Gedruckt mit Unterstützung aus dem Jerome und Margaret Stonborough-Fonds

Abstrakte Standpunkte in der darstellenden Geometrie mit Anwendungen auf die gebräuchlichen Zweibildersysteme und die Reliefperspektive

Von

Dr. Ludwig Hofmann in Wien

(Mit 8 Textfiguren)

(Vorgelegt in der Sitzung am 24. Juni 1926)

E. Müller (Wien) hat in der kurzen, aber inhaltsreichen Abhandlung: »Die darstellende Geometrie als eine Versinnlichung der abstrakten projektiven Geometrie«[1] auf den prinzipiellen Zusammenhang zwischen abstrakter projektiver und darstellender Geometrie hingewiesen und damit die Grundlagen für eine moderne Behandlung der letzteren geschaffen.

Die Ideen Müller's nach einer andern Richtung hin verfolgend, hat nun Verfasser schon bei anderer Gelegenheit[2] auf einen weiteren grundlegenden Zusammenhang zwischen darstellender und abstrakter projektiver Geometrie hingewiesen. Die dort aufgestellten Prinzipien ermöglichen es nun einerseits, große Gebiete der Geometrie unter Verwendung von einheitlichen Methoden der konstruktiven Behandlung zugänglich zu machen; anderseits sind sie aber auch geeignet, auf wohlbekannte Gebiete der darstellenden Geometrie das hellste Licht zu werfen und sie in einem neuen Zusammenhange erscheinen zu lassen. Beides darzulegen ist nun der Zweck dieser Arbeit.

1. Zunächst sollen die in der eben erwähnten Arbeit aufgestellten und hier in Betracht kommenden Prinzipien in Kürze dargelegt werden.

Die orthogonale Projektion im dreidimensionalen Raum kann wie jeder metrische Vorgang unter Heranziehung des Absoluten in rein projektiver Weise aufgefaßt werden. Wählt man (Fig. 1) eine beliebige Ebene Π des Raumes als Aufrißebene (Bildebene) und eine beliebige Gerade X von Π als Rißachse, so ist dadurch eine Abbildung des Raumes durch orthogonale Projektion (in zweideutiger

---

[1] Jhrsb. Dtsch. Math.-Ver. 14 (1905), p. 569 bis 574.

[2] L. Hofmann, Konstruktive Lösung der Maßaufgaben im vierdimensionalen euklidschen Raum, Stzgsb. Ak. (math.-nat.) Wien, Abt. IIa, 130 (1921), p. 169 bis 188.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Weise) festgelegt. Durch die uneigentliche Gerade U von Π als Seite und den uneigentlichen Punkt o von X als Eckpunkt ist nämlich das Poldreieck o, u, u_h der absoluten Polarität auf der uneigentlichen Ebene Ω des Raumes bestimmt. Bilden dann die Punkte s und c jenes Paar der absoluten Involution auf der Geraden $O = [u, u_h]$, welches das Paar u, u_h harmonisch trennt, so ist $\Pi_h = [X, u]$ die Grundrißebene, $\Gamma = [X, c]$ die Koïnzidenzebene und $\Sigma = [X, s]$ die Symmetrieebene der Abbildung.

Um die Projektionen eines Punktes p zu erhalten, legt man die Ebene $[O, p]$ und bringt sie mit Π und Π_h zum Schnitt.

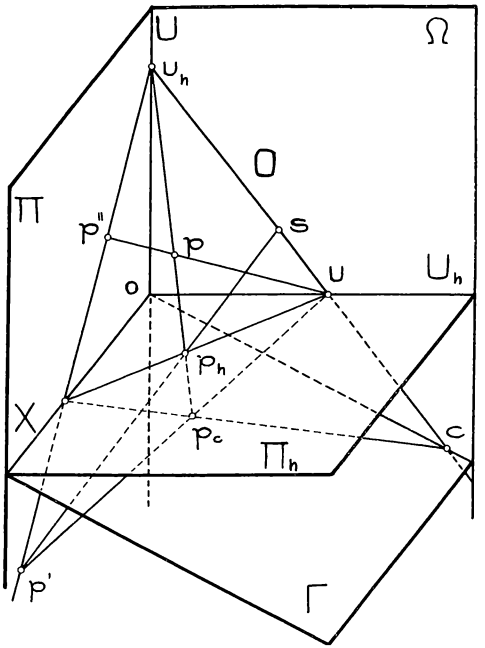

Fig. 1.

Projiziert man dann den Punkt p aus u auf Π, so erhält man den Aufriß p'' von p. Projiziert man p aus u_h auf Π_h, so erhält man den Punkt p_h, der aus s auf Π projiziert den Grundrieß p' von p ergibt. Die Verbindungslinie der beiden Projektionen p' und p'' von p steht senkrecht auf der Achse X.

Es ist so jedem Punkt p des Raumes ein Punktepaar p', p'' der Bildebene Π zugeordnet, dessen Verbindungslinie auf der Achse X senkrecht steht, und umgekehrt bestimmt jedes solche Punktepaar eindeutig einen Punkt des Raumes.

Den Grundriß p' eines Punktes p kann man auch erhalten, indem man p aus u_h auf die Ebene Γ und den so erhaltenen Punkt p_c aus u auf Π projiziert. Es folgt daraus unmittelbar,

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

daß die beiden Projektionen eines Punktes der Koïnzidenzebene Γ zusammenfallen.

Die Projektionen eines uneigentlichen Punktes sind uneigentlich. Bewegt sich der Punkt p auf einer Geraden, so durchlaufen auch seine Projektionen p' und p'' Gerade, und zwar so, daß die entstehenden Punktreihen ähnlich sind. Beschreibt der Punkt p eine Ebene, so bilden die Projektionen p' und p'' von p zwei perspektiv affine Felder in der Ebene Π.

Die Ebenen des Raumes können auch in der bekannten Weise durch ihre Spuren festgelegt werden. Die bekannte Beziehung zwischen den Projektionen einer Geraden und den Spuren einer dazu senkrechten Ebene kann dann in rein projektiver Weise dargetan werden.[1] Auf dieser Beziehung beruht letzten Endes die Durchführung jeder metrischen Aufgabe in der orthogonalen Projektion.

Es zeigt sich nun, daß zum Beweise aller bisher abgeleiteten Ergebnisse außer den Axiomen der projektiven Geometrie lediglich die folgenden Tatsachen benutzt werden: Die uneigentliche Ebene Ω schneidet die Bildebene Π in deren uneigentlicher Geraden U, die absolute Polarität auf Ω ist nullteilig, und die Involution konjugierter Punkte auf U ist identisch mit der absoluten Involution von Π.

Wir wollen nun im Sinne der abstrakten Geometrie den Elementen »Punkt«, »Gerade«, »Ebene« des Raumes irgendwelche Deutungen unterlegen, jedoch so, daß wenigstens ein Element »Ebene« mit seinen »Punkten« und »Geraden« eine anschauliche Ebene mit ihren Punkten und Geraden darstellt. Sie soll die »wahre Ebene« Π der Deutung genannt werden. Die »uneigentliche Ebene« Ω wählen wir derart, daß sie Π in der uneigentlichen Geraden U dieser Ebene im Sinne der projektiven Geometrie schneidet. Die »absolute Polarität« in Ω wählen wir nullteilig, und zwar so, daß die Involution konjugierter Punkte auf U mit der absoluten Involution von Π im Sinne der euklidischen Metrik identisch ist. Sind diese Bedingungen erfüllt, so sprechen wir von einer »natürlichen Deutung« der dreidimensionalen Geometrie oder kurz von einem »natürlichen Raume«.

Die natürlichen Räume spielen unter allen Deutungen, deren die abstrakte projektive Geometrie fähig ist, eine ausgezeichnete Rolle. Zunächst ist klar, daß jedem ebenen Gebilde eines natürlichen Raumes eine »wahre Größe« zukommt. Da sich das kongruente Übertragen zweier Ebenen aufeinander in der bekannten Weise als projektive Beziehung zum Absoluten auffassen läßt, kann man nämlich zu jenem Gebilde ein ihm kongruentes anschauliches Gebilde der wahren Ebene konstruieren. Insbesondere kommt also

[1] Vgl. diesbezüglich die schon zitierte Arbeit: L. Hofmann, Konstruktive Lösung der Maßaufgaben usw.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

jeder Strecke eine »wahre Länge«, jedem Winkel eine wahre Größe« zu.

Wählt man nun die wahre Ebene eines natürlichen Raumes als Bildebene und irgendeine Gerade derselben als Achse, so kann man, genau so wie im anschaulichen Raume vorgehend, zu einer »orthogonalen Darstellung« des zugrunde gelegten Raumes gelangen.

Aus der dort eingeschlagenen Beweisführung folgt nun der grundlegende

Satz I: Überträgt man den Vorgang der orthogonalen Projektion auf irgendeinen natürlichen Raum und wählt dabei die wahre Ebene als Bildebene, so ergeben sich für die Projektionen, beziehungsweise Spuren der Grundelemente genau dieselben Gebilde und Gesetze wie im anschaulichen Raume. Desgleichen findet die Metrik des zugrunde gelegten Raumes durch dieselben Beziehungen zwischen den Projektionen und Spuren der Grundelemente ihren Ausdruck wie in der orthogonalen Projektion des anschaulichen Raumes.

Zwei natürliche Räume mit gemeinsamer wahrer Ebene können in eindeutiger Weise so aufeinander kollinear bezogen werden, daß die wahre Ebene punktweise sich selbst entspricht und die absoluten Kegelschnitte der beiden Räume einander entsprechen. Zwei natürliche Räume, die in der eben erwähnten Beziehung zueinander stehen, bezeichnen wir als »gekoppelt«. Zwei in gekoppelten Räumen einander entsprechende ebene Gebilde haben dieselbe wahre Größe.

Weiters besteht hier, wie leicht einzusehen ist, der

Satz II: Wird jeder von zwei gekoppelten natürlichen Räumen durch orthogonale Projektion dargestellt, wobei die gemeinsame wahre Ebene als Bildebene und dieselbe Gerade für beide Räume als Achse gewählt sei, so ergeben je zwei entsprechende Punkte der beiden Räume dasselbe Bildpaar.

2. Zu einer natürlichen Deutung der dreidimensionalen Geometrie kann man z. B. gelangen, wenn man auf die Punkte des Raumes eine Transformation ausübt, welche eine Ebene punktweise in sich selbst überführt, und in dem so erhaltenen Raume in geeigneter Weise eine Metrik festlegt. Es soll dies an einem Beispiel des näheren ausgeführt werden.

Legen wir (Fig. 2) ein kartesisches Koordinatensystem zugrunde, so ist mittels der Transformation

$$T \begin{cases} x_1 = x \\ y_1 = -y \\ z_1 = \quad -y^2 \end{cases}$$

jedem Punkt $P = (x, y, z)$ des Raumes in eindeutiger Weise ein Punkt $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ desselben zugeordnet. Dabei wird jeder Punkt der XZ-Ebene in sich selbst transformiert und jede Ebene parallel zur Z-Achse wieder in eine solche übergeführt. Alle

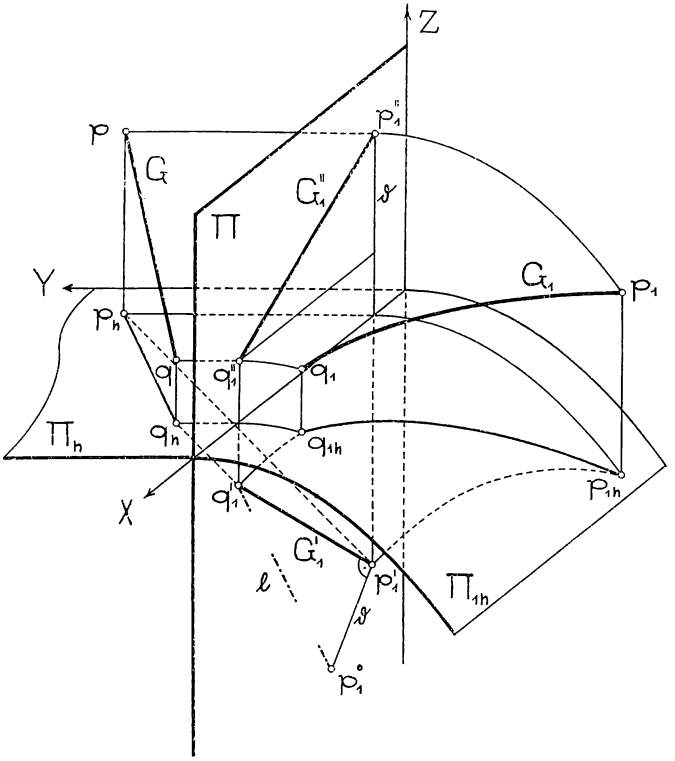

Fig.

anderen Ebenen werden in ein System von ∞^3 parabolischen Zylindern transformiert, deren Erzeugende parallel zur XZ-Ebene sind. Die Schnitte der Zylinder mit der YZ-Ebene des Koordinatensystemes sind kongruente Parabeln, deren Achsen parallel zur Z-Achse sind.

Die Geraden des Raumes werden durch die Transformation T in ein System von ∞^4 Parabeln transformiert, die man erhält, wenn man die eben erwähnten parabolischen Zylinder mit allen Ebenen parallel zur Z-Achse schneidet.

Wir wählen nun neben den Punkten jene ∞^4 Parabeln als »Geraden« und jene ∞^3 parabolischen Zylinder als »Ebenen« zu

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Grundelementen eines abstrakten dreidemensionalen Raumes. Weiters setzen wir fest, daß eine »Gerade« und eine »Ebene« dann und nur aufeinander »senkrecht stehen«, wenn die aus diesen beiden Elementen durch die Transformation T^{-1} hervorgehenden Elemente des anschaulichen Raumes aufeinander senkrecht stehen. Wir gelangen so zu einem natürlichen Raum R_1, der die XZ-Ebene des Koordinatensystemes als wahre Ebene enthält. Der natürliche Raum R_1 ist durch die Transformation T mit dem anschaulichen Raum R gekoppelt.

Wählt man nun (Fig. 2) die XZ-Ebene als Bildebene Π und die X-Achse als Rißachse, so ist im Raume R_1 eine Darstellung durch zugeordnete Normalrisse festgelegt. Legt man durch die Gerade X die auf Π senkrechte Ebene, so erhält man die Grundrißebene Π_{1h}. Die uneigentlichen Elemente des natürlichen Raumes R_1 sind so wie im anschaulichen Raume lediglich fiktiver Natur. Zur Ermittlung der Projektionen eines Punktes p_1 von R_1 verfahren wir also genau so wie im anschaulichen Raum. Wir fällen aus p_1 das »Lot« auf Π und erhalten so den Aufriß p_1'' von p_1. Fällt man aus p_1 das »Lot« auf Π_{1h}, so erhält man den Punkt p_{1h}, der, »unter 45°« gegen Π projiziert, den Grundriß p_1' des Punktes p_1 ergibt. Die Bilder eines Punktes ergeben sich also hier, wie man sieht, durch krumme Projektion.

Beschreibt der Punkt p_1 die Gerade $G_1 = (p_1, q_1)$, so beschreiben seine Bilder p_1' und p_1'', beziehungsweise die anschaulichen Geraden $G_1' = (p_1', q_1')$ und $G_1'' = (p_1'', q_1'')$, welche also die Bilder von G_1 darstellen. Die Ebenen von R_1 können durch ihre Spuren festgelegt werden, die anschauliche Gerade auf der Ebene Π sind.

In der so durchgeführten Darstellung kann dann jede projektive oder metrische Aufgabe im Raume R_1 gelöst werden. Nach Satz I erfolgt die Durchführung mit genau denselben Linien wie in der orthogonalen Projektion des anschaulichen Raumes. So z. B. ergibt sich die wahre Länge l der Strecke $\overline{p_1\ q_1}$ (Fig. 2) als Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreieckes, dessen Katheten die erste Projektion $\overline{p_1'\ q_1'}$ der Strecke und die Ordinatendifferenz $\mathfrak{d}$ der Endpunkte sind.

Wir haben bei der Darstellung des Raumes R_1 die Ebene Π als Bildebene und die Gerade X derselben als Rißachse gewählt. Durch diese Festsetzungen ist nun auch eine Darstellung des anschaulichen Raumes R durch orthogonale Projektion bestimmt. Da nun die beiden Räume R und R_1 durch die Transformation T gekoppelt sind, so ergeben (Fig. 2) je zwei durch T einander zugeordnete Punkte p und p_1 von R und R_1 dasselbe Bildpaar $(p', p'') = (p_1', p_1'')$.

3. Der eben behandelte natürliche Raum ist noch spezieller Natur, da seine »Punkte« durchwegs anschauliche Punkte sind. Es lassen sich nun auch Beispiele von natürlichen Räumen angeben,

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

wo dies nicht mehr zutrifft. E. Müller hat in der eingangs zitierten Arbeit gezeigt, daß die darstellende Geometrie das natürlichste Mittel zur Versinnlichung der abstrakten projektiven Geometrie liefert, und jener Arbeit entnehmen wir nun die folgende Deutung des dreidimensionalen Raumes.

Wir wählen in der Zeichenebene Π einen eigentlichen Punkt z und fassen je zwei eigentliche Punkte p_1 und p_2 von Π, deren Verbindungslinie durch z hindurchgeht, zu einem orientierten Paar $p = (p_1\ p_2)$ zusammen. Die Punkte p_1 und p_2 können dabei auch identisch sein. Die ∞^3-Paare, die sich solcherweise ergeben, bezeichnen wir als »Punkte«. Jede Gesamtheit von ∞^1-»Punkten« $p = (p_1\ p)$, deren Elemente p_1 und p_2, beziehungsweise zwei beliebig gewählten eigentlichen Geraden G_1 und G_2 von Π angehören, nennen wir »Gerade«. Schließlich bezeichnen wir als »Ebene« jede Gesamtheit von ∞^3-»Punkten« $p = (p_1\ p_2)$, deren Elemente sich in einer perspektiven Kollineation mit dem Zentrum entsprechen.

Jeder »Geraden« $G = (G_1\ G_2)$ ordnen wir neben ihren eigentlichen noch einen fiktiven »Punkt« zu und setzen fest, daß zwei »Gerade« $G = (G_1\ G_2)$ und $F = (F_1\ F_2)$ dann, und nur dann, denselben fiktiven »Punkt« enthalten, wenn sowohl G_1 und F_1 als auch G_2 und F_2 parallel sind.

Die Gesamtheit der so definierten »Punkte«, »Geraden« und Ebenen« gehorcht, wie E. Müller gezeigt hat, den Axiomen der projektiven Geometrie und stellt demnach einen abstrakten dreidimensionalen Raum dar.

Es ist nun klar, daß bei den oben ausgezeichneten Kollineationen die Identität mit inbegriffen ist, so daß die Gesamtheit der ∞^2-Paare $p = (p_1\ p_2)$, für welche p_1 und p_2 identisch sind, eine Ebene« darstellt. Der oben konstruierte dreidimensionale Raum enthält also die Zeichenebene als »wahre Ebene«.

Führen wir weiters (Fig. 3) irgendeine perspektive Ähnlichkeit mit dem Zentrum als »uneigentliche Ebene« Ω ein, so schneidet diese die wahre Ebene in deren uneigentlicher Geraden im gewöhnlichen Sinne. Definieren wir schließlich noch den absoluten Kegelschnitt« K durch ein Paar von nullteiligen Kreisen K_1 und K_2, die einander in jener Ähnlichkeit entsprechen, so ist dadurch in unserem Raume eine Metrik festgelegt, die dem Wesen eines natürlichen Raumes entspricht.

Wählen wir nun die wahre Ebene Π als Bildebene und die beliebige Gerade X derselben als Rißachse, so ist damit in dem betrachteten natürlichen Raume eine Darstellung durch orthogonale Projektion festgelegt. Der uneigentlichen Geraden U von Π entspricht in der absoluten Polarität der Punkt $u = (u_1, u_2)$, der mit der Geraden X verbunden die Grundrißebene Π_h ergibt. Diese Ebene ist somit durch jene perspektive Kollineation versinnlicht, die durch das Kollineationszentrum z, die Kollineationsachse X und das Paar entsprechender Punkte u_1, u_2 bestimmt ist. Die

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

uneigentliche Gerade ($U_h = U_{h_1}$, U_{h_2}) von Π_h ergibt sich als der Schnitt dieser Ebene mit der uneigentlichen Ebene Ω, und ihr Pol bezüglich der absoluten Polarität ist der Punkt $u_h = (u_{h_1}, u_{h_2})$. Die Polare des uneigentlichen Punktes o von X in der absoluten Polarität ist die Gerade $O = (O_1, O_2)$, auf welcher in der bekannten Weise die Punkte $s = (s_1, s_2)$ und $c = (c_1, c_2)$ festgelegt werden.

Die Bilder p' und p'' des beliebig angenommenen Punktes $p = (p_1, p_2)$ ergeben sich nun in der einfachsten Weise. Um den Aufriß p'' zu erhalten, projiziert man p aus u auf die Ebene Π.

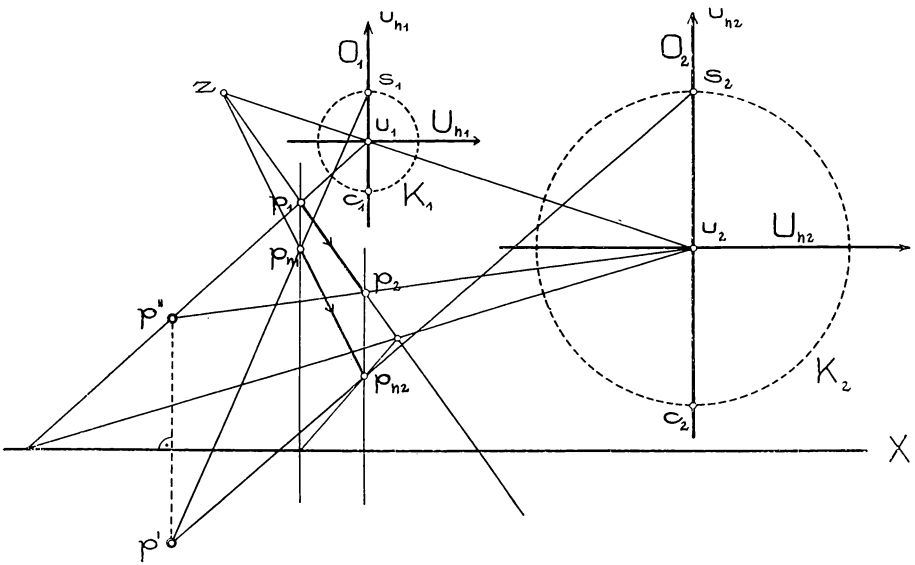

Fig. 3.

Der Punkt p'' ergibt sich demnach als der selbstentsprechende Punkt der beiden durch ihre Träger $[u_1\ p_1]$ und $[u_2\ p_2]$ bestimmten, bezüglich perspektiven Punktreihen. Projiziert man weiters p aus u_h auf die Ebene Π_h, so ergibt sich der Punkt $p_h = (p_{h_1}, p_{h_2})$. Es stellen mithin p_{h_1} und p_{h_2} jene Punkte dar, die sich sowohl auf den perspektiven Punktreihen $[p_1\ u_{h_1}]$ und $[p_2\ u_{h_2}]$ als auch in der Π_h definierenden Kollineation entsprechen. Projiziert man dann p_h aus s auf die Bildebene Π, so ergibt sich der Grundriß p' von p. Die Verbindungslinie von p' und p'' steht auf der Rißachse X senkrecht.

Beschreibt der Punkt $p = (p_1, p_2)$ eine Gerade $G = (G_1, G_2)$, so beschreiben seine Bilder p' und p'' je eine Gerade G' und G'' die dann die Bilder von G darstellen. Die Ebenen des betrachteten natürlichen Raumes können durch ihre Spuren dargestellt werden.

In der so durchgeführten Darstellung des natürlichen Raumes herrschen nun nach Satz I genau dieselben Gesetze wie in der orthogonalen Projektion des anschaulichen Raumes, und jede Aufgabe projektiver oder metrischer Natur findet hier ihre Lösung mit genau denselben Linien wie dort. So z. B. kommt entsprechend der von uns im Raume R_1 festgelegten Metrik je zwei perspektiven Kollineationen mit dem Zentrum z ein ganz bestimmter »Neigungswinkel« zu. Sind nun die durch jene beiden Kollineationen versinnlichten »Ebenen« von R_1 durch ihre Spuren festgelegt, so kann der erwähnte Neigungswinkel mit genau denselben Linien ermittelt werden

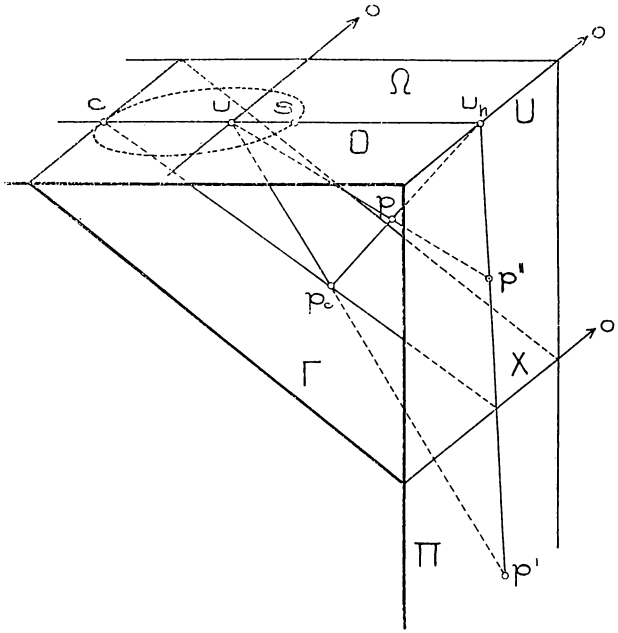

Fig. 4.

wie der Neigungswinkel zweier Ebenen in der orthogonalen Projektion des anschaulichen Raumes.

Es wäre nicht schwer, beliebig viele weitere Beispiele von natürlichen Räumen anzugeben. Die in 1. dargelegten Prinzipien setzen uns so in den Stand, die verschiedensten Gebiete der Geometrie von einheitlichen Gesichtspunkten aus einer konstruktiven Behandlung zugänglich zu machen.

4. Wir wollen nun den Begriff des natürlichen Raumes zu einer Klassifizierung der gebräulichen Zweibildersysteme der darstellenden Geometrie heranziehen.

Der unmittelbarste Weg zur Herstellung eines vom anschaulichen verschiedenen natürlichen Raumes ist der folgende. Wir geben den Elementen »Punkt«, »Gerade«, »Ebene« ihre anschauliche Bedeutung und wählen eine beliebige Ebene Π des Raumes (Fig. 4)

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

als wahre Ebene. Die uneigentliche Ebene Ω des Raumes im gewönlichen Sinne behalten wir als solche bei und zeichnen irgend einen nullteiligen Kegelschnitt K von Ω, der die Ebene Π in ihren absoluten Kreispunkten schneidet, als »absoluten Kegelschnitt« aus. Der so definierte natürliche Raum R_1 stimmt also in projektiver Beziehung mit dem anschaulichen Raume R vollkommen überein und unterscheidet sich von diesem nur durch seine Metrik.

Wählen wir nun die wahre Ebene Π von R_1 als Bildebene und eine beliebige Gerade X von Π als Rißachse, so ist dadurch in R_1 eine Darstellung durch orthogonale Projektion festgelegt. Durch die uneigentliche Gerade U von Π und den uneigentlichen Punkt o von X ist das Poldreieck o, u, u_h von K bestimmt, und auf der Seite O desselben werden in der bekannten Weise die Punkte s und c definiert. Es stellt dann $\Pi_h = [X\ u]$ die Grundrißebene und $\Gamma = [X, c]$ die Koïnzidenzebene dar.

Der Aufriß p'' eines Punktes p ergibt sich nun, indem man p aus dem Punkte u auf die Bildebene Π projiziert. Um den Grundriß p' von p zu erhalten, projiziert man p zunächst aus u_h auf die Koïnzidenzebene Γ und den so erhaltenen Punkt p_c aus u auf Π.

Die Darstellung des Raumes R_1 durch orthogonale Projektion kann, wie man sieht, als eine Verallgemeinerung der Abbildung des Raumes R durch Schräg- und Schräggrundriß aufgefaßt werden. Die Verallgemeinerung besteht darin, daß bei beliebiger Wahl der Rißachse X die Koïnzidenzebene Γ auf der Bildebene Π nicht senkrecht steht. Wie man jedoch leicht zeigen kann, gibt es zwei Lagen für die Rißachse X, so daß die Darstellung des Raumes R_1 durch orthogonale Projektion zu einer Abbildung des Raumes R durch Schräg- und Schräggrundriß wird.

Es sei nun umgekehrt irgendeine Darstellung des anschaulichen Raumes R durch Schräg- und Schräggrundriß gegeben. Auf der uneigentlichen Ebene Ω von R liegt dann das in Fig. 5 gezeichnete Bild vor, wobei U die uneigentliche Gerade der Bildebene, C die der Koïnzidenzebene, o den uneigentlichen Punkt der Rißachse und u das Projektionszentrum darstellt. Ist nun u_h der dem Punkte o in der absoluten Involution auf U entsprechende Punkt, so legen wir die Gerade $O = [u, u_h]$ und konstruieren zu ihrem Schnittpunkt c mit C den bezüglich des Paares u, u_h vierten harmonischen Punkt s.

Faßt man dann das Dreieck o, u, u_h als Poldreieck auf und wählt als die Involution konjugierter Punkte auf der Seite U die absolute Involution der Bildebene, während die Involution konjugierter Punkte auf der Seite O durch die Paare (u, u_h) und (s, c) festgelegt sei, so ist dadurch auf der uneigentlichen Ebene Ω eine nullteilige Polarität definiert, deren Ordnungskurve der Kegelschnitt K sei. Dieser Kegelschnitt ist durch die vorliegende Darstellung des

Raumes in eindeutiger Weise bestimmt und soll der zu jener Darstellung gehörende »abbildende Kegelschnitt« genannt werden.

Wenn wir nun unter Beibehaltung der Grundelemente des anschaulichen Raumes auf den Kegelschnitt K als »absolute Kurve« eine Metrik gründen, so gelangen wir zu einem natürlichen Raume R_1, der die Bildebene Π (und jede dazu parallele) als wahre Ebene enthält. Wie aus dem Vorhergehenden unmittelbar folgt, ist die betrachtete Darstellung des Raumes R durch Schräg- und Schräggrundriß nichts anderes als eine orthogonale Darstellung des eben definierten natürlichen Raumes R_1.

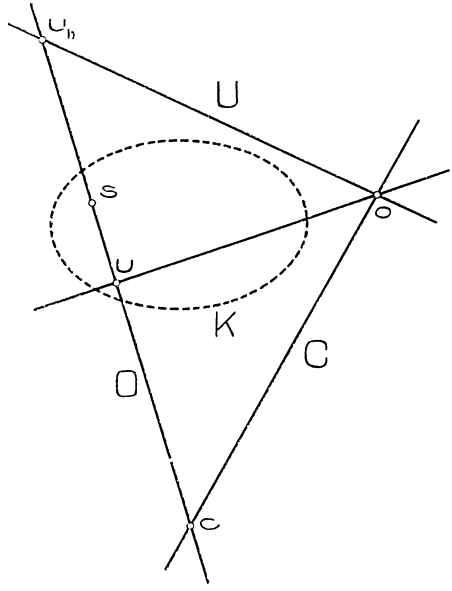

Fig.

Es ergibt sich somit der

Satz III: Jede Darstellung des Raumes durch Schräg- und Schräggrundriß kann als orthogonale Projektion im Sinne der auf den abbildenden Kegelschnitt der Darstellung begründeten Metrik aufgefaßt werden.

Aus Satz I folgt dann noch die weitere bemerkenswerte Tatsache: Liegt irgendeine Darstellung des Raumes durch Schräg- und Schräggrundriß vor, und führt man rein planimetrisch irgendwelche Konstruktionen aus, so wie wenn es sich um die Lösung einer Maßaufgabe in orthogonaler Projektion handelte (etwa Konstruktion von Normalabständen, Neigungswinkel etc.), dann hat jedes so erhaltene

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Resultat einen wohldefinierten Sinn und stellt die Lösung der betreffenden Aufgabe im Sinne der auf den abbildenden Kegelschnitt der Darstellung begründeten Metrik dar.

5. Wir haben in 4. den unmittelbarsten Weg zur Herstellung eines vom anschaulichen verschiedenen natürlichen Raumes angegeben. Der nächste Schritt ist dann der folgende. Wir behalten wieder die Elemente »Punkt«, »Gerade«, »Ebene« des anschaulichen Raumes bei und wählen eine beliebige eigentliche Ebene Π desselben als wahre Ebene. Irgendeine zu Π parallele Ebene Ω

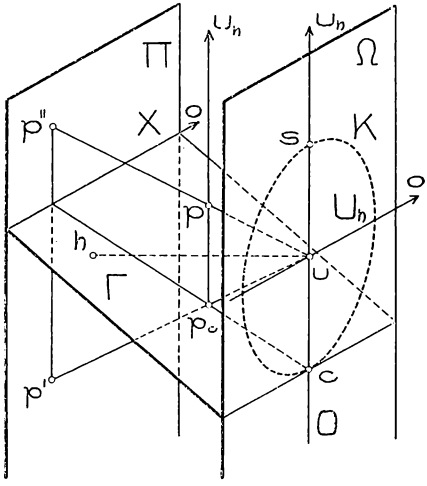

Fig. 6.

zeichnen wir als »uneigentliche« Ebene aus und wählen einen beliebigen nullteiligen Kreis K von Ω als »absoluten Kegelschnitt«. Es ist unmittelbar klar, daß damit allen Bedingungen, die wir an einen natürlichen Raum gestellt haben, entsprochen wird. Der so konstruierte natürliche Raum R_1 stimmt mit dem anschaulichen Raume R in projektiver Beziehung vollkommen überein und unterscheidet sich von diesem nur durch seine Metrik.

Wählt man nun (Fig. 6) die wahre Ebene Π von R_1 als Bildebene und die beliebige Gerade X von Π als Rißachse, so ist damit in R_1 eine Darstellung durch orthogonale Projektion festgelegt. Durch die uneigentliche Gerade U von Π und den uneigentlichen Punkt o von X ist das Poldreieck (o, u, u_h) von K bestimmt, auf dessen Seite O in der bekannten Weise die Punkte s und c definiert werden. Es stellt dann $\Pi_h = [X, u]$ die Grundrißebene und $\Gamma = [X, c]$ die Koïnzidenzebene der Abbildung dar.

Die Bilder eines Punktes p von R_1 ergeben sich dann in der bekannten Weise. Man erhält den Aufriß p'' von p, indem man p aus u auf die Ebene Π projiziert. Der Grundriß p' von p ergibt

sich, indem man zunächst p aus u_h auf Γ und den so erhaltenen Punkt p_c aus u auf Π projiziert.

Die orthogonale Projektion des Raumes R_1 kann also, wie man sieht, als eine Verallgemeinerung der Darstellung des anschaulichen Raumes durch Zentral- und Zentralgrundriß aufgefaßt werden. Die Verallgemeinerung besteht darin, daß bei beliebiger Wahl der Rißachse X die Koïnzidenzebene Γ auf Π nicht senkrecht steht. Es sei nun h der Fußpunkt des vom Punkte u auf die Ebene Π gefällten Lotes im anschaulichen Sinne. Wählt man dann als Rißachse X eine der ∞^1-Geraden, deren Abstand von h

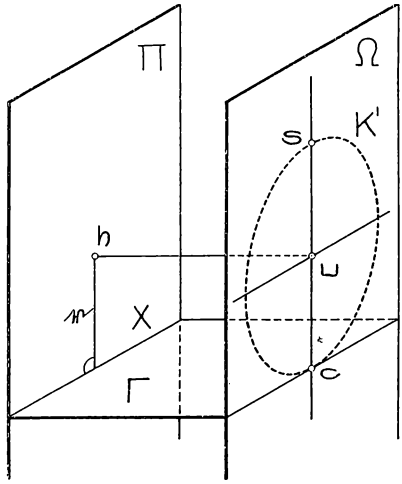

Fig. 7.

gleich ist dem Radius des reellen Vertreters von K, so ist die daraus hervorgehende orthogonale Projektion des Raumes R_1 nichts anderes als eine Darstellung des anschaulichen Raumes R durch Zentral- und Zentralgrundriß.

Es sei nun umgekehrt (Fig. 7) irgendeine Darstellung des anschaulichen Raumes durch Zentral- und Zentralgrundriß gegeben, wobei Π die Bildebene, u das Projektionszentrum und Γ die Koïnzidenzebene bedeute. Wir legen durch u die zu Π parallele Ebene Ω und zeichnen in ihr jenen Kreis K', der u zur Mitte hat und die Gerade $C = [\Omega, \Gamma]$ berührt. Der nullteilige Kreis K, dessen reeller Vertreter K' ist, soll als der zur betrachteten Darstellung gehörige »abbildende Kegelschnitt« bezeichnet werden; er ist durch die Darstellung eindeutig bestimmt.

Wenn wir nun wie in 1. unter Beibehaltung der Grundelemente des anschaulichen Raumes den Kegelschnitt K als »absoluten Kegelschnitt« auszeichnen, so enthält der so definierte natürliche Raum R_1 die Bildebene Π (und jede dazu parallele) als wahre Ebene. Wie man weiters leicht erkennt, ist die betrachtete

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Darstellung des anschaulichen Raumes durch Zentral- und Zentralgrundriß eine orthogonale Darstellung des natürlichen Raumes R_1.

Es ergibt sich somit der

Satz IV: Jede Darstellung des Raumes durch Zentral- und Zentralgrundriß kann als orthogonale Projektion im Sinne der auf den abbildenden Kegelschnitt der Darstellung begründeten Metrik aufgefaßt werden.

Auch hier gilt wie in 1. der folgende Tatbestand: Liegt irgendeine Darstellung des Raumes durch Zentral- und Zentralgrundriß vor, und führt man rein planimetrisch

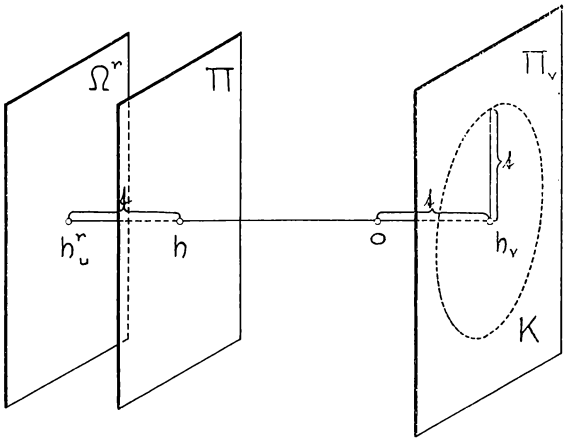

Fig. 8.

irgendwelche Konstruktionen durch, so wie wenn es sich um die Lösung einer Maßaufgabe in orthogonaler Projektion handelte, dann hat jedes so erhaltene Resultat einen wohldefinierten Sinn und stellt die Lösung der betreffenden Aufgabe im Sinne der auf den abbildenden Kegelschnitt der Darstellung begründeten Metrik dar.

Wenn also die darstellende Geometrie außer der orthogonalen Projektion insbesondere die Darstellung des Raumes durch Schräg- und Schräggrundriß und jene durch Zentral- und Zentralgrundriß ausgebildet hat, so haben wir darin keinen bloßen Zufall zu erblicken. Wie wir gesehen haben, sind jene beiden Verfahren eben als eine systematische Weiterbildung der orthogonalen Projektion aufzufassen. Sie entspringen demselben Darstellungsprinzip wie diese bei schrittweiser Verallgemeinerung der Metrik des Raumes innerhalb jener Grenzen, wie sie das Wesen des natürlichen Raumes vorschreibt.

6. Die letzte Anwendung unserer allgemeinen Betrachtungen gilt der Reliefperspektive. Es sei (Fig. 8) eine perspektive

Kollineation C des Raumes durch die Kollineationsebene Π, das Kollineationszentrum o, die Fluchtebene Ω^r (d. i. die der uneigentlichen Ebene Ω in C entsprechende) und die Verschwindungsebene Π_v (d. i. jene Ebene, der in C die uneigentliche Ebene Ω entspricht) gegeben. Der Hauptstrahl schneidet die Ebenen Ω^r, Π, Π_v, beziehungsweise in den Punkten h_u^r (Hauptfluchtpunkt), h (Hauptpunkt), h_v (Hauptverschwindungspunkt). Es besteht dann bekanntlich die Streckenbeziehung $\overline{h_u^r, h} = \overline{o, h_v} = \mathfrak{t}$ (Relieftiefe).

Unterwirft man irgendein räumliches Objekt G der Kollineation C, so erhält man das Relief G^r von G, und die Reliefperspektive stellt nun die Aufgabe, die Abbildung von G^r durch zugeordnete Normalrisse direkt aus dem Objekt G, also ohne Kenntnis des Reliefs G^r herzustellen.

Wählt man die Kollineationsebene Π als Bildebene und irgendeine Gerade X derselben als Rißachse, so ist damit eine orthogonale Darstellung des anschaulichen Raumes R festgelegt, und man könnte die Bilder von G^r in der bekannten Weise konstruieren. Unterwirft man nun den Raum R der zu C inversen Kollineation C^{-1}, so bleibt die Ebene Π punktweise fest, das Relief G^r wird in das Objekt G transformiert, der absolute Kegelschnitt von R aber geht, wie unmittelbar einzusehen, in jenen nullteiligen Kreis K über, der in Π^r liegt, h_v zur Mitte und $\mathfrak{t} \cdot i$ zum Halbmesser hat. Gründen wir nun unter Aufrechterhaltung der anschaulichen Bedeutung der Grundelemente auf den Kreis K eine Metrik, so erhalten wir nach 2. einen natürlichen Raum R_1, der die Ebene Π (und jede dazu parallele) als wahre Ebene enthält. Wie weiters unmittelbar einzusehen ist, sind die Räume R und R_1 durch die Kollineation C gekoppelt.

Durch die Bildebene Π und die in Π beliebig gewählte Rißachse X ist nun nicht nur im anschaulichen Raume R, sondern auch im natürlichen Raume R_1 eine orthogonale Darstellung festgelegt. Dabei ergeben nach Satz II zwei durch die Kollineation C^{-1} einander zugeordnete Punkte von R und R_1 dasselbe Bildpaar.

Die orthogonale Darstellung des Reliefs G^r im anschaulichen Sinne ist also identisch mit der Abbildung des Gegenstandes G im Sinne der in R_1 festgelegten »orthogonalen« Darstellung. Diese letztere wird nun nach 5. zu einer Darstellung durch Zentral- und Zentralgrundriß, wenn der Abstand der Achse X vom Hauptpunkt h gleich der Relieftiefe $\mathfrak{t}$ ist.

Es ergibt sich somit

Satz V: Wählt man die Kollineationsebene Π als Bildebene und eine Gerade X derselben als Rißachse, deren Abstand vom Hauptpunkt h gleich der Relieftiefe $\mathfrak{t}$ ist, so sind Auf- und Grundriß des Reliefs G^r eines Objektes G identisch mit dem Zentral- und Zentralgrundriß von G, die man unter Beibehaltung der Bildebene und der

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Rißachse für den Hauptverschwindungspunkt als Auge erhält.

Der eben ausgesprochene Satz schließt die bekannten Sätze von J. de la Gournerie und R. Staudigl[1] in sich und wird meistens mit deren Hilfe bewiesen. Man kann sich dabei des Eindrucks nicht erwehren, als ob es sich da mehr oder minder um einen glücklichen Zufall handelte. Hier erscheint Satz V als eine Auswirkung jener allgemeinen Prinzipien, die wir an die Spitze unserer Betrachtungen gestellt haben.

Siehe etwa: Müller-Kruppa, Vorlesungen über darstellende Geometrie, I. Bd., Leipzig und Wien (1923), p. 231 bis 233.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1926

Band/Volume: 135_2a

Autor(en)/Author(s): Hofmann Ludwig

Artikel/Article: Abstrakte Standpunkte in der darstellenden Geometrie mit Anwendungen auf die gebräuchlichen Zweibildersysteme und die Reliefperspektive. 531-546