Gedruckt mit Unterstützung aus dem Jerome und Margaret Stonborough-Fonds

Die Differentialgeometrie des räumlichen Vektorfeldes I

Ein Beitrag zur Differentialgeometrie der Kurvenkomplexe

Von

Franz Knoll (Wien)

(Vorgelegt in der Sitzung vom 10. Juni 1926)

Einleitende Bemerkungen.

Monge hat in seiner »*Application de l'analyse à la géométrie*« und seiner Arbeit »*Supplément, où l'on fait voir que les équations aux différences ordinaires pour lesquelles les conditions d'intégrabilité ne sont pas satisfaites sont susceptibles d'une véritable intégration et que c'est de cette intégration que dépend celle des équations aux différences partielles élevées*«, Mémoires de l'Académie, Paris 1784, p. 502, wohl als erster geometrische Probleme, die sich an Gleichungen von der Form $\Omega(x_1, x_2, x_3, dx_1, dx_2, dx_3) = 0$, die in den Differentialen homogen sind, anschließen, untersucht; die Fragen, die sich an den Fall, wo Ω linear (homogen von der ersten Ordnung) in den Differentialen ist, anfügen und unter dem Pfaff'schen Problem bekannt sind, haben in eingehenden Werken (Darboux, v Weber, Goursat) Behandlung gefunden; gewisse tiefschürfende geometrische Untersuchungen über hierher gehörende Fragen bilden den Hauptinhalt des Werkes: S. Lie, *Geometrie der Berührungstransformationen*, dargestellt von S. Lie und G. Scheffers, I. Bd., Leipzig 1896.

Eine Monge'sche Gleichung erster Ordnung (eine Pfaff'sche Gleichung, ein kovariantes Vektorfeld) definiert durch die Menge ihrer Integralkurven einen Kurvenkomplex ersten Grades, in dem man eine Differentialgeometrie studieren kann, die weitgehende Analogien mit der gewöhnlichen Flächentheorie zeigt (§ 1).

Mit jedem derartigen Vektorfeld ist in jedem Punkte eine Korrelation verbunden, deren invariante Elemente bei eingehenderen Untersuchungen in den Vordergrund treten (§ 2).

Da jedes Vektorfeld mit einem Einheitsvektorfeld in engstem Zusammenhang steht und sich die Formeln für Einheitsvektorfelder übersichtlicher gestalten, werden im folgenden nur Einheitsvektorfelder untersucht (§ 3).

Ist $\mathfrak{a}|\mathfrak{a} = 1$, rot $\mathfrak{a} = \mathfrak{C}$, $|\mathfrak{C}| = C$, $\mathfrak{a}|\mathfrak{C} = C\cos\gamma$, so gilt für die Flexion $\frac{1}{\sigma_1}$ der *Stromlinien* eines solchen Feldes der Satz:

$$\sigma_1 \; C \sin\gamma = 1 \;\; (\S\ 4). \tag{I}$$

Für die Torsionen $\frac{1}{\alpha_2^{(1)}}, \frac{1}{\alpha_2^{(2)}}$ der *Haupttangentenkurven* gelten die beiden Formeln

$$\frac{1}{\alpha_2^{(1)}} + \frac{1}{\alpha_2^{(2)}} = -C \cos \gamma, \tag{II}$$

$$\frac{1}{\alpha_2^{(1)}\alpha_2^{(2)}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_{31} \\ a_{13} & a_{11} \end{vmatrix}, \tag{III}$$

die in Verbindung mit (I) ergeben:

$$\left(\frac{1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{\alpha_2^{(1)}} + \frac{1}{\alpha_2^{(2)}}\right)^2 = C^2, \tag{IV}$$

Aus (II) erkennt man, daß die den Satz von Enneper liefernde Tatsache, daß die Torsionen der Haupttangentenkurven sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden, nur für Kurvenkomplexe, die auf einer Flächenschar $f(x_1, x_2, x_3) = K$ liegen, erfüllt ist (§ 5).

Den Krümmungslinien der gewöhnlichen Flächentheorie entsprechen in der Differentialgeometrie der Kurvenkomplexe zwei verschiedene Kurvengattungen. die *Krümmungslinien*, Komplexkurven, längs welcher die Normalen eine Torse bestimmen, und die *Hauptkurven*, längs welcher die Krümmungen der Normalschnitte extreme Werte annehmen.

Bei Bestimmung der Krümmungslinien trifft man auf die Größen

$$H = -(a_{11} + a_{22} + a_{33}) = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2},$$

$$K = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_{31} \\ a_{13} & a_{11} \end{vmatrix} = \frac{1}{k_1\, k_2}, \tag{V}$$

welche die *mittlere Krümmung* und das *Krümmungsmaß* des Komplexes in jedem Punkte angeben. Man findet die Formel

$$\alpha_2^{(1)}\alpha_2^{(2)} = k_1\, k_2 \quad (\S\S\ 6, 7). \tag{VI}$$

Bezeichnet man mit α den Winkel der Haupttangentenkurven, mit $\varkappa$ den Winkel der Krümmungslinien, so ergeben sich die folgenden Sätze:

$$H = \left(\frac{1}{\alpha_2^{(2)}} - \frac{1}{\alpha_2^{(1)}}\right) \cot \alpha; \tag{VII}$$

$$\cos \varkappa = \frac{\left(\frac{1}{\alpha_2^{(1)}} + \frac{1}{\alpha_2^{(2)}}\right) \sin \alpha}{\left(\frac{1}{\alpha_2^{(1)}} - \frac{1}{\alpha_2^{(2)}}\right)}; \tag{VIII}$$

$$H \cos \varkappa = C \cos \gamma \cos \alpha. \tag{IX}$$

Die Krümmungslinien stehen also, wenn $\alpha \neq 0$, nur dann aufeinander senkrecht, wenn der Kurvenkomplex von der Gattung 1 ist (§ 8).

Zwischen dem doppelten Orthogonalsystem der Hauptkurven und den Haupttangentenkurven besteht ein enger Zusammenhang, insbesondere gelten die Formeln

$$H = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \tag{X}$$

$$\frac{1}{R_1 R_2} = -\frac{H^2}{4} \operatorname{tg}^2 \alpha = -\frac{1}{4} \left(\frac{1}{\alpha_2^{(2)}} - \frac{1}{\alpha_2^{(1)}} \right)^2 \tag{XI}$$

Endlich kann man einen dem *Euler*'schen Satz entsprechenden Satz ableiten (§§ 9, 10).

An formalen Voraussetzungen wäre das Folgende zu erwähnen: Die Schreibweise schließt sich im wesentlichen an Runge C., *Vektoranalysis*, Bd. I, Leipzig 1919, an. Einheitsvektoren werden mit kleinen Buchstaben bezeichnet, insbesondere ist mit $\mathfrak{t}$ der Tangenten-, mit $\mathfrak{h}$ der Hauptnormalen- und mit $\mathfrak{b}$ der Binormalenvektor einer Raumkurve bezeichnet. Das Summationszeichen wird unterdrückt, wenn in dem betreffenden Ausdruck zwei gleiche Indizes auftreten; es ist also $a_i b_i \equiv \sum_1^3 {}^i a_i b_i$. Die Schreibweise $i \neq k \neq l$ 1, 2, 3 soll andeuten, daß für $i\,k\,l$ irgendeine der drei Permutationen 123, 231, 312 gesetzt werden kann.

Hinsichtlich der Stetigkeit und Differenzierbarkeit werden die in der Differentialgeometrie üblichen Annahmen gemacht. Mit Rücksicht auf die Sonderstellung der Minimalkurven werden in der vorliegenden Arbeit auch jene Vektorfelder, in welchen bei irgendeiner der im folgenden betrachteten Kurvengattungen Minimalkurven auftreten könnten, von der Untersuchung ausgeschlossen.

§ 1. Der Integralkurvenkomplex.

Durch eine Pfaff'sche Differentialgleichung

$$X_i\, d\, x_i = 0; \quad X_i\,(x_1, x_2, x_3); \tag{1}$$

oder, was damit gleichbedeutend ist, durch ein kovariantes Vektorfeld[1]

$$\mathfrak{X} = X_i\, \mathfrak{c}_i \tag{2}$$

[1] Über den Begriff vgl. Study E., *Einleitung in die Theorie der Invarianten linearer Transformationen auf Grund der Vektorenrechnung*, 1. T., Braunschweig, 1923; Weitzenböck R., *Invariantentheorie*, Groningen, 1923; Schouten J. A., *Der Ricci-Kalkül*, Berlin, 1924.

wird auf jeder Fläche $F:(x_i\,[u_1, u_2])$ eines euklidischen Raumes, wie man durch einfaches Einsetzen erkennt,

$$X_i \frac{\partial x_i}{\partial u_1}\, du_1 + X_i \frac{\partial x_i}{\partial u_2}\, du_2 = 0,^1 \tag{3}$$

eine einparametrige Schar von Kurven $f(u_1, u_2) = K$ ausgezeichnet, nämlich jene Kurven, welche dieser Differentialgleichung (3) genügen.

Bezeichnen wir alle Kurven $C:(x_i\,[t])$, welche der Bedingung

$$X_i\, x_i'(t) = 0 \tag{4}$$

identisch genügen, als *Integralkurven* der Differentialgleichung (1) und nennen wir eine Mannigfaltigkeit von Raumkurven von der Beschaffenheit, daß auf jeder Fläche stets eine einparametrige Schar von Kurven der Mannigfaltigkeit liegt,[2] einen *Kurvenkomplex*, so kann man sagen

Satz I: *Ein kovariantes Vektorfeld induziert auf jeder Fläche, sofern nicht die Differentialgleichung (3) identisch verschwindet, die auf ihr liegende einparametrige Schar seines Integralkurvenkomplexes.*

Der ausgeschlossene Sonderfall kann übrigens, wie die allgemeine Theorie des Pfaff'schen Problems[3] zeigt, nur dann eintreten, wenn die bekannte Integrabilitätsbedingung

$$X_1\,(X_{23}-X_{32}) + X_2\,(X_{31}-X_{13}) + X_3\,(X_{12}-X_{21}) = 0 \tag{5}$$

erfüllt ist und daher eine einparametrige Flächenschar $F(x_1, x_2, x_3) = K$ existiert, so daß identisch gilt

$$X_i\, d\, x_i = M(x_1, x_2, x_3)\, d\, F(x_1, x_2, x_3). \tag{6}$$

Für alle Kurven dieser Flächen ist dann die Beziehung (4) identisch erfüllt und der Integralkurvenkomplex besteht dann offenbar aus der Menge aller Kurven auf der Flächenschar und auf jeder anderen Fläche werden als Integralkurven die Schnittkurven mit der Schar $F = K$ induziert.

Aus Gründen, die mit der allgemeinen Theorie des Pfaff'schen Problems, beziehungsweise mit den Typen der Nullsysteme des Überraumes zusammenhängen, sprechen wir, wenn die Bedingung (5) erfüllt ist, von einem *Kurvenkomplex der Gattung 1,* während wir im allgemeinen Falle den *Integralkurvenkomplex* als *zur Gattung 2 gehörig* bezeichnen.

---

1 Es ist natürlich auch in X_i einzusetzen.

Die Bezeichnung ist der Bezeichnung der Liniengeometrie nachgebildet.

Im folgenden ist

$$X_{ik} = \frac{\partial X_i}{\partial x_k}.$$

Aus den allgemeinen Sätzen über das Pfaff'sche Problem folgt, daß in dem letzten Falle immer identisch eine Darstellung von der Form existiert:

$$X_i\,d\,x_i = M_1\,d\,F_1 + M_2\,d\,F_2, \tag{7}$$

wobei die Funktionen $F_1, F_2, \dfrac{M_1}{M_2}$ voneinander unabhängig sind.

§ 2. Die begleitende Korrelation.

Aus (4) folgt, daß die Ebene

$$X_{i\,0}\,(y_i - x_{i,\,0}) = 0;\; X_{i\,0} = X_i\,(x_{1,\,0},\; x_{2,\,0},\; x_{3,\,0})^1 \tag{8}$$

die Tangenten an alle durch den Punkt $(x_{i,\,0})$ gehenden Integralkurven $C: (x_i\,[t]),\; x_i\,(t_0) = x_{i,\,0}$, enthält; wir nennen sie die *Tangentialebene* im Punkte $(x_{i,\,0})$. Die Gerade

$$y_i = x_{i,\,0} + \lambda\,X_{i\,0}{}^2 \tag{9}$$

heiße die *Normale* im Punkte $(x_{i,\,0})$.

Mit Rücksicht auf spätere Untersuchungen heben wir noch einige weitere bei eingehender Behandlung wichtige geometrische Gebilde hervor, ohne auf die Gründe der Wichtigkeit eingehen zu können.[3]

Durch die Größen $\dfrac{\partial X_i}{\partial x_k} = X_{i\,k}$ wird die *begleitende Korrelation* im Punkte (x_i) in der Form

$$X_{i\,k}\,A_i\,B_k = 0 \tag{10}$$

definiert, darin sind die Größen A_i und B_i Richtungsparameter zweier vom Punkte (x_i) ausgehenden Geraden.

Der *Kernkegel* dieser Korrelation läßt sich dann unmittelbar in der Form

$$X_{i\,k}\,A_i\,A_k = 0 \tag{11}$$

gewinnen.

Die durch die folgende Doppelgleichung definierte Gerade

$$\frac{y_1 - x_1}{X_{23} - X_{32}} = \frac{y_2 - x_2}{X_{31} - X_{13}} = \frac{y_3 - x_3}{X_{12} - X_{21}}{}^4 \tag{12}$$

---

1 Die y_i sind laufende Koordinaten.

2 Vgl. Anm. 1. λ ist ein Parameter.

3 Die Bezeichnung schließt im wesentlichen an Sturm R., *Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften*, Bd. II, p. 74 ff., Leipzig, 1908, an.

4 Die Größen X_i transformieren sich der Voraussetzung gemäß bei allen Transformationen der Form

$$x_i = x_i(y_1, y_2, y_3);\; i = 1, 2, 3; \tag{T}$$

nennen wir in Anlehnung an einen physikalischen Begriff die *Wirbelachse*, die auf ihr normale Ebene *Wirbelebene*.[1]

Durch[2]

$$\begin{vmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} & A'_1 \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} & A'_2 \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} & A'_3 \\ B'_1 & B'_2 & B'_3 & 0 \end{vmatrix} = Y_{ik} A'_i B'_k = 0 \tag{13}$$

wird die *reziproke begleitende Korrelation* im Punkte (x_i) definiert.

Der ihr entsprechende *reziproke Kernkegel* läßt sich in der Form

$$\begin{vmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} & A'_1 \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} & A'_2 \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} & A'_3 \\ A'_1 & A'_2 & A'_3 & 0 \end{vmatrix} = Y_{ik} A'_i A'_k = 0 \tag{14}$$

ansetzen.

Die *reziproke Wirbelachse* hat die Doppelgleichung:

$$\frac{y_1 - x_1}{Y_{23} - Y_{32}} = \frac{y_2 - x_2}{Y_{31} - Y_{13}} = \frac{y_3 - x_3}{Y_{12} - Y_{21}}.\text{[3]} \tag{15}$$

Die Ebene, welche im Punkte (x_i) auf der (reziproken) Wirbelachse senkrecht steht, nennen wir die (*reziproke*) *Wirbelebene*.

---

kovariant. Dagegen sind die Größen X_{ik} und $X_{ik}+X_{ki}$ nur dann Bestimmungszahlen eines kovarianten Affinors, beziehungsweise Tensors, sofern man affine Transformationen (Study)

$$x_i = a_{i0} + a_{i1} y_1 + a_{i2} y_2 + a_{i3} y_3;\quad i = 1, 2, 3; \tag{A}$$

zuläßt. Die Größen $X_{ik} - X_{ki}$ sind jedoch wieder Bestimmungsgrößen eines kovarianten Bivektors bei *allen* Transformationen (T).

1 Die Polarität in bezug auf den absoluten Kegelschnitt ordnet auch zu jeder begleitenden Korrelation eine zu ihr »*normale*« Korrelation

$$X_{ik} A'_i B'_k = 0 \tag{10a}$$

und den entsprechenden Kernkegel

$$X_{ik} A'_i A'_k = 0, \tag{11a}$$

der selbst wieder auf dem Kernkegel (10) normal ist, zu. (Den hier auftretenden Größen A'_i und B'_k kommt die Bedeutung von Stellungsparametern von Ebenen zu.)

2 A'_i und B'_i sind in den folgenden Formeln Stellungsparameter von Ebenen, welche durch den Punkt x_i gehen. Die Korrelation (13) ist das zu (10) duale Gebilde und wird im allgemeinen mit dem unter (10a) erwähnten Gebilde nur in Ausnahmsfällen zusammenfallen. Analoge Bemerkungen gelten für (14) und (11a). Die Polarität bezüglich des absoluten Gebildes führt auch hier zu den »normalen« Gebilden

$$Y_{ik} A_i B_k = 0 \tag{13a}$$

$$Y_{ik} A_i B_k = 0. \tag{14a}$$

Die auftretenden Gebilde sind jedenfalls kovariant bei allen Transformationen (A).

3 Konsequenter wäre es, hier *zuerst* die reziproke Wirbelebene einzuführen.

Durch die Wirbelachse gehen (im allgemeinen) zwei Ebenen, die die beiden einander längs zweier Geraden berührenden Kernkegel in diesen Geraden berühren, die *erste* und *zweite Grundebene.* Die Verbindungsebene der beiden eben erwähnten Geraden ist identisch mit der reziproken Wirbelebene, die wir als *dritte Grundebene* bezeichnen. Analog nennen wir die beiden Geraden und die Wirbelachse die *Grundgeraden* der begleitenden Korrelation.

§ 3. Einfachste Beziehungen im Einheitsvektorfeld.

Bei den zunächst folgenden Untersuchungen werden wir stets voraussetzen, daß der Vektor $\mathfrak{X}$ ein Einheitsvektor sei, und wir werden ihn mit

$$\mathfrak{a} = a_i \, \mathfrak{e}_i; \quad a_i \, (x_1, x_2, x_3); \tag{16}$$

bezeichnen; es ist dann

$$\sum_1^3 i \, a_i^2 = 1; \tag{17}$$

daher

$$a_i \, a_{ik} = 0, \quad k = 1, 2, 3.^{1} \tag{18}$$

Wir setzen weiters

$$a_{ik} - a_{ki} = C_l; \quad i \neq k \neq l = 1, 2, 3; \tag{19}$$

$$C^2 = \sum_1^3 i \, C_i^2; \tag{19a}$$

$$a_i \, C_i = C \cos \gamma. \tag{20}$$

Durch die Beziehung (20) ist der Winkel zwischen Normale und Wirbelachse bestimmt. Die Integrabilitätsbedingung für den Vektor $\mathfrak{a}$ lautet dann einfach: $\gamma = \frac{\pi}{2}$.

Aus (18) folgt dann noch:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0. \tag{21}$$

§ 4. Die Stromlinien.

Eine Kurve, welche in allen ihren Punkten auf den durch diese Punkte hindurch gehenden Kurven eines Komplexes senkrecht steht, nennen wir eine *orthogonale Trajektorie* des Kurvenkomplexes.

---

[1] Es ist $a_{ik} = \dfrac{\partial a_i}{\partial x_k}$.

Die orthogonalen Trajektorien eines Kurvenkomplexes nennen wir auch kurz *Stromlinien.* Eine Stromlinie ist also definiert durch:

$$\mathfrak{t} = \mathfrak{a}.^{1} \tag{22}$$

Bezeichnet man den Radius der ersten Krümmung einer Stromlinie mit σ_1, so folgt aus den Serret-Frenet'schen Formeln

$$\frac{h_i}{\sigma_1} = a_{ik}\, t_k = a_{ik}\, a_k. \tag{23}$$

Wegen (18) kann man für (23) auch schreiben:

$$\frac{h_i}{\sigma_1} = (a_{ik} - a_{ki})\, t_k = \begin{vmatrix} a_k & a_l \\ C_k & C_l \end{vmatrix}; \; i \neq k \neq l \;\; 1, 2, 3; \tag{24}$$

oder auch vektoriell

$$\mathfrak{h} = \sigma_1\, (\mathfrak{a} \times \mathfrak{C}). \tag{25}$$

In Worten:

Satz II: *Die rektifizierenden Ebenen der Strömungslinien eines Einheitsvektorfeldes gehen in jedem Punkte durch Normale und Wirbelachse.*

Für σ_1 erhält man aus (24) wegen (19a) und (20)

$$\sigma_1 \; C \sin\gamma = 1. \tag{I}$$

Der Binormalenvektor ist gegeben, wie eine einfache Rechnung zeigt, durch:

$$\mathfrak{b} = \sigma_1\, (\mathfrak{a}\, C \cos\gamma - \mathfrak{C}). \tag{26}$$

§ 5. Die Haupttangentenkurven.

Eine Kurve eines Kurvenkomplexes, deren Schmiegungsebene in jedem Kurvenpunkte mit der Tangentialebene des Komplexes in diesem Punkte zusammenfällt, nennen wir *Haupttangentenkurve.*

Für eine Haupttangentenkurve gilt also

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{a}.^{1} \tag{27}$$

Bezeichnet man ihre Krümmungen mit $\frac{1}{\alpha_1}$ und $\frac{1}{\alpha_2}$, so ergibt sich durch Anwendung der Serret-Frenet'schen Formeln:

$$\frac{h_i}{\alpha_2} = a_{ik}\, t_k; \; i = 1, 2, 3. \tag{28}$$

Da aber $\mathfrak{t}$ auf $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{h}$ senkrecht stehen muß, so folgt aus (27) und (28)

[1] Im vorliegenden Paragraphen beziehen sich $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{b}$ auf die Stromlinien.

[2] Im orliegenden Paragraphen beziehen sich $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{b}$ auf die Haupttangenten-

$$a_i\, t_i = 0 \qquad (29)$$
$$a_{ik}\, t_i\, t_k = 0.$$

Es gehen also durch jeden Punkt des Raumes (abgesehen von jenen Punkten, für welche die Tangentialebene den Kernkegel berührt) zwei Haupttangentenkurven, deren Richtungen durch die Schnittgeraden von Tangentialebene und Kernkegel gegeben werden.[1]

Da aber $\mathfrak{h} = \mathfrak{b} \times \mathfrak{t}$ ist, so kann man an Stelle von (28) schreiben,

$$\frac{1}{\alpha_2} \begin{vmatrix} a_i & a_k \\ t_i & t_k \end{vmatrix} = a_{l\alpha}\, t_\alpha;\quad i \neq k \neq l: 1, 2, 3. \qquad (30)$$

Es seien nunmehr $\mathfrak{t}^{(1)}$ und $\mathfrak{t}^{(2)}$ die beiden Richtungen der Haupttangentenkurven in einem bestimmten Punkte und $\frac{1}{\alpha_2^{(1)}}$ und $\frac{1}{\alpha_2^{(2)}}$ die zugehörigen Torsionen. Aus (30) leitet man sofort die beiden Beziehungen

$$\frac{1}{\alpha_2^{(1)}} \begin{vmatrix} t_1^{(2)} & t_2^{(2)} & t_3^{(2)} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ t_1^{(1)} & t_2^{(1)} & t_3^{(1)} \end{vmatrix} = a_{ik}\, t_k^{(1)}\, t_i^{(2)} \qquad (31\,\mathrm{a})$$

$$\frac{1}{\alpha_2^{(2)}} \begin{vmatrix} t_1^{(1)} & t_2^{(1)} & t_3^{(1)} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ t_1^{(2)} & t_2^{(2)} & t_3^{(2)} \end{vmatrix} = a_{ik}\, t_i^{(1)}\, t_k^{(2)} \qquad (31\,\mathrm{b})$$

ab und gewinnt daraus durch Subtraktion

$$\left(\frac{1}{\alpha_2^{(1)}} + \frac{1}{\alpha_2^{(2)}}\right) \begin{vmatrix} t_1^{(1)} & t_2^{(1)} & t_3^{(1)} \\ t_1^{(2)} & t_2^{(2)} & t_3^{(2)} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = a_{ik}\, (t_k^{(1)}\, t_i^{(2)} - t_i^{(1)}\, t_k^{(2)}). \qquad (32)$$

Es ist aber

$$a_{ik}\, (t_k^{(1)}\, t_i^{(2)} - t_i^{(1)}\, t_k^{(2)}) = \frac{1}{2}\, (a_{ik} - a_{ki})\, (t_k^{(1)}\, t_i^{(2)} - t_i^{(1)}\, t_k^{(2)}) \qquad (33)$$

und daher

$$a_{ik}\, (t_k^{(1)}\, t_i^{(2)} - t_i^{(1)}\, t_k^{(2)}) = \begin{vmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ t_1^{(2)} & t_2^{(2)} & t_3^{(2)} \\ t_1^{(1)} & t_2^{(1)} & t_3^{(1)} \end{vmatrix}. \qquad (34)$$

---

[1] Es sind also ausgeschlossen alle Punkte, für welche

$$\begin{vmatrix} 2a_{11} & a_{12}+a_{21} & a_{13}+a_{31} & a_1 \\ a_{12}+a_{21} & 2a_{22} & a_{23}+a_{32} & a_2 \\ a_{13}+a_{31} & a_{23}+a_{32} & 2a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Multipliziert man (32), beziehungsweise (34) mit

$$\begin{vmatrix} t_1^{(1)} & t_2^{(1)} & t_3^{(1)} \\ t_1^{(2)} & t_2^{(2)} & t_3^{(2)} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix},$$

so erhält man bei Beachtung von (20) und (29) nach einfachen Umformungen

$$\frac{1}{\alpha_2^{(1)}} + \frac{1}{\alpha_2^{(2)}} = -C \cos\gamma, \tag{II}$$

eine Formel, die für Kurvenkomplexe der Gattung 1 identisch mit dem einen Teil des Satzes von Enneper ist.[1]

Da

$$\mathfrak{a} \sin\alpha = \mathfrak{t}^{(1)} \times \mathfrak{t}^{(2)} \; {}^{2} \tag{35}$$

und

$$-(a_{ij}\, t_i^{(2)}\, t_j^{(1)}).(a_{kl}\, t_k^{(1)}\, t_l^{(2)}) = \begin{vmatrix} a_{ij}\, t_i^{(1)}\, t_j^{(1)} & a_{ij}\, t_i^{(2)}\, t_j^{(1)} \\ a_{kl}\, t_k^{(1)}\, t_l^{(2)} & a_{kl}\, t_k^{(2)}\, t_l^{(2)} \end{vmatrix}. {}^{3} \tag{36}$$

Die letzte Determinante ist aber, wie sich nach längeren Rechnungen[4] ergibt, gleich

$$\left\{ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_{31} \\ a_{13} & a_{11} \end{vmatrix} \right\} \sin^2\alpha, \tag{37}$$

so daß sich durch Multiplikation von (31 a) mit (31 b) nach erfolgter Kürzung durch $\sin^2\alpha$ ergibt

$$\frac{1}{\alpha_2^{(1)}}\;\frac{1}{\alpha_2^{(2)}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_{31} \\ a_{13} & a_{11} \end{vmatrix}, \tag{III}$$

was für Kurvenkomplexe der Gattung 1 dem zweiten Teile des Satzes von Enneper entspricht.[5]

---

[1] Zum Satze von Enneper vgl. Bianchi L., *Vorlesungen über Differentialgeometrie*, deutsch von Lukat, 2. Aufl., Leipzig 1910, p. 119 f.; Blaschke W *Vorlesungen über Differentialgeometrie*, Bd. I, Berlin 1921, p. 76 f.

[2] Es ist gesetzt $\cos\alpha = \mathfrak{t}^{(1)} | \mathfrak{t}^{(2)}$.

[3] Wegen

$$a_{ij}\, t_i^{(\lambda)}\, t_j^{(\lambda)} = 0, \quad \lambda = 1, 2.$$

[4] Bezeichnet man die zweizeiligen Unterdeterminanten der Matrix $\| a_{ik} \|$ mit A_{ik} und beachtet man (18), so gelangt man zu dem Ansatz

$$V_i\, a_k = A_k \tag{a}$$

worin die Größen V_i durch die Bedingung $\sum_1^3 i\, a_i^2 = 1$ bestimmt sind. Die Determinante in (37) ist daher wegen (35) gleich

$$V_i\, a_k\, a_i\, a_k \sin^2\alpha = V_i\, a_i \sin^2\alpha = (A_{11} + A_{22} + A_{33})\ \text{si} \tag{b}$$

[5] Vgl. Anmerkung 1.

Wichtig erscheint auch die Beachtung der Tatsache, die sich durch Verbindung der Formel (I) mit (II) ergibt:

$$\left(\frac{1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{\alpha_2^{(1)}} + \frac{1}{\alpha_2^{(2)}}\right)^2 = C^2. \tag{IV}$$

§ 6. Konjugierte Richtungen.

Durch die begleitende Korrelation (§ 2) wird jeder Geraden durch einen bestimmten Punkt eine Ebene zugeordnet. Sie schneidet die Tangentialebene in diesem Punkte in der zu dieser Richtung *konjugierten Richtung* (Definition).[1]

Es sei $\mathfrak{t}$ die gegebene Richtung, dann ist die konjugierte Richtung gegeben durch:

$$K_i = \begin{vmatrix} a_k & a_l \\ a_{km}\, t_m & a_{lm}\, t_m \end{vmatrix}, \quad i \neq k \neq l \;\; 1, 2, 3. \tag{38}$$

Man beweist dann sofort, daß die Richtung einer Haupttangentenkurve mit ihrer konjugierten Richtung zusammenfällt; [der Beweis läßt sich aus (38) bei Benützung von (27) und (28) direkt ablesen].

Ebenso unmittelbar liest man aus (34), (22), (23) ab:

Satz III: *Die zur Stromlinienrichtung konjugierte Richtung ist durch die Binormale der Stromlinie in jedem Punkte gegeben.*

§ 7. Die Krümmungslinien.

Wir definieren nun die *Krümmungslinien* eines Kurvenkomplexes als jene Kurven, deren Tangentenrichtung in jedem Punkte der Kurve auf der ihr konjugierten Richtung senkrecht steht.[2]

Die Krümmungslinien sind also gegeben durch:[3]

$$\begin{vmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_{1i}\, t_i & a_{2i}\, t_i & a_{3i}\, t_i \end{vmatrix} = 0; \tag{39a}$$

$$a_i\, t_i = 0. \tag{39b}$$

Abgesehen von gewissen auszuschließenden Punkten, deren Lage sich mittels bekannter Methoden der analytischen Geometrie sofort angeben läßt, gibt es im allgemeinen in jedem Punkte zwei Richtungen, die den Tangenten der durch diesen Punkt gehenden zwei Krümmungslinien entsprechen.

---

[1] Bianchi, a. O., p. 106 f.; Blaschke, O., p. 71 f.

Vgl. Anmerkung 1.

[3] $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{b}$ beziehen sich im vorliegenden Paragraphen auf die Krümmungslinien.

Aus Gleichung (39a) erschließen wir

$$\lambda\, t_i + \mu\, a_i + \nu\, a_{ik}\, t_k = 0,\ i = 1, 2, 3. \tag{40}$$

Daraus gewinnt man durch Multiplikation jeder Gleichung mit a_i und Addition aller drei Gleichungen: $\mu = 0$. Multipliziert man jede der drei Gleichungen mit t_i und addiert, so erhält man

$$-\frac{\lambda}{\nu}\, a_{il}\, t_i\, t_l = -\frac{1}{k}, \tag{40a}$$

so daß also ist:

$$-\frac{t_i}{k} = a_{il}\, t_l,\ i = 1, 2, 3. \tag{41}$$

Daher erhält man für $\frac{1}{k}$ die Bedingung

$$\begin{vmatrix} a_{11}+\frac{1}{k} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+\frac{1}{k} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+\frac{1}{k} \end{vmatrix} = 0,$$

die man wegen (21) vereinfachen kann

$$\left\{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_{31} \\ a_{13} & a_{11} \end{vmatrix}\right\} + \frac{1}{k}(a_{11}+a_{22}+a_{33}) + \frac{1}{k^2} = 0. \tag{42}$$

Bezeichnet man im Anschluß an die klassische Flächentheorie

$$H = -(a_{11}+a_{22}+a_{33}) \tag{43}$$

als die *mittlere Krümmung* und

$$K = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_{31} \\ a_{13} & a_{11} \end{vmatrix} \tag{44}$$

als das *Krümmungsmaß* des Kurvenkomplexes,[1] so erhält man für die Wurzeln der Gleichung (42) die bekannte Beziehung

$$H = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2},\ K = \frac{1}{k_1 k_2}, \tag{V}$$

was in Verbindung mit (III) die Beziehung

$$\alpha_2^{(1)}\, \alpha_2^{(2)} = k_1\, k_2 \tag{VI}$$

ergibt.

---

[1] Vgl. hierzu Pascal E., *Repertorium der höheren Mathematik*, herausgegeben von Timerding, II. Bd., 2. H., 2. Aufl., Leipzig 1922, p. 1074.

Schreibt man die Beziehung (39a) in der Form

$$\mathfrak{t}\times\mathfrak{a}\times\frac{d\,\mathfrak{a}}{d\,s}=0,$$

so erkennt man, daß die Krümmungslinien jene Kurven des Komplexes sind, längs welcher die Normalen des Komplexes eine Torse bestimmen.[1]

Wir gehen nun daran, den Winkel zwischen zwei Krümmungslinien, welche von demselben Punkte ausgehen, zu bestimmen; der Winkel sei $\varkappa$, die Richtungen der Krümmungslinien seien gegeben durch $\mathfrak{t}^{(1)}$ und $\mathfrak{t}^{(2)}$.

Es ist also jedenfalls

$$\mathfrak{a}\sin\varkappa=\mathfrak{t}^{(1)}\times\mathfrak{t}^{(2)} \tag{45}$$

und ferner wegen (39a)

$$\begin{vmatrix} t_1^{(\lambda)} & t_2^{(\lambda)} & t_3^{(\lambda)} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_{1i}\,t_i^{(\lambda)} & a_{2i}\,t_i^{(\lambda)} & a_{3i}\,t_i^{(\lambda)} \end{vmatrix}=0,\ \lambda=1,2. \tag{46}$$

Multipliziert man jede dieser beiden Determinanten mit

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ t_1^{(1)} & t_2^{(1)} & t_3^{(1)} \\ t_1^{(2)} & t_2^{(2)} & t_3^{(2)} \end{vmatrix},$$

so erhält man bei Beachtung von (40a) nach einigen Vereinfachungen

$$a_{ij}\,t_i^{(2)}\,t_j^{(1)}=-\frac{1}{k_1}\cos\varkappa \tag{47a}$$

$$a_{ij}\,t_i^{(1)}\,t_j^{(2)}=-\frac{1}{k_2}\cos\varkappa \tag{47b}$$

und durch Subtraktion und einer analogen Umformung wie in (33) und (34)

$$-\cos\varkappa\left(\frac{1}{k_1}-\frac{1}{k_2}\right)=\begin{vmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ t_1^{(2)} & t_2^{(2)} & t_3^{(2)} \\ t_1^{(1)} & t_2^{(1)} & t_3^{(1)} \end{vmatrix} \tag{48}$$

und daher wegen (20)

$$\cos\varkappa\left(\frac{1}{k_1}-\frac{1}{k_2}\right)=C\cos\gamma\,\sin\varkappa. \tag{49}$$

---

[1] Blaschke, a. a. O., p. 61.

Aus Gleichung (39a) erschließen wir

$$\lambda\, t_i + \mu\, a_i + \nu\, a_{ik}\, t_k = 0,\ i = 1, 2, 3. \tag{40}$$

Daraus gewinnt man durch Multiplikation jeder Gleichung mit a_i und Addition aller drei Gleichungen: $\mu = 0$. Multipliziert man jede der drei Gleichungen mit t_i und addiert, so erhält man

$$-\frac{\lambda}{\nu}\, a_{il}\, t_i\, t_l = -\frac{1}{k}, \tag{40a}$$

so daß also ist:

$$-\frac{t_i}{k} = a_{il}\, t_l,\ i = 1, 2, 3. \tag{41}$$

Daher erhält man für $\frac{1}{k}$ die Bedingung

$$\begin{vmatrix} a_{11}+\frac{1}{k} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+\frac{1}{k} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+\frac{1}{k} \end{vmatrix} = 0,$$

die man wegen (21) vereinfachen kann

$$\left\{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_{31} \\ a_{13} & a_{11} \end{vmatrix}\right\} + \frac{1}{k}(a_{11}+a_{22}+a_{33}) + \frac{1}{k^2} = 0. \tag{42}$$

Bezeichnet man im Anschluß an die klassische Flächentheorie

$$H = -(a_{11}+a_{22}+a_{33}) \tag{43}$$

als die *mittlere Krümmung* und

$$K = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_{31} \\ a_{13} & a_{11} \end{vmatrix} \tag{44}$$

als das *Krümmungsmaß* des Kurvenkomplexes,[1] so erhält man für die Wurzeln der Gleichung (42) die bekannte Beziehung

$$H = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2},\ K = \frac{1}{k_1\, k_2}, \tag{V}$$

was in Verbindung mit (III) die Beziehung

$$\alpha_2^{(1)}\, \alpha_2^{(2)} = k_1\, k_2 \tag{VI}$$

ergibt.

---

[1] Vgl. hierzu Pascal E., *Repertorium der höheren Mathematik*, herausgegeben von Timerding, II. Bd., 2. H., 2. Aufl., Leipzig 1922, p. 1074.

Schreibt man die Beziehung (39a) in der Form

$$\mathfrak{t} \times \mathfrak{a} \times \frac{d\,\mathfrak{a}}{d\,s} = 0,$$

so erkennt man, daß die Krümmungslinien jene Kurven des Komplexes sind, längs welcher die Normalen des Komplexes eine Torse bestimmen.[1]

Wir gehen nun daran, den Winkel zwischen zwei Krümmungslinien, welche von demselben Punkte ausgehen, zu bestimmen; der Winkel sei $\varkappa$, die Richtungen der Krümmungslinien seien gegeben durch $\mathfrak{t}^{(1)}$ und $\mathfrak{t}^{(2)}$.

Es ist also jedenfalls

$$\mathfrak{a} \sin \varkappa = \mathfrak{t}^{(1)} \times \mathfrak{t}^{(2)} \tag{45}$$

und ferner wegen (39a)

$$\begin{vmatrix} t_1^{(\lambda)} & t_2^{(\lambda)} & t_3^{(\lambda)} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_{1i}\, t_i^{(\lambda)} & a_{2i}\, t_i^{(\lambda)} & a_{3i}\, t_i^{(\lambda)} \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda = 1, 2. \tag{46}$$

Multipliziert man jede dieser beiden Determinanten mit

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ t_1^{(1)} & t_2^{(1)} & t_3^{(1)} \\ t_1^{(2)} & t_2^{(2)} & t_3^{(2)} \end{vmatrix},$$

so erhält man bei Beachtung von (40a) nach einigen Vereinfachungen

$$a_{ij}\, t_i^{(2)}\, t_j^{(1)} = -\frac{1}{k_1} \cos \varkappa \tag{47a}$$

$$a_{ij}\, t_i^{(1)}\, t_j^{(2)} = -\frac{1}{k_2} \cos \varkappa \tag{47b}$$

und durch Subtraktion und einer analogen Umformung wie in (33) und (34)

$$-\cos \varkappa \left(\frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2}\right) = \begin{vmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ t_1^{(2)} & t_2^{(2)} & t_3^{(2)} \\ t_1^{(1)} & t_2^{(1)} & t_3^{(1)} \end{vmatrix} \tag{48}$$

und daher wegen (20)

$$\cos \varkappa \left(\frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2}\right) = C \cos \gamma \, \sin \varkappa. \tag{49}$$

---

[1] Blaschke, a. a. O., p. 61.

Man schließt daraus den

Satz IV: *Die Krümmungslinien stehen nur im Falle der Kurvenkomplexe der Gattung 1 aufeinander senkrecht.*

Der Beweis des folgenden Satzes ist so einfach, daß auf seine Durchführung verzichtet werden kann.

Satz V: *Haben zwei Kurvenkomplexe eine Krümmungslinie gemeinsam, so schneiden sie sich unter konstantem Winkel entlang dieser Kurve; schneiden sich umgekehrt zwei Kurvenkomplexe längs einer Kurve, welche eine Krümmungslinie eines der beiden Komplexe ist, unter konstantem Winkel, so ist diese Kurve auch Krümmungslinie des zweiten Komplexes.*

Dabei heißt *Schnittkurve zweier Komplexe* $\mathfrak{a}^{(1)}$, und $\mathfrak{a}^{(2)}$ jede Integralkurve des simultanen Systems

$$a_i^{(1)}\, dx_i = 0 \qquad (50)$$
$$a_i^{(2)}\, dx_i = 0$$

und *Schnittwinkel* der durch

$$\cos\omega = a_i^{(1)}\, a_i^{(2)} \qquad (51)$$

definierte Winkel.

§ 8. Krümmungslinien und Haupttangentenkurven.

Um aber gewisse tiefgehende Unterschiede, welche die Krümmungslinien allgemeiner Kurvenkomplexe gegenüber den Krümmungslinien auf Flächen besitzen, besser erkennen zu können, wollen wir die Krümmungslinientangenten in ihrem Zusammenhang mit den Haupttangentenkurven studieren.

Es sei also durch $\mathfrak{t}$ die Tangente an eine Krümmungslinie gegeben, während die Tangenten, beziehungsweise Hauptnormalen an die beiden Haupttangentenkurven mit $\mathfrak{t}^{(1)}$ $(\mathfrak{h}^{(1)})$ und $\mathfrak{t}^{(2)}$ $(\mathfrak{h}^{(2)})$ bezeichnet seien. α sei der Winkel, den die Haupttangentenkurven miteinander bilden. Die übrigen Größen werden in ihrer obigen Bedeutung gebraucht.

Man setze nunmehr

$$\mathfrak{t} = T_1\, \mathfrak{t}^{(1)} + T_2\, \mathfrak{t}^{(2)}, \qquad (52)$$

substituiere in (41) unter Berücksichtigung von (28) und erhält

$$\frac{1}{k}\,(T_1\, t_i^{(1)} + T_2\, t_i^{(2)}) + \left(T_1 \frac{h_i^{(1)}}{\alpha_2^{(1)}} + T_2 \frac{h_i^{(2)}}{\alpha_2^{(2)}}\right) = 0,\quad i = 1, 2, 3. \qquad (53)$$

Aus diesen drei Gleichungen erhält man durch Multiplikation jeder einzelnen mit $t_i^{(1)}$, beziehungsweise $t_i^{(2)}$ und Addition aller die beiden Gleichungen:

$$\frac{1}{k}\,(T_1+T_2\cos\alpha)+T_2\,\frac{\sin\alpha}{\alpha_2^{(2)}}=0 \text{ [1]} \qquad (54\text{a})$$

$$\frac{1}{k}\,(T_1\cos\alpha+T_2)-T_1\,\frac{\sin\alpha}{\alpha_2^{(1)}}=0. \qquad (54\text{b})$$

Daraus gewinnt man in bekannter Weise

$$\frac{1}{k^2}-\frac{\operatorname{cotg}\alpha}{k}\left(\frac{1}{\alpha_2^{(2)}}-\frac{1}{\alpha_2^{(1)}}\right)+\frac{1}{\alpha_2^{(1)}\,\alpha_2^{(2)}}=0 \qquad (55)$$

und

$$T_1^2\cdot\frac{1}{\alpha_2^{(1)}}+T_2^2\,\frac{1}{\alpha_2^{(2)}}+T_1\,T_2\cos\alpha\left(\frac{1}{\alpha_2^{(1)}}+\frac{1}{\alpha_2^{(2)}}\right)=0. \qquad (56)$$

Aus (55) leitet man neuerlich (VI) und

$$H=\left(\frac{1}{\alpha_2^{(2)}}-\frac{1}{\alpha_2^{(1)}}\right)\operatorname{cotg}\alpha \qquad (\text{VII})$$

ab. (56) gibt einen Weg zur neuerlichen Bestimmung von $\varkappa$ an.

Sind die beiden Lösungen der Gleichung (56), die $\mathfrak{t}$ als Einheitsvektor bestimmen, $(T_1^{(1)}, T_2^{(1)})$ und $(T_1^{(2)}, T_2^{(2)})$, so gilt für sie

$$\frac{T_1^{(1)}}{T_2^{(1)}}+\frac{T_1^{(2)}}{T_2^{(2)}}=-\cos\alpha\left(1+\frac{\alpha_2^{(1)}}{\alpha_2^{(2)}}\right),\quad \frac{T_1^{(1)}\,T_1^{(2)}}{T_2^{(1)}\,T_2^{(2)}}=\frac{\alpha_2^{(1)}}{\alpha_2^{(2)}}.$$

Da aber

$$\operatorname{cotg}\varkappa=\frac{(T_1^{(1)}\,\mathfrak{t}^{(1)}+T_2^{(1)}\,\mathfrak{t}^{(2)})\mid(T_1^{(2)}\,\mathfrak{t}^{(1)}+T_2^{(2)}\,\mathfrak{t}^{(2)})}{|(T_1^{(1)}\,\mathfrak{t}^{(1)}+T_2^{(1)}\,\mathfrak{t}^{(2)})\times(T_1^{(2)}\,\mathfrak{t}^{(1)}+T_2^{(2)}\,\mathfrak{t}^{(2)})|} \text{ [2]}$$

und

$$\mathfrak{a}\sin\alpha=\mathfrak{t}^{(1)}\times\mathfrak{t}^{(2)},$$

so erhält man nach einer längeren Rechnung

$$\operatorname{cotg}\varkappa=\frac{\left(\frac{1}{\alpha_2^{(1)}}+\frac{1}{\alpha_2^{(2)}}\right)\sin\alpha}{\sqrt{\left(\frac{1}{\alpha_2^{(1)}}+\frac{1}{\alpha_2^{(2)}}\right)^2\cos^2\alpha-\frac{4}{\alpha_2^{(1)}\,\alpha_2^{(2)}}}} \qquad (57)$$

---

[1] Es ist

$$\sphericalangle\,\mathfrak{h}^{(1)}\,\mathfrak{h}^{(2)}=\alpha;\quad \sphericalangle\,\mathfrak{h}^{(2)}\,\mathfrak{t}^{(1)}=\alpha+\frac{}{2};\quad \sphericalangle\,\mathfrak{h}^{(1)}\,\mathfrak{t}^{(2)}=\alpha-\frac{}{2}$$

[2] Beachte, daß

$$\operatorname{cotg}\sphericalangle\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}=\frac{\mathfrak{A}\mid\mathfrak{B}}{|\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}|},$$

wenn $|\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}|$ den Betrag von $\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}$ angibt.

und

$$\cos \varkappa = \frac{\left(\frac{1}{\alpha_2^{(1)}} + \frac{1}{\alpha_2^{(2)}}\right) \sin \alpha}{\left(\frac{1}{\alpha_2^{(1)}} - \frac{1}{\alpha_2^{(2)}}\right)}. \tag{VIII}$$

Man liest aus der letzten Formel ab, daß, abgesehen von $\alpha = 0$, die Krümmungslinien im allgemeinen nur bei Kurvenkomplexen der Gattung 1 zueinander senkrecht sind. Eine bemerkenswerte Formel gewinnt man aus der Verbindung von (VIII) mit (VII) und (II):

$$H \cos \varkappa = C \cos \gamma \cos \alpha. \tag{IX}$$

§ 9. Die Hauptkurven.

Wir wenden uns nun der Untersuchung der Analoga zu dem Meusnier'schen und zu dem Euler'schen Satze zu. Von der für jede Komplexkurve fundamentalen Identität $a_i t_i = 0$ ausgehend, gelangt man unter Verwendung der Serret-Frenet'schen Formeln zu

$$a_{ij} t_i t_j + \frac{a_i h_i}{\rho_1} = 0. \tag{58}$$

Untersucht man nur Kurven derselben Tangentenrichtung, so ist für alle diese Kurven der Ausdruck $a_{ij} t_i t_j$ für einen festen Punkt konstant, also auch der zweite Teil der Gleichung; wählt man insbesondere die ebene Kurve, für welche $\mathfrak{a} = \mathfrak{h}$ ist,[1] und setzt ihren Krümmungsradius r, so erkennt man, daß der Meusnier'sche Satz auch für Kurvenkomplexe der Gattung 2 gilt.

Die Frage nach dem Extremum von r beansprucht ein gewisses Interesse.

Die Behandlung dieser Aufgabe erfolgt auf einem ähnlichen Wege, wie wir ihn im vorhergehenden Paragraphen einschlugen.

Es sei $\mathfrak{t}$ die Richtung, in der r ein Extremum wird, R dieses Extremum; ferner mögen $\mathfrak{t}^{(1)}$, $\mathfrak{h}^{(1)}$, $\mathfrak{t}^{(2)}$, $\mathfrak{h}^{(2)}$, α dieselbe Bedeutung wie im vorhergehenden Paragraphen haben. Man setze

$$\mathfrak{t} = S_1 \mathfrak{t}^{(1)} + S_2 \mathfrak{t}^{(2)}. \tag{59}$$

Es ist aber

$$\frac{1}{R} + a_{ij} t_i t_j = 0 \tag{60}$$

und wenn man (59) berücksichtigt, (29) beachtet,

$$\frac{1}{R} + S_1 S_2 (a_{ij} t_i^{(1)} t_j^{(2)} + a_{ij} t_i^{(2)} t_j^{(1)}) = 0 \tag{61}$$

---

[1] Diese Kurven kann man als *Normalschnitte* bezeichnen.

mit der Nebenbedingung

$$S_1^2 + S_2^2 + 2\, S_1\, S_2 \cos \alpha = 1. \tag{62}$$

Den Klammerausdruck in (61) drückt man wegen (31 a) und (31 b) in der Form aus:

$$(a_{ij}\, t_i^{(1)}\, t_j^{(2)} + a_{ij}\, t_i^{(2)}\, t_j^{(1)}) = \left(\frac{1}{\alpha_2^{(1)}} - \frac{1}{\alpha_2^{(2)}}\right) \sin \alpha = -H\, \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha}, ^{1} \tag{63}$$

so daß man schließlich erhält

$$\frac{\cos \alpha}{R\, H \sin^2 \alpha} = S_1\, S_2. \tag{64}$$

Weil aber R ein Extremum sein soll, so hat man die Bedingungen

$$\begin{aligned} S_1 + \lambda\, (S_2 + S_1 \cos \alpha) &= 0 \\ S_2 + \lambda\, (S_1 + S_2 \cos \alpha) &= 0. \end{aligned} \tag{65}$$

Daraus leitet man in bekannter Weise ab:

$$\lambda = \frac{2 \cos \alpha}{R\, H \sin^2 \alpha}$$

und in (65) eingesetzt

$$\begin{aligned} S_1 + \frac{2 \cos \alpha}{R\, H \sin^2 \alpha}\, (S_2 + S_1 \cos \alpha) &= 0 \\ S_2 + \frac{2 \cos \alpha}{R\, H \sin^2 \alpha}\, (S_1 + S_2 \cos \alpha) &= 0. \end{aligned} \tag{65a}$$

Dies führt einerseits zu

$$\frac{1}{R^2} - \frac{H}{R} - \frac{H^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{4} = 0 \tag{66}$$

anderseits zu

$$S_1^2 - S_2^2 = 0. \tag{67}$$

Aus der letzten Formel erkennt man, daß die beiden ausgezeichneten Richtungen

$$\frac{\mathfrak{t}^{(1)} \pm \mathfrak{t}^{(2)}}{\sqrt{2\, (1 \pm \cos \alpha)}} \tag{68}$$

aufeinander senkrecht stehen; wir wollen diese Richtungen die *Hauptrichtungen* nennen.

---

1 Wegen (VII).

Aus (66) leitet man die Formeln

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = H, \tag{X}$$

$$\frac{1}{R_1 R_2} = -\frac{H^2}{4} \operatorname{tg}^2 \alpha = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\alpha_2^{(2)}} - \frac{1}{\alpha_2^{(1)}}\right)^2 \tag{XI}$$

ab.

Zum Schlusse definieren wir als *Hauptkurven des Komplexes* jene Kurven, längs welcher die Krümmungen der Normalschnitte extreme Werte annehmen. Sie werden offenbar wegen (60) und der Nebenbedingungen durch

$$a_{ij}\, t_i + a_{ji}\, t_i + \lambda\, a_j + \mu\, t_j = 0, \; j = 1, 2, 3, \tag{69}$$

oder besser durch

$$a_i\, t_i = 0 \tag{70}$$

und

$$\begin{vmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_{i1}\, t_i + a_{1i}\, t_i & a_{i2}\, t_i + a_{2i}\, t_i & a_{i3}\, t_i + a_{3i}\, t_i \end{vmatrix} = 0 \tag{71}$$

definiert.

§ 10. Der Euler'sche Satz.

Legt man die Hauptkurvenrichtungen $\mathfrak{m}^{(1)}$ und $\mathfrak{m}^{(2)}$ der Bestimmung irgendeiner Richtung in der Tangentialebene etwa durch

$$\mathfrak{t} = M_1\, \mathfrak{m}^{(1)} + M_2\, \mathfrak{m}^{(2)} \tag{72}$$

zugrunde, so kann man ein Analogon zum Euler'schen Satz beweisen. Es ist

$$\frac{1}{R} + a_{ij}\, t_i\, t_j = 0$$

$$\frac{1}{R_\lambda} + a_{ij}\, t_i^{(\lambda)}\, t_j^{(\lambda)} = 0, \; \lambda = 1, 2.$$

Man erkennt ferner, daß sich (69) in der Form

$$(a_{ij} + a_{\;i})\, m_i^{(\lambda)} - (a_{il}\, m_i^{(\lambda)}\, a_l)\, a_j + \frac{2}{R_\lambda}\, m_j^{(\lambda)} = 0, \; \lambda = 1, 2;^{1} \quad j = 1, 2, 3;$$

annehmen läßt und gewinnt daraus die beiden Beziehungen

$$(a_{ij} + a_{ji})\, m_i^{(1)}\, m_j^{(2)} + \frac{2}{R_1}\, m_j^{(1)}\, m_j^{(2)} = 0,$$

$$(a_{ij} + a_{ji})\, m_i^{(1)}\, m_j^{(2)} + \frac{2}{R_2}\, m_j^{(1)}\, m_j^{(2)} = 0,$$

---

1 Nicht summieren über λ.

woraus man folgert, wenn $R_1 \neq R_2$,

$$(a_{ij} + a_{ji})\, m_i^{(1)}\, m_j^{(2)} = 0, \tag{73}$$

$$m_j^{(1)}\, m_j^{(2)} = 0. \tag{74}$$

Führt man nun (72) in (60) unter Berücksichtigung dieser Beziehungen ein, so folgt:

$$\frac{1}{R} = \frac{M_1^2}{R_1} + \frac{M_2^2}{R_2}, \tag{75}$$

wobei M_1 und M_2 der Bedingung genügen:

$$M_1^2 + M_2^2 = 1; \tag{76}$$

das ist aber der wesentliche Inhalt des Euler'schen Satzes.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1926

Band/Volume: 135_2a

Autor(en)/Author(s): Knoll Franz

Artikel/Article: Die Differentialgeometrie des räumlichen Vektorfeldes I Ein Beitrag zur Differentialgeometrie der Kurvenkomplexe. 487-505