Math. Ann., VI. Bd. (1873), p. 255 ff. — In »III« wurde obiger Satz als »Gesetz von Migotti« bezeichnet; die dort zitierte Arbeit Migottis erschien jedoch erst 6 Jahre nach der Sturm'schen.

[5] Vgl. u. a. E. Müller, »Eine Weiterbildung der Graßmann'schen Ausdehnungslehre im Sinne der Invariantentheorie«. Jhrsb. Dtsch. Math.-Ver., *23* (1914), p. 98—116, ferner »Das Rechnen mit Faltprodukten in seiner Anwendung auf die Direktorkreise von Kegelschnitten.« Diese Ber., Bd. 131 (1922), IIa, p. 461—490 sowie »Das Rechnen mit Faltprodukten in seiner Anwendung auf die räumlichen Gebilde zweiten Grades.« Diese Ber., Abt. IIa, 133. Bd. (1924), p. 243—283. — Für die freundliche Mitteilung

Nr. 2) die Bedingungen angegeben, unter welchen eine auf einer Regelfläche liegende Kurve K in eine »eigentliche Kurve K« und einige Erzeugende zerfällt. Hiezu wird die betrachtete Fläche mit Hilfe von allmählichen Formänderungen aus einer anderen Regelfläche hergestellt, auf der die K entsprechende Kurve nicht zerfällt. Die Anwendung dieses Ergebnisses auf die Striktionslinien von Regelflächen, die untereinander kollinear sind, liefert (in Nr. 3) den oben genannten Beweis. Ferner ergeben sich auch einige Resultate über die Striktionslinie von beliebigen (analytischen) Regelflächen. In Nr. 4 werden schließlich die einfacheren Fälle von Erzeugenden, die zur Striktionslinie gehören, untersucht und damit die eingangs erwähnten Sätze mittels Rechnung bewiesen und um einige weitere vermehrt. Hiebei werden auch zahlreiche Beispiele von Regelflächen besprochen, auf die diese Sätze anzuwenden sind

Nr. 1.

Bezeichnet man die Eckpunkte des Fundamentaltetraeders mit

$$a_0\ a_1\ a_2\ a_3,$$

so ergibt sich nach Graßmann[1] jeder Punkt p des Raumes in der Form

$$p = \mathfrak{p}_0 a_0 + \mathfrak{p}_1 a_1 + \mathfrak{p}_2 a_2 + \mathfrak{p}_3 a_3,$$

wobei die $\mathfrak{p}_i$ die Ableitungszahlen (proj. Koordinaten) dieses Punktes genannt werden. Bezeichnet man ferner die sechs äußeren Produkte von je zwei Fundamentalpunkten

$$[a_2\, a_3],\ [a_3\, a_1],\ [a_1\, a_2],\ [a_0\, a_1],\ [a_0\, a_2],\ [a_0\, a_3],$$

beziehungsweise mit

$$\mathfrak{A}_1,\ \mathfrak{A}_2,\ \mathfrak{A}_3,\ \mathfrak{A}_{01},\ \mathfrak{A}_{02},\ \mathfrak{A}_{03},$$

so stellt sich das äußere Produkt zweier beliebiger (nicht kongruenter[2]) Punkte p, q des Raums — d. i. ein Stab S — stets in der Form

$$[p\,q] = S = \mathfrak{s}_1 A_1 + \mathfrak{s}_2 A_2 + \mathfrak{s}_3 A_3 + \mathfrak{s}_{01} A_{01} + \mathfrak{s}_{02} A_{02} + \mathfrak{s}_{03} A_{03}$$

dar, wobei die »$\mathfrak{s}$« die mit $[SS] = 0$ gleichbedeutende (Plückersche) Identität

$$\sum_1^3 {}_i\, \mathfrak{s}_i\, \mathfrak{s}_{0i} = 0$$

---

der oben genannten Ergebnisse bin ich meinem verehrten Lehrer Herrn Hofrat Dr. E. Müller zu besonderem Dank verpflichtet.

[1] H. Graßmann, Die Ausdehnungslehre (1862), p. 160.

[2] Zwei Punkte (oder Stäbe, Blätter) heißen kongruent (d. h. sie fallen zumen), wenn ihre Ableitungszahlen proportional sind.

befriedigen. Desgleichen läßt sich jedes äußere Produkt von drei unabhängigen Punkten p, q, r — d. i. ein Blatt β — immer aus den vier Einheitsblättern

$$\alpha_0 = [a_1\, a_2\, a_3],\; \alpha_1 = [a_0\, a_2\, a_3],\; \alpha_2 = [a_0\, a_3\, a_1],\; \alpha_3 = [a_0\, a_1\, a_2]$$

in der Form

$$[pqr] = \beta = \mathfrak{b}_0\, \alpha_0 + \mathfrak{b}_1\, \alpha_1 + \mathfrak{b}_2\, \alpha_2 + \mathfrak{b}_3\, \alpha_3$$

ableiten.

Wählt man als Eckpunkte des Fundamentaltetraeders insbesonders einen einfachen Punkt e_0 und drei uneigentliche Punkte, die durch normale Einheitsstrecken (Vektoren) e_1, e_2, e_3 bestimmt sind, so bezeichnet

$$\varepsilon_0 = [e_1\, e_2\, e_3] = \omega \tag{1}$$

die unendlichferne Ebene und die quadratische Punktgröße

$$e^{(2)} = e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 \tag{2}$$

stellt den absoluten Kegelschitt J dar.[1]

Hiernach gehört ein Blatt ξ dann und nur dann einer Minimalebene an, wenn das Faltprodukt[2]

$$\{e^{(2)}\, \xi^2\} = \sum_{1}^{3}{}_i\, [e_i\, \xi]^2 = 0 \tag{3}$$

ist, und die Bedingung dafür, daß zwei Ebenen ξ und η aufeinander normal, also bezüglich des absoluten Kegelschnitts konjugiert sind, lautet

$$\{e^{(2)} . \xi\eta\} = \sum_{1}^{3}{}_i\, [e_i\, \xi]\, [e_i\, \eta] = 0. \tag{4}$$

Der unendlichferne Punkt der zu einer Ebene ξ normalen Geraden, also der Pol von ξ bezüglich J ergibt sich schließlich in der Form

$$u = \{e^{(2)}\, \xi\} = \sum_{1}^{3}{}_i\, [e_i\, \xi]\, e_i. \tag{5}$$

Die Größen ω und $e^{(2)}$ ändern sich nicht, wenn man die Strecken e_1, e_2, e_3 durch drei andere, normale Einheitsstrecken e_1', e_2', e_3' ersetzt. Vertauscht man auch e_0 mit einem Punkt e_0' (von

---

[1] In zwei der zitierten Arbeiten von E. Müller werden bereits die zu ω und $e^{(2)}$ analogen Bildungen für das ternäre Gebiet (Ebene) ausführlich behandelt. Die Gleichungen (1) bis (5) des Textes sind den früher genannten Müllerschen Ergebnissen entnommen.

[2] Vgl. die zuerst zitierte Arbeit von E. Müller, p. 102 f.

beliebigem Gewicht), so kann man auf diese Weise alle Transformationen der Hauptgruppe herstellen. Die Gleichungen (1) bis (5) behalten hierbei ihre Form, d. h. sie sind bezüglich der Hauptgruppe invariant.[1]

Betrachtet man die Ableitungszahlen $\mathfrak{p}_i$ eines Punktes p als Funktionen

$$\mathfrak{p}_i = \mathfrak{p}_i(\mathfrak{t}), \quad (i = 0, 1, 2, 3)$$

eines Parameters $\mathfrak{t}$, so stellt

$$p = p(\mathfrak{t})$$

i. a. eine Kurve im Raum dar. Die Ableitung von p nach $\mathfrak{t}$, d. i. der Punkt p' mit den Ableitungszahlen

$$\mathfrak{p}'_i(\mathfrak{t}) = \frac{d\mathfrak{p}_i(\mathfrak{t})}{d\mathfrak{t}} \quad (i = 0, 1, 2, 3)$$

gehört dann stets dem jeweiligen Tangentenstab T der Kurve an.

Sind in dieser Weise zwei Punkte p und q als Funktionen eines Parameters $\mathfrak{t}$ gegeben, so sind die Punkte der durch $p(\mathfrak{t})$ und $q(\mathfrak{t})$ dargestellten Kurven P und $\underset{\sim}{Q}$ mittels gleicher Werte von $\mathfrak{t}$ aufeinander bezogen. Da jeder Punkt x eines Stabes S aus zwei beliebigen, auf ihm liegenden (nicht kongruenten) Punkten a und b durch

$$x = \mathfrak{x}a + \mathfrak{y}b \quad (\mathfrak{x} \text{ und } \mathfrak{y} \text{ nicht beide} = 0)$$

abgeleitet werden kann, so stellt

$$x = \mathfrak{u}p(\mathfrak{t}) + \mathfrak{v}q(\mathfrak{t}) \tag{6}$$

die Gleichung jener Regelfläche Φ dar, die von den Verbindungsgeraden entsprechender Punkte von P und $\underset{\sim}{Q}$ gebildet wird. Die Zahlen $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ sind dabei als zwei weitere Parameter aufzufassen, deren Verhältnis bloß wesentlich ist. P und $\underset{\sim}{Q}$ mögen die Leitkurven der Fläche heißen, und es ist klar, daß jede Regelfläche auf unendlich viele Arten so dargestellt werden kann.

Für einen festen Wert von $\mathfrak{u}:\mathfrak{v}$ stellt (6) eine auf der Fläche liegende Kurve (Parameterlinie) dar, für die

$$x' = \frac{\partial x}{\partial \mathfrak{t}} = \mathfrak{u}p' + \mathfrak{v}q'$$

ist. Da dieser Punkt x' nach obigem in der zu x gehörigen Tangentialebene von Φ liegt und jede solche Ebene die durch ihren Berührungspunkt gehende Erzeugende $E = [pq]$ enthält, ist

$$\xi = [pqx'] = \mathfrak{u}[pqp'] + \mathfrak{v}[pqq'] \tag{7}$$

---

[1] Das letztere ist wegen ihrer geometrischen Bedeutung selbstverständlich.

der allgemeine Ausdruck für eine Tangentialebene von Φ. Legt man dem $\mathfrak{t}$ einen festen Wert bei, so ersieht man aus (7) die bekannte projektive Beziehung zwischen den durch eine Erzeugende E von Φ gehenden Tangentialebenen und deren auf E liegenden Berührungspunkten[1] (Berührungskorrelation). Die Blätter $\rho = [pqp']$ und $\sigma = [pqq']$ sind dabei die Tangentialebenen von Φ in den Schnittpunkten von E mit P und Q. Ist Φ eine abwickelbare Fläche oder E eine Torsallinie von Φ, so ist die Berührungskorrelation ausgeartet.

Letzteres ist immer dann der Fall, sobald zwischen und die Beziehung

$$\mathfrak{b}\rho + \mathfrak{c}\sigma = 0 \tag{8}$$

besteht, wobei $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ nicht beide $= 0$ sind. Man erkennt dann aus (7), daß Φ i. a. in jedem Punkt

$$x = \mathfrak{u}p + \mathfrak{v}q$$

von E von derselben Tangentialebene berührt wird; nur für $\mathfrak{u}:\mathfrak{v} = \mathfrak{b} \; \mathfrak{c}$ wird $\xi = \mathfrak{u}\rho + \mathfrak{v}\sigma = \mathfrak{b}\rho + \mathfrak{c}\sigma = 0$ und es ist

$$k = \mathfrak{b}p + \mathfrak{c}q \tag{8a}$$

der Kuspidalpunkt von E, oder im Falle der abwickelbaren Fläche (und für variables $\mathfrak{t}$) die Punktgleichung der Gratlinie.[2] Im letztern Fall sind auch $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ Funktionen von $\mathfrak{t}$.

Zur Ermittlung der Striktionslinie einer Regelfläche benötigen wir zunächst deren unendlichferne Kurve L. Letztere enthält alle Punkte von Φ, für die

$$[x\omega] = \mathfrak{u}[p\omega] + \mathfrak{v}[q\omega] = 0$$

ist. Bezeichnen $\mathfrak{p}_i$, $\mathfrak{q}_i$ $(i = 0, 1, 2, 3)$ die Ableitungszahlen von p und q, so ist

$$[p\omega] = \mathfrak{p}_0 \text{ und } [q\omega] = \mathfrak{q}_0,$$

das sind die »Gewichte« dieser Punkte. Somit ist

$$l = [q\omega]p - [p\omega]q = \mathfrak{q}_0 p - \mathfrak{p}_0 q \tag{9}$$

die Gleichung von L oder für einen bestimmten Wert von $\mathfrak{t}$ der unendlichferne Punkt der zugehörigen Erzeugenden E von Φ. Nach (7) ergibt sich als Tangentialebene in diesem Punkt

$$\alpha = [q\omega]\rho - [p\omega]\sigma = \mathfrak{q}_0\rho - \mathfrak{p}_0\sigma \tag{10}$$

d. i. die asymptotische Ebene von E.

---

[1] Vgl. Chasles, Mémoire sur les surfaces engendr par ligne droite;..... Corr. Math., XI (1839), p. 53.

Siehe auch weiter unten Gleichung (18).

Um den **Zentralpunkt** von E zu erhalten, hat man durch E die zu α normale Ebene γ (die **Zentralebene** von E) zu legen und deren Berührungspunkt c zu ermitteln.[1] Setzen wir $c = \mathfrak{X}p + \mathfrak{Y}q$, so ist nach (7) $\gamma = \mathfrak{X}\rho + \mathfrak{Y}\sigma$, und es gilt wegen Geichung (4) die Beziehung

$$\{e^{(2)}.\gamma\alpha\} = \mathfrak{X}\{e^{(2)}.\rho\alpha\} + \mathfrak{Y}\{e^{(2)}.\sigma\alpha\} = 0. \tag{11}$$

Daraus folgt

$$\mathfrak{X} : \mathfrak{Y} = \{e^{(2)}.\sigma\alpha\} \quad -\{e^{(2)}.\rho\alpha\}. \tag{12}$$

Somit ist die Gleichung der Striktionslinie, d. i. der Ort aller Zentralpunkte

$$c = \{e^{(2)}.\sigma\alpha\}\, p - \{e^{(2)}.\rho\alpha\}\, q \tag{13}$$

oder unter Beachtung von Gleichung (10)

$$c = (\mathfrak{q}_0\{e^{(2)}.\rho\sigma\} - \mathfrak{p}_0\{e^{(2)}\sigma^2\})\, p - (\mathfrak{q}_0\{e^{(2)}\rho^2\} - \mathfrak{p}_0\{e^{(2)}.\sigma\rho\})\, q. \tag{14}$$

Werden die hierin auftretenden Faltprodukte nach (3) und (4) näher ausgeführt, so erhält diese Gleichung die für Späteres wichtige Form:

$$\begin{aligned} c = {} & \left(\mathfrak{q}_0 \sum_{i=1}^{3} [e_i p q p'] \, [e_i p q q'] - \mathfrak{p}_0 \sum_{i=1}^{3} [e_i p q q']^2\right) p \\ & - \left(\mathfrak{q}_0 \sum_{i=1}^{3} [e_i p q p']^2 - \mathfrak{p}_0 \sum_{i} [e_i p q p'] \, [e_i p q q']\right) q \end{aligned} \tag{15}$$

und hierin ist

$$\sum_{i=1}^{3} [e_i p q q']^2 = \begin{vmatrix} \mathfrak{p}_0 & \mathfrak{q}_0 & \mathfrak{p}_0' \\ \mathfrak{p}_2 & \mathfrak{q}_2 & \mathfrak{p}_2' \\ \mathfrak{p}_3 & \mathfrak{q}_3 & \mathfrak{p}_3' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathfrak{p}_0 & \mathfrak{q}_0 & \mathfrak{p}_0' \\ \mathfrak{p}_1 & \mathfrak{q}_1 & \mathfrak{p}_1' \\ \mathfrak{p}_3 & \mathfrak{q}_3 & \mathfrak{p}_3' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \mathfrak{p}_0 & \mathfrak{q}_0 & \mathfrak{p}_0' \\ \mathfrak{p}_1 & \mathfrak{q}_1 & \mathfrak{p}_1' \\ \mathfrak{p}_2 & \mathfrak{q}_2 & \mathfrak{p}_2' \end{vmatrix} \tag{16a}$$

$$\sum_{i=1}^{3} [e_i p q q']^2 = \begin{vmatrix} \mathfrak{p}_0 & \mathfrak{q}_0 & \mathfrak{q}_0' \\ \mathfrak{p}_2 & \mathfrak{q}_2 & \mathfrak{q}_2' \\ \mathfrak{p}_3 & \mathfrak{q}_3 & \mathfrak{q}_3' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \mathfrak{p}_0 & \mathfrak{q}_0 & \mathfrak{q}_0' \\ \mathfrak{p}_1 & \mathfrak{q}_1 & \mathfrak{q}_1' \\ \mathfrak{p}_3 & \mathfrak{q}_3 & \mathfrak{q}_3' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathfrak{p}_0 & \mathfrak{q}_0 & \mathfrak{q}_0' \\ \mathfrak{p}_1 & \mathfrak{q}_1 & \mathfrak{q}_1' \\ \mathfrak{p}_2 & \mathfrak{q}_2 & \mathfrak{q}_2' \end{vmatrix}^2 \tag{16b}$$

und

$$\sum_{i=1}^{3} [e_i p q p'] \, [e_i p q q'] =$$

---

1 Vgl. etwa K. Zindler, Liniengeometrie. II., p. 3.

$$\begin{array}{c|} \mathfrak{p}_0\, \mathfrak{q}_0\, \mathfrak{p}_0' \\ \mathfrak{p}_2\, \mathfrak{q}_0\, \mathfrak{p}_2' \\ \mathfrak{p}_3\, \mathfrak{q}_3\, \mathfrak{p}_3' \end{array} \quad \begin{vmatrix} \mathfrak{p}_0 & \mathfrak{q}_0 & \mathfrak{q}_0' \\ \mathfrak{p}_2 & \mathfrak{q}_2 & \mathfrak{q}_2' \\ \mathfrak{p}_3 & \mathfrak{q}_3 & \mathfrak{q}_3' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathfrak{p}_0 & \mathfrak{q}_0 & \mathfrak{p}_0' \\ \mathfrak{p}_1 & \mathfrak{q}_1 & \mathfrak{p}_1' \\ \mathfrak{p}_3 & \mathfrak{q}_3 & \mathfrak{p}_3' \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \mathfrak{p}_0 & \mathfrak{p}_0 & \mathfrak{q}_0' \\ \mathfrak{p}_1 & \mathfrak{q}_1 & \mathfrak{q}_1' \\ \mathfrak{p}_3 & \mathfrak{q}_3 & \mathfrak{q}_3' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathfrak{p}_0 & \mathfrak{q}_0 & \mathfrak{p}_0' \\ \mathfrak{p}_1 & \mathfrak{q}_1 & \mathfrak{p}_1' \\ \mathfrak{p}_2 & \mathfrak{q}_2 & \mathfrak{p}_2' \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \mathfrak{p}_0 & \mathfrak{q}_0 & \mathfrak{q}_0' \\ \mathfrak{p}_1 & \mathfrak{q}_1 & \mathfrak{q}_1' \\ \mathfrak{p}_2 & \mathfrak{q}_2 & \mathfrak{q}_2' \end{vmatrix} \qquad (16\,c)$$

Ist Φ eine abwickelbare Fläche, so gilt wegen (8)

$$\mathfrak{b}\,(\mathfrak{t})\,[p\,q\,p'] + \mathfrak{c}\,(\mathfrak{t})\,[p\,q\,q'] \equiv 0, \qquad (17)$$

wobei die Zahlen $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ Funktionen von $\mathfrak{t}$ sind. Da wegen (17) auch

$$\mathfrak{b}\,(\mathfrak{t})\,[e_i\,p\,q\,p'] + \mathfrak{c}\,(\mathfrak{t})\,[e_i\,p\,q\,q'] \equiv 0, \quad (i = 1, 2, 3)$$

ist, erhält dann die Gleichung der Striktionslinie die Form

$$c = \sum_{1}^{i} [e_i\,p\,q\,p']^2 . (\mathfrak{b}\,\mathfrak{p}_0 + \mathfrak{c}\,\mathfrak{q}_0) . (\mathfrak{b}\,(\mathfrak{t}) . p + \mathfrak{c}\,(\mathfrak{t}) . q) \qquad (18)$$

und dies ist, abgesehen von den beiden Zahlenfaktoren, mit der Gleichung der Gratlinie (8a) identisch.

Aus (15) oder (16a, b, c) erkennt man, daß es auf jeder Erzeugenden i. a. einen und nur einen Punkt der Striktionslinie gibt. Nur wenn es eine Stelle $\mathfrak{t}_0$ von $\mathfrak{t}$ gibt, bei der die beiden Faltprodukte in (13) gleichzeitig verschwinden oder ∞ werden, ist es denkbar, daß die zu $\mathfrak{t}_0$ gehörige Erzeugende ∞ viele Punkte dieser Kurve enthält, d. h. in ihrem ganzen Verlauf zur Striktionslinie gehört. Um diese Möglichkeit näher zu untersuchen, soll im folgenden zunächst ein allgemeinerer Fall behandelt werden.

Nr. 2.

Ist eine Regelfläche Φ wie in der vorigen Nummer durch

$$x = \mathfrak{u} . p\,(\mathfrak{t}) + \mathfrak{v} . q\,(\mathfrak{t}) \qquad (1)$$

gegeben, so wird eine beliebige auf Φ liegende Kurve K immer durch eine Gleichung von der Form

$$k = \mathfrak{x}\,(\mathfrak{t}) . p\,(\mathfrak{t}) + \mathfrak{y}\,(\mathfrak{t}) . q\,(\mathfrak{t}), \qquad (2)$$

dargestellt, in der die Zahlen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ gleichfalls vom Parameter $\mathfrak{t}$ abhängen. Aus (2) ergeben sich für jeden Wert $\mathfrak{t}_i$ von $\mathfrak{t}$ die Schnittpunkte von K mit der zu $\mathfrak{t}_i$ gehörigen Erzeugenden E_i von Φ. Nur für eine Stelle $\mathfrak{t}_0$ von $\mathfrak{t}$, bei der

$$\mathfrak{x}\,(\mathfrak{t}_0) = \mathfrak{y}\,(\mathfrak{t}_0) = 0 \text{ oder } = \infty \qquad (3)$$

ist, ist $k\,(\mathfrak{t}_0)$ zunächst unbestimmt. In einem solchen Fall kann zwar $k\,(\mathfrak{t}_0)$ unter gewissen Voraussetzungen mit Hilfe des Grenzüberganges $\lim \mathfrak{t}_0 = \mathfrak{t}$ ermittelt werden. Da in (2) bloß das Verhältnis von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ wesentlich ist, ist nach der Regel von de l'Hôpital

$$\lim_{\mathfrak{t}=\mathfrak{t}_0} k = \mathfrak{x}'(\mathfrak{t}_0)\, p(\mathfrak{t}_0) + \mathfrak{y}'(\mathfrak{t}_0)\, q(\mathfrak{t}_0).$$

Dieses Verfahren würde jedoch keinerlei Aufschluß darüber geben, ob hernach die zu $\mathfrak{t}_0$ gehörige Erzeugende E_0 von Φ zur Kurve K zu zählen ist oder nicht. Diese Frage ist aber für alles folgende von entscheidender Bedeutung.

Um sie in durchaus einwandfreier Weise zu beantworten, stellen wir uns vor, daß die betrachtete Regelfläche Φ durch eine allmähliche Formänderung aus einer anderen Regelfläche Φ_1 entstanden sei, wobei zugleich eine auf Φ_1 liegende, nicht zerfallende Kurve K_1 in K übergegangen ist. Eine solche allmähliche Formänderung läßt sich auf folgende Weise herbeiführen.

Wir betrachten die Punkte p und q als Funktionen der beiden Parameter $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{s}$, wobei sich der erste mit dem $\mathfrak{t}$ in (1) und (2) decken soll, und nehmen dabei an, daß diese Funktionen für einen bestimmten Wert $\mathfrak{s}_0$ von $\mathfrak{s}$ mit $p(\mathfrak{t})$, beziehungsweise $q(\mathfrak{t})$ in (1) identisch werden. Gleichung (1) erhält dann die Form

$$x = \mathfrak{u} \,.\, p(\mathfrak{t}, \mathfrak{s}) + \mathfrak{v} \,.\, q(\mathfrak{t}, \mathfrak{s}) \tag{4}$$

und stellt eine Strahlkongruenz $\mathfrak{K}$ dar. Die ∞^2 Strahlen von $\mathfrak{K}$ ergeben sich als Verbindungsgeraden der zu gleichen Wertepaaren von $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{t}$ gehörigen Punkte der Flächen

$$p(\mathfrak{t}, \mathfrak{s}) \text{ und } q(\mathfrak{t}, \mathfrak{s}).$$

Für jeden festen Wert $\mathfrak{s}_i$ von $\mathfrak{s}$ und bei variablem $\mathfrak{t}$ erhält man insbesondere die ∞^1 Strahlen einer Regelschar Φ_i, deren »Leitkurven« $p(\mathfrak{t}, \mathfrak{s}_i)$ und $q(\mathfrak{t}, \mathfrak{s}_i)$, beziehungsweise obigen Flächen angehören. Dem Wert $\mathfrak{s}_0$ von $\mathfrak{s}$ entspricht dabei die ursprüngliche Fläche, die demnach in der Folge mit Φ_0 bezeichnet sei.

Setzen wir voraus, daß die Punkte p und q in einem die Stelle $\mathfrak{s}_0$, $\mathfrak{t}_0$ enthaltenden Bereich

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{t}_1 < \mathfrak{t} < \mathfrak{t}_2 \\ \mathfrak{s}_1 < \mathfrak{s} < \mathfrak{s}_2 \end{array}\right\} \tag{$\mathfrak{B}$}$$

analytische Funktionen von $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{s}$ sind, so stellen die Φ_i analytische Regelscharen dar, und die Flächen $p(\mathfrak{t}, \mathfrak{s})$ und $q(\mathfrak{t}, \mathfrak{s})$ sind in $\mathfrak{B}$ stetig. Daraus folgt, daß in der Umgebung des Schnittpunktes einer Erzeugenden einer Φ_i mit der Fläche $p(\mathfrak{t}, \mathfrak{s})$ oder $q(\mathfrak{t}, \mathfrak{s})$ stets auch ein Schnittpunkt einer Erzeugenden der zu Φ_i benachbarten Fläche existiert. Daher gibt es auch in der Umgebung jedes beliebigen Punktes einer Φ_i stets einen Punkt der benachbarten Fläche. Da für den vorliegenden Zweck nur die Form, nicht aber die Größe oder die räumliche Lage der Φ_i

wesentlich ist, können wir annehmen, daß jede der Φ_i beliebig im Raume bewegt und ähnlich geändert, d. h. einer Transformation der Hauptgruppe unterworfen wird. Dies kann nach einer früheren Bemerkung einfach dadurch geschehen, daß man sich für jede Φ_i andere unabhängige Einheiten e_0^i, e_1^i, e_2^i, e_3^i zugrunde gelegt denkt (wobei aber e_1^i, e_2^i, e_3^i normale Einheitsstrecken sein sollen). Wir können dann sagen:

Die Regelscharen Φ_i bilden eine »stetige Flächenreihe« von der Eigenschaft, daß je zwei Flächen Φ_i und Φ_k dieser Reihe, deren zugehörige Parameterwerte eine genügend kleine Differenz $\mathfrak{h} = \mathfrak{s}_k - \mathfrak{s}_i$ aufweisen, in jedem verlangten Maße **„fast ähnlich“** sind.

Ist umgekehrt eine solche Reihe von Regelscharen gegeben, wobei die einzelnen Flächen beliebige räumliche Lagen einnehmen, so kann diese Reihe durch geeignete Transformationen der Hauptgruppe immer auf die Form (4) gebracht werden.

Nehmen wir ferner an, daß auch die Zahlen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ in $\mathfrak{B}$ analytische Funktionen von $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{t}$ sind, so stellt

$$k = \mathfrak{x}(\mathfrak{t}, \mathfrak{s}) . p(\mathfrak{t}, \mathfrak{s}) + \mathfrak{y}(\mathfrak{t}, \mathfrak{s}) . q(\mathfrak{t}, \mathfrak{s}) \tag{5}$$

für jeden Wert $\mathfrak{s}_i$ von $\mathfrak{s}$ eine analytische Kurve K_i dar, die auf der zu $\mathfrak{s}_i$ gehörigen Φ_i liegt. Da diese Kurven in ihrer Gesamtheit die durch (5) dargestellte analytische Fläche Σ erfüllen, bilden auch die K_i eine stetige Kurvenreihe, von der analogen Eigenschaft, daß je zwei benachbarte Kurven der Reihe immer »fast ähnlich« sind.

Damit ist nun gezeigt, daß sowohl die Φ_i als auch die K_i durch allmähliche (stetige) Formänderungen ineinander übergehen, sobald $\mathfrak{s}$ im Intervall $\langle \mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2 \rangle$ eine stetige Wertereihe durchläuft. Für das folgende soll weiters noch angenommen werden, daß die zu einem Wertepaar $\mathfrak{s}_i$, $\mathfrak{t}_i$ gehörigen Punkte $p(\mathfrak{t}_i \mathfrak{s}_i)$ und $q(\mathfrak{t}_i, \mathfrak{s}_i)$ in $\mathfrak{B}$ nirgends kongruent sind (zusammenfallen). Dies kann in der Tat immer erreicht werden, da es ja gleichgültig ist, welche Kurven auf den Φ_i als erzeugende Leitkurven gewählt werden.[1]

Nach diesen Vorbereitungen untersuchen wir das Verhalten der Fläche Σ in der Umgebung jener kritischen Stelle $\mathfrak{t}_0$, $\mathfrak{s}_0$, bei der auf der ursprünglichen Fläche Φ_0 ein Punkt der Kurve K_0 noch unbestimmt ist. Dieser Punkt ist nämlich nach (5) zugleich der zu $\mathfrak{t}_0$, $\mathfrak{s}_0$ gehörige Punkt der Fläche Σ. Um ihn zu erhalten, entwickeln wir $k(\mathfrak{t}, \mathfrak{s})$ an der Stelle $\mathfrak{t}_0$, $\mathfrak{s}_0$, was nach unseren Voraussetzungen stets möglich ist. Wir erhalten bei Beachtung von $\mathfrak{x}(\mathfrak{t}_0, \mathfrak{s}_0) = \mathfrak{y}(\mathfrak{t}_0, \mathfrak{s}_0) = 0$ und wenn die Inkremente von $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{s}$ mit $\mathfrak{g}$, beziehungsweise $\mathfrak{h}$ bezeichnet werden

---

[1] Sind die Punkte p und q in (5) von $\mathfrak{s}$ unabhängig, so liegen alle K_i auf derselben Fläche oder, falls man wieder für jede Φ_i andere Einheiten zugrunde legt, es sind alle Φ_i kongruent.

$$k\,(\mathfrak{t}_0+\mathfrak{g},\,\mathfrak{s}_0+\mathfrak{h}) =$$
$$\left(\frac{\partial \mathfrak{x}^0}{\partial \mathfrak{t}}\,\mathfrak{g} + \frac{\partial \mathfrak{x}^0}{\partial \mathfrak{s}}\,\mathfrak{h}\right) p^0 + \left(\frac{\partial \mathfrak{y}^0}{\partial \mathfrak{t}}\,\mathfrak{g} + \frac{\partial \mathfrak{y}^0}{\partial \mathfrak{s}}\,\mathfrak{h}\right) q^0 + \frac{1}{2!}(\ldots). \tag{6}$$

Die Null als Akzent soll dabei und im folgenden immer andeuten, daß die betreffenden Größen an der Stelle $\mathfrak{t}_0$, $\mathfrak{s}_0$ zu nehmen sind.

Setzen wir zunächst voraus, daß die Funktionaldeterminante

$$\Delta^0 = \frac{\partial\,(\mathfrak{x}^0, \mathfrak{y}^0)}{\partial\,(\mathfrak{t}, \mathfrak{s})}$$

$\neq 0$ ist, so kann man die unabhängigen Zuwächse $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ stets so wählen, daß

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{x}^0}{\partial \mathfrak{t}}\,\mathfrak{g} + \frac{\partial \mathfrak{x}^0}{\partial \mathfrak{s}}\,\mathfrak{h} &= \mathfrak{m}\,.\,\varepsilon \\ \frac{\partial \mathfrak{y}^0}{\partial \mathfrak{t}}\,\mathfrak{g} + \frac{\partial \mathfrak{y}^0}{\partial \mathfrak{s}}\,\mathfrak{h} &= \mathfrak{n}\,.\,\varepsilon \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

wird, worin ε genügend klein sei und $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ beliebige Zahlen bedeuten, von denen wenigstens eine $\neq 0$ ist. Aus (7) folgt nämlich

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \mathfrak{x}^0}{\partial \mathfrak{t}} & \mathfrak{m} \\[2ex] \dfrac{\partial \mathfrak{y}^0}{\partial \mathfrak{t}} & \mathfrak{n} \end{vmatrix} \mathfrak{g} + \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \mathfrak{x}^0}{\partial \mathfrak{s}} & \mathfrak{m} \\[2ex] \dfrac{\partial \mathfrak{y}^0}{\partial \mathfrak{s}} & \mathfrak{n} \end{vmatrix} \mathfrak{h} = 0 \text{ und} \tag{8}$$

$$\mathfrak{h} = \frac{1}{\Delta^0} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \mathfrak{x}^0}{\partial \mathfrak{t}} & \mathfrak{m} \\[2ex] \dfrac{\partial \mathfrak{y}^0}{\partial \mathfrak{t}} & \mathfrak{n} \end{vmatrix} \varepsilon, \quad \mathfrak{g} = -\frac{1}{\Delta^0} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \mathfrak{x}^0}{\partial \mathfrak{s}} & \mathfrak{m} \\[2ex] \dfrac{\partial \mathfrak{y}^0}{\partial \mathfrak{s}} & \mathfrak{n} \end{vmatrix} \varepsilon, \tag{9}$$

wobei die beiden Determinanten wegen $\Delta^0 \neq 0$ nicht gleichzeitig verschwinden können.

Gleichung (6) geht unter Beachtung von (7) über in

$$k\,(\mathfrak{t}_0+\mathfrak{g},\,\mathfrak{s}_0+\mathfrak{h}) = (\mathfrak{m}\,p^0 + \mathfrak{n}\,q^0)\,\varepsilon + \frac{1}{2!}(\ldots)\,\varepsilon^2 + \tag{10}$$

Da hierin für genügend kleine Werte von ε alle Glieder von höherer als erster Ordnung weggelassen werden dürfen, ist somit

$$\lim_{\mathfrak{g}=\mathfrak{h}=0} k = \mathfrak{m}\,p^0 + \mathfrak{n}\,p^0. \tag{11}$$

Nun erkennt man aber aus (9), daß für jedes genügend kleine $\mathfrak{h}$ und für jedes angenommene Verhältnis von $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ — $\left(\text{abgesehen von } \mathfrak{m}:\mathfrak{n} = \dfrac{\partial \mathfrak{x}^0}{\partial \mathfrak{t}}\;\dfrac{\partial \mathfrak{y}^0}{\partial \mathfrak{t}}\right)$ — stets ein solches genügend kleines $\mathfrak{g}$ gefunden werden kann, daß bei festem $\mathfrak{g}:\mathfrak{h}$ der Grenzwert (11) erreicht wird. Da p^0 und q^0 laut Vorraussetzung nicht kongruent sind, kann also fast jeder Punkt der Erzeugenden E_0 von Φ_0 als Grenzlage eines Punktes der benachbarten Kurve $K_\mathfrak{h}$ erhalten werden und damit ist nachgewiesen, daß

die Fläche Σ die Erzeugende E_0 enthält und daß K_0 in diesem Fall als Grenzform der K_i in E_0 und eine »eigentliche Kurve $\bar{K}_0$« zerfällt.

$\bar{K}_0$ schneidet dabei E_0 in einem Punkt $\bar{k}_0$, der sich ergibt, wenn man bei festem $\mathfrak{s} = \mathfrak{s}_0$ den Parameter $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_0$ werden läßt. Man erhält nach der Regel von de l'Hôpital

$$\lim_{\mathfrak{t}=\mathfrak{t}_0} k(\mathfrak{t}, \mathfrak{s}_0) = \bar{k}_0 = \frac{\partial \mathfrak{x}^0}{\partial \mathfrak{t}} p^0 + \frac{\partial \mathfrak{y}^0}{\partial \mathfrak{t}} q^0, \tag{12}$$

also gerade jenen Punkt, für den in (7) $\mathfrak{h} = 0$ ist, der also nicht als Grenzlage eines Punktes von $K_\mathfrak{h}$ nach Gleichung (11) erhalten werden kann. Dies entspricht auch dem Augenschein der in Fig. 1 dargestellten räumlichen Lage von $K_\mathfrak{h}$, $\bar{K}_0$, E_0 und $\bar{k}_0$, womit zugleich der allmähliche Übergang von $K_\mathfrak{h}$ in $\bar{K}_0$ und E_0 veranschaulicht wird.

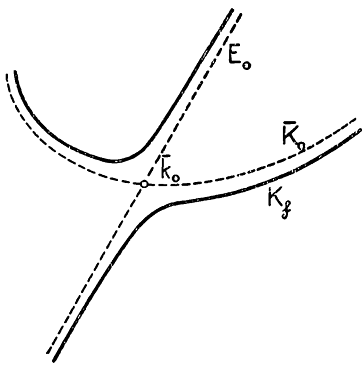

Fig. 1.

Wir wenden uns nun dem Fall zu, daß $\Delta^0 = 0$, jedoch vom Range 1 ist. Es gibt dann stets ein Verhältnis $\mathfrak{g}:\mathfrak{h}$ von $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$, für das

$$\frac{\partial \mathfrak{x}^0}{\partial \mathfrak{t}} \bar{\mathfrak{g}} + \frac{\partial \mathfrak{x}^0}{\partial \mathfrak{s}} \bar{\mathfrak{h}} = \frac{\partial \mathfrak{y}^0}{\partial \mathfrak{t}} \bar{\mathfrak{g}} + \frac{\partial \mathfrak{y}^0}{\partial \mathfrak{s}} \bar{\mathfrak{h}} = 0 \tag{13}$$

ist. Für alle übrigen Werte von $\mathfrak{g}:\mathfrak{h}$ ist hingegen immer

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{x}^0}{\partial \mathfrak{t}} \mathfrak{g} + \frac{\partial \mathfrak{x}^0}{\partial \mathfrak{s}} \mathfrak{h} &= \mathfrak{j}\,.\,\varepsilon \\ \frac{\partial \mathfrak{y}^0}{\partial \mathfrak{t}} \mathfrak{g} + \frac{\partial \mathfrak{y}^0}{\partial \mathfrak{s}} \mathfrak{h} &= \mathfrak{l}\,.\,\varepsilon \end{aligned}\right\}, \tag{14}$$

wobei $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{l}$ zwei feste Zahlen sind, die sich z. B. wie $\frac{\partial \mathfrak{x}^0}{\partial \mathfrak{t}}$ $\frac{\partial \mathfrak{y}^0}{\partial \mathfrak{t}}$ verhalten (die nicht beide $=0$ seien). Somit ist

$$\lim_{\mathfrak{g}=\mathfrak{h}=0} k = \lim_{\mathfrak{g}=\mathfrak{h}=0} \left((\mathfrak{j}\, p^0 + \mathfrak{l}\, q^0)\, \varepsilon + (\ .\ \ .)\, \varepsilon^2 + \qquad \right) = \frac{\partial \mathfrak{x}^0}{\partial \mathfrak{t}} p^0 + \frac{\partial \mathfrak{y}^0}{\partial \mathfrak{t}} q^0 \quad (15)$$

für fast alle Richtungen der Annäherung an die Stelle $\mathfrak{t}_0$, $\mathfrak{s}_0$. Daraus folgt, daß die Fläche Σ die Gerade E_0 in einem einzigen Punkt k^0 trifft,[1] daß also die Kurve K_0 als Grenzform der K_i in diesem Fall nicht zerfällt. Es fragt sich nun, welche besondere Eigenschaften der Φ_i und K_i ein solches Verhalten veranlassen können. Aus (13) erkennt man unter Beachtung der Entwicklungen

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{x}(\mathfrak{t}_0+\mathfrak{g}, \mathfrak{s}_0+\mathfrak{h}) &= \mathfrak{x}^0 + \left(\frac{\partial \mathfrak{x}^0}{\partial \mathfrak{t}}\mathfrak{g} + \frac{\partial \mathfrak{x}^0}{\partial \mathfrak{s}}\mathfrak{h}\right) + \frac{1}{2!}(\ldots) + \\ \mathfrak{y}(\mathfrak{t}_0+\mathfrak{g}, \mathfrak{s}_0+\mathfrak{h}) &= \mathfrak{y}^0 + \left(\frac{\partial \mathfrak{y}^0}{\partial \mathfrak{t}}\mathfrak{g} + \frac{\partial \mathfrak{y}^0}{\partial \mathfrak{s}}\mathfrak{h}\right) + \frac{1}{2!}(\ldots) + \quad . \end{aligned}\right\}, \quad (16)$$

daß die Zahlen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ in diesem Fall auch an der zu $\mathfrak{t}_0$, $\mathfrak{s}_0$ benachbarten Stelle

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{t}_1 &= \mathfrak{t}_0 + \bar{\mathfrak{g}} \\ \mathfrak{s}_1 &= \mathfrak{s}_0 + \bar{\mathfrak{h}} \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

verschwinden. Somit besitzt die zu Φ_0 benachbarte Fläche Φ_1 an der Stelle $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{s}_1$ gleichfalls eine Erzeugende $\bar{E}$, auf welcher der Schnittpunkt der zu K_0 benachbarten Kurve K_1 unbestimmt ist. Ein solcher Grenzübergang liefert für unsere Zwecke kein Resultat und bleibt, wie beabsichtigt war, außer Betracht.

Es ist noch zu beachten, daß Δ^0 auch infolge von $\frac{\partial \mathfrak{x}^0}{\partial \mathfrak{t}} = \frac{\partial \mathfrak{y}^0}{\partial \mathfrak{t}} = 0$ verschwinden kann. In einem solchen Fall ist der Grenzpunkt $\lim\limits_{\mathfrak{g}=\mathfrak{h}=0} k$ wie oben nach (14) und (15) bestimmt; man erkennt aber aus (13), daß dann $\bar{\mathfrak{h}} = 0$ ist und daher die zu $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{s}_1$ gehörige Erzeugende $\bar{E}$ auf der Fläche Φ_0 selbst liegt. Φ_0 besitzt dann zwei benachbarte Erzeugende, auf welchen die Schnittpunkte von K_0 unbestimmt sind, während die benachbarte Fläche Φ_1 keine solche Erzeugende aufweist. In diesem Fall vollzieht sich die Formänderung der Φ_i und K_i so rasch, daß die Art des Grenzüberganges zunächst nicht erkannt werden kann. Es läßt sich dann aber

[1] Vgl. Goursat, Cours d'analyse, 4e éd. (1925), t. I, p. 63, wo gezeigt wird, daß der Quotient zweier Funktionen $\mathfrak{U}(x, y)$ und $\mathfrak{V}(x, y)$ an einer Stelle, wo $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$ und ihre Funktionaldeterminante verschwinden, eindeutig bestimmt ist.

immer, ohne hierbei die Φ_i und K_i zu ändern, durch eine einfache Transformation des Parameters $\mathfrak{s}$ der Fall herbeiführen, daß in Δ^0 sämtliche Glieder verschwinden.

Setzen wir nämlich

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{s} - \mathfrak{s}_0 = \mathfrak{w}^2, \tag{18}$$

so ergibt sich die ursprüngliche Fläche für $\mathfrak{w} = 0$ und es ist, wie man aus den Entwicklungen (16) ohne weiters erkennt,[1]

$$\frac{\partial \mathfrak{x}^0}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{y}^0}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{x}^0}{\partial \mathfrak{w}} = \frac{\partial \mathfrak{y}^0}{\partial \mathfrak{w}} = 0.$$

Dieser Fall soll später berücksichtigt werden.

Es sei zunächst noch darauf hingewiesen, daß $\mathfrak{x}^0$, $\mathfrak{y}^0$ und Δ^0 insbesondere auch dann verschwinden, wenn die Größen $\mathfrak{x}(t, \mathfrak{s})$ und $\mathfrak{y}(t, \mathfrak{s})$ im Bereich $\mathfrak{B}$ einen bei t_0, $\mathfrak{s}_0$ verschwindenden Faktor gemeinsam haben. In der Tat, ist

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{x}(t, \mathfrak{s}) &\equiv \varphi(t, \mathfrak{s})\, \bar{\mathfrak{x}}(t, \mathfrak{s}) \\ \mathfrak{y}(t, \mathfrak{s}) &\equiv \varphi(t, \mathfrak{s})\, \bar{\mathfrak{y}}(t, \mathfrak{s}), \end{aligned}\right\}, \tag{20}$$

wobei $\bar{\mathfrak{x}}^0$ und $\bar{\mathfrak{y}}^0$ nicht gleichzeitig $= 0$ sein sollen, und ist

$$\varphi^0 = 0,$$

so ist $\mathfrak{x}^0 = \mathfrak{y}^0 = 0$ und auch

$$\Delta^0 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi^0}{\partial t} \cdot \bar{\mathfrak{x}}^0 & \dfrac{\partial \varphi^0}{\partial t} \cdot \bar{\mathfrak{y}}^0 \\ \dfrac{\partial \varphi^0}{\partial \mathfrak{s}} \cdot \bar{\mathfrak{x}}^0 & \dfrac{\partial \varphi^0}{\partial \mathfrak{s}} \cdot \bar{\mathfrak{y}}^0 \end{vmatrix} = \frac{\partial \varphi^0}{\partial t} \cdot \frac{\partial \varphi^0}{\partial \mathfrak{s}} \begin{vmatrix} \bar{\mathfrak{x}}^0 & \bar{\mathfrak{y}}^0 \\ \bar{\mathfrak{x}}^0 & \bar{\mathfrak{y}}^0 \end{vmatrix} = 0. \tag{21}$$

Somit gilt auch in einem solchen Fall die Gleichung (15), d. h. ein an einer Stelle t_0, $\mathfrak{s}_0$ verschwindender gemeinsamer Faktor $\varphi(t, \mathfrak{s})$ von $\mathfrak{x}(t, \mathfrak{s})$ und $\mathfrak{y}(t, \mathfrak{s})$ kann kein Zerfallen der Kurve K_0 veranlassen.

Daß $\mathfrak{x}(t)$ und $\mathfrak{y}(t)$ wegen der gemeinsamen Nullstelle t_0 mindestens den Faktor $t - t_0$ gemeinsam haben,[2] steht hiermit nicht in Widerspruch, da ein solcher Faktor in Gleichung (5) i. a. bloß für $\mathfrak{s} = \mathfrak{s}_0$ existiert und hernach Δ^0 nicht verschwindet. Setzen wir nämlich

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{x}(t, \mathfrak{s}_0) &\equiv \psi(t)\, \mathfrak{x}^\times(t, \mathfrak{s}_0) \\ \mathfrak{y}(t, \mathfrak{s}_0) &\equiv \psi(t)\, \mathfrak{y}^\times(t, \mathfrak{s}_0) \end{aligned}\right\}, \tag{22}$$

---

[1] Die Nullen deuten jetzt die Stelle $t = t_0$, $\mathfrak{w} = 0$ an.

[2] Es ergibt sich dies auch aus der Entwicklung von $\mathfrak{x}(t, \mathfrak{s}_0)$ und $\mathfrak{y}(t, \mathfrak{s}_0)$ an der Stelle t_0.

wobei $\psi(t_0) = 0$ ist und $\mathfrak{x}^{\times 0}$ und $\mathfrak{y}^{\times 0}$ nicht gleichzeitig verschwinden, so ist

$$\Delta^0 = \begin{vmatrix} \psi'^0 . \mathfrak{x}^{\times 0} & \psi'^0 . \mathfrak{y}^{\times 0} \\ \frac{\partial \mathfrak{x}^0}{\partial \mathfrak{s}} & \frac{\partial \mathfrak{y}^0}{\partial \mathfrak{s}} \end{vmatrix}, \text{ also i. a. } \neq 0. \tag{23}$$

Dieser Fall kann wieder mittels (18) auf jenen zurückgeführt werden, bei dem

$$\mathfrak{x}^0 = \mathfrak{y}^0 = \frac{\partial \mathfrak{x}^0}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{y}^0}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{x}^0}{\partial \mathfrak{s}} = \frac{\partial \mathfrak{y}^0}{\partial \mathfrak{s}} = 0$$

sind und der nunmehr zu untersuchen wäre.

Um jedoch zu einem allgemeinen Resultut zu gelangen, wollen wir gleich annehmen, daß in (5) die Größen $\mathfrak{x}(t, \mathfrak{s})$, $\mathfrak{y}(t, \mathfrak{s})$ und deren sämtliche Differentialquotienten nach t und $\mathfrak{s}$ bis einschließlich zur $(\mathfrak{k}-1)$-ten Ordnung an der Stelle t_0, $\mathfrak{s}_0$ verschwinden. Die Entwicklung (6) erhält dann die Form:

$$\mathfrak{k}! . k(t_0 + \mathfrak{g}, \mathfrak{s}_0 + \mathfrak{h}) = \left(\frac{\partial^{\mathfrak{k}} \mathfrak{x}^0}{\partial t^{\mathfrak{k}}} \mathfrak{g}^{\mathfrak{k}} + \frac{\partial^{\mathfrak{k}} \mathfrak{x}^0}{\partial t^{\mathfrak{k}-1} \partial \mathfrak{s}} \mathfrak{g}^{\mathfrak{k}-1} \mathfrak{h} + \ldots + \frac{\partial^{\mathfrak{k}} \mathfrak{x}^0}{\partial \mathfrak{s}^{\mathfrak{k}}} \mathfrak{h}^{\mathfrak{k}} \right) p^0 +$$

$$+ \left(\frac{\partial^{\mathfrak{k}} \mathfrak{y}^0}{\partial t^{\mathfrak{k}}} \mathfrak{g}^{\mathfrak{k}} + \frac{\partial^{\mathfrak{k}} \mathfrak{y}^0}{\partial t^{\mathfrak{k}-1} \partial \mathfrak{s}} \mathfrak{g}^{\mathfrak{k}-1} \mathfrak{h} + . \quad + \frac{\partial^{\mathfrak{k}} \mathfrak{y}^0}{\partial \mathfrak{s}^{\mathfrak{k}}} \mathfrak{h}^{\mathfrak{k}} \right) q^0 + . \tag{24}$$

Hierin können die beiden Formen $\mathfrak{k}$-ten Grades

$$\left. \begin{aligned} f_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) &= \frac{\partial^{\mathfrak{k}} \mathfrak{x}^0}{\partial t^{\mathfrak{k}}} \mathfrak{g}^{\mathfrak{k}} + \frac{\partial^{\mathfrak{k}} \mathfrak{x}^0}{\partial t^{\mathfrak{k}-1} \partial \mathfrak{s}} \mathfrak{g}^{\mathfrak{k}-1} \mathfrak{h} + . \\ \mathfrak{g}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) &= \frac{\partial^{\mathfrak{k}} \mathfrak{y}^0}{\partial t^{\mathfrak{k}}} \mathfrak{g}^{\mathfrak{k}} + \frac{\partial^{\mathfrak{k}} \mathfrak{y}^0}{\partial t^{\mathfrak{k}-1} \partial \mathfrak{s}} \mathfrak{g}^{\mathfrak{k}-1} \mathfrak{h} + \end{aligned} \right\} \tag{25}$$

teilerfremd sein oder nicht, je nachdem nämlich ihre Resultante

$$R \neq 0 \text{ oder } = 0$$

ist.

Im ersteren Fall gibt es auf $\Phi_{\mathfrak{h}}$ in der Umgebung von t_0, $\mathfrak{s}_0$ keine Stelle, bei der $\mathfrak{x}(t, \mathfrak{s})$ und $\mathfrak{y}(t, \mathfrak{s})$ gleichzeitig verschwinden. Man kann dann analog (7) $\mathfrak{g} : \mathfrak{h}$ stets so wählen, daß

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^{\mathfrak{k}} \mathfrak{x}^0}{\partial t^{\mathfrak{k}}} \mathfrak{g}^{\mathfrak{k}} + . . \quad \frac{\partial^{\mathfrak{k}} \mathfrak{y}^0}{\partial \mathfrak{s}^{\mathfrak{k}}} \mathfrak{h}^{\mathfrak{k}} &= \mathfrak{m} . \varepsilon^{\mathfrak{k}} \\ \frac{\partial^{\mathfrak{k}} \mathfrak{y}^0}{\partial t^{\mathfrak{k}}} \mathfrak{g}^{\mathfrak{k}} + . . \quad \frac{\partial^{\mathfrak{k}} \mathfrak{y}^0}{\partial \mathfrak{s}^{\mathfrak{k}}} \mathfrak{h}^{\mathfrak{k}} &= \mathfrak{n} . \varepsilon^{\mathfrak{k}} \end{aligned} \right\} \tag{26}$$

ist, wobei wieder ε genügend klein ist und $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ beliebige Zahlen bedeuten, die nicht beide $= 0$ sind. Aus (26) ergibt sich nämlich durch Elimination von ε

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^{\mathfrak k}\mathfrak x^0}{\partial \mathfrak t^{\mathfrak k}} & \mathfrak m \\ \frac{\partial^{\mathfrak k}\mathfrak y^0}{\partial \mathfrak t^{\mathfrak k}} & \mathfrak n \end{vmatrix} \mathfrak g^{\mathfrak k} + \begin{vmatrix} \frac{\partial^{\mathfrak k}\mathfrak x^0}{\partial \mathfrak t^{\mathfrak k-1}\partial \mathfrak s} & \mathfrak m \\ \frac{\partial^{\mathfrak k}\mathfrak y^0}{\partial \mathfrak t^{\mathfrak k-1}\partial \mathfrak s} & \mathfrak n \end{vmatrix} \mathfrak g^{\mathfrak k-1}\mathfrak h + \ldots + \begin{vmatrix} \frac{\partial^{\mathfrak k}\mathfrak x^0}{\partial \mathfrak s^{\mathfrak k}} & \mathfrak m \\ \frac{\partial^{\mathfrak k}\mathfrak y^0}{\partial \mathfrak s^{\mathfrak k}} & \mathfrak n \end{vmatrix} \mathfrak h^{\mathfrak k} = 0. \quad (27)$$

Da sich die linke Seite dieser Gleichung in $\mathfrak k$ lineare Faktoren zerlegen läßt, haben die $\mathfrak k^2$ Wertepaare, die (26) befriedigen, die Eigenschaft, daß je $\mathfrak k$ davon dasselbe Verhältnis

$$\mathfrak g_{ij} : \mathfrak h_{ij} = \mathfrak a_i \ \ \mathfrak b_i \ \ (i, j = 1, 2, \ldots \mathfrak k) \quad (28)$$

besitzen. Da von den Größen $\frac{\partial^{\mathfrak k}\mathfrak x^0}{\partial \mathfrak t^{\mathfrak k}}$ und $\frac{\partial^{\mathfrak k}\mathfrak y^0}{\partial \mathfrak t^{\mathfrak k}}$ wegen $R \neq 0$ wenigstens eine $\neq 0$ ist, so sind alle $\mathfrak b_i$ im allgemeinen von Null verschieden. Nur wenn $\mathfrak m : \mathfrak n = \frac{\partial^{\mathfrak k}\mathfrak x^0}{\partial \mathfrak t^{\mathfrak k}} \ \frac{\partial^{\mathfrak k}\mathfrak y^0}{\partial \mathfrak t^{\mathfrak k}}$ gewählt wurde, ist wenigstens eines der $\mathfrak b_i = 0$, d. h. ein Wert von $\mathfrak g_i : \mathfrak h_i = \infty$.

Durch Einsetzen von (26) erhält (24) die Form

$$k(\mathfrak t_0 + \mathfrak g, \mathfrak s_0 + \mathfrak h) = (\mathfrak m p^0 + \mathfrak n q^0)\, \mathfrak e^{\mathfrak k} + (\ldots)\, \mathfrak e^{\mathfrak k+1} +$$

so daß

$$\lim_{\mathfrak g = \mathfrak h = 0} k(\mathfrak t_0 + \mathfrak g, \mathfrak s_0 + \mathfrak h) = \mathfrak m p^0 + \mathfrak n q^0 \quad (29)$$

wird, wie auch $\mathfrak m : \mathfrak n$ gewählt werden mag. Damit ist gezeigt, daß auch in diesem Fall jeder Punkt der zu $\mathfrak t_0$, $\mathfrak s_0$ gehörigen Erzeugenden von Φ_0 als Grenzlage eines Punktes der zu K_0 benachbarten Kurve $K_{\mathfrak h}$ erhalten werden kann. Aus obigem folgt ferner, daß es für fast jedes $\mathfrak m : \mathfrak n$ und für jedes genügend kleine $\mathfrak h = \mathfrak b . \bar{\mathfrak e}$ stets $\mathfrak k$ verschiedene Werte von $\mathfrak g = \mathfrak a_i . \bar{\mathfrak e}$ gibt, derart, daß bei festgehaltenem $\mathfrak a_i$ $\mathfrak b$ die Grenzlage (29) des Punktes k erhalten wird.

Jeder solche Punkt kann daher auf $\mathfrak k$ verschiedene Arten erreicht werden oder mit anderen Worten:

In der Umgebung jedes Punktes von E_0 liegen i. a. genau $\mathfrak k$ Punkte von $K_{\mathfrak h}$. Somit zerfällt K_0 als Grenzform der $K_{\mathfrak h}$ in diesem Fall in die $\mathfrak k$-fach zu zählende Erzeugende E_0, d. h. in $\mathfrak k$, bei $\mathfrak t_0$ benachbarte Erzeugende und in eine »eigentliche« Kurve $\bar{K}_0$. Letztere schneidet E_0 in einem Punkt $\bar{k}_0$, der wieder durch Variation von $\mathfrak t$ allein erhalten wird. Es ergibt sich

$$\bar{k}_0 = \lim_{\mathfrak t = \mathfrak t_0} k(\mathfrak t, \mathfrak s_0) = \frac{\partial^{\mathfrak k}\mathfrak x^0}{\partial \mathfrak t^{\mathfrak k}} p^0 + \frac{\partial^{\mathfrak k}\mathfrak y^0}{\partial \mathfrak t^{\mathfrak k}} q^0, \quad (30)$$

also gerade jener Punkt, für den in (28) ein $\mathfrak b_i = 0$ wurde, der also in (29) höchstens $(\mathfrak k - 1)$mal erreicht werden kann. Den allmählichen Übergang von $K_{\mathfrak h}$ in $\bar{K}_0$ und E_0 veranschaulicht Fig. 2, und zwar für $\mathfrak k = 4$.

Es könnte auch vorkommen, daß in (30) beide Differentialquotienten verschwinden. Dies wird jedoch später untersucht werden.

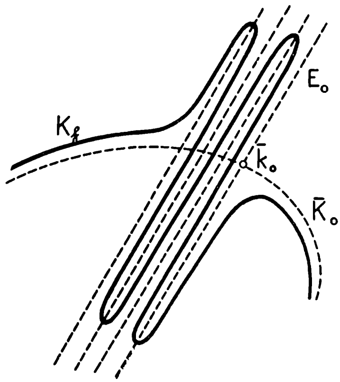

Fig.

Wir betrachten jetzt den Fall, daß die beiden Formen (25) einen gemeinsamen Teiler besitzen und setzen dementsprechend

$$\left.\begin{array}{l} f_\mathfrak{k}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \equiv \mathfrak{T}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \cdot f_{\mathfrak{k}_1}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \\ g_\mathfrak{k}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \equiv \mathfrak{T}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \cdot g_{\mathfrak{k}_1}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \end{array}\right\}. \tag{31}$$

Ist $\mathfrak{T}$ vom Grade $\mathfrak{c}$ $(\mathfrak{k} \geqq \mathfrak{c} > 0)$, so gibt es $\mathfrak{c}$ Wertepaare $\bar{\mathfrak{g}}_i$ $\bar{\mathfrak{h}}_i$ $(i = 1, 2, . . \mathfrak{c})$, die $\mathfrak{T}$ und somit auch $f_\mathfrak{k}$ und $g_\mathfrak{k}$ zum Verschwinden bringen. Man erkennt dann aus (16), worin jetzt alle Glieder bis zur $(\mathfrak{k}-1)$ten Ordnung gleich θ sind, daß die Größen $\mathfrak{x}(\mathfrak{t}, \mathfrak{s})$ und $\mathfrak{y}(\mathfrak{t}, \mathfrak{s})$ auch an den zu $\mathfrak{t}_0$, $\mathfrak{s}_0$ benachbarten Stellen

$$\mathfrak{t}_0 + \bar{\mathfrak{g}}_i,\ \mathfrak{s}_0 + \bar{\mathfrak{h}}_i\ (i = 1, . . . \mathfrak{c}) \tag{32}$$

verschwinden, daß also die zu Φ_0 benachbarte Fläche $\Phi_\mathfrak{h}$ in der Umgebung von E_0 $\mathfrak{c}$ Erzeugende besitzt, auf welchen die Schnittpunkte der zu K_0 benachbarten Kurve $K_\mathfrak{h}$ gleichfalls unbestimmt sind. Eine solche Formänderung bleibt aber wie früher außer Betracht.[1] Ist $\mathfrak{c}$ insbesondere $= \mathfrak{k}$, so sind die Formen (25) bis auf einen konstanten Faktor identisch; wie früher ergibt sich dann, daß die Kurve $K_\mathfrak{h}$ ohne Zerfallen in K_0 übergeht. Letzteres ist insbesondere auch dann der Fall, wenn [analog (20)] die Größen $\mathfrak{x}(\mathfrak{t}, \mathfrak{s})$ und $\mathfrak{y}(\mathfrak{t}, \mathfrak{s})$ einen gemeinsamen Faktor $\varphi(\mathfrak{t}, \mathfrak{s})$ besitzen, der bei $\mathfrak{t}_0$, $\mathfrak{s}_0$ samt seinen Ableitungen bis zur $(\mathfrak{k}-1)$ten Ordnung verschwindet.

Es ist noch der Fall zu untersuchen, daß in (5) oder (6) die Größen $\mathfrak{x}(\mathfrak{t}, \mathfrak{s})$ und $\mathfrak{y}(\mathfrak{t}, \mathfrak{s})$ und deren Ableitungen nach $\mathfrak{t}$ (allein) bis einschließlich zur $(\mathfrak{l}-1)$ten Ordnung bei $\mathfrak{t}_0$, $\mathfrak{s}_0$ verschwinden,

---

1 Es läßt sich zwar zeigen, daß in einem solchen Fall i. a. $(\mathfrak{k}-\mathfrak{c})$ Erzeugende von Φ_0, die bei $\mathfrak{t}_0$ benachbart sind, zur Kurve K_0 gehören. Diese Art des Zerfallens von K_0 soll jedoch nicht näher untersucht werden, da über die restlichen $\mathfrak{c}$, zu E_0 benachbarten Erzeugenden nichts ausgesagt werden kann.

daß $\mathfrak{x}^{(\mathfrak{l})}$, $\mathfrak{y}^{(\mathfrak{l})}$ jene Ableitungen niedrigster Ordnung bezeichnen, die für $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_0$, $\mathfrak{s} = \mathfrak{s}_0$ nicht gleichzeitig $= 0$ sind. Von den übrigen Ableitungen von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ (nämlich $\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial \mathfrak{s}}$, $\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial \mathfrak{s}}$, ..) sei wenigstens eine von niedrigerer als $\mathfrak{l}$-ter Ordnung bei $\mathfrak{t}_0$, $\mathfrak{s}_0$ von Null verschieden. Hierin ist offenbar der in (30) ausgenommene Fall enthalten. Mit Hilfe der (18) analogen Parametertransformation

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{s} - \mathfrak{s}_0 = \mathfrak{w}^{\mathfrak{l}}, \tag{33}$$

wonach für Φ_0

$$\mathfrak{w} = 0$$

zu setzen ist, kann dann immer erreicht werden, daß auch sämtliche Ableitungen von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ nach $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{w}$ bis einschließlich zur $(\mathfrak{l}-1)$-ten Ordnung an der Stelle $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_0$, $\mathfrak{w} = 0$ verschwinden. In der Tat, betrachten wir die Entwicklungen (16) und ersetzen wir hierin gemäß (33) das Inkrement $\mathfrak{h}$ durch $\mathfrak{w}^{\mathfrak{l}}$, so ergibt sich

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{\partial^i \mathfrak{x}^0}{\partial \mathfrak{w}^i} = \frac{\partial^i \mathfrak{y}^0}{\partial \mathfrak{w}_i} = 0, \; [i = 1, 2, \ldots (\mathfrak{l}-1)], \text{ ferner} \\[2ex]
\frac{\partial^{b+i} \mathfrak{x}^0}{\partial \mathfrak{t}^b \partial \mathfrak{w}^i} = \frac{\partial^{b+i} \mathfrak{y}^0}{\partial \mathfrak{t}^b \partial \mathfrak{w}^i} = 0, \; [b, i = 1, 2 \ldots (\mathfrak{l}-1)], \\[2ex]
\text{hingegen ist} \\[2ex]
\frac{\partial^{\mathfrak{l}} \mathfrak{x}^0}{\partial \mathfrak{w}^{\mathfrak{l}}} = \mathfrak{l}! \frac{\partial \mathfrak{x}^0}{\partial \mathfrak{s}} \text{ und } \frac{\partial^{\mathfrak{l}} \mathfrak{y}^0}{\partial \mathfrak{w}^{\mathfrak{l}}} = \mathfrak{l}! \frac{\partial \mathfrak{y}^0}{\partial \mathfrak{s}}.
\end{array}\right\} \tag{34}$$

Die Formen (25) gehen danach in

$$\left.\begin{array}{l}
f_{\mathfrak{l}} \equiv \frac{\partial^{\mathfrak{l}} \mathfrak{x}^0}{\partial \mathfrak{t}^{\mathfrak{l}}} \mathfrak{g}^{\mathfrak{l}} + \mathfrak{l}! \frac{\partial \mathfrak{x}^0}{\partial \mathfrak{s}} \mathfrak{w}^{\mathfrak{l}} \\[2ex]
g_{\mathfrak{l}} \equiv \frac{\partial^{\mathfrak{l}} \mathfrak{y}^0}{\partial \mathfrak{t}^{\mathfrak{l}}} \mathfrak{g}^{\mathfrak{l}} + \mathfrak{l}! \frac{\partial \mathfrak{y}^0}{\partial \mathfrak{s}} \mathfrak{w}^{\mathfrak{l}}
\end{array}\right\} \tag{35}$$

über, deren Resultante, vereinfacht, die Form

$$R = \mathfrak{l}! \begin{vmatrix} \frac{\partial^{\mathfrak{l}} \mathfrak{x}^0}{\partial \mathfrak{t}^{\mathfrak{l}}} & \frac{\partial \mathfrak{x}^0}{\partial \mathfrak{s}} \\[2ex] \frac{\partial^{\mathfrak{l}} \mathfrak{y}^0}{\partial \mathfrak{t}^{\mathfrak{l}}} & \frac{\partial \mathfrak{y}^0}{\partial \mathfrak{s}} \end{vmatrix}^{\mathfrak{l}} \tag{36}$$

erhält. Somit besitzen diese Formen dann und nur dann einen gemeinsamen Teiler, wenn

$$\Delta_{\mathfrak{l}}^{0} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^{\mathfrak{l}} \mathfrak{x}^0}{\partial \mathfrak{t}^{\mathfrak{l}}} & \dfrac{\partial \mathfrak{x}^0}{\partial \mathfrak{s}} \\ \dfrac{\partial^{\mathfrak{l}} \mathfrak{y}^0}{\partial \mathfrak{t}^{\mathfrak{l}}} & \dfrac{\partial \mathfrak{y}^0}{\partial \mathfrak{s}} \end{vmatrix} = 0$$

ist. Ist hingegen $\Delta_{\mathfrak{l}}^{0}$ von Null verschieden, und dies ist der allgemeinere Fall, so besitzen $f_{\mathfrak{l}}$ und $g_{\mathfrak{l}}$ keine gemeinsame Nullstelle und es können wieder die zu (26) bis (29) analogen Gleichungen gebildet werden.

Somit ergibt sich der wichtige

1. Hilfssatz. *Ist eine analytische Regelschar*

$$x = \mathfrak{u}\, p(\mathfrak{t}) + \mathfrak{v}\, q(\mathfrak{t}) \quad (\mathfrak{t}_1 < \mathfrak{t} < \mathfrak{t}_2)$$

und auf ihr eine analytische Kurve K_0 *durch die Gleichung*

$$k_0 = \mathfrak{x}(\mathfrak{t}) \cdot p(\mathfrak{t}) + \mathfrak{y}(\mathfrak{t}) \cdot q(\mathfrak{t}) \quad (\mathfrak{t}_1 < \mathfrak{t} < \mathfrak{t}_2)$$

gegeben, und ist für einen Wert $\mathfrak{t}_0$ *von* $\mathfrak{t}\ (\mathfrak{t}_1 < \mathfrak{t}_0 < \mathfrak{t}_2)$

$$\mathfrak{x}(\mathfrak{t}_0) = \mathfrak{y}(\mathfrak{t}_0) = \mathfrak{x}'(\mathfrak{t}_0) = \mathfrak{y}'(\mathfrak{t}_0) = \ldots = \mathfrak{x}^{(\mathfrak{k}-1)}(\mathfrak{t}_0) = \mathfrak{y}^{(\mathfrak{k}-1)}(\mathfrak{t}_0) = 0,$$

während die $\mathfrak{k}$*-ten Ableitungen* $\mathfrak{x}^{(\mathfrak{k})}(\mathfrak{t}_0)$ *und* $\mathfrak{y}^{(\mathfrak{k})}(\mathfrak{t}_0)$ *nicht gleichzeitig* $= 0$ *sind, ergibt sich ferner* K_0 *aus der stetigen Reihe von analytischen Kurven* $K_{\mathfrak{s}}$

$$k_{\mathfrak{s}} = \mathfrak{x}(\mathfrak{t}, \mathfrak{s}) \cdot p(\mathfrak{t}, \mathfrak{s}) + \mathfrak{y}(\mathfrak{t}, \mathfrak{s}) \cdot q(\mathfrak{t}, \mathfrak{s})$$

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{t}_1 < \mathfrak{t} < \mathfrak{t}_2 \\ \mathfrak{s}_1 < \mathfrak{s} < \mathfrak{s}_2 \end{pmatrix}$$

für $\mathfrak{s} = \mathfrak{s}_0$, *wobei die Funktionen* $\mathfrak{x}(\mathfrak{t}, \mathfrak{s})$ *und* $\mathfrak{y}(\mathfrak{t}, \mathfrak{s})$ *so beschaffen seien, daß*

$$\Delta_{\mathfrak{k}}^{0} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^{\mathfrak{k}} \mathfrak{x}^0}{\partial \mathfrak{t}^{\mathfrak{k}}} & \dfrac{\partial \mathfrak{x}^0}{\partial \mathfrak{s}} \\ \dfrac{\partial^{\mathfrak{k}} \mathfrak{y}^0}{\partial \mathfrak{t}^{\mathfrak{k}}} & \dfrac{\partial \mathfrak{y}^0}{\partial \mathfrak{s}} \end{vmatrix} \neq 0$$

ist, so zerfällt K_0 *als Grenzform der* $K_{\mathfrak{s}}$ *für* $\mathfrak{s} \to \mathfrak{s}_0$ *in eine »eigentliche Kurve* $\overline{K}_0$*« und in* $\mathfrak{k}$*, bei* $\mathfrak{t}_0$ *benachbarte Erzeugende von* Φ_0. *Die letzteren werden hierbei von* $\overline{K}_0$ *im Punkt*

$$\bar{k}_0 = \frac{\partial^{\mathfrak{k}} \mathfrak{x}^0}{\partial \mathfrak{t}^{\mathfrak{k}}}\, p^0 + \frac{\partial^{\mathfrak{k}} \mathfrak{y}^0}{\partial \mathfrak{t}^{\mathfrak{k}}}\, q^0$$

geschnitten.

Wäre $\dfrac{\partial \mathfrak{x}^0}{\partial \mathfrak{s}} = \dfrac{\partial \mathfrak{y}^0}{\partial \mathfrak{s}} = 0$ und wenigstens eine Ableitung von $\mathfrak{x}$ oder $\mathfrak{y}$ nach $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{s}$ von niedrigerer als $\mathfrak{l}$-ter Ordnung für $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_0$,

$\mathfrak{s} = \mathfrak{s}_0$ ungleich Null, so kann ähnlich wie mittels (33) stets der Fall herbeigeführt werden, daß alle Ableitungen von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ bis einschließlich zur $(\mathfrak{l}-1)$ten Ordnung bei $\mathfrak{t}_0$, $\mathfrak{s}_0$ verschwinden. Hierauf wäre wieder die Resultante der Formen (25) zu bilden, die wie früher über das Zerfallen von K_0 entscheidet.

Tritt endlich der Fall ein, daß — abgesehen von $\frac{\partial^{\mathfrak{l}} \mathfrak{x}^0}{\partial \mathfrak{t}^{\mathfrak{l}}}, \frac{\partial^{\mathfrak{l}} \mathfrak{y}^0}{\partial \mathfrak{t}^{\mathfrak{l}}}$ — alle Ableitungen von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ nach $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{s}$ bis einschließlich zur $\mathfrak{l}$-ten Ordnung für $\mathfrak{t}_0$, $\mathfrak{s}_0$ verschwinden, so reduzieren sich die Formen (25) auf

$$f_{\mathfrak{l}} \equiv \frac{\partial^{\mathfrak{l}} \mathfrak{x}^0}{\partial \mathfrak{t}^{\mathfrak{l}}} \mathfrak{g}^{\mathfrak{l}} \text{ und } g_{\mathfrak{l}} \equiv \frac{\partial^{\mathfrak{l}} \mathfrak{y}^0}{\partial \mathfrak{t}^{\mathfrak{l}}} \mathfrak{g}^{\mathfrak{l}}$$

und daraus folgt, das dann die zu K_0 benachbarte Kurve $K_{\mathfrak{h}}$ in gleicher Weise unbestimmt ist wie K_0.[1] Die Funktionen $\mathfrak{x}(\mathfrak{t},\mathfrak{s})$ und $\mathfrak{y}(\mathfrak{t},\mathfrak{s})$ haben hierbei, wie man aus (16) erkennt, einen Faktor $\chi(\mathfrak{t})$ gemeinsam, so daß

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{x}(\mathfrak{t},\mathfrak{s}) \equiv \chi(\mathfrak{t}) \cdot \bar{\mathfrak{x}}(\mathfrak{t},\mathfrak{s}) \text{ und } \mathfrak{y}(\mathfrak{t},\mathfrak{s}) \equiv \chi(\mathfrak{t}) \cdot \bar{\mathfrak{y}}(\mathfrak{t},\mathfrak{s}) \\ &\text{wird, wobei} \\ &\chi(\mathfrak{t}_0) = \chi'(\mathfrak{t}_0) = \cdots \chi^{(\mathfrak{l}-1)}(\mathfrak{t}_0) = 0;\ \chi^{(\mathfrak{l})}(\mathfrak{t}_0) \neq 0 \end{aligned}\right\} \quad (37)$$

ist. In diesem Fall kann also K_0 als Grenzform der $K_{\mathfrak{h}}$ unter keinen Umständen zerfallen.

Ist nun eine beliebige Regelschar Φ_0 und auf ihr eine Kurve K_0 durch (1), beziehungsweise (2) gegeben, wobei die Größen $\mathfrak{x}(\mathfrak{t})$ und $\mathfrak{y}(\mathfrak{t})$ an einer analytischen Stelle $\mathfrak{t}_0$ samt ihren Ableitungen bis einschließlich zur $(\mathfrak{k}-1)$ten Ordnung verschwinden, so kann man hiezu auf die verschiedensten Arten eine stetige Reihe von Regelscharen $\Phi_{\mathfrak{s}}$ und Kurven $K_{\mathfrak{s}}$ finden, da die Funktionen $\mathfrak{x}(\mathfrak{t},\mathfrak{s})$, $\mathfrak{y}(\mathfrak{t},\mathfrak{s})$ und $p(\mathfrak{t},\mathfrak{s})$, $q(\mathfrak{t},\mathfrak{s})$ bis auf ihre A n f a n g s w e r t e bei $\mathfrak{s}_0$ willkürlich sind. Läßt man nur solche Formänderungen zu, bei welchen die zu Φ_0 benachbarte $\Phi_{\mathfrak{h}}$ in der Umgebung von $\mathfrak{t}_0$ keine Stelle besitzt, bei der $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ gleichzeitig verschwinden, so ist nach obigem $\Delta_{\mathfrak{k}}^0$ stets $\neq 0$.

Somit kann dem 1. Hilfssatz hinzugefügt werden:

Die genannte Art des Zerfallens der Kurve K_0 tritt i. a. immer ein, wie auch die Reihe der $\Phi_{\mathfrak{s}}$ gewählt werden mag, sobald vorausgesetzt wird, daß die zu K_0 benachbarte Kurve $K_{\mathfrak{h}}$ in der Umgebung von $\mathfrak{t}_0$ nicht unbestimmt ist.

---

[1] Es ist klar, daß hiebei nur in ganz speziellen Fällen eine Parametertransformation von der Form $\mathfrak{w} = \mathfrak{s}^{\mathfrak{l}}$ und damit eine Zurückführung auf einen der früheren Fälle möglich ist. Obiger Fall ergibt sich aber auch, wenn in (33) der Exponent von $\mathfrak{w}$ größer als $\mathfrak{l}$ angenommen wird.

Aus diesen Resultaten folgt jetzt die eigentlich selbstverständliche Tatsache, daß man immer eine solche Formänderung herstellen kann, daß beliebig viele, bei einer beliebigen Stelle $\mathfrak{t}_i$ benachbarte Erzeugende von Φ_0 zur Kurve K_0 zu zählen sind.

Man kann nämlich, ohne damit die einzelnen Punkte von K_0 zu ändern, $\mathfrak{x}(\mathfrak{t})$ und $\mathfrak{y}(\mathfrak{t})$ mit einem Faktor $\chi(\mathfrak{t})$ multiplizieren, der samt seinen Ableitungen bis zur $(\mathfrak{f}-1)$ten Ordnung bei $\mathfrak{t}=\mathfrak{t}_i$ verschwindet, und hierauf die Funktionen $\mathfrak{x}(\mathfrak{t}, \mathfrak{s})$ und $\mathfrak{y}(\mathfrak{t}, \mathfrak{s})$ so wählen, daß $\Delta_{\mathfrak{f}}^{i} \neq 0$ ist. Es ist hiebei allerdings zu untersuchen, ob diese Multiplikation mit $\chi(\mathfrak{t})$ der Definition von K_0 untergeordnet werden kann. Wie man aus Nr. 1, (15) leicht ersieht, ist eine solche Multiplikation bei der Striktionslinie einer Regelschar nur dann zulässig, wenn der Faktor $\chi(\mathfrak{t})$ die Form $(\mathfrak{t}-\mathfrak{t}_0)^{8\mathfrak{n}-2}$ ($\mathfrak{n}$ beliebig) besitzt, so daß hienach jedes $\mathfrak{p}_i$ und $\mathfrak{q}_i$ durch $(\mathfrak{t}-\mathfrak{t}_0)^{\mathfrak{n}}\mathfrak{p}_i$, beziehungsweise $(\mathfrak{t}-\mathfrak{t}_0)^{\mathfrak{n}}\mathfrak{q}_i$ zu ersetzen ist; wodurch Φ_0 nicht geändert wird. Des weiteren ist zu beachten, daß die Striktionslinie einer Regelschar nicht als Grenzform einer beliebigen Kurve, sondern als Grenzform der **Striktionslinie** einer zu Φ_0 fast ähnlichen Regelschar aufzufassen ist. Wie wir später sehen werden,[1] reicht aber auch diese Einschränkung nicht aus, um in allen Fällen von einem Zerfallen der Striktionslinie sprechen zu können. Es ist vielmehr nötig, den Flächen Φ_0 und $\Phi_{\mathfrak{h}}$ bestimmte gemeinsame Bedingungen aufzuerlegen. Im folgenden werden zunächst nur solche stetige Reihen von Regelscharen in Betracht gezogen, bei welchen alle $\Phi_{\mathfrak{s}}$ untereinander kollinear sind. Es geschieht dies mit Rücksicht auf die später zu untersuchenden algebraischen Regelflächen.

Nr. 3.

Ist die stetige Reihe der Regelscharen von der Art, daß alle $\Phi_{\mathfrak{s}}$ untereinander kollinear sind, so gibt es immer eine Reihe von Kollineationen $\mathfrak{K}_{\mathfrak{s}}$, von welchen jede die ursprüngliche Fläche Φ_0 in eine $\Phi_{\mathfrak{s}}$ der Reihe überführt. Da es gleichgültig ist, welche Kurven auf jeder $\Phi_{\mathfrak{s}}$ als deren Leitkurven $p_{\mathfrak{s}}$, $q_{\mathfrak{s}}$ gewählt werden, können wir annehmen, daß die Leitkurven

$$p = p(\mathfrak{t}, \mathfrak{s}_0) \text{ und } q = q(\mathfrak{t}, \mathfrak{s}_0)$$

von Φ_0 durch die Kollineation $\mathfrak{K}_{\mathfrak{s}}$ in die Leitkurven

$$p_{\mathfrak{s}} = p(\mathfrak{t}, \mathfrak{s}_i) \text{ und } q_{\mathfrak{s}} = q(\mathfrak{t}, \mathfrak{s}_i)$$

von $\Phi_{\mathfrak{s}}$ übergehen. Sind umgekehrt alle Kurvenpaare $p_{\mathfrak{s}}\, q_{\mathfrak{s}}$ zum Kurvenpaar $p\,q$ kollinear, so sind auch die $\Phi_{\mathfrak{s}}$ zu Φ_0 kollinear. Nun läßt sich (nach Graßmann) jede Kollineation des Raumes

---

[1] Vgl. Schluß von Nr. 3.

dadurch verwirklichen, daß man die ursprünglichen Einheiten $e_0 e_1 e_2 e_3$ durch vier andere von einander unabhängige Punkte $a_0 a_1 a_2 a_3$ ersetzt, für welche

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \mathfrak{a}_{00}\, e_0 + \mathfrak{a}_{01}\, e_1 + \mathfrak{a}_{02}\, e_2 + \mathfrak{a}_{03}\, e_3 \\ a_1 &= \mathfrak{a}_{10}\, e_0 + \mathfrak{a}_{11}\, e_1 + \mathfrak{a}_{12}\, e_2 + \mathfrak{a}_{13}\, e_3 \\ a_2 &= \mathfrak{a}_{20}\, e_0 + \mathfrak{a}_{21}\, e_1 + \mathfrak{a}_{22}\, e_2 + \mathfrak{a}_{23}\, e_3 \\ a_3 &= \mathfrak{a}_{30}\, e_0 + \mathfrak{a}_{31}\, e_1 + \mathfrak{a}_{32}\, e_2 + \mathfrak{a}_{33}\, e_3 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

ist, wobei die Determinante $|\mathfrak{a}_{ik}| \neq 0$ sein soll.

Somit ist das Kurvenpaar $p_{\mathfrak{s}}\, q_{\mathfrak{s}}$ dann und nur dann zu $p\, q$ kollinear, wenn die Ableitungszahlen von $p_{\mathfrak{s}}$ und $q_{\mathfrak{s}}$ die Form haben:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{p}_{\mathfrak{s}i} &= \mathfrak{a}_{0i}\, \mathfrak{p}_0 + \mathfrak{a}_{1i}\, \mathfrak{p}_1 + \mathfrak{a}_{2i}\, \mathfrak{p}_2 + \mathfrak{a}_{3i}\, \mathfrak{p}_3 \\ \mathfrak{q}_{\mathfrak{s}i} &= \mathfrak{a}_{0i}\, \mathfrak{q}_0 + q_{1i}\, \mathfrak{q}_1 + \mathfrak{a}_{2i}\, \mathfrak{q}_2 + \mathfrak{a}_{3i}\, \mathfrak{q}_3 \end{aligned}\right\} (i = 0, 1, 2, 3), \tag{3}$$

wobei die $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{p}_i(\mathfrak{t})$ und $\mathfrak{q}_i = \mathfrak{q}_i(\mathfrak{t})$ $(i = 0, 1, 2, 3)$ die Ableitungszahlen von p, beziehungsweise q sind. Sollen alle $\Phi_{\mathfrak{s}}$ auf diese Weise zu erhalten sein, so sind die $\mathfrak{a}_{ik}$ als solche Funktionen $\mathfrak{a}_{ik}(\mathfrak{s})$ des Parameters $\mathfrak{s}$ zu wählen, daß für $\mathfrak{s} = \mathfrak{s}_0$

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{a}_{ii} &= 1, \ (i = 0, 1, 2, 3) \\ \mathfrak{a}_{ik} &= 0, \ i \neq k \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

wird. Setzen wir voraus, das alle $\mathfrak{a}_{ik}(\mathfrak{s})$ in der Umgebung der Stelle $\mathfrak{s}_0$ analytisch sind, so können sie an dieser Stelle entwickelt werden. Es ergibt sich dann für jedes $\Phi_{\mathfrak{s}} = \Phi_{\mathfrak{h}}$

$$\mathfrak{a}_{ik}(\mathfrak{s}) = \mathfrak{a}_{ik}(\mathfrak{s}_0 + \mathfrak{h}) = \mathfrak{d} + \bar{\mathfrak{a}}_{ik}\mathfrak{h} + \frac{1}{2!}\bar{\bar{\mathfrak{a}}}_{ik}\, \mathfrak{h}^2 + . \tag{5}$$

$$(i, k = 0, 1, 2, 3)$$

worin für $i = k$ die Größe $\mathfrak{d} = 1$, für $i \neq k$ hingegen $\mathfrak{d} = 0$ sei und die $\bar{\mathfrak{a}}_{ik}$, $\bar{\bar{\mathfrak{a}}}_{ik}$,. die 1., 2.,.. Ableitung der $\mathfrak{a}_{ik}(\mathfrak{s})$ nach $\mathfrak{s}$, genommen an der Stelle $\mathfrak{s} = \mathfrak{s}_0$ bedeuten. Hienach erhalten die Gleichungen (3) die Form

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{p}_{\mathfrak{s}i} = \mathfrak{p}_{\mathfrak{h}i} &= \mathfrak{p}_i + (\bar{\mathfrak{a}}_{0i}\, \mathfrak{p}_0 + \bar{\mathfrak{a}}_{1i}\, \mathfrak{p}_1 + \bar{\mathfrak{a}}_{2i}\, \mathfrak{p}_2 + \bar{\mathfrak{a}}_{3i}\, \mathfrak{p}_3)\, \mathfrak{h} + \\ &+ \frac{1}{2!}(\bar{\bar{\mathfrak{a}}}_{0i}\, \mathfrak{p}_0 + \bar{\bar{\mathfrak{a}}}_{1i}\, \mathfrak{p}_1 + \bar{\bar{\mathfrak{a}}}_{2i}\, \mathfrak{p}_2 + \bar{\bar{\mathfrak{a}}}_{3i}\, \mathfrak{p}_3)\, \mathfrak{h}^2 + \quad . \\ \mathfrak{q}_{\mathfrak{s}i} = \mathfrak{q}_{\mathfrak{h}i} &= \mathfrak{q}_i + (\bar{\mathfrak{a}}_{0i}\, \mathfrak{q}_0 + \bar{\mathfrak{a}}_{1i}\, \mathfrak{q}_1 + \bar{\mathfrak{a}}_{2i}\, \mathfrak{q}_2 + \bar{\mathfrak{a}}_{3i}\, \mathfrak{q}_3)\, \mathfrak{h} + \\ &+ \frac{1}{2!}(\bar{\bar{\mathfrak{a}}}_{0i}\, \mathfrak{q}_0 + \bar{\bar{\mathfrak{a}}}_{1i}\, \mathfrak{q}_1 + \bar{\bar{\mathfrak{a}}}_{2i}\, \mathfrak{q}_2 + \bar{\bar{\mathfrak{a}}}_{3i}\, \mathfrak{q}_3)\, \mathfrak{h}^2 + \quad . \end{aligned}\right\} (i = 0, 1, 2, 3). \tag{6}$$

Setzt man

$$\left.\begin{array}{l}\bar{\mathfrak{a}}_{0i}\,\mathfrak{p}_0+\bar{\mathfrak{a}}_{1i}\,\mathfrak{p}_1+\bar{\mathfrak{a}}_{2i}\,\mathfrak{p}_2+\bar{\mathfrak{a}}_{3i}\,\mathfrak{p}_3=\bar{\mathfrak{p}}_i\\ \bar{\mathfrak{a}}_{0i}\,\mathfrak{q}_0+\bar{\mathfrak{a}}_{1i}\,\mathfrak{q}_1+\bar{\mathfrak{a}}_{2i}\,\mathfrak{q}_2+\bar{\mathfrak{a}}_{3i}\,\mathfrak{q}_3=\bar{\mathfrak{q}}_i,\\ \text{ferner}\\ \bar{\bar{\mathfrak{a}}}_{0i}\,\mathfrak{p}_0+\bar{\bar{\mathfrak{a}}}_{1i}\,\mathfrak{p}_1+\bar{\bar{\mathfrak{a}}}_{2i}\,\mathfrak{p}_2+\bar{\bar{\mathfrak{a}}}_{3i}\,\mathfrak{p}_3=\bar{\bar{\mathfrak{p}}}_i\\ \bar{\bar{\mathfrak{a}}}_{0i}\,\mathfrak{q}_0+\bar{\bar{\mathfrak{a}}}_{1i}\,\mathfrak{q}_1+\bar{\bar{\mathfrak{a}}}_{2i}\,\mathfrak{q}_2+\bar{\bar{\mathfrak{a}}}_{3i}\,\mathfrak{q}_2=\bar{\bar{\mathfrak{q}}}_i\\ \text{usw.}\end{array}\right\}(i=0,1,2,3) \qquad (7)$$

und bezeichnet man die Punkte mit den Ableitungszahlen $\bar{\mathfrak{p}}_i, \bar{\bar{\mathfrak{p}}}_i, \ldots$ und $\bar{\mathfrak{q}}_i, \bar{\bar{\mathfrak{q}}}_i, \ldots$ $(i=0,1,2,3)$ der Reihe nach mit $\bar{p}, \bar{\bar{p}}, \ldots$ $\bar{q}, \bar{\bar{q}}, \ldots$ so ergeben sich für die Leitkurven von $\Phi_{\mathfrak{h}}$ die Entwicklungen

$$\left.\begin{array}{l}p_{\mathfrak{h}}=p+\bar{p}\,\mathfrak{h}+\frac{1}{2!}\bar{\bar{p}}\,\mathfrak{h}^2+\ldots\\ q_{\mathfrak{h}}=q+\bar{q}\,\mathfrak{h}+\frac{1}{2!}\bar{\bar{q}}\,\mathfrak{h}^2+\ldots\end{array}\right\}, \qquad (8)$$

die die allgemeinste Form des Kurvenpaares $p_{\mathfrak{h}}\,q_{\mathfrak{h}}$ darstellen.[1] Letzteres bestimmt die zu Φ_0 kollineare Fläche $\Phi_{\mathfrak{h}}$. Somit gilt der

2. Hilfssatz: *Die allgemeinste Form einer Φ_0 enthaltenden stetigen Reihe von Regelscharen $\Phi_{\mathfrak{h}}$, von welchen jede zu Φ_0 kollinear ist, wird erhalten, indem man zunächst die Größen $\bar{\mathfrak{a}}_{ik}$, $\bar{\bar{\mathfrak{a}}}_{ik}, \ldots$ beliebig wählt und hierauf gemäß* (7) *und* (8) *die Punkte $p_{\mathfrak{h}}\,q_{\mathfrak{h}}$ bildet. Diese sind dann als Funktionen von* $\mathfrak{t}$ *gegeben und stellen für jedes $\mathfrak{h}$ die Leitkurven einer durch*

$$x=\mathfrak{u}\,.\,p_{\mathfrak{h}}+\mathfrak{v}\,.\,q_{\mathfrak{h}} \qquad (9)$$

gegebenen Regelschar $\Phi_{\mathfrak{h}}$ dieser Reihe dar.

Nun ist für jede der $\Phi_{\mathfrak{h}}$ die Striktionslinie zu berechnen. Zu diesem Zweck haben wir in den Gleichungen (15) und (16a, b, c) von **Nr. 1** an Stelle der $\mathfrak{p}_i$, $\mathfrak{q}_i$, $\mathfrak{p}'_i$, $\mathfrak{q}'_i$ die Größen $\mathfrak{p}_{\mathfrak{h}i}$, $\mathfrak{q}_{\mathfrak{h}i}$ [siehe oben Gleichung (6)] und deren 1. Ableitungen nach $\mathfrak{t}$

$$\begin{aligned}\mathfrak{p}'_{\mathfrak{h}i}&=\mathfrak{p}'_i+(\bar{\mathfrak{a}}_{0i}\,\mathfrak{p}'_0+\bar{\mathfrak{a}}_{1i}\,\mathfrak{p}'_1+\bar{\mathfrak{a}}_{2i}\,\mathfrak{p}'_2+\bar{\mathfrak{a}}_{3i}\,\mathfrak{p}'_3)\,\mathfrak{h}+\ldots,\\ \mathfrak{q}'_{\mathfrak{h}i}&=\mathfrak{q}'_i+(\bar{\mathfrak{a}}_{0i}\,\mathfrak{q}'_0+\bar{\mathfrak{a}}_{1i}\,\mathfrak{q}'_1+\bar{\mathfrak{a}}_{2i}\,\mathfrak{q}'_2+\bar{\mathfrak{a}}_{3i}\,\mathfrak{q}'_3)\,\mathfrak{h}+\ldots\end{aligned}$$

einzusetzen. Da die $\mathfrak{p}_i(\mathfrak{t})$ und $\mathfrak{q}_i(\mathfrak{t})$ nach Voraussetzung analytisch sind, so gilt dies wegen (6) auch für die $\mathfrak{p}_{\mathfrak{h}i}(\mathfrak{t})$ und $\mathfrak{q}_{\mathfrak{h}i}(\mathfrak{t})$ und

[1] Hierin sind, wie man aus (7) unmittelbar erkennt, die Kurvenpaare $\bar{p}\,\bar{q}$, $\bar{\bar{p}}\,\bar{\bar{q}}, \ldots$ gleichfalls mit $p\,q$ kollinear, wobei aber die zugehörigen Determinanten $|\bar{\mathfrak{a}}_{ik}|$, $|\bar{\bar{\mathfrak{a}}}_{ik}|, \ldots$ nicht von Null verschieden sein müssen. — Die $\mathfrak{a}_{ik}$ könnten auch ganze rationale Funktionen von $\mathfrak{z}$ sein.

ebenso für $\mathfrak{p}'_i$, $\mathfrak{q}'_i$ und $\mathfrak{p}'_{i\mathfrak{h}}$, $\mathfrak{q}'_{i\mathfrak{h}}$. Daraus ergibt sich, daß die Striktionslinien $S_\mathfrak{h}$ der $\Phi_\mathfrak{h}$ gleichfalls eine stetige Reihe bilden und damit ist gezeigt, daß auf sie der 1. Hilfssatz angewendet werden darf.

Die in Nr. 1, Gleichung (16a, b, c) auftretenden dreireihigen Determinanten ändern ihre Form nach dem Einsetzen der $\mathfrak{p}_{\mathfrak{h}i}$ und $\mathfrak{q}_{\mathfrak{h}i}$ in der Weise, daß z. B.

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{p}_{\mathfrak{h}0} & \mathfrak{q}_{\mathfrak{h}0} & \mathfrak{p}'_{\mathfrak{h}0} \\ \mathfrak{p}_{\mathfrak{h}2} & \mathfrak{q}_{\mathfrak{h}2} & \mathfrak{p}'_{\mathfrak{h}2} \\ \mathfrak{p}_{\mathfrak{h}3} & \mathfrak{q}_{\mathfrak{h}3} & \mathfrak{p}'_{\mathfrak{h}3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathfrak{p}_0 & \mathfrak{q}_0 & \mathfrak{p}'_0 \\ \mathfrak{p}_2 & \mathfrak{q}_2 & \mathfrak{p}'_2 \\ \mathfrak{p}_3 & \mathfrak{q}_3 & \mathfrak{p}'_3 \end{vmatrix} + \left(\begin{vmatrix} \bar{\mathfrak{a}}_{00}\mathfrak{p}_0 & \mathfrak{q}_0 & \mathfrak{p}'_0 \\ \bar{\mathfrak{a}}_{02}\mathfrak{p}_0 & \mathfrak{q}_2 & \mathfrak{p}'_2 \\ \bar{\mathfrak{a}}_{03}\mathfrak{p}_0 & \mathfrak{q}_3 & \mathfrak{p}'_3 \end{vmatrix} + \begin{matrix} \text{11 ähnliche Determinanten, in} \\ \text{welchen neben den } \mathfrak{p}_i\,\mathfrak{q}_i\,\mathfrak{p}'_i\,\mathfrak{q}'_i \\ \text{bloß die } \bar{\mathfrak{a}}_{ik} \text{ auftreten} \end{matrix} \right) \mathfrak{h}$$

$$+ \frac{1}{2!} \begin{pmatrix} \text{Determinanten, in welchen} \\ \text{neben den } \mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{q}_i,\ \mathfrak{p}'_i,\ \mathfrak{q}'_i,\ \bar{\mathfrak{a}}_{ik} \\ \text{auch die } \bar{\bar{\mathfrak{a}}}_{ik} \text{ auftreten} \end{pmatrix} \mathfrak{h}^2 + \ldots . \tag{10}$$

wird und analog gilt für jede andere Determinante $\mathfrak{D}$ in Nr. 1, (16a, b, c)

$$\mathfrak{D}_\mathfrak{h} = \mathfrak{D}_0 + \mathfrak{D}_1 (\bar{\mathfrak{a}}_{ik}, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{q}_i, \mathfrak{p}'_i, \mathfrak{q}'_i)\, \mathfrak{h} + \frac{1}{2!} \mathfrak{D}_2 (\bar{\mathfrak{a}}_{ik}, \bar{\bar{\mathfrak{a}}}_{ik}, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{q}_i, \mathfrak{p}'_i, \mathfrak{q}'_i)\, \mathfrak{h}^2 + . \tag{11}$$

Die in Nr. 1, Gleichung (15) stehenden Größen $\mathfrak{p}_0\,\mathfrak{q}_0$ erhalten für eine beliebige $\Phi_\mathfrak{h}$ die Form

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{p}_{\mathfrak{h}0} &= \mathfrak{p}_0 + (\bar{\mathfrak{a}}_{00}\,\mathfrak{p}_0 + \bar{\mathfrak{a}}_{10}\,\mathfrak{p}_1 + \bar{\mathfrak{a}}_{20}\,\mathfrak{p}_2 + \bar{\mathfrak{a}}_{30}\,\mathfrak{p}_3)\,\mathfrak{h} + . \\ \mathfrak{q}_{\mathfrak{h}0} &= \mathfrak{q}_0 + (\bar{\mathfrak{a}}_{00}\,\mathfrak{q}_0 + \bar{\mathfrak{a}}_{10}\,\mathfrak{q}_1 + \bar{\mathfrak{a}}_{20}\,\mathfrak{q}_2 + \bar{\mathfrak{a}}_{30}\,\mathfrak{q}_3)\,\mathfrak{h} + \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Wir betrachten nun jene Stelle $\mathfrak{t}_0$ auf der ursprünglichen Fläche Φ_0, bei der die beiden Faltprodukte[1]

$$\mathfrak{X} = \{e^{(2)}.\sigma\,\alpha\} \text{ und } \mathfrak{Y} = -\{e^{(2)}.\rho\,\alpha\}$$

gleich Null werden und nehmen ferner gleich an, daß $\mathfrak{k}$ die Ordnung der niedrigsten, für $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_0$ nicht gleichzeitig verschwindenden Ableitungen dieser Größen nach $\mathfrak{t}$ angibt.

Es ist sodann der Parameter $\mathfrak{z}$ nach Nr. 2, Gleichung (33) zu transformieren, d. h. in obigen Gleichungen (10), (11) und (12) die Größe $\mathfrak{h}$ durch $\mathfrak{w}^\mathfrak{k}$ zu ersetzen. Bilden wir hierauf nach dem 1. Hilfssatz die Determinante $\Delta^0_\mathfrak{k}$, so erkennt man aus (10) und (11), daß dieselbe bloß von den $\bar{\mathfrak{a}}_{ik}$ abhängt, da die $\mathfrak{p}_i$, $\mathfrak{q}_i$, $\mathfrak{p}'_i$, $\mathfrak{q}'_i$ für $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_0$ feste Zahlen darstellen, die mit der ursprünglichen Fläche gegeben sind. Wie in Nr. 2 ist daher $\Delta^0_\mathfrak{k}$ i. a. von Null verschieden.

Nur wenn die beliebig gewählten Größen $\bar{\mathfrak{a}}_{ik}$ zufällig die Gleichung

$$\Delta^0_\mathfrak{k} = 0$$

[1] Siehe Nr. 1 (13).

befriedigen, ist die betrachtete Formänderung wie früher, von der Art, daß die zu Φ_0 benachbarte $\Phi_{\mathfrak{h}}$ in der Umgebung der Stelle $\mathfrak{t}_0$ gleichfalls unbestimmte Punkte der Striktionslinie aufweist, was wieder außer Betracht bleibt.

Nach Nr. 2, (37) wäre jedoch Δ_1^0 unabhängig von den $\bar{\mathfrak{a}}_{ik}$. immer $= 0$, sobald $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ einen Faktor $\chi(\mathfrak{t})$ gemeinsam hätten. Um zu untersuchen, wann dies im vorliegenden Fall eintritt, betrachten wir die Gleichungen (15) und (18) von Nr. 1 und denken uns hierin wieder die Größen $\mathfrak{p}_{\mathfrak{h}i}$ und $\mathfrak{q}_{\mathfrak{h}i}$ eingesetzt. Man erkennt dann mit Hilfe von Nr. 1, (16a, b, c), daß $\mathfrak{X}(\mathfrak{t}, \mathfrak{h})$ und $\mathfrak{Y}(\mathfrak{t}, \mathfrak{h})$ dann und nur dann einen Faktor $\chi(\mathfrak{t})$ gemeinsam haben,[1] wenn entweder

a) $\mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$ und $\mathfrak{p}_3$ oder

b) $\mathfrak{q}_0, \mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2$ und $\mathfrak{q}_3$ oder

c) $\mathfrak{p}'_0, \mathfrak{p}'_1, \mathfrak{p}'_2, \mathfrak{p}'_3, \mathfrak{q}'_0, \mathfrak{q}'_1, \mathfrak{q}'_2$, und $\mathfrak{q}'_3$

einen Faktor $\chi(\mathfrak{t})$ gemeinsam haben oder, wenn

d) in (12) alle $\bar{\mathfrak{a}}_{i0}, \bar{\bar{\mathfrak{a}}}_{i0}, \ldots$ gleich Null sind und $\mathfrak{p}_0$ und $\mathfrak{q}_0$ einen solchen Faktor aufweisen oder endlich, wenn

e) für einen Wert von $\mathfrak{t}$ die Punkte p' und q' aus p und q linear ableitbar sind, oder wenn

f) die vorliegende Regelfläche Φ_0 abwickelbar ist.

Im letzten Fall ist, wie man auch aus Nr. 1, (18) erkennt, die Striktionslinie (Gratlinie) von der Eigenschaft, daß sie durch jede Kollineation immer wieder in die Striktionslinie (Gratlinie) der zu Φ_0 kollinearen Fläche übergeht. Somit kann bei solchen Flächen mit Hilfe einer stetigen Reihe von der Form (9) nicht konstatiert werden, ob einige ihrer Erzeugenden zur Striktionslinie zu zählen sind. Wir betrachten daher im folgenden bloß windschiefe Regelscharen, die aber eine diskrete Anzahl von Torsallinien besitzen können.

Im Fall a) oder b) wäre $\mathfrak{p}_i = \chi(\mathfrak{t}).\mathfrak{p}_i^{\times}$, beziehungsweise $\mathfrak{q}_i = \chi(\mathfrak{t}).\mathfrak{q}_i^{\times}$ $(i = 0, 1, 2, 3)$, wobei die $\mathfrak{p}_i^{\times}$ und $\mathfrak{q}_i^{\times}$ teilerfremd seien und $\chi(\mathfrak{t}_0) = 0$ ist. Hernach ist

$$p(\mathfrak{t}_0) = q(\mathfrak{t}_0) = 0.$$

Da wir aber annehmen können, daß die Leitkurven P und Q nirgends unbestimmt sind, werden diese auch durch $p^{\times} = \sum_0^3 \mathfrak{p}_i^{\times} e_i$ beziehungsweise $q^{\times} = \sum_0^3 \mathfrak{q}_i^{\times} e_i$ dargestellt. Somit kann ohne

---

[1] Jede der Determinanten in (16) hat nur dann einen solchen Faktor, wenn wenigstens die Glieder einer Reihe diesen Faktor gemeinsam haben. Andere Faktoren als die im Text genannten können nur bei spezieller Annahme der $\bar{\mathfrak{a}}_{ik}, \bar{\bar{\mathfrak{a}}}_{ik}, \ldots$ vorhanden sein.

Beschränkung der Allgemeinheit vorausgesetzt werden, daß sowohl die $\mathfrak{p}_i$ als auch die $\mathfrak{q}_i$ teilerfremd sind und demnach bei keinem Wert von t gleichzeitig verschwinden. Darnach können die Fälle a) und b) nicht eintreten, und man erkennt, daß es im vorliegenden Fall durchaus unzulässig ist, die Größen $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ mit einem Faktor χ(t) zu multiplizieren. Im Sinne der Definition der Striktionslinie müßten nämlich hernach alle $\mathfrak{p}_i$ und $\mathfrak{q}_i$ mit einem bei t_i verschwindenden Faktor multipliziert worden,[1] worauf $\Delta\mathfrak{k}$ nach obigem niemals $\neq 0$ sein kann.

Im Fall c) verschwinden alle $\mathfrak{p}'_i$ und $\mathfrak{q}'_i$ und daher auch p' und q' bei allen Nullstellen von χ(t). Ist dieses Verschwinden keine Besonderheit der Parameterdarstellung wie unter a) und b), so tritt es nur dann ein, wenn die betreffende Erzeugende von Φ_0 eine Rückkehrerzeugende (Kuspidalkante) ist. Man erkennt nämlich aus Nr. 1, (7), (8) und (8a), daß alle Punkte einer Erzeugenden, bei der p' und $q' = 0$ ist, Kuspidalpunkte der Fläche sind. Alle zu Φ_0 kollinearen Regelscharen besitzen dann an den korrespondierenden Stellen gleichfalls solche Kuspidalkanten.[2] Es ist somit in diesem Fall unmöglich, die Fläche Φ_0 durch stetige Formänderungen in eine kollineare $\Phi_\mathfrak{h}$ überzuführen, bei der die Größen $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ an der entsprechenden Stelle nicht verschwinden. Das Gleiche gilt auch im Fall e), wo eine Erzeugende der Fläche Φ_0 von P und Q berührt wird. Solche Erzeugende können daher nicht zur Striktionslinie gerechnet werden (sofern nur stetige Reihen von kollinearen Regelscharen zu betrachten sind).

Schließlich erkennt man aus (2) und (5), daß im Fall d) alle $\Phi_\mathfrak{h}$ zu Φ_0 affin sind. Es besitzen dann alle Flächen der Reihe an jeder Nullstelle von χ(t) eine uneigentliche Erzeugende und auf dieser einen unbestimmten Punkt der Striktionslinie. Setzen wir hingegen voraus, daß die zu Φ_0 benachbarte $\Phi_\mathfrak{h}$ nicht affin, sondern allgemein kollinear ist, so kann ein Faktor von $\mathfrak{p}_0$ und $\mathfrak{q}_0$ bloß für $\mathfrak{h} = 0$ vorhanden sein.[3]

Aus obigem und dem 1. Hilfssatz ergibt sich nun der

1. Hauptsatz: *Gegeben sei eine windschiefe Regelschar* Φ *durch die Gleichung*

$$x = \mathfrak{u} . p\,(\mathrm{t}) + \mathfrak{v} . q\,(\mathrm{t}),$$

wobei p *und* q *an einer Stelle* t_0 *von* t *analytisch seien, und es möge in genügend großer Umgebung von* t_0 *keine Stelle geben, bei der*

---

[1] Siehe Nr. Schlußbemerkung.

[2] Dies zeigen auch die Gleichungen (3) und (6) dieser Nummer.

[3] Vgl. hierzu Nr. 2, (22).

1. die Punkte p und q kongruent sind,

2. $p = 0$ oder $q = 0$ ist oder

3. die ersten Ableitungen p', q' von p, beziehungsweise q *gleichzeitig verschwinden oder aus p und q ableitbar sind. Stellt sodann*

$$c = \mathfrak{X}(\mathfrak{t}) \cdot p(\mathfrak{t}) + \mathfrak{Y}(\mathfrak{t}) \cdot q(\mathfrak{t})$$

die Striktionslinie S von Φ dar und besitzt S die Eigenschaft, daß die Größen $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ und deren sämtliche Ableitungen bis einschließlich zur $(\mathfrak{k}-1)$*ten Ordnung für* $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_0$ *verschwinden, während die* $\mathfrak{k}$*-ten Ableitungen von $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ für* $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_0$ *nicht gleichzeitig gleich* 0 *sind, so zerfällt S als Grenzform der Striktionslinie einer zu Φ fast ähnlichen, kollinearen Regelschar $\Phi_{\mathfrak{h}}$ fast immer*[1] *in die $\mathfrak{k}$, bei der Stelle $\mathfrak{t}_0$ benachbarten Erzeugenden von Φ und in eine, die letzteren im Punkt*

$$\bar{k}_0 = \frac{\partial^{\mathfrak{k}} \mathfrak{X}^0}{\partial \mathfrak{t}^{\mathfrak{k}}} p^0 + \frac{\partial^{\mathfrak{k}} \mathfrak{Y}^0}{\partial \mathfrak{t}^{\mathfrak{k}}} q^0$$

schneidende »eigentliche Striktionslinie«.

Die hierin genannten Voraussetzungen sind dann und nur dann erfüllt, wenn obiges Verhalten von $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ durch spezielle geometrische Eigenschaften von Φ in der Umgebung der zu $\mathfrak{t}_0$ gehörigen Erzeugenden E_0 veranlaßt wird.[2] Hiebei ist nur von den schon erwähnten Rückkehrerzeugenden abzusehen. Welche verschiedene Fälle von Erzeugenden, die zur Striktionslinie gehören, möglich sind, wird in Nr. 4 näher untersucht werden. Aus obigem soll sogleich die eingangs genannte Verallgemeinerung des Sturm'schen Satzes abgeleitet werden.

Zu diesem Zweck nehmen wir jetzt an, daß Φ_0 eine algebraische Regelfläche sei und daß es $\mathfrak{f}$ Werte $\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2, \ldots \mathfrak{t}_{\mathfrak{f}}$ des Parameters $\mathfrak{t}$ gäbe, für welche die zur Striktionslinie S_0 von Φ_0 gehörigen Punkte wegen $\mathfrak{X} = \mathfrak{Y} = 0$ unbestimmt sind. Hiebei sei aber vorausgesetzt, daß nur eine diskrete Anzahl von solchen Stellen existiert.

Die durch $p(\mathfrak{t})$ und $q(\mathfrak{t})$ gegebenen Leitkurven P und Q von Φ_0 können dann stets so gewählt werden, daß sie in genügend großen Umgebungen dieser Stellen keine gemeinsamen Punkte oder Tangenten aufweisen, daß ferner die Ableitungszahlen $\mathfrak{p}_i(\mathfrak{t})$ und $\mathfrak{q}_i(\mathfrak{t})$ von p und q keinen gemeinsamen Teiler besitzen und daß die ersten Ableitungen der $\mathfrak{p}_i$ und $\mathfrak{q}_i$ nirgends gleichzeitig verschwinden. Um gleich den allgemeinsten Fall zu behandeln, nehmen wir weiters an, daß auch einige der Ableitungen von $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ nach $\mathfrak{t}$ bei den genannten Stellen $= 0$ werden und bezeichnen die Ordnung der

---

[1] Sofern nämlich die Striktionslinie von $\Phi_{\mathfrak{h}}$ bei $\mathfrak{t}_0$ nicht unbestimmt ist.

[2] Es folgt dies aus der geometrischen Bedeutung der Größen $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$.

niedrigsten Ableitungen der genannten Größen, die für $t = t_1, t_2 \ldots t_{\mathfrak{f}}$ nicht gleichzeitig verschwinden, der Reihe nach mit $\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2, \ldots \mathfrak{k}_{\mathfrak{f}}$. Nach dem 1. Hauptsatz gehören daher die $\mathfrak{k}_1$ bei der Stelle t_1, ferner die $\mathfrak{k}_2$ bei $t_2, \ldots$ und schließlich die $\mathfrak{k}_{\mathfrak{f}}$ bei der Stelle $t_{\mathfrak{f}}$ benachbarten Erzeugenden von Φ_0 zu deren Striktionslinie.

Um zu erkennen, welchem Gesetz die Anzahl dieser Erzeugenden unterworfen ist, bezeichnen wir die größte unter den Zahlen $\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2, \ldots \mathfrak{k}_{\mathfrak{f}}$ mit $\mathfrak{z}$; sie kann bei mehreren dieser Stellen gleichzeitig auftreten. Dadurch werden die Stellen $t_1, t_2 \ldots t_{\mathfrak{f}}$ in zwei Gruppen $t_1^{\times}, t_2^{\times}, \ldots t_{\mathfrak{c}}^{\times}$ und $t_1^0, t_2^0, \ldots t_{\mathfrak{f}-\mathfrak{c}}^0$ eingeteilt. Bei den ersteren ist die genannte Ordnungszahl $= \mathfrak{z}$, hingegen seien die zu den letztern gehörigen Zahlen $\mathfrak{k}_1^0, \mathfrak{k}_2^0, \ldots \mathfrak{k}_{\mathfrak{f}-\mathfrak{c}}^0$ kleiner als $\mathfrak{z}$.

Wir bilden nun nach dem 2. Hilfssatz eine Φ_0 enthaltende, stetige Reihe von $\Phi_{\mathfrak{h}}$ und üben nach Nr. 2 die Parametertransformation

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{w}^{\mathfrak{z}}$$

aus. Hiebei können wie früher die Größen $\bar{a}_{ik}$ stets so gewählt werden, daß alle nach dem 1. Hilfssatz für $t = t_1^{\times}, t_2^{\times}, \ldots t_{\mathfrak{c}}^{\times}$ zu bildenden Determinanten $\Delta_{\mathfrak{z}}^{\times} \neq 0$ sind. Die Größe $\mathfrak{w}$ kann dann derart genügend klein gewählt werden, daß

1. die zugehörige $\Phi_{\mathfrak{w}}$ eine Striktionslinie besitzt, in deren Gleichung alle Glieder von höherer als $\mathfrak{z}$-ter Ordnung für $t = t_0$ weggelassen werden können und

2. die Fläche $\Phi_{\mathfrak{w}}$ abgesehen von $t_1, t_2, \ldots t_{\mathfrak{f}}$ keine neue Stelle aufweist, bei der $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ gleichzeitig $= 0$ sind.

Die Striktionslinie $S_{\mathfrak{w}}$ von $\Phi_{\mathfrak{w}}$ ist dann nach dem 1. Hilfssatz an den Stellen $t = t_1^{\times}, t_2^{\times}, \ldots t_{\mathfrak{c}}^{\times}$ völlig bestimmt, und zwar schmiegt sie sich bei jeder dieser Stellen in $\mathfrak{z}$ zusammenhängenden Zügen an die zugehörigen Erzeugenden $E_1^{\times}, E_2^{\times}, \ldots E_{\mathfrak{c}}^{\times}$ von $\Phi_{\mathfrak{w}}$ an. S_0 zerfällt daher als Grenzform von $S_{\mathfrak{w}}$ in eine eigentliche Striktionslinie S_0 und in $\mathfrak{c} \times \mathfrak{z}$ Erzeugende von Φ_0, die bei $t_1^{\times}, t_2^{\times}, \ldots t_{\mathfrak{c}}^{\times}$ je zu $\mathfrak{z}$ benachbart sind. Für die restlichen Stellen $t_1^0, t_2^0, \ldots t_{\mathfrak{f}-\mathfrak{c}}^0$ ergibt sich aus Nr. 2, (34), daß alle Ableitungen der Größen $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ nach t und $\mathfrak{w}$ oder nach $\mathfrak{w}$ allein bis einschließlich zur $(\mathfrak{z}-1)$ten Ordnung verschwinden. Daraus folgt, daß sich die zu $t_1^0, t_2^0, \ldots t_{\mathfrak{f}-\mathfrak{c}}^0$ gehörigen Formenpaare $f_1^0, g_1^0;\ f_2^0, g_2^0; \ldots$ auf ihre ersten Glieder reduzieren, daß also nach Nr. 2 die eigentliche Kurve $S_{\mathfrak{w}}$ in der Umgebung dieser Stellen ohne Zerfallen in die eigentliche Striktionslinie von Φ_0 übergeht. Ferner ergibt sich, daß die für Φ_0 geltenden Zahlen $\mathfrak{k}_1^0, \mathfrak{k}_2^0 \ldots \mathfrak{k}_{\mathfrak{f}-\mathfrak{c}}^0$ wieder die Ordnung der niedrigsten Ableitungen von $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ angeben, die an diesen Stellen nicht gleichzeitig verschwinden. S_0 und $S_{\mathfrak{w}}$ sind daher bei $t_1^0, t_2^0, \ldots t_{\mathfrak{f}-\mathfrak{c}}^0$ in gleicher Weise unbestimmt.

Somit ist eine zu Φ_0 kollineare Regelfläche $\Phi_{\mathfrak{w}}$ gefunden, deren eigentliche Striktionslinie $S_{\mathfrak{w}}$ durch stetige Formänderung aus der eigentlichen Striktionslinie S_0 und $\mathfrak{e}\times\mathfrak{z}$ Erzeugenden von Φ_0 hervorgeht. Werden die Ordnungen von $S_{\mathfrak{w}}$ und S_0 mit $\mathfrak{o}_{\mathfrak{w}}$, beziehungsweise $\mathfrak{o}_0$ bezeichnet, so ist daher

$$\mathfrak{o}_{\mathfrak{w}} = \mathfrak{o}_0 + \mathfrak{e}\cdot\mathfrak{z}. \qquad (*)$$

Es schneidet nämlich jede Ebene des Raumes $S_{\mathfrak{w}}$ in $\mathfrak{o}_{\mathfrak{w}}$ Punkten und zu jedem derselben gibt es einen benachbarten Punkt, der entweder S_0 oder den genannten Erzeugenden von Φ_0 angehört.

Obiger Vorgang wird nun wiederholt. Ist $\bar{\mathfrak{z}}$ die größte der Zahlen $\mathfrak{k}_1^0, \ldots \mathfrak{k}_{\mathfrak{f}-\mathfrak{e}}^0$ und tritt $\bar{\mathfrak{z}}$ bei mehreren der Stellen $\mathfrak{t}_1^0, \ldots \mathfrak{t}_{\mathfrak{f}-\mathfrak{e}}^0$, z. B. bei $\bar{\mathfrak{t}}_1, \bar{\mathfrak{t}}_2, \ldots \bar{\mathfrak{t}}_{\mathfrak{b}}$ auf, so bilden wir eine $\Phi_{\mathfrak{w}}$ enthaltende stetige Reihe von kollinearen Regelflächen, bei der nach dem Einsetzen von

$$\mathfrak{h} = \bar{\mathfrak{w}}^{\bar{\mathfrak{z}}}$$

alle zu den Stellen $\bar{\mathfrak{t}}_1, \bar{\mathfrak{t}}_2, \ldots \bar{\mathfrak{t}}_{\mathfrak{b}}$ gehörigen Determinanten $\Delta_{\bar{\mathfrak{z}}}^0 \neq 0$ sind. Es ergibt sich dann eine Regelfläche $\Phi_{\bar{\mathfrak{w}}}$, die zu $\Phi_{\mathfrak{w}}$ und damit auch zu Φ_0 kollinear ist und deren Striktionslinie $S_{\bar{\mathfrak{w}}}$ nach dem 1. Hilfssatz bei allen Stellen $\mathfrak{t} = \bar{\mathfrak{t}}_1, \bar{\mathfrak{t}}_2, \ldots \bar{\mathfrak{t}}_{\mathfrak{b}}$ eindeutig bestimmt ist usw.

Wir erhalten schließlich nach höchstens $\mathfrak{f}$ solchen Schritten eine zu Φ_0 kollineare Regelfläche Φ, bei der die Größen $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ nirgends gleichzeitig verschwinden, deren Striktionslinie S somit nicht zerfällt.[1] Für die Ordnung $\mathfrak{o}$ von S ergibt sich hiebei durch wiederholte Anwendung von (*)

$$\mathfrak{o} = \mathfrak{o}_0 + \mathfrak{e}\cdot\mathfrak{z} + \mathfrak{d}\cdot\bar{\mathfrak{z}} + \ldots$$
$$= \mathfrak{o}_0 + \mathfrak{k}_1 + \mathfrak{k}_2 + \ldots + \mathfrak{k}_{\mathfrak{f}}$$

Besitzt Φ_0 als algebraische Regelfläche den Rang $\mathfrak{r}$, so gilt dies auch für $\Phi_{\mathfrak{w}}, \Phi_{\bar{\mathfrak{w}}}, \ldots$ und insbesondere für Φ. Die Ordnung der Striktionslinie S von Φ ist aber nach dem in der Einleitung zitierten Satz von Sturm[2] gleich $2\,\mathfrak{r}$. Somit gilt der

---

[1] Daß solche Flächen immer möglich sind, ergibt sich auch aus Nr. 4 dieser Arbeit.

[2] In der früher zitierten Arbeit von Sturm wurde zunächst folgendes Ergebnis gewonnen: Sucht man zu jedem Punkt x eines ebenen Schnittes D einer algebraischen Regelfläche Φ auf der durch x gehenden Erzeugenden jenen Punkt y, in welchem die Tangentialebene von Φ zur Tangentialebene in x senkrecht steht, so bilden die Punkte y eine Kurve C, deren Ordnung (i. a.) gleich der doppelten Rangzahl von Φ ist. Da es ∞^2 ebene Schnitte gibt, existieren auch auf jeder Regelfläche ∞^2 Kurven C. Ist D insbesondere die unendlichferne Kurve, so wird C zur Striktionslinie von Φ. Daraus schloß Sturm, daß auch die Ordnung der Striktionslinie einer algebraischen Regelfläche stets gleich dem doppelten Rang derselben ist. Dieser Schluß ist aber vorerst nur dann richtig, wenn diese Kurve nicht zerfällt. Es erübrigte sich daher, den 2. Hauptsatz des Textes in aller Strenge nachzuweisen. — Über die Ordnung der Striktionslinie schrieben nach Sturm auch Migotti (siehe »III«, p. 165) und Adler (siehe »I«, p. 563, vgl. auch »IV«, p. 65, Fußnote 2) sowie J. Majcen (siehe »Über die Striktionslinie allgemeiner windschiefer Flächen« Jugosl. Akad. znanosti i umjetnosti u Zagrebu, Rad 190, p. 44—53).

2. **Hauptsatz:**[1] *Die Striktionslinie einer algebraischen windschiefen Regelfläche ist entweder von der Ordnung* $2\,\mathfrak{r}$, *wenn* $\mathfrak{r}$ *den Rang der Fläche bezeichnet, oder diese Kurve zerfällt in eine eigentliche*[2] *Striktionslinie und in einzelne (besondere) Erzeugende der Fläche, wobei die Ordnung der eigentlichen Striktionslinie, vermehrt um die Anzahl der zur Striktionslinie gehörigen Erzeugenden, gleichfalls gleich* $2\,\mathfrak{r}$ *ist oder endlich die Striktionslinie überdeckt die ganze Fläche.*[3]

Bei vorstehender Ableitung wurden jene algebraischen Regelflächen ausgeschlossen, die eine oder mehrere Rückkehrerzeugenden besitzen. Diese Beschränkung kann man aber ohne weiteres fallen lassen, vorausgesetzt, daß bei keiner der Stellen $\mathfrak{t}_1, \ldots \mathfrak{t}_{\mathfrak{f}}$ eine solche Erzeugende (allgemeinerer Art) auftritt. Die Rückkehrerzeugenden können nämlich, wie schon erwähnt wurde,[4] an der Striktionslinie nicht teilnehmen und dies hat seinen Grund vor allem darin, daß ihre Existenz ohnehin die Rangzahl[5] und damit auch die Ordnung der Striktionslinie beeinflußt.

Durch obige Hauptsätze ist das Zerfallen der Striktionslinie von algebraischen windschiefen Flächen restlos klargestellt; es ist damit gezeigt, daß solche Flächen, sobald sie von gleichem Rang sind, stets gleiche Ordnungszahlen der Gesamtstriktionslinie besitzen.

Um auch für andere Regelflächen (z. B. für abwickelbare Flächen) ähnliche Ergebnisse zu erhalten, haben wir auch solche stetige Reihen von Regelscharen in Betracht zu ziehen, bei welchen die Nachbarfläche $\Phi_{\mathfrak{h}}$ nicht kollinear zu Φ_0 ist. Zu diesem Zweck nehmen wir an, daß die Größen $\mathfrak{p}_i(\mathfrak{t}, \mathfrak{s})$ und $\mathfrak{q}_i(\mathfrak{t}, \mathfrak{s})$ beliebige analytische Funktionen von $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{s}$ seien, die sich für $\mathfrak{s} = \mathfrak{s}_0$ auf $\mathfrak{p}_{i0}(\mathfrak{t})$ und $\mathfrak{q}_{i0}(\mathfrak{t})$ reduzieren. Entwickelt man $\mathfrak{p}_i$ und $\mathfrak{q}_i$ nach $\mathfrak{s}$, so ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{p}_i(\mathfrak{t}, \mathfrak{s}) &= \mathfrak{p}_i(\mathfrak{t}, \mathfrak{s}_0 + \mathfrak{h}) = \mathfrak{p}_i^0 + \bar{\mathfrak{p}}_i^0\,\mathfrak{h} + \frac{1}{2!}\bar{\bar{\mathfrak{p}}}_i^0\,\mathfrak{h}^2 + \cdots = \mathfrak{p}_{i\mathfrak{h}} \\ \mathfrak{q}_i(\mathfrak{t}, \mathfrak{s}) &= \mathfrak{q}_i(\mathfrak{t}, \mathfrak{s}_0 + \mathfrak{h}) = \mathfrak{q}_i^0 + \bar{\mathfrak{q}}_i^0\,\mathfrak{h} + \frac{1}{2!}\bar{\bar{\mathfrak{q}}}_i^0\,\mathfrak{h}^2 + \cdots = \mathfrak{q}_{i\mathfrak{h}} \end{aligned}\right\} (i = 0, 1, 2, 3), \tag{13}$$

---

[1] Siehe »III«, p. 165.

Die Bezeichnung »eigentliche Striktionslinie« findet sich auch bereits in der genannten Arbeit von Sturm, aber bloß für den Fall des Rotationshyperboloids und des gleichseitigen Paraboloids.

[3] Wegen der letzteren Möglichkeit siehe Schluß von Nr. 4.

[4] Siehe oben Fall c).

[5] Jeder ebene Schnitt einer solchen Fläche besitzt nämlich so viele Spitzen als Rückkehrerzeugende vorhanden sind. Vgl. auch zweitnächste Seite, Fußnote 1.

so erhält man

$$\left.\begin{aligned}\{e^{(2)}.\sigma\alpha\}_t &= \{e^{(2)}.\sigma\alpha\}_0 + \{e^{(2)}.\sigma\alpha\}'_0\,\mathfrak{g} + \frac{1}{2!} \\ \{e^{(2)}.\rho\alpha\}_t &= \{e^{(2)}.\rho\alpha\}_0 + \{e^{(2)}.\rho\alpha\}'_0\,\mathfrak{g} + \frac{1}{2!}\end{aligned}\right\}, \tag{2}$$

wobei die Nullen anzeigen sollen, daß die betreffenden Größen für $t = t_0$ zu nehmen sind.

Sind die Voraussetzungen des 1. Hauptsatzes erfüllt, so ist die zu t_0 gehörige Erzeugende E_0 dann und nur dann $\mathfrak{k}$-fach gezählt zur Striktionslinie zu rechnen, wenn in (2) die Koeffizienten aller Glieder von niedrigerer als $\mathfrak{k}$-ter Ordnung verschwinden. Nach Nr. 3 verschwinden aber die beiden Faltprodukte in (1) nur dann, wenn die betrachtete Regelfläche Φ in der Umgebung von E_0 besondere Eigenschaften aufweist, d. h. wenn die Punkte p_0, q_0, p'_0 und q'_0 gegeneinander besondere Lagen einnehmen. Das Verschwinden weiterer Koeffizienten von (2) gibt dann an, wie weit solche besondere Lagen von p, q, p' und q' auch bei den zu E_0 benachbarten Erzeugenden vorhanden sind. Wir betrachten nun der Reihe nach die einzelnen Fälle.

A. $\mathfrak{k} = 1$.

$$\left.\begin{aligned}\{e^{(2)}.\sigma\alpha\}_0 = \{e^{(2)}.\rho\alpha\}_0 = 0, \\ \{e^{(2)}.\sigma\alpha\}'_0 \text{ und } \{e^{(2)}.\rho\alpha\}'_0 \text{ nicht beide} = 0.\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Dies ist in folgenden drei Fällen möglich:

a) E_0 ist eine Minimalgerade, aber keine Torsallinie und die asymptotische Ebene von E_0 ist eine Minimalebene.

ρ und σ enthalten dann in der Tat den Pol von α bezüglich des absoluten Kegelschnittes [vgl. Nr. 1, (3) und (4)]. Für die zu E_0 benachbarte Erzeugende sei dies hingegen nicht der Fall. Es gelten dann wegen (2) die Gleichungen (3).

Nun ist nach Nr. 1, (10)

$$[q\omega]\,\rho - [p\omega]\,\sigma = \mathfrak{q}_0\,\rho - \mathfrak{p}_0\,\sigma = \alpha,$$

sodaß

$$\mathfrak{q}_0\,\{e^{(2)}.\alpha\rho\} - \mathfrak{p}_0\,\{e^{(2)}.\alpha\sigma\} = \{e^{(2)}.\alpha^2\} \tag{4}$$

ist. Mittels Differentiation folgt hieraus

$$\begin{aligned}\mathfrak{q}'_0\,\{e^{(2)}\alpha\rho\} - \mathfrak{p}'_0\,\{e^{(2)}.\alpha\sigma\} + \mathfrak{q}_0\,\{e^{(2)}.\alpha\rho\}' - \mathfrak{p}_0\,\{e^{(2)}.\alpha\sigma\}' = \\ = \{e^{(2)}.\alpha^2\}' = 2\,\{e^{(2)}.\alpha\alpha'\}.\end{aligned} \tag{5}$$

Die hiebei angewandte Differentiationsregel für Faltprodukte folgt unmittelbar aus Nr. 1, (3) und (4). Nun ist α' ein Blatt durch die jeweilige Erzeugende der von allen α gebildeten asymptotischen Torse.[1] Somit enthält α'_0 den Pol von α_0, bezüglich des absoluten Kegelschnittes und es reduziert sich (5) wegen (3) auf

$$\mathfrak{p}_0 \{e^{(2)} . \sigma \alpha\}' - \mathfrak{q}_0 \{e^{(2)} . \rho \alpha\}' = 0. \tag{6}$$

Demnach ist der nach Nr. 3, 1. Hauptsatz, festgelegte Schnittpunkt von E_0 mit der eigentlichen Striktionslinie

$$\bar{k}_0 = \mathfrak{q}_0 p_0 - \mathfrak{p}_0 q_0,$$

das ist nach Nr. 1, (9) der unendlichferne Punkt l von E_0. Dies liefert den

Satz 1: *Jede nicht torsale Minimalerzeugende, deren asymptotische Ebene eine Minimalebene ist, gehört i. a. einfach gezählt zur Striktionslinie und die eigentliche Striktionslinie trifft sie im Unendlichen.*[2]

Beispiele von Regelflächen mit solchen Minimalerzeugenden sind: Das Rotationshyperboloid,[3] die Regelflächen 3. Grades mit einem geraden kubischen Kreis als Striktionslinie,[4] ferner die Wringfläche 4. Grades[5] usw.

b) E_0 ist eine Torsallinie, aber keine Minimalerzeugende und die zugehörige Torsalebene ist eine Minimalebene.

Nach Nr. 1, (8), ist dann

$$\mathfrak{b}\, \rho_0 + \mathfrak{c}\, \sigma_0 = 0, \tag{7}$$

d. h. ρ_0 und σ_0 gehören derselben Ebene an oder ρ_0 ist kongruent $(\equiv)$ σ. Setzen wir voraus, daß der Kuspidalpunkt von E_0 nicht im Unendlichen liegt, so ist auch $\alpha_0 \equiv \rho_0 \equiv \sigma_0$ und es gelten, wie leicht zu ersehen, die Gleichungen (3).

Ist Φ abwickelbar, so gilt (7) auch für beliebiges $\mathfrak{t}$ [Nr. 1, (17)], wobei $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ Funktionen von $\mathfrak{t}$ sind. Ist Φ hingegen windschief, so stellt

$$\mathfrak{b}(\mathfrak{t})\, \rho + \mathfrak{c}(\mathfrak{t})\, \sigma = \mu \tag{8}$$

ein Blatt dar, das die zu $\mathfrak{t}$ gehörige Erzeugende enthält. Hieraus folgt

$$\mathfrak{b} \{e^{(2)} . \rho \alpha\} + \mathfrak{c} \{e^{(2)} . \sigma \alpha\} = \{e^{(2)} . \mu \alpha\}$$

---

[1] Vgl. R. Mehmke, Vorl. über Punkt- und Vektorenrechnung (1913), p. 202.

[2] »I«, p. 580.

[3] »I«, p. 581.

[4] »III«, p. 163.

[5] Siehe L. Burmester, Kinematische Flächenerzeugung vermittels zylindrischer Rollung, Zeitschr. Math. Phys., *33* (1888), p. 342 f.

und

$$\mathfrak{b}' \{e^{(2)} . \rho\alpha\} + \mathfrak{c}' \{e^{(2)} . \sigma\alpha\} + \mathfrak{b} \{e^{(2)} . \rho\alpha\}' + \mathfrak{c} \{e^{(2)} . \sigma\alpha\}' =$$

$$\{e^{(2)} . \mu\alpha\}' = \{e^{(2)} . \mu'\alpha\} + \{e^{(2)} . \mu\alpha'\}. \tag{9}$$

Ist nun für $t = t_0$ die Gleichung (7) erfüllt, so ist $\mu = 0$ und

$$k = \mathfrak{b}\, p_0 + \mathfrak{c}\, q_0$$

ist der Kuspidalpunkt von E_0. μ_0' ist dann die Grenzlage von μ, wenn deren Berührungspunkt längs einer beliebigen Kurve in den Kuspidalpunkt von E_0 rückt. Es ist daher

$$\mathfrak{b}_0 \{e^{(2)} . \rho\alpha\}' + \mathfrak{c}_0 \{e^{(2)} . \sigma\alpha\}' = \{e^{(2)} \mu'\alpha\}.$$

Da α ein Minimalblatt ist und E_0 keine Minimalerzeugende sein soll, ist $\{e^{(2)} . \mu'\alpha\}$ nur dann gleich Null, wenn $\mu' \equiv \alpha$ ist, d. h. wenn bei t_0 mehr als zwei sich schneidende, benachbarte Erzeugende vorhanden sind. Es gilt dies insbesondere für abwickelbare Flächen. Da hernach

$$\{e^{(2)} . \rho\alpha\}' - \{e^{(2)} . \sigma\alpha\}' = \mathfrak{c}_0 - \mathfrak{b}_0$$

ist, gilt der

Satz 2: *Jede Torsallinie, die keine Minimalerzeugende ist und deren Torsalebene eine Minimalebene ist, gehört (einfach gezählt) zur Striktionslinie; die eigentliche Striktionslinie enthält hiebei i. a. nur dann den Kuspidalpunkt, wenn die betreffende Fläche abwickelbar ist.*

Beispiele hiefür bieten die algebraischen Kegel, die $2\,\mathfrak{m}$ solche Erzeugende besitzen, wenn $\mathfrak{m}$ die Klasse ($=$ Rang) des Kegels bezeichnet, und wobei die eigentliche Striktionslinie aus einem einzigen Punkt, nämlich dem Kegelscheitel, besteht. Für algebraische Kegel gilt hiemit auch der Sturm'sche Satz.

c) E_0 ist eine Torsallinie mit unendlichfernem Kuspidalpunkt.[1]

In einem solchen Fall ist $\rho_0 \equiv \sigma_0$ und

$$\alpha_0 = \mathfrak{q}_0\, \rho_0 - \mathfrak{p}_0\, \sigma_0 = 0, \tag{10}$$

sodaß in der Tat die Gleichungen (3) gelten, sobald $\{e^{(2)} . \sigma\alpha\}'$ und $\{e^{(2)} . \rho\alpha\}'$ nicht gleichzeitig $= 0$ sind. Nun ist nach (10)

$$\{e^{(2)} . \sigma\alpha\}_0' = \{e^{(2)} . \sigma\alpha'\}_0$$

und

$$\{e^{(2)} . \rho\alpha\}_0' = \{e^{(2)} . \rho\alpha'\}_0.$$

[1] K. Zindler (Innsbruck) nennt solche Erzeugende »Wendeerzeugende«; vgl. seine Liniengeometrie, II., p. 41 f.

Wie oben bei μ_0' ergibt sich aber, daß α_0' die Grenzlage der asymptotischen Ebene darstellt, sobald eine beliebige Erzeugende in E_0 rückt. Wir haben daher vorauszusetzen, daß α_0' nicht senkrecht zu ρ_0 ($\equiv \sigma_0$) sei. Eine Torsallinie von dieser Art soll eine gewöhnliche zylindrische Erzeugende heißen. Ist hingegen $\{e^{(2)}.\sigma\alpha'\}_0 = \{e^{(2)}.\rho\alpha'\}_0 = 0$, so liegt eine spezielle zylindrische Erzeugende vor (siehe unter f)). Im erstern Fall ergibt sich der Schnittpunkt der eigentlichen Striktionslinie mit E_0 wie unter a) Also gilt der

Satz 3: *Jede gewöhnliche zylindrische Erzeugende gehört (einfach gezählt) zur Striktionslinie und die eigentliche Striktionslinie enthält ihren unendlichfernen Kuspidalpunkt.*[1]

Als Beispiele hiefür sind zu erwähnen: Die in »IV«, p. 86 f. behandelten speziellen Regelflächen 3. Grades Θ_k, ferner die speziellen Regelflächen 3. Grades Λ_0, bei welchen zwei gewöhnliche zylindrische Erzeugende auftreten, die zugleich Minimalerzeugende sind,[2] und schließlich alle Zylinderflächen, bei welchen alle Erzeugenden von obiger Art sind, so daß die Striktionslinie die ganze Fläche überdeckt.

B. $\mathfrak{k} = 2$.

$$\left.\begin{aligned} \{e^{(2)}.\rho\alpha\}_0 = \{e^{(2)}.\sigma\alpha\}_0 = 0 \\ \{e^{(2)}.\rho\alpha\}_0' = \{e^{(2)}.\sigma\alpha\}_0' = 0 \\ \{e^{(2)}.\rho\alpha\}_0'' \text{ und } \{e^{(2)}.\sigma\alpha\}_0'' \text{ nicht beide} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Dies tritt bei folgenden Fällen ein:

d) E_0 ist eine nicht torsale Minimalerzeugende, deren asymptotische Ebene eine Minimalebene ist, und die benachbarte asymptotische Ebene ist gleichfalls eine Minimalebene.

Es existieren dann i. a. drei benachbarte, nicht torsale Minimalerzeugende und es gelten immer obige Gleichungen, sobald nicht mehr als drei solche Erzeugende vorhanden sind. Wir werden später (siehe Satz 11) den allgemeineren Fall untersuchen, daß an einer Stelle $\mathfrak{n}$ benachbarte, nicht torsale Minimalerzeugende existieren. Für $\mathfrak{n} = 3$ ergibt sich hieraus der

Satz 4: *Von drei benachbarten, nicht torsalen Minimalerzeugenden gehören immer zwei zur Striktionslinie und die eigentliche Striktionslinie enthält ihren uneigentlichen Punkt.*[3]

---

1 Vgl. »IV«, p. 65.

2 »III«, p. 173.

3 »I«, p. 580.

Beispiele von Regelflächen, bei denen dieser Fall eintritt, sind die allgemeinen, in »IV« untersuchten Regelflächen dritten Grades Θ, deren unendlichferne Kurve den absoluten Kegelschnitt doppelt oskuliert; jede solche Fläche besitzt zwei Tripel von benachbarten Minimalerzeugenden.

e) E_0 ist eine Minimalgerade und zugleich eine Torsallinie, deren Torsalebene eine Minimalebene ist, und die asymptotische Ebene der benachbarten Erzeugenden ist keine Minimalebene.

Wie unter b) ist dann $\rho_0 \equiv \sigma_0 \equiv \alpha_0$. Nun ist ρ' ein Blatt durch die jeweilige Erzeugende der Φ längs P umschriebenen Torse. Besitzt Φ eine Torsallinie, so ist sie zugleich eine Erzeugende der genannten Torse.[1] Somit enthalten im vorliegenden Fall ρ'_0, σ'_0 und α'_0 die Erzeugende E_0. Es ist daher

$$\left.\begin{aligned} \{e^{(2)}.\rho\alpha\}'_0 &= \{e^{(2)}.\rho'\alpha\}_0 + \{e^{(2)}.\rho\alpha'\}_0 = 0 \\ \{e^{(2)}.\sigma\alpha\}'_0 &= \{e^{(2)}.\sigma'\alpha\}_0 + \{e^{(2)}.\sigma\alpha'\}_0 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

und es gelten die Gleichungen (11). $\bar{k}_0$ ergibt sich wie unter b) für $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_0$, sobald (9) abermals differenziert wurde. Man erhält

$$\mathfrak{b}_0 \{e^{(2)}.\rho\alpha\}''_0 + \mathfrak{c}_0 \{e^{(2)}.\sigma\alpha\}''_0 = 2\{e^{(2)}.\mu'\alpha'\}_0,$$

wobei der Ausdruck rechts i. a. bloß für abwickelbare Flächen $= 0$ ist. Dies liefert den

Satz 5: *Jede Torsallinie, die eine Minimalgerade ist und deren Torsalebene eine Minimalebene ist, gehört i. a. zweifach gezählt zur Striktionslinie,*[2] *und die eigentliche Striktionslinie enthält hiebei nur dann den Kuspidalpunkt, wenn die betreffende Regelschar abwickelbar ist.*

Erzeugende von diesen Arten treten z. B. beim Rotationskegel auf, wo zwei Stellen existieren, bei welchen je zwei Erzeugende von der Art b) zusammengefallen sind, ferner die in »II« behandelte Normalenfläche des Torus längs eines Loxodromenkreises.[3]

f) E_0 ist eine spezielle zylindrische Erzeugende (siehe oben unter c)). Setzen wir voraus, daß bei t_0 nicht mehr als zwei benachbarte Erzeugende sich schneiden, so sind die Gleichungen (11) erfüllt. $\bar{k}_0$ ergibt sich hiebei wie im vorigen Fall. Somit erhält man den

---

[1] Dies ergibt sich auch mittels Rechnung. Nach Nr. 1, (7), ist nämlich $\rho = [pqp']$ und $\rho' = [pq'p'] + [pqp'']$, so daß $[\rho' q] = [pq'p'q] = -[pqp'q']$ ist. Da letzterer Ausdruck für torsale Erzeugende $= 0$ ist, enthält ρ' bei einer solchen stets den Punkt q usw.

[2] »I«, p. 581, Satz 2.

[3] »II«, p. 628.

Satz 6: *Jede spezielle zylindrische Erzeugende gehört zweifach gezählt zur Striktionslinie, und die eigentliche Striktionslinie geht i. a. nur dann durch den Kuspidalpunkt, wenn die betrachtete Fläche abwickelbar ist.*

Als Beispiel für eine Regelfläche mit einer solchen Erzeugenden ist die metrisch spezielle Regelfläche Θ_{II} anzuführen.[1] Es ist nur noch nachzuweisen, daß die Torsallinie T_1 dieser Fläche in der Tat eine spezielle zylindrische Erzeugende ist. Dies folgt aber aus »IV«, p. 88, Fig. 11, wo die Torsalebene von $T_1 \perp \Pi_2$ ist und aus »IV«, p. 78 f., woraus ersichtlich ist, daß die Schnittkurve R^z des Richtkegels von Θ_{II} eine Spitze besitzt, bei der die Tangente $\| \; \Pi_2$ ist.

Der Fall f) liegt insbesondere auch dann vor, wenn E_0 eine torsale Minimalerzeugende mit unendlichfernem Kuspidalpunkt ist und α'_0 oder $\rho_0 \,(\equiv \sigma_0)$ einer Minimalebene angehört. Letzteres tritt bei den in »III«, p. 171 f betrachteten Regelflächen (dritten Grades) Λ_{II} auf.

g) E_0 ist eine unendlichferne Erzeugende, wobei das Φ längs E_0 oskulierende Paraboloid nicht gleichseitig sei.

Da p und q laut Voraussetzung niemals $\equiv$ sind, fällt E_0 dann und nur dann ins Unendliche, wenn $\mathfrak{p}_{00} = \mathfrak{q}_{00} = 0$ ist. Nach Nr. 1, (9) und (10) ist dann auch

$$\mathfrak{l}_0 = \mathfrak{q}_{00}\, p_0 - \mathfrak{p}_{00}\, q_0 = 0 \tag{14}$$

und desgleichen ist

$$\alpha_0 = [p\, q\, l'] = \mathfrak{q}_{00}\, \rho_0 - \mathfrak{p}_{00}\, \sigma_0 = 0. \tag{15}$$

In der Tat, ist $l' = \mathfrak{q}'_{00}\, p_0 - \mathfrak{p}'_{00}\, q_0$, d. i. ein Punkt auf E_0, nämlich der Schnittpunkt der unendlichfernen Kurve L von Φ mit E_0. Aus (15) folgt

$$\alpha'_0 = \mathfrak{q}'_{00}\, \rho_0 - \mathfrak{p}'_{00}\, \sigma_0 \tag{16}$$

und dies ist nach Nr. 1, (7) die Tangentialebene von Φ im Punkt $l'_0 . \alpha'_0$ gehört daher der unendlichfernen Ebene an und es ist

$$\alpha'_0 = \mathfrak{a} . \omega, \tag{17}$$

wobei $\mathfrak{a}$ eine Zahl ist, die nach den Voraussetzungen des 1. Hauptsatzes nur dann gleich 0 sein kann, wenn E_0 eine Torsallinie ist. Somit ist wegen (15) und Nr. 1, (4)

$$\left.\begin{aligned} \{e^{(2)} . \rho\alpha\}'_0 &= \{e^{(2)} . \rho'\alpha\}_0 + \{e^{(2)} . \rho\alpha'\}_0 = \mathfrak{a}\, \{e^{(2)} . \rho\,\omega\}_0 = 0 \\ \{e^{(2)} . \sigma\alpha\}'_0 &= \{e^{(2)} . \sigma'\alpha\}_0 + \{e^{(2)} . \sigma\alpha'\}_0 = \mathfrak{a}\, \{e^{(2)} . \sigma\,\omega\}_0 = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{18}$$

---

[1] »IV«, p. 73, 86 und 88 f.

Aus (15) ergibt sich ferner

$$\left.\begin{aligned}\{e^{(2)}.\rho\alpha\}_0'' &= \{e^{(2)}.\rho\alpha''\}_0 \\ \{e^{(2)}.\sigma\alpha\}_0'' &= \{e^{(2)}.\sigma\alpha''\}_0\end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

Hierin ist α_0'' ein Blatt, das die durch l_0' gehende Erzeugende A der asymptotischen Torse enthält. Da aber die in l_0' an L gelegte Tangente T die zweite Haupttangente von Φ in l_0' ist, fällt A mit T zusammen.[1]

$T \equiv A$ ist somit die unendlichferne Gerade von α_0''. Da E_0 die unendlichferne Gerade der Blätter ρ_0 und σ_0 ist, ist dann und nur dann

$$\{e^{(2)}.\sigma\alpha\}_0'' + \{e^{(2)}.\rho\alpha\}_0'' = 0, \qquad (20)$$

wenn E_0 und A im Bezug auf den absoluten Kegelschnitt konjugiert sind.

E_0 und A sind zugleich die unendlichfernen Erzeugenden des Φ längs E_0 oskulierenden Paraboloids $\mathfrak{P}$. Setzen wir daher voraus, daß $\mathfrak{P}$ nicht gleichseitig sei, so sind nach obigem die Gleichungen (11) erfüllt.

Um $\bar{k}_0$ zu finden, bilden wir aus Nr. 1, (10) die Gleichung

$$\alpha' = \mathfrak{q}_0'\rho - \mathfrak{p}_0'\sigma + \mathfrak{q}_0\rho' - \mathfrak{p}_0\sigma'.$$

Hieraus folgt

$$\mathfrak{q}_0'\{e^{(2)}.\rho\alpha\} - \mathfrak{p}_0'\{e^{(2)}.\sigma\alpha\} + \mathfrak{q}_0\{e^{(2)}.\rho'\alpha\} - \mathfrak{p}_0\{e^{(2)}.\sigma'\alpha\} = \{e^{(2)}.\alpha\alpha'\}. \qquad (20)$$

Wird dies zweimal differenziert und $t = t_0$ gesetzt, so ergibt sich wegen (15), (17) und (18)

$$\mathfrak{q}_{00}'\{e^{(2)}.\rho\alpha\}_0'' - \mathfrak{p}_{00}'\{e^{(2)}.\sigma\alpha\}_0'' = 0.$$

Also ist

$$\bar{k}_0 = \mathfrak{q}_{00}' p_0 - \mathfrak{p}_{00}' q_0 = l_0',$$

und es gilt der

Satz 7: *Jede nicht torsale, unendlichferne Erzeugende, längs der das oskulierende Paraboloid nicht gleichseitig ist, gehört zweifach gezählt zur Striktionslinie, und die eigentliche Striktionslinie enthält den auf dieser Erzeugenden befindlichen Berührungspunkt der unendlichfernen Ebene.*[2]

Beispiele von Regelflächen mit einer oder mehreren unendlichfernen Erzeugenden von der genannten Art sind: Das nicht gleichseitige hyperbolische Paraboloid, bei dem die eigentliche Striktionslinie jeder Schar eine Parabel ist, ferner alle nicht geraden Konoide u. a.

---

[1] Die Erzeugenden der einer Fläche längs einer Kurve C umschriebenen Developpablen sind nämlich die konjugierten Tangenten zu den Tangenten von C.

[2] Vgl. R. Sturm, a. a. O., p. 256, Schluß von Nr. 21.

Ist Φ eine algebraische Regelfläche $\mathfrak{n}$-ten Grades, $\mathfrak{r}$-ten Ranges und besitzt Φ $\mathfrak{e}$ unendlichferne Erzeugende E_i von der Art g), so ist ihre eigentliche Striktionslinie $\bar{S}$ nach Satz 7 von der Ordnung

$$\mathfrak{o} = 2(\mathfrak{r}-\mathfrak{e}). \qquad (**)$$

Hiebei ist allerdings vorausgesetzt, daß außer den E_i keine Erzeugende von Φ zur Striktionslinie gehört. Ist $\mathfrak{d}$ die Ordnung der Doppelkurve D von Φ, so ist

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{n}(\mathfrak{n}-1)-2\,\mathfrak{d},$$

da die ebenen Schnitte i. a. keine Spitze besitzen können. Da ferner auf jeder der $\mathfrak{e}$ Erzeugenden E_i $\mathfrak{n}-2$ Punkte von D liegen[1] und die E_i untereinander $\frac{\mathfrak{e}(\mathfrak{e}-1)}{2}$ Schnittpunkte besitzen, ist die Klasse der neben den E_i verbleibenden unendlichfernen Kurve L_1 von Φ

$$\mathfrak{r}_1 = (\mathfrak{n}-\mathfrak{e})(\mathfrak{n}-\mathfrak{e}-1)-2\left(\mathfrak{d}-(\mathfrak{n}-2)\mathfrak{e}+\frac{\mathfrak{e}(\mathfrak{e}-1)}{2}\right) =$$
$$= \mathfrak{n}(\mathfrak{n}-1)-2\,\mathfrak{d}-2\,\mathfrak{e}.$$

Nun berührt die Kurve $\bar{S}$ die unendlichferne Ebene ω in den auf den E_i befindlichen Berührungspunkten von Φ mit ω. Ferner enthält $\bar{S}$ alle jene Punkte, in welchen die gemeinsamen Tangenten von L_1 und dem absoluten Kegelschnitt die Kurve L_1 berühren.[2] Somit ist die Anzahl der Schnittpunkte von $\bar{S}$ mit ω

$$2\,\mathfrak{e}+2\,\mathfrak{r}_1 = 2\,\mathfrak{n}(\mathfrak{n}-1)-4\,\mathfrak{d}-2\,\mathfrak{e} = 2\,\mathfrak{r}-2\,\mathfrak{e}$$

und dies stimmt tatsächlich mit (**) überein.

h) E_0 ist eine unendlichferne Torsallinie, deren Torsalebene aber nicht unendlichfern ist.

Es gelten dann wie unter g) die Gleichungen (14), (15) und (17), worin $\mathfrak{a} = 0$ ist und außerdem ist

$$\mathfrak{e}\rho_0+\mathfrak{f}\sigma_0 = 0.$$

Da ferner

$$l_0' = \mathfrak{e}\,p_0+\mathfrak{f}\,q_0$$

als Berührungspunkt von ω zugleich der Kuspidalpunkt von E_0 ist und E_0 i. a. von der Kurve L in l_0' berührt wird, ergibt sich der

Satz 8: *Jede unendlichferne Torsallinie, für die die unendlichferne Ebene nicht Torsalebene ist, gehört zweifach gezählt zur Striktionslinie und die eigentliche Striktionslinie berührt i. a. diese Torsallinie in ihrem Kuspidalpunkt.*

---

1 Vgl. z. B. Zindler, a. O., p.

»I«, p. 579.

Als Beispiele für diesen Fall ließen sich leicht besondere Regelflächen dritten Grades angeben.

$$C.\ \mathfrak{k} = 3.$$

$$\left.\begin{array}{l} \{e^{(2)}.\rho\alpha\}_0 = \{e^{(2)}.\rho\alpha\}'_0 = \{e^{(2)}.\rho\alpha\}''_0 = 0 \\ \{e^{(2)}.\sigma\alpha\}_0 = \{e^{(2)}.\sigma\alpha\}'_0 = \{e^{(2)}.\sigma\alpha\}''_0 = 0 \\ \{e^{(2)}.\rho\alpha\}'''_0 \text{ und } \{e^{(2)}.\sigma\alpha\}'''_0 \text{ nicht beide } = 0 \end{array}\right\} \quad (21)$$

Von den hierher gehörigen Fällen seien erwähnt:

i) E_0 und die drei zu ihr benachbarten Erzeugenden sind nicht torsale Minimalerzeugende,

j) E_0 ist eine Minimalgerade und zugleich eine Torsallinie, deren Torsalebene eine Minimalebene ist, und die asymptotische Ebene der hiezu benachbarten Erzeugenden sei gleichfalls eine Minimalebene.

Diese beiden Fälle sind in den unter m) behandelten allgemeineren Fällen enthalten (siehe weiter unten!).

k) E_0 ist eine unendlichferne Erzeugende, längs der das oskulierende Paraboloid von Φ gleichseitig ist.

Wie im Fall g) gelten dann die Gleichungen (14) bis (18) und außerdem ist

$$\{e^{(2)}.\rho\alpha\}''_0 = \{e^{(2)}.\sigma\alpha\}''_0 = 0, \quad (22)$$

sodaß i. a. die Gleichungen (21) erfüllt sind.

$\bar{k}_0$ ergibt sich jetzt durch dreimaliges Differenzieren von (20). Man erhält dann für $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_0$ nach einiger Rechnung den

Satz 9: *Jede unendlichferne Erzeugende, längs der das oskulierende Paraboloid gleichseitig ist, gehört dreifach gezählt zur Striktionslinie, und die eigentliche Striktionslinie geht i. a. nicht durch den auf dieser Erzeugenden befindlichen Berührungspunkt der unendlichfernen Ebene.*

Als Beispiele für diesen Fall seien genannt: Das gleichseitige Paraboloid selbst, bei dem die eigentliche Striktionslinie jeder Schar die Scheitelerzeugende der anderen Schar ist; die in »III« behandelten Regelflächen[1] Λ; ferner die Normalenflächen (vierten Grades) von Flächen zweiten Grades längs ebener Schnitte, die i. a. zwei Erzeugende von der Art k besitzen, u. a. m.

---

[1] Siehe insbesondere »III«, p. 166. Das jede Fläche Λ längs E_u oskulierende Paraboloid ist in der Tat gleichseitig, da es, wie Λ selbst, die Gerade M zur Symmetrieachse hat.

D. $\mathfrak{k} \geqq 4$.

Die Reihe obiger Sätze ließe sich natürlich beliebig weit fortsetzen. Um aber wenigstens alle jene Fälle zu erwähnen, die bei den Regelflächen dritten Grades auftreten können, wollen wir in Kürze noch folgende spezielle Erzeugende besprechen.

l) E_0 ist eine unendlichferne Torsallinie, für die die unendlichferne Ebene die Torsalebene ist.

Die unendlichferne Kurve L von Φ schneidet in einem solchen Fall E_0 in einem Punkt l_0, der i. a. vom Kuspidalpunkt von E_0 verschieden ist. Bezeichnen wir die Tangente von L in l_0 mit T_0, so können T_0 und E_0 bezüglich des absoluten Kegelschnittes konjugiert sein oder nicht. Je nachdem ersteres oder letzteres eintritt, kann man sich dann E_0 durch Zusammenrücken zweier Erzeugenden von der Art k) oder g) entstanden denken. Dementsprechend ergibt sich auch (ähnlich wie früher) der

Satz 10: *Jede unendlichferne Torsallinie, für die die unendlichferne Ebene die Torsalebene ist, gehört sechsfach beziehungsweise vierfach gezählt zur Striktionslinie, je nachdem die unendlichferne Kurve diese Torsallinie senkrecht schneidet oder nicht.*

Als Beispiele für den ersteren Fall seien die Konoide dritten Grades erwähnt, die durch eine Parabel in einer zur Richtebene λ senkrechten Ebene als Leitkurve und durch eine letztere schneidende Gerade als Doppellinie gegeben sind. Alle auf einer solchen Fläche liegenden Kegelschnitte sind Parabeln. Unter ihnen befindet sich auch die eigentliche Striktionslinie. Letztere ist nämlich die Umrißkurve der Fläche für zu λ senkrechte Sehstrahlen, d. i. für einen Augpunkt, der sich auf der unendlichfernen Torsallinie der Fläche befindet.[1]

m) Schließlich wollen wir noch den allgemeineren Fall betrachten, daß bei einer Stelle t_0 der betrachteten Regelschar $\mathfrak{n}$ benachbarte windschiefe Minimalerzeugende vorhanden sind. ($\mathfrak{n} = 2, 3, \ldots$) Hierin sind die schon genannten Fälle a), d) und i) enthalten. Aus (2) ergibt sich dann ohne weiteres, daß die Größen $\{e^{(2)}.\sigma\alpha\}_0$ und $\{e^{(2)}.\rho\alpha\}_0$ und deren Ableitungen bis einschließlich zur ($\mathfrak{n}-2$)-ten Ordnung für t_0 verschwinden. Daraus folgt ähnlich wie unter a) und d) (wobei (4) ($\mathfrak{n}-1$)mal zu differenzieren ist) der[2]

Satz 11: *Von $\mathfrak{n}$ benachbarten, nicht torsalen Minimalerzeugenden gehören immer $\mathfrak{n}-1$ zur Striktionslinie und die eigentliche Striktionslinie enthält ihren unendlichfernen Punkt.*

---

[1] Vgl. E. Weyr, Geometrie der räumlichen Erzeugnisse ein-zwei-deutiger Gebilde, insbesondere der Regelflächen dritter Ordnung. Leipzig, 1870, p. 94f.

[2] Vgl. »I«, p. 580.

Wäre aber E_0 eine Torsallinie, wobei es gleichgültig ist, wie viele benachbarte Erzeugende sich schneiden, so ist, wie unter e) gezeigt wurde, für $\mathfrak{n} = 2$ auch $\mathfrak{k} = 2$ und daher ist wegen (2) i. a. $\mathfrak{k} = \mathfrak{n}$. Daraus ergibt sich der

Satz 12: *Besitzt eine Regelfläche* $\mathfrak{n}$ *benachbarte Minimalerzeugende und bilden wenigstens zwei davon eine Torsallinie, so gehören diese* $\mathfrak{n}$ *Erzeugenden zur Striktionslinie und die eigentliche Striktionslinie geht i. a. nicht durch den Kuspidalpunkt dieser Torsallinie.*

Als Beispiele von Regelflächen, für die dieser Satz zur Anwendung kommt, seien genannt: Die in »I« untersuchte Regelfläche dritten Grades mit einer Ellipse als eigentliche Striktionslinie[1] und die in »II«, p. 631, erwähnte spezielle Fläche $\Psi^{\times}$, bei der an zwei Stellen vier benachbarte, sich schneidende Minimalerzeugende vorhanden sind.

Aus der Ableitung obiger Sätze und auch aus Nr. 1, Gleichungen (14) bis (16a, b, c) erkennt man unmittelbar, daß eine Erzeugende E_0 einer Regelschar nur dann zur Striktionslinie gehören kann, wenn

entweder in der Umgebung von E_0 wenigstens zwei benachbarte Minimalerzeugende existieren oder, wenn E_0 eine zylindrische oder unendlichferne Erzeugende oder eine Torsallinie mit einer Minimalebene als Torsalebene ist oder endlich, wenn für E_0 mehrere dieser Eigenschaften gleichzeitig zutreffen.

Hieraus ergibt sich, daß jede Regelschar Φ, bei der solche Erzeugende auftreten, mittels einer Kollineation in eine solche Regelfläche Φ_1 übergeführt werden kann, bei der keine Erzeugende von dieser Art existiert. (Siehe Ableitung des zweiten Hauptsatzes!)

Zum Schluß seien noch jene Regelscharen hervorgehoben, bei welchen die Größen $\{e^{(2)}.\rho\alpha\}$ und $\{e^{(2)}.\sigma\alpha\}$ identisch verschwinden, so daß an jeder Stelle $\mathfrak{k} = \infty$ wird. In jedem solchen Fall können wir daher alle Erzeugenden der Regelschar zur Striktionslinie zählen und diese Kurve überdeckt die ganze Fläche. Die Striktionslinie einer algebraischen Regelfläche von

[1] Siehe insbesondere »I«, p. 591.

dieser Art besitzt dann gewissermaßen die Ordnung unendlich (d. i. die Anzahl der Schnittpunkte mit einer beliebigen Ebene). Für solche Flächen verliert auch der 2. Hauptsatz seine Gültigkeit, da in Nr. 3 angenommen wurde, daß die Stellen $t_1, t_2, \ldots t_i$ in endlicher Anzahl vorhanden seien. Regelscharen von obiger Art sind: Die schon erwähnten Zylinder, ferner die Regelscharen, deren sämtliche Erzeugenden Minimalgerade sind, und endlich die als ausgeartete Regelflächen zu betrachtenden Geradenscharen, die einer Minimalebene oder der unendlichfernen Ebene angehören.