

Primäre und sekundäre — freie und erzwungene Druckwellen in der Atmosphäre

Von

Albert Defant

(Mit 2 Textfiguren)

(Vorgelegt in der Sitzung am 10. Juni 1926)

Die Untersuchungen von H. v. Ficker¹ über unperiodische Druckänderungen haben durch die Analyse des Druckverlaufes, der sich auf Berggipfeln und in der freien Atmosphäre beim Vorübergang von Zyklonen in der Niederung einstellt, ergeben, daß am Erdboden der Druckverlauf ein komplexer ist und sich im wesentlichen aus der Überlagerung zweier verschiedener Druckwellen zusammensetzt. Die eine derselben stammt aus größerer Höhe der Atmosphäre (primäre Druckwelle), die andere ist durch Verschiebungen verschieden temperierter Luftströmungen in der unteren Troposphäre, durch Einbrüche kalter und warmer Luft am Erdboden, bedingt; die sekundäre Druckwelle ist sicherlich wesentlich thermischer Natur. Die aus den hohen Schichten stammenden Druckänderungen lassen sich im allgemeinen durch die Kenntnis des gleichzeitigen Temperaturverlaufes in der unteren Troposphäre aus dem komplexen Druckgang der Niederung isolieren und zeigen dann in den meisten Fällen zu den erwähnten, sekundären Druckänderungen der unteren Troposphäre eine bestimmte zeitliche Beziehung. Untere und obere Druckwelle sind bei gut entwickelten Zyklonen stets derart miteinander gekoppelt, daß die obere, primäre Druckwelle der unteren, sekundären folgt. Die Amplituden der Druckwellen sind meistens angenähert gleich groß. Die Aneinanderkoppelung beider Arten von Druckwellen ist in allen Jahreszeiten in dem Sinn vorhanden, daß kräftige, gut ausgebildete untere Druckwellen fast ausnahmslos an das gleichzeitige Auftreten primärer Druckwellen gebunden sind. Die thermischen Druckschwankungen der unteren Troposphäre sind so fast nie selbständig. Dies deutet auf einen ursächlichen Zusammenhang zwischen primären und sekundären Druckgebilden, auf den wir später zu sprechen kommen.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der niedrig-troposphärischen Druckwellen ist stets größer als die der oberen, ihre Fortpflanzungs-

¹ Siehe besonders: H. v. Ficker, Beziehungen zwischen Änderungen des Luftdruckes und der Temperatur in den unteren Schichten der Troposphäre (Zusammensetzung der Depressionen). Sitzungsber. d. Wiener Akademie, Bd. 129, 1920, p. 763, und

Bemerkungen über die Konstitution zusammengesetzter Depressionen. Meteor. Zeitschr. 1921, p. 63.

richtung meistens dieselbe, braucht es aber nicht zu sein. Wegen der verschiedenen Fortpflanzungsgeschwindigkeit der beiden Druckgebilde muß eine Phasendifferenz zwischen beiden Wellen vorhanden sein und diese bleibt dann auch bei ein und derselben zusammengesetzten Depression nicht konstant. Die Erfahrungen aus dem Wetterdienst haben, wie schon N. Ekholm¹ hervorgehoben und neuerdings G. Stüve² bemerkt haben, gezeigt, daß, wenn die Zyklone stationär geworden ist und sich langsam ausfüllt, trotzdem noch ein Fallgebiet des Druckes weiterzieht, das scheinbar zur Zeit des besten Entwicklungsstadiums der Zyklone phasengleich war und mit gleicher Geschwindigkeit mit ihr gewandert ist. Dieses Fallgebiet stammt offenbar aus höheren Schichten, ist also nach Ficker primärer Natur. Es ist mit der Temperaturänderung in den unteren Luftschichten nicht in Zusammenhang zu bringen. Die Lebensdauer der Zyklone scheint wesentlich davon abzuhängen, wie die Zugsgeschwindigkeiten der mit der Zyklone verbundenen oberen (primären) und unteren (sekundären) Druckwelle zueinander sich verhalten.

Es steht fest, daß die untere, sekundäre Druckwelle in der Hauptsache eine Advektionserscheinung ist, bei der die vertikalen Massenverlagerungen gegenüber den Verschiebungen in horizontaler Richtung, solange man nur Druckänderungen an der Erdoberfläche und nicht die Physik des Wetters betrachtet, zurücktreten. Mit einer Anzahl von Annahmen, die zum Teil durch Beobachtungstatsachen völlig gerechtfertigt, zum Teil nur in erster Annäherung, aber doch so, daß damit im Wesen das Richtige getroffen wird, gelten, läßt sich, wie F. M. Exner³ zuerst gezeigt hat, die Advektion verschieden temperierter Luftmassen und ihr Effekt auf die Druckänderungen am Erdboden mathematisch erfassen. In vertikaler Richtung gilt zunächst überall die statische Grundgleichung in der Form

$$p = p_H e^{\frac{gH}{RT}} \quad (1)$$

worin p der Druck am Erdboden, p_H jener in der Höhe H und T die Mitteltemperatur der Luftsäule H bedeuten. Diese Gleichung bildet die Grundlage aerologischer Forschung; nach ihr werden alle Aufstiegsergebnisse ausgewertet. Die Höhe H wird als konstant angesehen, nicht so p und p_H ; namentlich p_H nehmen wir als zeitlich und örtlich variabel an. Aus (1) ergibt sich durch Differentiation nach der Zeit t

$$\frac{dT}{dt} = - \frac{RT^2}{gH} \left(\frac{1}{p} \frac{dp}{dt} - \frac{1}{p_H} \frac{dp_H}{dt} \right). \quad (2)$$

¹ Meteor. Zeitschr. 1906, Hannband, p. 228, und 1907, p. 1, 102 und 145.

² G. Stüve, die Polarfronttheorie. Jahresber. d. Frankfurter Ver. f. Geogr. und Stat. 87. bis 89. Jahrg. 1925.

³ Insbesondere: Sitzungsber. d. Wiener Akad. Bd. 116, 1907, p. 995, und Dynamische Meteorologie, II. Aufl., p. 291.

Ficker'schen Sinne eine primäre Druckwelle. Sie zeigt n vollständige Wellen auf einen Breitenkreis. In der Größe ν der Gleichung (6) steckt die Größe des mittleren meridionalen Temperaturgefälles, das als zeitlich konstant angenommen wird.

Wir wollen nun weiters zur Vereinfachung der Rechnung adiabatische Bewegung der Luftmassen annehmen $\left(\frac{dQ}{dt} = 0\right)$;

die nähere Berücksichtigung einer gegebenen Wärmezufuhr ist möglich, und F. M. Exner hat in der früher zitierten Abhandlung, die von denselben Gleichungen ausgeht, den Einfluß derselben eingehend behandelt und klargelegt; wir wollen deshalb hier davon absehen, um vor allem den Einfluß einer oberen, primären Druckwelle auf die Druckänderungen am Erdboden besser hervortreten zu lassen. Die Auflösung von $\frac{d p_H}{d t}$ in partielle Differential-

quotienten und die Gleichungen (4), (5) und (6) geben dann nach einigen Umformungen eine partielle Differentialgleichung für den Bodendruck p in der Form

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\alpha n \sigma F' - \beta \frac{\partial p}{\partial \lambda} - \frac{\gamma n}{\sin 2\varphi} F' \frac{\partial p}{\partial \varphi}. \quad (7)$$

Hierin bedeutet F' die Ableitung von F , während die Größen

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{p}{p_H} \frac{1}{1 + \frac{A g H}{c_p T}}, \\ \beta &= \frac{2 \nu R T}{p_H \omega r^2} \frac{1}{1 + \frac{A g H}{c_p T}}, \\ \gamma &= \frac{R T}{p_H \omega r^2} \frac{1}{1 + \frac{A g H}{c_p T}} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

und

sind. Die Größen α , β und γ sind keine Konstante, aber ihre Änderungen sind bei den vorkommenden Schwankungen von p , T und p_H derart klein, daß wir von diesen absehen können und sie als Konstante betrachten können. Außerdem ist auch $\frac{A g H}{c_p T}$

gegenüber (1) stets nur eine kleine Größe.

Die partielle Differentialgleichung (7) ist unter diesen nicht schwer ins Gewicht fallenden Vereinfachungen integrierbar; sie ist äquivalent folgendem System simultaner totaler Differentialgleichungen

$$\frac{dp}{\alpha n \sigma F'} = \frac{dt}{-1} = \frac{d\lambda}{-\beta} = \frac{d\varphi}{-\frac{\gamma n}{\sin 2\varphi} F'}, \quad (9)$$

das lösbar ist. Es ergibt das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} p + \frac{\alpha \sigma}{\beta - \sigma} F[n(\lambda - \sigma t)] &= \xi, \\ \lambda - \beta t &= \eta, \\ \frac{\gamma}{\beta - \sigma} F[n(\lambda - \sigma t)] + \frac{1}{2} \cos 2\varphi &= \zeta. \end{aligned} \quad (10)$$

Eine Lösung der Gleichung (7) ist dann stets

$$\Phi(\xi, \eta, \zeta) = 0; \quad (11)$$

die beliebige Funktion Φ ist aus den Anfangsbedingungen zur Zeit $t = 0$ jedesmal festzustellen. Die Gleichung (11) gestattet nun einzelne einfache Fälle näher zu untersuchen; sie geben uns Aufschluß über die Einwirkung einer oberen, primären Druckwelle auf die Druckverteilung an der Erdoberfläche, wenn in der Atmosphäre gleichzeitig ein meridionales Temperaturgefälle vorhanden ist. In Anbetracht der Untersuchungen v. Ficker's wird diesen einfachen Fällen, die rein theoretisch behandelt werden können, einigcs Interesse nicht abzusprechen sein.

Für den Fall, daß $F = 0$ ist, d. h. in der Höhe der Druck zeitlich konstant ist, reduziert sich die Gleichung (7) auf

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\beta \frac{\partial p}{\partial \lambda}. \quad (12)$$

Herrscht zur Zeit $t = 0$ am Erdboden überall gleichförmiger Druck, so bleibt dieser erhalten, wenn hingegen eine Druckverteilung $p_0 = \psi(n\lambda)$ vorhanden ist, so ändert sich diese mit der Zeit, und zwar ist sie nach der Gleichung (11) zur Zeit t durch

$$p = \psi[n(\lambda - \beta t)] \quad (13)$$

gegeben. Die Druckverteilung verschiebt sich gegen Osten mit einer Winkelgeschwindigkeit β , die nach Gleichung (8) in erster Linie von dem in ν enthaltenen meridionalen Temperaturgefälle abhängt. Eine anfängliche Druckstörung am Erdboden wandert als Druckwelle ostwärts; ihre Verschiebung ist ein bis zur Höhe H reichender Effekt reiner Advektion verschieden temperierter Luftmassen. Eine derartige Druckwelle in den unteren Schichten der Troposphäre können wir als eine freie Druckwelle bezeichnen; durch eine anfängliche, mehr oder minder plötzliche Druckstörung in den unteren Schichten einmal erzeugt, breitet sie sich mit einer

Im Falle $\sigma = \beta$ ist $N = 0$, und da www.biologiezentrum.at

$$\lim_{N=0} \frac{1}{N} \sin \frac{N}{2} t = \frac{t}{2}$$

ist, wird aus (18)

$$p = + n \alpha \sigma \varepsilon t \cos \left[n(\lambda - \sigma t) - \frac{\pi}{2} \right]$$

Im Falle der Resonanz wächst die Amplitude der Druckwelle in der Niederung proportional der Zeit; gegenüber der oberen, primären Druckwelle ist außerdem eine konstante Phasenverschiebung um ein Viertel der Wellenlänge vorhanden, und zwar derart, daß die obere Welle der erzwungenen unteren um diesen Betrag nachhinkt. Die »Achse der Druckschwankung« ist demnach stets nach rückwärts geneigt. Es scheint, daß in dieser Rückwärtsneigung die Bedingung des fortwährenden Zunehmens der Amplitude der erzwungenen Druckwelle liegt.

Wenn $\sigma \neq \beta$ ist, dann zeigt die Druckschwankung am Boden eine mittlere Fortpflanzungsgeschwindigkeit, die dem Mittelwert zwischen der Winkelgeschwindigkeit der erzwungenen und freien Welle entspricht; ihre Amplitude aber weist Schwebungen mit einer Periode $\frac{2\pi}{N}$ auf. Diese ist um so länger, je kleiner der

Unterschied zwischen σ und β ist. In der komplexen Druckschwankung am Boden sind demnach nicht nur erzwungene primäre und freie sekundäre Druckwellen vorhanden, im Druckverlauf wird außerdem noch eine andere Druckwelle längerer Dauer durch die Schwankungen der Amplitude vorgetäuscht. Ihre Länge hängt davon ab, wie die obere Druckwelle zum Aufbau der Troposphäre sich stellt. Die Amplitude der komplexen Druckschwankung steigert sich allmählich zu einem Maximum, sinkt dann wieder allmählich auf Null herab und beginnt das Spiel von vorne. Die Zyklonen entwickeln sich in der unteren Troposphäre infolge des Auftretens einer atmosphärischen Störung in größeren Höhen, nehmen an Tiefe allmählich bis zu ihrer kräftigsten Entfaltung zu und sterben dann wieder ab. Das ist auch das Bild, das uns die täglichen Wetterkarten bieten. Damit soll nicht gesagt sein, daß alle Zyklonen »von oben« stammen; auch Störungen in der Troposphäre selbst können sich ausbilden und wandern dann gemäß Gleichung (13), aber es ist festzuhalten, daß die Einwirkung von Störungen in größerer Höhe sich nicht einfach auf die unteren Schichten übertragen, sondern hier selbst neue Störungen erzeugen, die nur vom Aufbau dieser Schichten abhängen.

Die einzelnen Stadien des Lebenslaufes einer solchen unteren Druckwelle zeigen ganz auffallende Beziehungen zur oberen Druckwelle, die ebenfalls aus den Beobachtungstatsachen abgeleitet wurden und sich hier theoretisch ergeben. Solange die Achse der

Druckschwankung nach rückwärts (Westen) geneigt ist, solange demnach die obere Druckwelle der unteren folgt, ist die Entwicklung der Depression im aufsteigenden Aste; weil bei Resonanz dies stets der Fall ist, wächst auch die Tiefe der Zyklone ins maßlose. Wenn die Geschwindigkeit der beiden Wellen aber verschieden ist und die der oberen, wie es meistens der Fall ist, geringer, dann bleibt allmählich die obere Druckwelle gegenüber der unteren zurück, bis schließlich die Verschiebung eine halbe Wellenlänge beträgt; in diesem Moment hat die Depression ihr lebenskräftigstes Stadium erreicht. Nun ist in der Folge die obere Depression auf der Vorderseite, die untere Depression füllt sich aus und stirbt allmählich ab. Im aufsteigenden Aste der Entwicklung arbeiten die durch die obere, primäre Druckwelle erzwungenen Luftströmungen in bezug auf die Temperaturverteilung im gleichen Sinne, wie die der unteren freien Welle, die Zyklone vertieft sich. Allmählich verschieben sich aber die Wirkungen gegeneinander und der Effekt davon ist, daß nach Erreichung des Maximums die Intensität der Zyklone abnimmt, bis, wie es bei periodischen Erscheinungen stets der Fall ist, das Spiel wieder von vorne beginnt. Wir werden später bei einem bestimmten Fall die Entwicklung einer solchen unteren Zyklone näher verfolgen können.

Es ist vielleicht jetzt am Platz, ein Zahlenbeispiel zu geben. Wir nehmen H zu 7 km und setzen den Druck in der Höhe H (in mm Hg), mittleren Verhältnissen entsprechend,

$$p_H = 304 + 28 \cos 2 \varphi + 2 \cos \left(4\lambda - \frac{2\pi}{\Theta} t \right) \quad (19)$$

Die primäre, obere Druckwelle habe längs eines Breitenkreises vier vollständige Wellenlängen, ihre Periode Θ sei 7 Tage. Es interessiert zunächst die Winkelgeschwindigkeit β der freien Wellen. Setzt man in Gleichung (8) die in Formel (19) enthaltenen Werte für p_H und ν ein und nimmt als mittlere Temperatur der Luftsäule $257^\circ \text{ abs.} = -16^\circ \text{ C.}$, so erhält man

$$\beta = 3.63 \cdot 10^{-6} \text{ sec}^{-1},$$

so daß, da in unserem Fall $n = 4$ ist,

$$n\beta = 14.54 \cdot 10^{-6} \text{ sec}^{-1}$$

wird. Die Periode S der freien Wellen ist dann

$$S = \frac{2\pi}{n\beta} = 5.00 \text{ Tage.}$$

Während die Periode der erzwungenen Druckwelle zu 7 Tagen angenommen wurde, ist jene der freien Wellen 5 Tage. Die Amplitude der oberen Druckwelle ist gemäß (19) 2 mm ; jene der

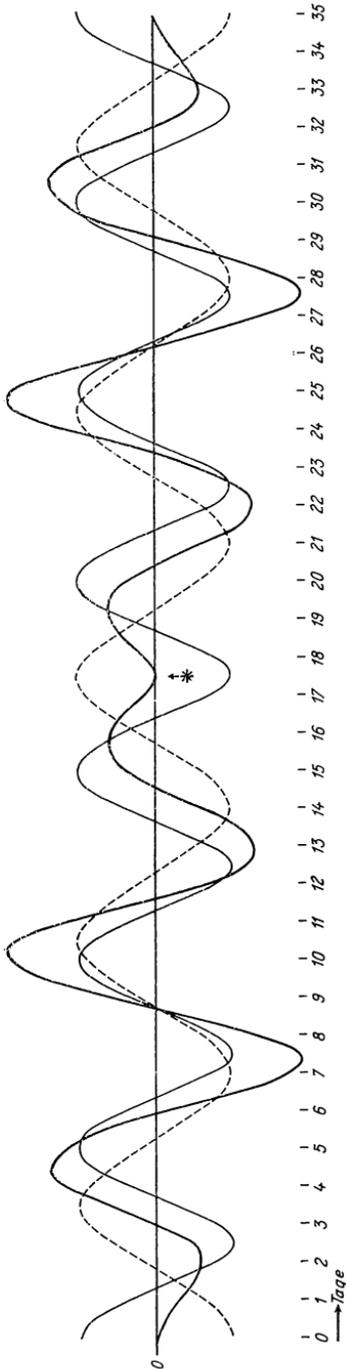


Fig. 1.

Druckschwankung am Boden (erzwungene und freie Welle) ist gemäß (17)
$$\frac{\alpha \varepsilon}{1 - \frac{\beta}{\sigma}} = -9.9 \text{ mm.}$$

Die durch die obere Druckschwankung bedingte Druckänderung am Boden hat demnach (bis auf konstante Glieder, t hier in Tagen) die Form:

$$p = +9.9 \left[\cos \left(4\lambda - \frac{2\pi}{5} t \right) - \cos \left(4\lambda - \frac{2\pi}{7} t \right) \right] \quad (20)$$

Für einen bestimmten Ort λ (z. B. $\lambda = 0$) gibt Fig. 1 den Druckverlauf während 35 Tagen, nach denen er sich wiederholt. Aber schon nach $17\frac{1}{2}$ Tagen erreicht die Druckschwankung, nachdem sie zu einem Maximum angewachsen und wieder abgeflaut ist, wieder ein Minimum an Amplitude. Die Schwebungen wiederholen sich mit einer Periode $\frac{2\pi}{N}$; da abgesehen vom

Vorzeichen $N = \frac{4\pi}{35 \text{ Tage}}$ ist, wird

diese Periode in unserem Fall $17\frac{1}{2}$ Tage. Es wäre noch zu bemerken, daß im Druckverlauf nach $17\frac{1}{2}$ Tagen ein Symmetriepunkt im Sinne Weickmann's auftritt. Auf die Frage der räumlichen Symmetrie wird am Schlusse der Arbeit noch zurückgekommen werden.

Die Lage des Zentrums des oberen, primären Tiefdruckgebietes zum Zentrum der erzwungenen Zyklone am Erdboden zu den einzelnen Entwicklungsstadien derselben kann aus den Gleichungen (16) und (18), beziehungsweise (19) und (20)

leicht abgeleitet werden. Die Wellenlänge der primären, oberen Druckwelle ist $\frac{2\pi}{n} = 90^\circ$

Das Minimum des Luftdruckes in der Höhe tritt zu den verschiedenen Zeiten t stets an den Stellen λ_1 ein, die der Gleichung

$$n(\lambda_1 - \sigma t) = \pi + 2m_1\pi$$

entsprechen, während sich das Minimum der Druckschwankung am Boden zu denselben Zeiten t an den Stellen λ_2 einstellt, die der Gleichung

$$n\left(\lambda_2 - \frac{\beta + \sigma}{2} t\right) - \frac{\pi}{2} \begin{cases} = \pi + 2m_2\pi \\ = 0 + 2m_2\pi \end{cases}$$

entsprechen, je nachdem die Amplitude des \cos -Gliedes in Gleichung (18) positiv oder negativ ist. In unserem Zahlenbeispiel gilt das obere Glied bis $t = 17\frac{1}{2}$ Tage, das untere von diesem Zeitpunkte bis zum 35. Tage usw.; m_1 und m_2 sind positive oder negative, ganze Zahlen.

Der Phasenunterschied zwischen unterer und oberer Depression wird dann

$$L = \lambda_2 - \lambda_1 = \pm \frac{\pi}{2n} + \frac{\beta - \sigma}{2} t + \frac{2\pi(m_2 - m_1)}{n}.$$

Das positive Vorzeichen bei $\frac{\pi}{2n}$ gilt bis $t = 17\frac{1}{2}$ Tage, darüber hinaus bis 35 Tage das negative Zeichen. Setzen wir die Zahlenwerte unseres Beispiels ein, dann wird

$$L = \lambda_2 - \lambda_1 = \frac{\pi}{4} \left(\pm \frac{1}{2} + \frac{t}{17 \cdot 5} \right) + \frac{\pi}{2} (m_2 - m_1).$$

Man sieht, daß von $t = 0$ bis $t = 8\frac{3}{4}$ Tage, sowie von $t = 17\frac{1}{2}$ bis $26\frac{1}{4}$ Tage, d. i. zur Zeit des aufsteigenden Entwicklungsastes der Zyklone am Boden L von $+\frac{\pi}{8}$ bis $+\frac{\pi}{4}$ wächst; die Achse der Zyklone ist dann nach rückwärts geneigt. Von $t = 8\frac{3}{4}$ bis $17\frac{1}{2}$ Tage, sowie von $t = 26\frac{1}{4}$ bis 35 Tage ist $L = -\frac{\pi}{8}$ bis $-\frac{\pi}{4}$, die Achse ist nach vorne geneigt, die Zyklone stirbt ab. Die Beziehungen gelten ganz allgemein für jeden Fall und werden auch von den Beobachtungen vollauf bestätigt.

Das mittlere meridionale Temperaturgefälle, das in der Troposphäre die Fortpflanzung der freien Wellen bedingt, hat, wie schon Exner gezeigt hat, eine derartige Größe, daß die Perioden der

freien Wellen rund 20, 15, 10, 5 usw. Tage betragen, wenn die Wellenlängen dieser Wellen der ganze Erdumfang, die Hälfte, ein Drittel, ein Viertel usw. desselben sind. Atmosphärische Störungen in großer Höhe irgendwelcher Periode rufen in der Troposphäre Druckwellen dieser Dauer hervor, und es ist gewiß kein Zufall, daß die wohl nun unzweifelhaft nachgewiesenen häufigsten und kräftigsten Druckwellen¹ in den gemäßigten Breiten der Erde gerade Perioden dieser Größenordnung aufweisen. Die Länge dieser Perioden hängt von der jahreszeitlichen Phase der Troposphäre ab; in der Tropikphase sind sie länger, in der Polarphase kürzer. Auch diese Schwankung ist im richtigen Sinne in β enthalten; denn je kräftiger das meridionale Temperaturgefälle ist, desto größer ist β und um so kleiner die Länge der Periode der freien Wellen.

Die Gleichungen (9), (10) und (11) lassen eine geschlossene Lösung auch dann noch zu, wenn der Anfangsdruck am Erdboden nicht mehr die einfache Form des bisher behandelten Falles aufweist. Das meridionale Temperaturgefälle wird im anfänglichen Zustand nicht nur durch das Druckgefälle in der Höhe, sondern auch durch die Druckverteilung am Boden bestimmt. Wir können ihm eine andere Form geben, wenn wir letztere anders wählen. Einige Fälle wollen wir kurz besprechen.

Wir nehmen zunächst den Fall, daß zur Zeit $t = 0$ am Boden

$$p_0 = A + M \cos 2 \varphi \quad (21)$$

ist; dies entspricht einem Druckfall von niedrigen gegen höheren Breiten auch am Boden. Die Lösung der Differentialgleichung (9) ist dann:

$$p = A + M \cos 2 \varphi + \frac{\alpha - 2 \frac{\gamma}{\sigma} M}{1 - \frac{\beta}{\sigma}} \varepsilon [\cos n (\lambda - \sigma t) - \cos n (\lambda - \beta t)] \quad (22)$$

oder

$$p = A + M \cos 2 \varphi + \frac{\alpha - 2 \frac{\gamma}{\sigma} M}{1 - \frac{\beta}{\sigma}} 2 n \sigma \varepsilon \sin \frac{N}{2} t \cos \left[n \left(\lambda - \frac{\sigma + \beta}{2} t \right) - \frac{\pi}{2} \right] \quad (22)$$

Die Lösung unterscheidet sich gegenüber der des gleichförmigen Anfangsdruckes in den Gleichungen (17) und (18) nur in

¹ L. Weickmann, Wellen
39. Bd., Nr. II, Leipzig 1924.

der Amplitude der erzwungenen und freien Welle. Es kommt hier noch ein Einfluß der unteren Druckverteilung hinzu, der aber, da $\frac{\gamma}{\sigma}$ bei den tatsächlich vorkommenden mittleren Verhältnissen eine kleine Größe ist, wenig Bedeutung besitzt. Nimmt man entsprechend einem mittleren Druck von 765 *mm* in 30° Breite und von 760 *mm* in 70° Breite M zu rund 4 *mm* an, so wird, da nach Gleichung (8) $\frac{\gamma}{\sigma} = \frac{\beta}{2 \nu \sigma}$ ist, bei gleichen Zahlenwerten, wie früher,

$$\frac{\gamma}{\sigma} = \frac{7}{2 \cdot 28 \cdot 5} = \frac{1}{40}$$

und

$$2 \frac{\gamma}{\sigma} M = 0.2,$$

während $\alpha =$ rund 2 ist. Auffallend ist, daß die Winkelgeschwindigkeit β durch die Druckverteilung am Boden nicht beeinflusst wird; sie ist nur abhängig vom meridionalen Druckgefälle in der Höhe.

Es läßt sich leicht einsehen, daß der Druckverteilung (21) zur Zeit $t = 0$ am Boden noch eine wellenförmige Druckverteilung $C \cos m(\lambda + \psi)$ hinzugefügt werden kann (m eine ganze Zahl, ψ eine konstante Größe), ohne daß die Lösung im Wesen geändert wird; es tritt nur noch eine durch diese wellenförmige Verteilung des Druckes am Boden bedingte freie Welle in der Form

$$C \cos m(\lambda + \psi - \beta t)$$

hinzu. Der Fall bietet an sich nichts Neues.

Interessanter ist vielleicht die Annahme

$$p_0 = A + M \cos 2\varphi + C \sin 2\varphi \cos m(\lambda + \psi), \quad (23)$$

die m -Zyklonen und -Antizyklonen in der anfänglichen Druckverteilung auf den ganzen Erdumfang zeigt. Für diesen Fall läßt sich ebenfalls eine geschlossene Lösung in der Form (24) geben.

$$p = A + M \cos 2\varphi + \frac{\alpha - 2}{1 - \frac{\beta}{\sigma}} \frac{M}{\sigma} \varepsilon [\cos n(\lambda - \sigma t) - \cos n(\lambda - \beta t)] + C \sqrt{1 - \left\{ \cos 2\varphi - \frac{2 \frac{\gamma}{\sigma}}{1 - \frac{\beta}{\sigma}} [\cos n(\lambda - \sigma t) - \cos n(\lambda - \beta t)] \right\}^2} \cos m(\lambda + \psi - \beta t). \quad (24)$$

Die zeitliche Druckschwankung am Erdboden ist nunmehr außerordentlich kompliziert. Einen Überblick darüber kann man nur durch Berechnung von Zahlenbeispielen gewinnen; es würde aber ohne graphische Wiedergabe der Druckverteilung für zahlreiche Zeitpunkte unmöglich sein, einen solchen zu geben, weshalb hier davon abgesehen wurde. Hingegen soll für eine andere anfängliche Druckverteilung, die der wirklichen noch besser entspricht, die Lösung und auch ein Zahlenbeispiel mitgeteilt werden. Wir wählen als anfängliche Druckverteilung eine Rinne tiefen Druckes in 60° Breite; gegen Norden wie gegen Süden soll der Druck ansteigen. Eine derartige Druckverteilung am Boden kommt bekanntlich dadurch zustande, daß in den polaren, bodennahen Schichten der Troposphäre die Temperatur in vertikaler Richtung stärker abnimmt als normal, also um den Pol eine Art kalter Luftkalotte lagert. Dieser Fall interessiert in Anbetracht der Polarfronttheorie der Zyklonen am meisten; denn die Rinne tiefen Druckes fällt ja mit der Polarfront zusammen.

Die anfängliche Druckverteilung habe demnach im einfachsten Fall die Form

$$p_0 = A - M \sin (2 \varphi - \psi). \quad (25)$$

M und ψ seien Konstante und gegeben; die Rinne tiefen Druckes liegt in der Breite

$$\varphi = \frac{1}{2} (90^\circ + \psi),$$

der Druck dortselbst ist $A - M$. Die Lösung für diesen Fall lautet:

$$p = A + M \sin \psi \cos 2 \varphi + \frac{\alpha - 2 \frac{\gamma}{\sigma} M \sin \psi}{1 - \frac{\beta}{\sigma}} \varepsilon [\cos n (\lambda - \sigma t) - \cos n (\lambda - \beta t)] - M \cos \psi \sqrt{1 - \left[\cos 2 \varphi - \frac{2 \frac{\gamma}{\sigma}}{1 - \frac{\beta}{\sigma}} \{ \cos n (\lambda - \sigma t) - \cos n (\lambda - \beta t) \} \right]^2}. \quad (26)$$

Auch in diesem Fall läßt sich über den Verlauf der Druckschwankung am Erdboden kein allgemeiner Überblick direkt aus (26) gewinnen; nur so viel läßt sich sogleich sagen, daß es zur Ausbildung von geschlossenen Isobarenformen, von Zyklonen und Antizyklonen kommt, trotzdem die anfängliche Druckverteilung keine solche aufwies. Die Rinne tiefen Druckes löst sich in eine Reihe nach Osten wandernder Hoch- und Tiefdruckgebiete auf, wie es die tatsächlichen Verhältnisse auch zeigen. Sie werden,

was aus der Differenz der zwei Einzelwellen zu schließen ist, allmählich an Intensität wachsen, einen Höhenpunkt ihrer Entwicklung zeigen und dann wieder absterben. Dieser ganze Vorgang hängt wieder ganz davon ab, wie die erzeugende Druckwelle in der Höhe zu dem Aufbau der Troposphäre paßt. Es kann, obgleich die Druckwelle in der Höhe nur die Wellenform besitzt, also nur Ausbuchtungen der Isobaren in der Nord-Süd-Richtung aufweist, in der Troposphäre zu gewaltigen Zyklonen und Antizyklonen kommen, die allmählich wachsen und dann wieder absterben; diese können aber auch trotz derselben erzeugenden Druckwelle in der Höhe nur ganz lebensschwache Druckgebilde bleiben, die sich nicht weiter entwickeln können. Alles hängt von dem Aufbau der Troposphäre ab.

Für diesen Fall wollen wir ein Zahlenbeispiel geben und für einige ausgewählte Zeitpunkte auch die graphische Darstellung der zeitlichen Änderung der Druckverteilung am Boden. Für die anfängliche Druckverteilung am Boden wählen wir in Gleichung (25):

$$A = 768 \text{ mm}, M = 8 \text{ und } \psi = 30^\circ$$

diese Werte geben folgende meridionale Druckverteilung:

= 80°	70°	60°	50°	40°	30° Breite.
$p_0 = 761 \cdot 9$	$760 \cdot 5$	$760 \cdot 0$	$760 \cdot 5$	$761 \cdot 9$	$764 \cdot 0 \text{ mmHg.}$

Den Druckanstieg gegen Norden würde man stärker wünschen, sonst entsprechen die Werte nicht schlecht den beobachteten Mittelwerten. Dann ist

$$M \sin \psi = 4 \cdot 0 \text{ und } M \cos \psi = 6 \cdot 93.$$

Weiter nehmen wir, wie im früheren Beispiel, für den Druck in der Höhe $H = 7 \text{ km}$ die Werte der Formel (19), so daß wieder

$$n \sigma = \frac{2 \pi}{7 \text{ Tage}},$$

$$n \beta = \frac{2 \pi}{5 \text{ Tage}}$$

und schließlich

$$\frac{\alpha - 2 \frac{8}{\sigma} M \sin \psi}{1 - \frac{\beta}{\sigma}} \varepsilon = -8 \cdot 88$$

und

$$\frac{2 \frac{7}{\sigma}}{1 - \frac{\beta}{\sigma}} = -0 \cdot 25 \text{ werden.}$$

Damit sind alle Größen in Gleichung (24) zahlenmäßig gegeben und ihrer Auswertung für verschiedene Werte von λ , φ und t steht nichts im Wege. Die Druckverteilung wiederholt sich örtlich

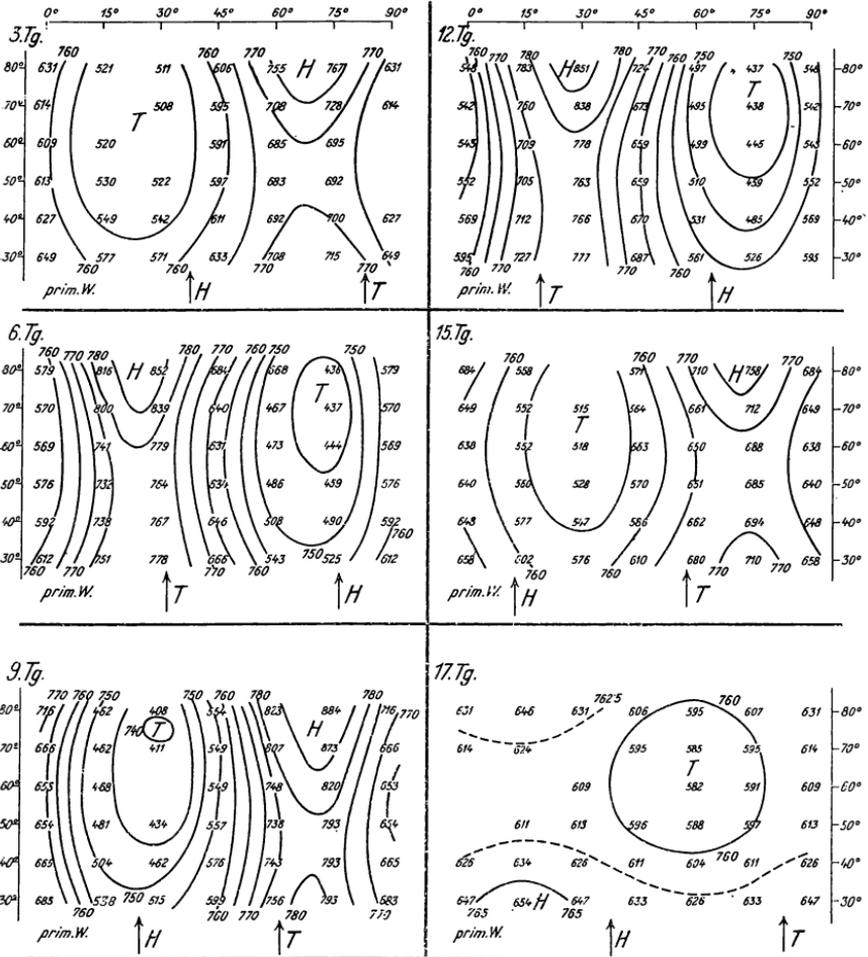


Fig.

alle 90° Länge, so daß es genügt, die Erdoberfläche zwischen 0° und 90° zu betrachten. Weiters zeigt sich auch diesmal, daß sich die Druckverteilung nach 35 Tagen wiederholt und daß nach 17½ Tagen ein Symmetriepunkt derselben eintritt. Es genügt

also, diesen Zeitraum von $17\frac{1}{2}$ Tagen zu betrachten, in dem sich die ganze Entwicklung einer Zyklone und einer Antizyklone abspielt. Fig. 2 enthält die Druckverteilung für den 3., 6., 9., 12., 15. und 17. Tag. Am Tage 0 zeigt sie eine Rinne niedrigen Druckes längs 60° und die Isobaren als Gerade längs der Parallelkreise. Aus der Rinne entwickelt sich zunächst in den Räumen zwischen $-22\cdot5^\circ$ und $+22\cdot5^\circ$ Länge ein Tiefdruckgebiet, darnach ein Hochdruckgebiet. Das ganze System wandert mit einer Winkelgeschwindigkeit von rund 15° pro Tag ostwärts, während gleichzeitig die Zyklone wie die Antizyklone an Intensität zunimmt. Schon nach drei Tagen finden wir im Zentrum der Zyklone in etwa 65° Breite einen Druck von etwa $750\cdot5$ mm, während ein Hochdruckvorstoß von Norden mit 770 mm bis 60° reicht. Die Zyklone vertieft sich nun rasch auf $743\cdot5$ mm im Zentrum am sechsten Tag und auf 740 mm am neunten Tag und hat damit ihr kräftigstes Entwicklungsstadium erreicht (genauer zur Zeit $t = 8\cdot75$ Tage). Auch die Antizyklone, die »kohärent« der Zyklone folgt, aber immer nur die Form eines Hochdruckvorstoßes aus hohem Norden zeigt, schiebt sich auf der Rückseite der Zyklone immer weiter gegen Süden vor und verstärkt sich entsprechend der Intensitätszunahme derselben. Von diesem Zeitpunkt an flaut die Druckverteilung wieder ab, die Zyklone stirbt allmählich ab und am Tage 17 ist nur noch ein schwaches Tiefdruckgebiet vorhanden, das sich im folgenden Halbtage gänzlich in die Rinne tiefen Druckes auflöst. Diese bleibt erhalten und aus ihr entwickeln sich dann wieder von neuem Zyklonen und Antizyklonen. Fig. 2 gibt uns die ganze Entwicklung dieser Zyklone und wieder zeigt sich, daß die einzelnen Stadien derselben ganz von der Lage der oberen, primären, erzeugenden Druckwelle zur erzwungenen Druckschwankung am Boden abhängen. In Fig. 2 sind bei den einzelnen Tagen durch Pfeile auch die Lage des Wellentales (T) und des Wellenberges (H) der oberen primären Druckwelle eingetragen und man sieht, daß bis zum 9. Tage, dem Tage der kräftigsten Entfaltung der Zyklone, die »Achse der Zyklone« nach rückwärts (Westen) geneigt ist: Das T der primären Welle liegt immer westwärts vom T der Druckschwankung am Boden, und zwar um einen Betrag, der kleiner ist als eine halbe Wellenlänge. Dieser Zwischenraum wird nun immer größer, bis er gleich einer halben Wellenlänge wird: dann entsprechen dem T und H unten das H und T oben. Dies tritt genau nach $8\frac{3}{4}$ Tagen auf, an welchem Tage die Bodenzyklone am kräftigsten ist. Nun rückt das Wellental der oberen Druckwelle auf die Vorderseite der unteren Depression, die Zyklone füllt sich aus, stirbt ab, bis nach weiteren $8\frac{3}{4}$ Tagen der anfängliche Zustand wiederhergestellt ist. Die Lage der oberen Druckwelle zur erzwungenen Druckschwankung am Boden, die sich aus erzwungenen und freien Druckwellen zusammensetzt, ist somit entscheidend für die Lebensgeschichte einer Zyklone.

Fassen wir den Inhalt der vorhergehenden Erörterungen kurz zusammen, so können wir sagen:

Druckänderungen in den höheren Schichten der Atmosphäre (Substratosphäre) bedingen ebensolche Druckschwankungen in den unteren Troposphärenschichten; diese Druckschwankungen sind aber nicht die einfache Übertragung der oberen Druckänderungen auf die unteren Schichten, sondern infolge des stets vorhandenen meridionalen Temperaturgefälles werden durch sie neue, nur der Troposphäre angehörige Druckwellen erzeugt, die gemäß der Richtung des Temperaturgefälles ostwärts wandern. Obere, primäre Druckwellen und diese von ihnen erzeugten sekundären Druckwellen, die im Wesen thermisch-advektiver Natur sind, überlagern sich und führen zur komplexen Druckschwankung der Niederung. Die Entwicklung dieser Druckschwankung hängt davon ab, wie die obere Druckwelle zum gegebenen Aufbau der Troposphäre paßt; immer wächst sich die Druckschwankung am Boden zu einer lebenskräftigen Zyklone aus, wenn die Achse dieser »hohen Zyklone« nach rückwärts geneigt ist. Solange dies der Fall ist, steigert sich ihre Intensität; wenn aber bei verschiedener Fortpflanzungsgeschwindigkeit der primären und sekundären Welle eine derartige Phasenverschiebung eintritt, daß die Achse der Zyklone nach vorne geneigt ist, dann stirbt die Depression ab.

Die Beobachtungsergebnisse über den Aufbau der hohen Zyklonen stimmen mit diesen theoretischen Ergebnissen in unerwarteter Weise gut überein. Die Grundlagen der Theorie, die auf die Untersuchungen F. M. Exner's über den Einfluß reiner Advektion auf die Druckänderungen am Boden zurückgehen, müssen im Wesen das Richtige treffen, wenn auch die Rechnungen nur unter vereinfachenden Annahmen durchgeführt werden konnten. Aber sie geben uns doch einen Einblick, auf welche Weise die sekundären Druckschwankungen der Niederung entstehen können, wie sie sich zu den oberen Druckwellen ursächlich verhalten. Vielleicht wäre es möglich, manche der vereinfachenden Annahmen fallen zu lassen und eine vollständigere Theorie der hohen Zyklonen zu geben.

Hier wurden die oberen Druckwellen als gegeben angenommen und ihre Wirkung auf die unteren Troposphärenschichten, soweit sie advektiver Natur ist, untersucht. Wie die oberen Druckwellen entstehen, ob sie als freie Schwingungen an der Diskontinuitätsfläche zwischen Troposphäre und Stratosphäre oder als ein Ausfluß eines »äquatorialen Systems in der Höhe« aufzufassen sind, ist hier belanglos. Sind sie vorhanden, dann rufen sie erzwungene und freie Druckwellen in der Troposphäre hervor, die im wechselvollen Bild der Wetterkarten in Erscheinung treten.

Bemerkungen über die räumliche Symmetrie von Wetterkarten.

Fig. 1 enthält gemäß der Gleichung (17) bei

$$n \sigma = \frac{2 \pi}{7 \text{ Tage}}$$

und

$$n \beta = \frac{2 \pi}{5 \text{ Tage}}$$

für $\lambda = 0$ den zeitlichen Ablauf der erzwungenen primären und der freien sekundären Druckwelle und deren Zusammensetzung zur komplexen Druckschwankung am Boden für den Zeitraum von 35 Tagen; nach diesem Zeitpunkt wiederholt sich die Kurve. Für den Punkt $\lambda = 45^\circ$ gilt das Spiegelbild dieser Kurve in bezug auf die Abszissenachse. Es ist früher erwähnt worden, daß für

$$\lambda = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} .$$

usw. alle $17\frac{1}{2}$ Tage sich ein Symmetriepunkt einstellt. Der erste ist in Fig. 1 durch einen Stern gekennzeichnet. Die näheren Bedingungen für das Auftreten von Symmetriepunkten im Luftdruckgang eines Ortes hat L. Weickmann¹ untersucht; in dieser Hinsicht ist seinen Ausführungen nichts hinzuzufügen. Im V Kapitel seiner Untersuchungen geht er aber zum räumlichen Problem, zur Symmetrie in den Wetterkarten über und gelangt hiebei zum Schlusse, daß die Spiegelungspunkte auch in der räumlichen Verteilung des Luftdruckes nachweisbar sind, »derart, daß Wetterkarten entsprechender Tage ein übereinstimmendes Bild der Luftdruckverteilung zeigen«. Dieses Ergebnis ist von W. Schmidt angezweifelt worden durch die Bemerkung, daß, wenn dieses Ergebnis richtig wäre und vor dem Symmetriepunkt die Druckgebilde sich in der Richtung von Westen nach Osten verlagert haben, nach dem Symmetriepunkt ihre Bewegungsrichtung umgekehrt von Osten gegen Westen sein müßte; dies sei aber nicht der Fall.

Die Stichhaltigkeit dieses Einwandes muß sich rechnerisch genau feststellen lassen. Anlässlich der oben mitgeteilten Untersuchungen wurden zahlreiche Druckverteilungen, die durch Überlagerung ostwärts wandernder Wellen entstehen, gezeichnet und neben den zeitlichen Symmetriepunkten an einem Ort auch die Symmetrie in der Folge der Druckverteilungen näher betrachtet. Es zeigt sich hiebei, daß die Symmetrie in den Wetterkarten unmöglich in dem von Weickmann gegebenen Sinne, daß

¹ l. c. p. 368.

Wetterkarten entsprechender Tage ein übereinstimmendes Bild der Luftdruckverteilung zeigen, vorhanden sein kann, und daß, wenn es so wäre, der Einwand W. Schmidt's, daß die Zugrichtung der Druckgebilde nach dem Symmetriepunkt sich umkehren müßte, berechtigt ist. Eine Symmetrie in den Wetterkarten ist vorhanden, aber nur in dem Sinn, daß Wetterkarten entsprechender Tage spiegelbildlich in bezug auf den Ortsmeridian des Symmetriepunktes gleich sind. Dann entfällt auch der Einwand; denn bei spiegelbildlicher Umdrehung der Wetterkarte bleibt die frühere Zugrichtung der Druckgebilde nach dem Symmetriepunkt erhalten.

Daß die Symmetrie in den Wetterkarten nur so möglich ist, ersieht man sogleich daraus, daß der zeitliche Ablauf des Druckganges an einem Ort, wie er in Fig. 1 gegeben ist, in üblicher Weise auch als ein Nebeneinander aufeinanderfolgender Druckverteilungen angesehen werden kann. Ein Stück Druckverteilung vor dem Symmetriepunkt (*) ist aber einem entsprechenden Stück nach demselben nur gleich, wenn wir es spiegelbildlich in bezug auf den Symmetriepunkt umlegen.¹ Alle berechneten Fälle zeigen übereinstimmend, daß die räumliche Symmetrie nur so stattfinden kann. Fig. 2 gibt die Druckverteilung für eine Reihe von Tagen nach der durch die Beziehung (26) gegebenen Gleichung für p am Boden. Der Punkt $\lambda = 45^\circ$ zeigt beim Tag $17\frac{1}{2}$ einen Symmetriepunkt im zeitlichen Druckverlauf entsprechend der Fig. 1. Dieser Tag gibt auch das Zentrum einer räumlichen Symmetrie ab; denn für die Tage, die gleich weit von ihm entfernt sind, sind die Druckverteilungen spiegelbildlich in bezug auf 45° östl. L. einander gleich. Die Wiedergabe dieser Karten wurde hier unterlassen, da es doch eine Wiederholung der früheren Zeichnungen wäre. Die Luftdruckverteilung für den 18. Tag, der vom Symmetrietag gleich viel absteht wie der 17, ist identisch mit der in Fig. 2 für diesen Tag gegebenen, nur müssen wir sie uns um den Meridian

¹ Im Falle z. B., daß die Druckverteilung durch

$$p = \cos(\lambda - \sigma t) - \cos(\lambda - \beta t)$$

gegeben ist, zeigt sich sofort, daß ein Symmetriepunkt zur Zeit $t = 0$ im Punkte $\lambda = 0$ stattfindet. Da diese Stelle und dieser Punkt auch der Symmetriemittelpunkt in der Druckverteilung ist, müßte nach Weickmann für einen beliebigen Zeitpunkt vor und nach dem Symmetrietag Übereinstimmung der Druckverteilung vorhanden sein; es müßte demnach

$$p(\pm \lambda, +\tau) = p(\pm \lambda, -\tau)$$

sein. Diese Gleichung ist aber für beliebige Werte von λ und τ , mit Ausnahme des Symmetriepunktes $\lambda = 0$ selbst, nicht erfüllbar. Hingegen ist

$$p(\mp \lambda, +\tau) = p(\pm \lambda, -\tau),$$

wie sich leicht zeigen läßt, stets erfüllt. Dies besagt aber, daß die einander entsprechenden Druckverteilungen in bezug auf die Symmetriepunkte spiegelbildlich gleich sind.

von 45° umgelegt denken, derart, daß z. B. das »T« dann nicht mehr in 60° Länge, sondern in 30° Länge zu liegen kommt. So entspricht weiter der 15. Tag dem 20., der 12. Tag dem 23. usw., schließlich der 0. Tag dem 35. Die entsprechenden Druckverteilungen für diese Tage nach dem Symmetrietag sind immer die Spiegelbilder der Druckverteilungen der entsprechenden Tage vor dem Symmetrietag. Man sieht dann sofort, daß die west-östliche Bewegungsrichtung der Zyklonen erhalten bleibt, z. B. war

vor dem Symmetriepunkt:

T am 15. in 30° östl. L., am 17. in 60° östl. L.,

nach dem Symmetriepunkt:

T am 18. in 30° östl. L., am 20. in 60° östl. L.

Daß Weickmann seine Schlußfolge in den Beobachtungen bestätigt gefunden hat, kann vielleicht so erklärt werden, daß die von ihm betrachteten Fälle korrespondierender Luftdruckverteilungen in der Mehrzahl an sich symmetrische Luftdruckverteilungen in bezug auf den Mittelmeridian der Wetterkarte aufweisen, so daß durch eine spiegelbildliche Umlegung im angenäherten Verlauf der Isobaren — es kommt ja nur auf eine grobe Ähnlichkeit in der Lage der Hoch- und Tiefdruckgebiete an — im Wesen nichts geändert wird. Oder es liegt eine andere Erscheinung vor, die der Erklärung harzt.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften
mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse](#)

Jahr/Year: 1926

Band/Volume: [135_2a](#)

Autor(en)/Author(s): Defant Albert Josef Maria

Artikel/Article: [Primäre und sekundäre - freie und erzwungene
Druckwellen in der Atmosphäre. 357-377](#)