Ergänzungen zur Kontinuitätstheorie der Röntgenstrahlenausbreitung in Krystallen

Von

Erwin Lohr

(Vorgelegt in der Sitzung am 2. Dezember 1926)

In einer ausführlichen Abhandlung¹ (hier als I zitiert), auf die bezüglich aller hier nicht behandelten Einzelheiten verwiesen sei, habe ich die Theorie der Röntgenstrahlenausbreitung in Krystallen vom Kontinuitätstheoretischen Standpunkte entwickelt und gezeigt, daß schon unter weitgehenden vereinfachenden Annahmen die aus der Theorie gezogenen Folgerungen den charakteristischen Erfahrungstatsachen dieses Gebietes entsprechen. Die folgenden Untersuchungen bezwecken, die Theorie etwas zu verallgemeinern und die Deduktionen in einigen praktisch bedeutungsvoll gewordenen Punkten zu ergänzen.

1. Das Gleichungssystem.

Meine Theorie baut sich auf den Jaumann'schen Differentialgesetzen auf und geht von dem Gedanken aus, daß sich als Folge des anisotropen Zustandes eine räumlich dreifach periodische Struktur ausbildet. Diese Struktur habe ich² durch die skalare Funktion:

$$\begin{aligned} \beta &= \beta_1 \left(\sum_{h_1} B_{h_1} e^{i h_1 \nu_1 u_1} \right) \left(\sum_{h_2} B_{h_2} e^{i h_2 \nu_2 u_2} \right) \left(\sum_{h_3} B_{h_3} e^{i h_3 \nu_3 u_3} \right) = \\ &= \beta_1 \sum_{h_1 h_2 h_3} B_{h_1 h_2 h_3} e^{i (h_1 \nu_1 \rho'_1 + h_2 \nu_2 \rho'_2 + h_3 \nu_3 \rho'_3)} \quad r = \beta_1 \sum_z B_z e^{i \bar{q}_z \cdot r} \end{aligned} \quad (1)$$

gekennzeichnet, worin der Ortsvektor durch

$$r = u_1 \rho_1 + u_2 \rho_2 + u_3 \rho_3$$

gegeben und

$$\begin{aligned} \bar{q}_z &= h_1 \nu_1 \rho'_1 + h_2 \nu_2 \rho'_2 + h_3 \nu_3 \rho'_3 \\ B_z &= B_{h_1 h_2 h_3} = B_{h_1} B_{h_2} B_{h_3} \end{aligned} \quad (2)$$

ist. Die ρ_i sind drei nicht koplanare Vektoren, die ρ'_i das zu diesen reziproke System, die h_i ganze Zahlen einschließlich der Null; β_1 ist ein konstanter Faktor, die ν_i sind reelle, die B_{h_i} im allgemeinen

¹ E. Lohr, »Kontinuitätstheorie der Röntgenstrahlenausbreitung in Krystallen«, diese Berichte 1924, 133, p. 517 bis 572.

komplex geschriebene Materialkonstanten, die zu entgegengesetzt gleichen Werten der h_i gehörenden B_{hi} müssen konjugiert komplex sein.

Für die Art und Weise, wie sich die periodische Struktur in den Differentialgesetzen geltend macht, sind nun beim gegenwärtigen Stande der Kontinuitätstheorie verschiedene Ansätze möglich. In meiner ersten Arbeit habe ich einen tunlichst einfachen Ansatz gewählt,¹ es scheint mir jedoch, daß die im folgenden präzisierten Annahmen der Natur der Sache angemessener sind. Es wird vorausgesetzt, daß es zwei Gruppen von stofflichen Gleichungspaaren gibt, welche durch die Indizes z und i unterschieden werden sollen. Die Materialkonstanten der einen Gruppe (Index z), der jedenfalls die optischen Eigenfrequenzen zugehören, sollen von der periodischen Struktur völlig unberührt bleiben; die Differentialgesetze dieser Gruppe sind durch die Grundgleichungen (III) und (IV) der ersten Arbeit (p. 521) gegeben. Die Gleichungspaare der zweiten Gruppe, welche jedenfalls die Eigenfrequenzen des Röntgengebietes enthalten, sollen bei Vernachlässigung der Absorption lauten:

$$\frac{\partial \tau_i}{\partial t} + r_i \tau_i + k_i [\nabla; \mathfrak{m} - \mathfrak{m}; \nabla] + a_i \cdot (\varepsilon_0 \cdot \mathfrak{e}) \mathbf{I} = 0, \quad (\text{III}')$$

$$g_i^r \frac{\partial \tau_i}{\partial t} - r_i \tau_i + l_i [\nabla; \mathfrak{m} - \mathfrak{m}; \nabla] + b_i \nabla \cdot (\varepsilon_0 \cdot \mathfrak{e}) \mathbf{I} = 0. \quad (\text{IV}')$$

Die τ_{is} , τ_i sind die dyadischen stofflichen Variablen der zweiten Gruppe, die Rotore (Vektoren) dieser Dyaden sollen wieder durch τ_{ir} , τ_{is} , ihre (ersten) Skalare durch τ_{is} , τ_{is} bezeichnet werden. $\mathfrak{e}$ bedeutet den elektrischen $\mathfrak{m}$ den magnetischen Vektor, ε_0 ist die im »homogenen« Krystall räumlich konstante dielektrische Dyade. Alle übrigen Größen sind skalare Materialkonstanten. Die Differentialgesetze (III'), (IV') unterscheiden sich formal von jenen der ersten Gruppe nur dadurch, daß dort die g_z , g'_z -Tetraden sind, während wir die g_i , g'_i als skalare Größen ansehen wollen. Der wesentliche Unterschied der beiden Gruppen liegt in der Annahme, daß die Materialkonstanten g_i , g'_i , r_i , k_i , l_i , a_i , b_i sämtlich einer periodischen Raumfunktion $\mathfrak{z}_i$ der Form (1) proportional sind, während die entsprechenden Materialkonstanten der ersten Gruppe im »homogenen« Krystall räumlich konstant bleiben. Die elektromagnetischen Gleichungen entsprechen den Gleichungen (I) und (II) der ersten Arbeit (p. 520) und lauten ausführlich geschrieben:

$$\frac{\partial \mathfrak{e}}{\partial t} + \varepsilon_0 \cdot \nabla \left[\sum_z (a_z \tau_{zs} + b_z \tau_{zs}) + \sum_i (a_i \tau_{is} + b_i \tau_{is}) \right] = c_0 \nabla \times \mathfrak{m} \quad (\text{I})$$

$$\frac{\partial \mathfrak{m}}{\partial t} = -c_0 \nabla \times \left[\mathfrak{e} - \frac{1}{c_0} \sum_z (k_z \tau_{zr} + l_z \tau_{zr}) - \frac{1}{c_0} \sum_i (k_i \tau_{ir} + l_i \tau_{ir}) \right] \quad (\text{II})$$

¹ l. p. vgl. aber auch die Variante auf p. 564.

worin c_0 die Vakuumlichtgeschwindigkeit bedeutet, für den gesamten Klammerausdruck [] auf der rechten Seite von (II) werden wir wieder $\mathfrak{Q}$ schreiben, dieser Vektor tritt hier sowohl im Energiefluß wie in den Grenzbedingungen an die Stelle von $\mathfrak{e}$.¹ Wir verzichten wieder auf die Behandlung der Longitudinalstrahlen, setzen also $\nabla \cdot (\varepsilon_0 \cdot \mathfrak{e})$ und sämtliche $\sigma_{zs}, \tau_{zs}, \sigma_{is}, \tau_{is}$ gleich Null voraus und integrieren das Gleichungssystem durch:

$$\mathfrak{e} = \dot{\mathfrak{e}} e^{-ipt} = \left(\mathfrak{e}_0 + \sum_k \mathfrak{e}_k e^{i\bar{q}_k \cdot x} \right) e^{i(q_0 \cdot x - pt)} \quad (3)$$

worin p die Kreisfrequenz bedeutet und durch analoge Ansätze für $\mathfrak{m}, \tau_{zs}, \tau_{zs}, \sigma_{is}, \tau_{is}$. Bezüglich der Durchführung der Rechnungen sei auf I (besonders p. 521 bis 526) verwiesen, analog wie dort erhält man:

$$\begin{aligned} -ip \varepsilon_0 \cdot \hat{\mathfrak{Q}} &= c_0 \left[I + \frac{p^2}{c_0^2} \varepsilon_0 \cdot \Phi + \frac{p^2}{c_0^2} \varepsilon_0 \cdot 2 \sum_i \frac{k_i^2 g_i' + l_i^2 g_i'}{p^2 g_i g_i' - r_i^2} \right] \cdot \nabla \times \hat{\mathfrak{m}} \\ -ip \hat{\mathfrak{m}} &= -c_0 \nabla \times \hat{\mathfrak{Q}}. \end{aligned} \quad (4)$$

Gemäß (8), I, (9), I, (12), I lautet die Dyade Φ jetzt:

$$\begin{aligned} \Phi = 2 \sum_x \left[\frac{k_x^2 A'_{x_1} + l_x^2 A_{x_1}}{p^2 A_{x_1} A'_{x_1} - r_x^2} \mathfrak{i}; \mathfrak{i} + \frac{k_x^2 A'_{x_2} + l_x^2 A_{x_2}}{p^2 A_{x_2} A'_{x_2} - r_x^2} \mathfrak{j}; \mathfrak{j} + \right. \\ \left. + \frac{k_x^2 A'_{x_3} + l_x^2 A_{x_3}}{p^2 A_{x_3} A'_{x_3} - r_x^2} \mathfrak{f}; \mathfrak{f} \right] \quad (5) \end{aligned}$$

die skalaren Größen A_{xp}, A'_{xp} usw. sind wieder durch die Materialtetraden g_x' bestimmt. Etwas abweichend von (20) I wollen wir fordern:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} (p^2 \varepsilon_0 \cdot \Phi) = c_0^2 \left[\varepsilon_0 (1 + \nu) - I \right] \quad (6)$$

doch soll die durch die Konstante ν gegebene positive oder negative Abweichung klein gegen Eins sein. Weiterhin nehmen wir an, daß für Röntgenfrequenzen nicht (6), sondern nur

$$p^2 \varepsilon_0 \cdot \Phi = c_0^2 \left[\varepsilon_0 \left(1 + \nu + \frac{w}{p^2} \right) - I \right] \quad (6')$$

zutrifft, worin auch w räumlich konstant und $\frac{w}{p^2}$ klein gegen Eins ist. Man sieht leicht ein, daß sich die Forderungen (6), beziehungsweise (6') durch geeignete Konstantenrelationen stets erfüllen lassen.

Da die Konstanten der i -Gruppe sämtlich mit β_i proportional sein sollen, können wir

$$g_i = \beta_i g_{0i}, \quad g'_i = \beta_i g'_{0i} \text{ usw.}, \quad (7)$$

setzen, worin die g_{0i}, g'_{0i} usw. dann räumlich konstante Größen bedeuten und erhalten so in unmittelbar verständlicher Schreibweise:

$$2 \frac{p^2}{c_0^2} k_i^2 g'_i + l_i^2 g_i = \beta_i \left(2 \frac{p^2}{c_0^2} \frac{k_{0i}^2 g'_{0i} + l_{0i}^2 g_{0i}}{p^2 g_{0i} g'_{0i} - r_{0i}^2} \right) = \beta_i P_i \quad (8)$$

Gehen wir mit (6') und (8) in die erste der Gleichungen (4), so lautet sie:

$$-ip \varepsilon_0 \cdot \hat{\mathcal{G}} = c_0 \varepsilon_0 \left(1 + v + \frac{w}{p^2} + \sum_i \beta_i P_i \right) \nabla \times \hat{\mathbf{m}} \quad (9)$$

Nun sind die P_i räumlich konstante Funktionen der Frequenz und werden auch von dieser merklich unabhängig, falls p^2 einigermaßen groß gegen $\frac{r_{0i}^2}{g_{0i} g'_{0i}}$ ist. Der Fall, daß die Frequenz gegen eine der Eigenfrequenzen konvergiert, wo dann die Absorption nicht mehr vernachlässigt werden dürfte, soll hier ausgeschlossen werden.

Wir schreiben:

$$1 + v + \frac{w}{p^2} + \sum_i \beta_i P_i = 1 + \beta' \quad (10)$$

und können dann

$$\beta' = \beta'_1 \sum_x B'_x e^{i\bar{q}_x \cdot \mathbf{r}} \quad (11)$$

setzen, worin die $\bar{q}_x$ wieder durch (2) definiert sind, die B'_x sich aus den Beiträgen der einzelnen Gleichungspaare additiv zusammensetzen und im allgemeinen noch Funktionen der Frequenz sind. $\beta'_1 B'_0$ soll dem räumlich konstanten Anteil von β' entsprechen. Der reelle Faktor β'_1 werde so bestimmt, daß der Betrag von $\sum_x B'_x e^{i\bar{q}_x \cdot \mathbf{r}}$

in jedem Raumpunkte für den in Frage kommenden Frequenzbereich unter der Einheit bleibe, und wir setzen voraus, daß sich β'_1 selbst klein gegen Eins ergebe.

Schließlich definieren wir:¹

¹ Was speziell die Näherung $\beta = -\beta'$ betrifft, sieht man, etwa mittels der Bessel'schen Ungleichung für die Quadratensumme der Fourier-Koeffizienten, leicht ein, daß auch die Summe der vernachlässigten Beiträge zu den einzelnen Fourier-Koeffizienten β höchstens von der Größenordnung β'^2_1 ist. Demnach ist diese Näherung für Fourier-Koeffizienten der Größenordnung β'_1 jedenfalls zulässig. Eine schärfere Abschätzung wäre derzeit wohl zwecklos.

$$1 + \beta = \frac{1}{1 + \beta'} = 1 - \beta' + \beta'^2 - \beta'^3 + \dots \cong 1 - \beta' \quad (12)$$

und erhalten aus (9) nach Kürzung mit der kompletten Dyade

$$-ip(1 + \beta)\hat{\mathcal{Q}} = c_0 \times \hat{\mathfrak{m}}.$$

Elimination von $\hat{\mathfrak{m}}$ aus dieser und der zweiten Gleichung (4) ergibt:

$$(1 + \beta)\hat{\mathcal{Q}} = \frac{c_0^2}{p^2} \nabla \times \nabla \times \hat{\mathcal{Q}} \quad (13)$$

das ist aber genau die allen weiteren Deduktionen zugrunde liegende Gleichung (31) der Arbeit I.

Der Vorteil, welchen wir durch die neue Formulierung erreicht haben,¹ besteht lediglich darin, daß wir jetzt jedem der stofflichen Gleichungspaare σ_i, τ_i eine besondere, ihm eigentümliche periodische Struktur β_i zuordnen können. Da verschiedenen chemischen Elementen verschiedene stoffliche Gleichungspaare entsprechen werden, schien mir eine solche Verallgemeinerung theoretisch geboten. Praktisch ergibt sich hierdurch auch für die Frequenzabhängigkeit der einzelnen Fourier-Koeffizienten in β eine weitgehende Anpassungsmöglichkeit. Betont sei jedoch, daß die Forderung (β') und die durch sie bewirkte Frequenzabhängigkeit des räumlich konstanten Gliedes $\beta'_1 B'_0$ auch im Rahmen des ursprünglichen Ansatzes zulässig wäre.

2. Abweichung vom Bragg'schen Reflexionsgesetz.

Gleich am Anfange der speziellen Deduktionen habe ich in der ersten Arbeit (p. 533) das auch dort auftretende räumlich konstante Glied $\beta_1 B_0$ zur Vereinfachung der Rechnungen durch eine Ad-hoc-Annahme eliminiert, da es mir wesentlich darauf ankam, die Wirkungen der periodischen Struktur möglichst durchsichtig herauszuarbeiten. Die Folge dieser Vereinfachung war die exakte Gültigkeit des Bragg'schen Gesetzes, während die Beobachtungen eine kleine Abweichung deutlich erkennen lassen. Es soll im folgenden gezeigt werden, daß für diese Abweichung tatsächlich nur das räumlich konstante Glied verantwortlich ist. Wir behalten die Bezeichnungen der ersten Arbeit bei und gehen von den Gleichungen (63 I) aus:

$$(1 + \beta_1 B_0) \mathcal{Q}_0 + \beta_1 B_{-1} \mathcal{Q}_1 = \frac{c_0^2}{p^2} (q_0^2 I - q_0; q_0) \cdot \mathcal{Q}_0$$

$$(1 + \beta_1 B_0) \mathcal{Q}_1 + \beta_1 B_1 \mathcal{Q}_0 = \frac{c_0^2}{p^2} (q_1^2 I - q_1; q_1) \cdot \mathcal{Q}_1 \quad (14)$$

¹ Denselben Vorteil bietet natürlich die Variante der ersten Arbeit (p. 564), es sollte aber hier gezeigt werden, daß auch eine den ursprünglichen Jaumann'schen Differentialgesetzen angepaßte Formulierung zum Ziele führt.

Sie folgen aus (13) und den Ansätzen (3) unter der Voraussetzung, daß außer der Hauptwelle mit der Amplitude $\mathfrak{Q}_0$ nur eine Nebenwelle vergleichbarer Amplitude $\mathfrak{Q}_1$ existiert. $\mathfrak{Q}_0$ und $\mathfrak{Q}_1$ sind im allgemeinen komplexe Vektoren. Wie in I (Gleichungen (55), (71) bis (73)) setzen wir:

$$q_0 = q_c + \omega \alpha \quad (15 \text{ a})$$

$$q_1 = q_0 + \bar{q}_1 = q_c + \bar{q}_1 + \omega \alpha \quad (15 \text{ b})$$

$$2 q_c \cdot \bar{q}_1 + \bar{q}_1^2 = \mu \quad (15 \text{ c})$$

$$\frac{p^2}{c_0^2} = q_c^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \quad (15 \text{ d})$$

λ bedeutet die Wellenlänge in Luft (genauer im Vakuum), ω bestimmt sich aus (14), α ist ein Einheitsvektor in Richtung des in den Krystall hineinweisenden Einfallslotes, die Richtungen der Vektoren q_c, q_0, q_1 entsprechen den Fortpflanzungsrichtungen der Einfallenden-, der Haupt- und der Nebenwelle. $\bar{q}_1$ ist durch (2) gegeben und entspricht irgend einem bestimmten Wertetripel h_1, h_2, h_3 ; bedeutet $d^{(1)}$ den betreffenden »Netzebenenabstand«, so gilt nach (172) I:

$$\bar{q}_1 \cdot d^{(1)} = 2\pi \quad (16)$$

Schreiben wir noch:

$$\beta_1 B_0 = C, \quad \beta_1 B_{-1} = e^{-i\varphi} B, \quad \beta_1 B_1 = e^{i\varphi} B, \quad (17)$$

folgt aus (14) durch Elimination von $\mathfrak{Q}_0$ (oder analog von $\mathfrak{Q}_1$):

$$\left\{ \left(1 + C - \frac{c_0^2}{p^2} q_0^2 \right) I + \frac{c_0^2}{p^2} q_0; q_0 \right\} \left[\left(1 + C - \frac{c_0^2}{p^2} q_1^2 \right) I + \frac{c_0^2}{p^2} q_1; q_1 \right] - B^2 I \} \mathfrak{Q}_1 = 0. \quad (18)$$

Gleichung (18) kann nur erfüllt werden, wenn die in geschweiften Klammern stehende Dyade mindestens planar ist. Als Bedingung dafür findet man, daß entweder:

$$\left(1 + C - \frac{c_0^2}{p^2} q_0^2 \right) \left(1 + C - \frac{c_0^2}{p^2} q_1^2 \right) - B^2 = 0 \quad (19 \text{ a})$$

oder

$$\left[\left(1 + C - \frac{c_0^2}{p^2} q_0^2 \right) \left(1 + C - \frac{c_0^2}{p^2} q_1^2 \right) - B^2 \right] \left[(1 + C)^2 - B^2 \right] + B^2 \left(\frac{c_0^2}{p^2} \right)^2 \left(q_0 \times q_1 \right)^2 = 0 \quad (19 \text{ b})$$

sein muß. Im ersten Falle steht sowohl $\mathfrak{L}_0$ als $\mathfrak{L}_1$ auf der Ebene q_0, q_1 senkrecht, im zweiten Falle liegen $\mathfrak{L}_0$ und $\mathfrak{L}_1$ in der Ebene q_0, q_1 derart, daß zwar nicht exakt aber in erster Näherung

$$\mathfrak{L}_0 \perp q_0, \mathfrak{L}_1 \perp q_1 \quad (20)$$

zutrifft. Wie in (73), I wählen wir die Längeneinheit so, daß für die betrachtete Wellenlänge:

$$\frac{c_0^2}{p^2} = \frac{1}{q_c^2} = 1 \quad (21)$$

wird. Von dieser Voraussetzung können wir uns nachträglich, wie man leicht überblickt, wieder befreien, indem wir in den Schlußformeln

$$B \text{ durch } \frac{p^2}{c_0^2} B \text{ und } C \text{ durch } \frac{p^2}{c_0^2} C \quad (22)$$

ersetzen.

Wie in der ersten Arbeit erörtert wurde, sind ω, μ, B klein gegen Eins und von derselben Größenordnung soll auch C sein. Geht man mit den Ansätzen (15) und (21) in die Gleichungen (19 a) und (19 b), bezeichnet den Winkel zwischen q_0 und q_1 wieder mit ξ , so erhält man jetzt in erster Näherung statt (78), I und (78 a), I:

$$\begin{aligned} \omega = & \frac{1}{4} \left(\frac{\mu - C}{(q_c + \bar{q}_1) \cdot a} - \frac{C}{q_c \cdot a} \right) + \\ & \pm \frac{1}{4} \sqrt{\left(\frac{\mu - C}{(q_c + \bar{q}_1) \cdot a} + \frac{C}{q_c \cdot a} \right)^2 + \frac{4 B^2}{q_c \cdot a (q_c + \bar{q}_1) \cdot a}} \quad (23 a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega = & -\frac{1}{4} \left(\frac{\mu - C}{(q_c + \bar{q}_1) \cdot a} - \frac{C}{q_c \cdot a} \right) \pm \\ & \pm \frac{1}{4} \sqrt{\left(\frac{\mu - C}{(q_c + \bar{q}_1) \cdot a} + \frac{C}{q_c \cdot a} \right)^2 + \frac{4 (B \cos \xi)^2}{q_c \cdot a (q_c + \bar{q}_1) \cdot a}} \quad (23 b) \end{aligned}$$

Mit diesen Werten für ω und Benützung von (20) erhält man aus den Gleichungen (14) in erster Näherung:

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_1 = \mathfrak{L}_0 e^{i\varphi} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{q_c \cdot a}{(q_c + \bar{q}_1) \cdot a} \frac{\mu - C}{B} + \frac{C}{B} \right) \pm \right. \\ \left. \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{q_c \cdot a}{(q_c + \bar{q}_1) \cdot a} \frac{\mu - C}{B} + \frac{C}{B} \right)^2 + 4 \frac{q_c \cdot a}{(q_c + \bar{q}_1) \cdot a}} \right] \quad (24 a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}'_1 = \mathfrak{L}'_0 e^{i\varphi} \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{q_c \cdot a}{(q_c + \bar{q}_1) \cdot a} \frac{\mu - C}{B \cos \xi} + \frac{C}{B \cos \xi} \right) \pm \right. \\ \left. \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{q_c \cdot a}{(q_c + \bar{q}_1) \cdot a} \frac{\mu - C}{B \cos \xi} + \frac{C}{B \cos \xi} \right)^2 + 4 \frac{q_c \cdot a}{(q_c + \bar{q}_1) \cdot a}} \right] \quad (24 b) \end{aligned}$$

worin wieder:

$$\varrho'_0 = \sqrt{\varrho_0 \cdot \varrho_0} \quad \varrho'_1 = \sqrt{\varrho_1 \cdot \varrho_1} \quad (25)$$

ist. Man beachte nun, daß die Formeln (24a) und (24b) in die Formeln (80) und (80a) der ersten Arbeit übergehen, wenn man dort μ durch

$$\mu' = \mu - C + C \frac{(\bar{q}_c + \bar{q}_1) \cdot a}{q_c \cdot a} \quad (26)$$

ersetzt. Dasselbe gilt dann natürlich für die Werte k_1, k_2, k_3, k_4 , wenn man wie in (116), I die beiden durch (24a) und die beiden durch (24b) gegebenen Relationen zwischen Haupt- und Nebenwellenamplituden in der Form schreibt:¹

$$\varrho'_{11} = k_1 \varrho'_{01}, \quad \varrho'_{12} = k_2 \varrho'_{02} \quad (27 a)$$

$$\varrho'_{13} = k_3 \varrho'_{03}, \quad \varrho'_{14} = k_4 \varrho'_{04} \quad (27 b)$$

Bezeichnen wir weiters die den beiden Vorzeichen in (23 a) entsprechenden Werte durch ω_1 und ω_2 , in (23 b) durch ω_3 und ω_4 , die Dicke der Krystallplatte durch d , so wird auch

$$\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} d = \frac{1}{4} \sqrt{\left(\frac{\mu'}{(\bar{q}_c + \bar{q}_1) \cdot a} \right)^2 + \frac{4 B^2}{q_c \cdot a (\bar{q}_c + \bar{q}_1) \cdot a}} d = \vartheta \quad (28 a)$$

$$\frac{\omega_3 - \omega_4}{2} d = \frac{1}{4} \sqrt{\left(\frac{\mu'}{(\bar{q}_c + \bar{q}_1) \cdot a} \right)^2 + \frac{4 (B \cos \xi)^2}{q_c \cdot a (\bar{q}_c + \bar{q}_1) \cdot a}} d = \vartheta' \quad (28 b)$$

¹ Auch im Falle senkrechter Inzidenz ($q_c \cdot a = 1$) und n -symmetrischer Nebenwellen (s. I, p. 540 bis 543, ferner p. 553) ergibt sich analog wie oben:

$$\omega = -\frac{1}{4} \left(\frac{\mu - C}{(q_c + \bar{q}_z) \cdot a} - C \right) \pm \frac{1}{4} \sqrt{\left(\frac{\mu - C}{(q_c + \bar{q}_z) \cdot a} + C \right)^2 + \frac{4 n B^2 \cos^2 \xi}{(q_c + \bar{q}_z) \cdot a}}$$

mit

$$2 q_c \cdot \bar{q}_z + \bar{q}_z^2 = \mu + \bar{B} \left(n \cos^2 \xi - 1 \right)$$

und als Relation zwischen Haupt- und Nebenwellenamplituden

$$\varrho_z = k \varrho_0 \cdot \left(I - \frac{q_z \cdot \bar{q}_z}{1 + C - \bar{B}} \right)$$

worin sich k aus (105), I bestimmt, wenn dort wieder μ durch μ' ersetzt wird. Die Richtung der aus dem Krystall austretenden Nebenwelle für $\mu' = 0$ wird jetzt in erster Näherung durch:

$$q_c + \bar{q}_z = \frac{1}{2} \frac{\bar{B} (n \cos^2 \xi - 1) + 2 C \sin^2 \frac{\xi}{2}}{(q_c + \bar{q}_z) \cdot a} a$$

gegeben sein. (Abweichung im Lauefall, vgl. I, p. 553).

mit den Formeln (127), I identisch, wenn man dort wieder μ mit μ' verwechselt.

Da es nun bei der Lösung des Randproblems (Berechnung der Intensitäten) in erster Näherung sowohl im Lauefall, als im Braggfall lediglich auf die Werte von $k_1, k_2, k_3, k_4, \vartheta, \vartheta'$ ankommt, bleiben alle weiteren Rechnungen und Ergebnisse der ersten Arbeit richtig, wenn wir nur in den entsprechenden Formeln überall μ durch μ' ersetzen. Hingegen bleibt μ natürlich in allen jenen Formeln stehen, bei denen es sich um direkte Anwendungen der Definitionsgleichung (15 c) handelt (also in den Relationen (115), I, (123), I, (133), I bis (140), I, (143), I, (162), I, (164), I, (169), I.

Uns interessiert hier besonders das Randproblem im Braggfall (rückläufige Nebenwelle):

$$(q_c + \bar{q}_1) \cdot a < 0.$$

Es ergeben sich dann nach (23 a), (23 b) und (26) je zwei zusammengehörige Werte von ω , also ω_1 und ω_2 , beziehungsweise ω_3 und ω_4 , solange konjugiert komplex als

$$-\frac{\mu'^2}{4} \frac{q_c \cdot a}{B^2 (q_c + \bar{q}_1) a} < 1 \quad (29 a)$$

beziehungsweise

$$-\frac{\mu'^2}{4} \frac{q_c \cdot a}{(B \cos \xi)^2 (q_c + \bar{q}_1) \cdot a} < 1 \quad (29 b)$$

ist. Komplexe ω -Werte bedingen, wie in I (p. 557 bis 561) gezeigt wurde, bei hinreichender Dicke des Krystals Totalreflexion. Jedenfalls liegt das Intensitätsmaximum des reflektierten Strahles bei $\mu' = 0$ und seine Intensitätsverteilung ist in erster Näherung symmetrisch bezüglich der Nullstelle von μ' : dieser Nullstelle (und nicht $\mu = 0$) wird also die experimentell feststellbare Richtung des reflektierten Strahles entsprechen.

Bezeichnen wir den Winkel zwischen q_c und $-\bar{q}_1$ wieder durch $\hat{\phi}$ (Einfallswinkel bezüglich der »Netzebene«) und setzen:

$$90^\circ - \hat{\phi} = \eta$$

(Glanzwinkel bezüglich der »Netzebene«), so folgt aus (15 c), (15 d) und (16):

$$2 d^{(1)} \sin \eta = \lambda \left(1 - \mu \left(\frac{d^{(1)}}{2\pi} \right)^2 \right) \quad (30)$$

Für $\mu = 0$ geht (30) in das Bragg'sche Reflexionsgesetz über; hingegen erhalten wir für $\mu' = 0$ nach (26), indem wir uns noch durch (22) von der individuellen Maßeinheit befreien:

$$2 d^{(1)} \sin \eta = \lambda \left[1 - C \left(1 - \frac{(q_c + \bar{q}_1) \cdot \alpha}{q_c \cdot \alpha} \right) \frac{p^2}{c_0^2} \left(\frac{d^{(1)}}{2 \pi} \right)^2 \right] \quad (31)$$

oder auch, da das zweite Glied in der eckigen Klammer klein gegen Eins ist, genähert:

$$2 d^{(1)} \left[1 + C \left(1 - \frac{(q_c + \bar{q}_1) \cdot \alpha}{q_c \cdot \alpha} \right) \frac{p^2}{c_0^2} \left(\frac{d^{(1)}}{2 \pi} \right)^2 \right] \sin \eta = \lambda \quad (31')$$

Bedeutend n_c , beziehungsweise n_R Einheitsvektoren in Richtung der einfallenden, beziehungsweise der reflektierten Welle, so kann man in (31'), wegen der Kleinheit des Faktors C genähert:

$$\frac{(q_c + \bar{q}_1) \cdot \alpha}{q_c \cdot \alpha} = \frac{n_R \cdot \alpha}{n_c \cdot \alpha} \quad (32)$$

setzen, denn es ist ja nach (162), I bis auf kleine Größen:

$$q_c + \bar{q}_1 \cong q_R = \frac{2 \pi}{\lambda} n_R \quad (33)$$

Liegen speziell die reflektierenden Netzebenen der Krystalloberfläche parallel (symmetrische Reflexion), so wird:

$$\begin{aligned} -n_R \cdot \alpha &= n_c \cdot \alpha \\ 2 d^{(1)} \left[1 + 2 C \frac{p^2}{c_0^2} \left(\frac{d^{(1)}}{2 \pi} \right)^2 \right] \sin \eta &= \lambda \end{aligned} \quad (31'')$$

Ein Vergleich dieser Formel mit der von Axel Larsson¹ am Glimmer experimentell geprüften (l. c. 5 b) zeigt volle Übereinstimmung, wenn $p^2 C$ einen merklich konstanten negativen Wert hat.

Bezeichnen wir die räumlich konstanten Anteile der β_i durch β_{i0} , so wird nach (10), (11), (12) und (17):

$$p^2 C = p^2 \beta_1 B_0 \cong -p^2 \beta'_1 B'_0 = -[w + p^2 (v + \sum_i \beta_{i0} P_i)]. \quad (34)$$

Die Versuchsergebnisse verlangen also lediglich, daß für Glimmer im untersuchten Frequenzbereich merklich:

$$v + \sum_i \beta_{i0} P_i = 0 \quad (34')$$

¹ Axel Larsson, Zeitschr. f. Phys. 35, 401, 1926; entsprechende Messungen Gips hat E. Hjalmar, Ann. d. Phys., 79, 550, 1926, durchgeführt.

gelte, eine ohne weiteres erfüllbare Bedingung.¹ Ein von Null verschiedener Wert von C bedingt natürlich einen von Eins verschiedenen Brechungsindex für Röntgenstrahlen auch dann, wenn keine Nebenwelle vergleichbarer Intensität existiert. Ist ϱ_1 merklich gleich Null, so folgt aus der ersten Gleichung (14) sofort:

$$1 + \beta_1 B_0 = 1 + C = c_0^2 \left(\frac{\eta_0^2}{p^2} \right) = n^2 \quad (35)$$

worin n den Brechungsindex bedeutet. Dieses Ergebnis entspricht wieder vollkommen den Überlegungen von Darwin, Ewald, Stenström.² Wie bei diesen Forschern folgt aus (34) ein Brechungsindex kleiner als Eins, demgemäß muß für Röntgenstrahlen bei hinreichend kleinen Glanzwinkeln gewöhnliche Totalreflexion auftreten, eine Folgerung, die durch neuere Versuche bestätigt wird.³

Es seien nun die reflektierenden »Netzebenen« unter einem Winkel φ gegen die Krystalloberfläche geneigt (Winkel zwischen $-\bar{\eta}_1$ und α), wobei wir uns, der Einfachheit wegen, auf den Fall beschränken wollen, daß $\bar{\eta}_1$ in der Einfallsebene liegt. Den Glanzwinkel des einfallenden Strahles gegen die Krystalloberfläche bezeichnen wir mit ψ , so daß

$$n_c \cdot \alpha = \sin \psi$$

wird und jenen Winkel, welcher bei gegebener Wellenlänge λ dem Bragg'schen Gesetze entsprechen würde mit η_0 , setzen somit:

$$2 d^{(1)} \sin \eta_0 = \lambda. \quad (36)$$

Bis auf kleine Größen wird dann

$$\frac{n_R \alpha}{n_c \alpha} = \frac{\sin(2\eta_0 - \psi)}{\sin \psi} \quad (37)$$

Rechnet man die $\dot{A}.E.$, erhält man aus den Larsson'schen Werten

$$C = \frac{n''}{p^2} = \lambda^2 8 \cdot 10^{-6}$$

G. H. Darwin, *Phil. Mag.* (6), 27, 315, 1914; P. P. Ewald, *Ann. d. Phys.*, 54, 519, 1918; W. Stenström, *Diss.* Lund 1919.

A. H. Compton, *Phil. Mag.*, 45, 1125, 1923; M. Siegbahn, *Fysisk Tidsskr.*, 21, 170, 1923; H. E. Strauß, *Nature*, 114, 88, 1924; E. R. Laird, *Phys. Rev.* (2), 27, 510, 1926; W. Linnik und W. Laschkarew, *Zeitschr. f. Phys.*, 38, 659, 1926. Es seien hier auch die sehr interessanten Messungen erwähnt, welche kürzlich W. Ehrenberg und H. Mark, *Zeitschr. f. Phys.*, 38, 129, 1926, zum Nachweise des anomalen Verhaltens des Brechungsindex für Röntgenstrahlen der Zinkblende in der Nähe der Absorptionskante des Zinks durchgeführt haben. Die Deutung ihrer Ergebnisse, welche mit dem der Ewald'schen Theorie zugrundeliegenden Dispersionsgesetz nicht übereinstimmen, wäre im Rahmen unserer allgemeinen Ansätze bei Berücksichtigung der Absorption zwar formal leicht durchführbar, eine wirklich befriedigende Behandlung dieser Verhältnisse würde jedoch eine vollständig durchgeführte Kontinuitätstheorie der Emission und Absorption im Röntgengebiet erfordern.

Es sei schließlich die Winkelabweichung $\Delta\eta$, also:

$$\eta = \eta_0 + \Delta\eta \quad (38)$$

und genähert, da $\Delta\eta$ eine kleine Größe ist:

$$\sin \eta = \sin \eta_0 + \Delta\eta \cos \eta_0. \quad (38')$$

Aus (31) ergibt sich nun mit Benützung der Relationen (32), (36), (37), (38') leicht:

$$\Delta\eta = -\frac{C}{2}(\cot \psi + \tan \eta_0) \quad (39)$$

in voller Übereinstimmung mit der von P. P. Ewald aufgestellten und an den Versuchsergebnissen von Bergen Davis und v. Nar-droff geprüften Formel.¹

3. Intensitätsfragen.

In der ersten Arbeit habe ich den Energiefluß berechnet, welcher bei gleichzeitiger Veränderung der Wellenlänge und der Einfall-richtung in einer ganz bestimmten Richtung aus der Krystall-platte austritt, beziehungsweise von ihr reflektiert wird. Tatsächlich werden natürlich auf eine bestimmte Stelle des photographischen Filmes Strahlen verschiedener Austritts-, beziehungsweise Reflexions-richtung einwirken. Dieser Umstand soll im folgenden berücksichtigt werden, wobei wir jedoch zur Vereinfachung voraussetzen, daß $\bar{q}_1$ in der Einfallsebene liegt und uns auf das ebene Problem (alle Ebenen parallel zur Einfallsebene gleichwertig) beschränken wollen.

Wie in I (p. 544) sollen $\bar{Q}_c$, $\bar{Q}_A$, $\bar{Q}_R$, beziehungsweise $\bar{Q}'_c$, $\bar{Q}'_A$, $\bar{Q}'_R$, die senkrecht zur Einfallsebene, beziehungsweise in ihr liegenden Komponenten der einfallenden, der (Laué'schen) austretenden, der (Bragg'schen) reflektierten Welle bedeuten. Q_c nehmen wir wieder reell an und setzen die Intensität der einfallenden Welle für einen Wellenlängenbereich $d\lambda$ und einen Glanzwinkelbereich $d\psi$ mit

$$(\bar{Q}'_c + \bar{Q}'_c^2) d\lambda d\psi \quad (40)$$

proportional. $|\bar{Q}'_A|^2$, $|\bar{Q}'_R|^2$, beziehungsweise $|\bar{Q}'_A|^2$, $|\bar{Q}'_R|^2$ bestimmen sich aus $\bar{Q}'_c$, beziehungsweise $\bar{Q}'_c^2$ genau so wie in I, wenn man überall μ durch μ' ersetzt. Es genügt daher wohl, wenn wir die Formeln für den praktisch wichtigeren Braggfall nochmals anschreiben. Es ist für das Gebiet komplexer ω -Werte:

$$|\bar{Q}'_R|^2 = -\frac{q_c \cdot \alpha}{(q_c + \bar{q}_1) \cdot \alpha} \frac{\sinh^2\left(\frac{D}{2} \sqrt{1-x^2}\right)}{\sinh^2\left(\frac{D}{2} \sqrt{1-x^2}\right) + 1-x^2} \bar{Q}'_c^2 \quad (41)$$

¹ P. P. Ewald, Zeitschr. f. Physik 30, 1, 1924 (Formel 13); siehe dort auch weitere Literaturangaben!

für das Gebiet reeller ω -Werte:

$$|\bar{\mathfrak{G}}_R|^2 = - \frac{q_e \cdot \alpha}{(q_e + \bar{q}_1) \cdot \alpha} \frac{\sin^2 \left(\frac{D}{2} \sqrt{x^2 - 1} \right)}{\sin^2 \left(\frac{D}{2} \sqrt{x^2 - 1} \right) + x^2 - 1} \bar{\mathfrak{G}}_e^2, \quad (42)$$

worin wie in I (p. 559, Formel 177)

$$\frac{B d}{\sqrt{-q_e \cdot \alpha (q_e + \bar{q}_1) \cdot \alpha}} = D \quad (43)$$

jedoch jetzt

$$\frac{\mu'}{2 B} \sqrt{\frac{q_e \cdot \alpha}{-(q_e + \bar{q}_1) \cdot \alpha}} = x \quad (44)$$

zu setzen ist (d Dicke der Krystallplatte). In den sonst gleichlautenden Relationen für $|\bar{\mathfrak{G}}_R|^2$ steht lediglich $B |\cos \xi|$ an Stelle von B . Den von x^2 abhängenden (zweiten) Faktor in (41) werden wir zur Abkürzung mit $F(x^2)$, jenen in (42) mit $f(x^2)$ bezeichnen.

Wir wollen drei idealisierte Sonderfälle untersuchen.

I. Die einfallende Welle umfaßt nur einen äußerst kleinen Wellenlängenbereich $\Delta\lambda$, ist also praktisch monochromatisch, hingegen stehen alle Einfallswinkel, beziehungsweise Glanzwinkel von ψ_1 bis ψ_2 , soweit ihnen überhaupt noch ein merklicher Beitrag zur Intensität entspricht, zur Verfügung. Dann wird der gesamte dem Wellenlängenbereiche $\Delta\lambda$ entsprechende reflektierte Energiefluß nach (40) mit:

$$\bar{\mathfrak{S}}_R = - \frac{(q_e + \bar{q}_1) \cdot \alpha}{q_e \cdot \alpha} \Delta\lambda \int_{\psi_1}^{\psi_2} d\psi (|\bar{\mathfrak{G}}_R|^2 + |\bar{\mathfrak{G}}_R|^2) \quad (45)$$

proportional sein, worin durch den ersten Faktor die Querschnittsänderung des Strahlenbündels bei unsymmetrischer Reflexion (in konsequenter Näherung) berücksichtigt wurde.

Nun erhalten wir aus (30) für konstantes λ mit Benützung von (36) innerhalb unserer Näherung:

$$d\tau_1 = - \frac{\lambda^2}{8 \pi^2} \frac{1}{\sin 2\tau_0} d\mu \quad (46)$$

Ferner, da

$$\psi = \tau - \varphi \quad (47)$$

ist

$$d\psi = d\tau_1 \quad (47')$$

und aus (26) bei konsequenter Vernachlässigung kleiner Größen:

$$d\mu = d\mu'. \quad (48)$$

Betont sei, daß streifender Eintritt oder Austritt ausgeschlossen werden muß, da in diesem Falle unsere Näherungen nicht mehr statthaft sind. Wir merken noch an, daß im Integranden in erster Näherung sowohl D als auch $\sqrt{\frac{q_c \cdot a}{-(q_c + \bar{q}_1) \cdot a}}$ als konstante Größen angesehen werden können. Nach (32), (37), (47) haben wir dann:

$$\sqrt{\frac{-(q_c + \bar{q}_1) \cdot a}{q_c \cdot a}} = \sqrt{\frac{\sin(\eta_0 + \varphi)}{\sin(\eta_0 - \varphi)}} \quad (49)$$

Aus (41), (42), (44), (46), (47'), (48), (49) erhalten wir mit Berücksichtigung von (29 a):

$$\begin{aligned} & - \frac{(q_c + \bar{q}_1) \cdot a}{q_c \cdot a} \Delta \lambda \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\psi' |\bar{Q}_R|^2 = \\ & = \sqrt{\frac{\sin(\eta_0 + \varphi)}{\sin(\eta_0 - \varphi)}} \Delta \lambda \frac{B \lambda^2}{4 \pi^2} \frac{\bar{Q}_c^2}{\sin 2 \eta_0} \left[\int_{-1}^{+1} dx F(x^2) + \int_1^{x_1} dx f(x^2) + \int_1^{-x_2} dx f(x^2) \right] \quad (50) \end{aligned}$$

Die drei in den eckigen Klammern stehenden Integrale sind (es ergibt sich jetzt x_1 und $-x_2$ positiv) genau die in I (p. 560 u. f.) behandelten; unter analogen Voraussetzungen wie dort, können wir ihre Summe genähert als konstant ansehen und gleich S setzen.¹ Das Integral über $|\bar{Q}_R|^2$ ist genau so zu bilden, es tritt dann in (50) $B \cos \xi$ an die Stelle von B .

Multiplizieren wir, um uns von der individuellen Maßeinheit zu befreien, gemäß (22) wieder mit $\frac{p^2}{c_0^2}$, so wird:

$$\frac{p^2}{c_0^2} \frac{B \lambda^2}{4 \pi^2} = B \quad (51)$$

und wir erhalten für unpolarisiert einfallendes Röntgenlicht, wenn wir im Zeitmittel:

$$\bar{Q}_e^2 = \bar{Q}_e'^2 = \frac{1}{2} Q_e^2$$

setzen:

$$\bar{S}_R = \frac{Q_c^2}{2} \sqrt{\frac{\sin(\eta_0 + \varphi)}{\sin(\eta_0 - \varphi)}} \Delta \lambda B S \frac{1 + |\cos \xi|}{\sin 2 \eta_0} \quad (52)$$

¹ Es ist $\lim_{D \rightarrow \infty} S = \pi$ vergleiche I. Waller, Ann. d. Phys. 79, 266, 1926.

Ehe wir dieses Ergebnis diskutieren, sollen zunächst die beiden anderen Sonderfälle, bei denen wir uns wohl kürzer fassen dürfen, erledigt werden.

II. Die einfallende Welle ist auf einen äußerst schmalen Winkelbereich $\Delta\psi$ beschränkt, hingegen stehen alle Wellenlängen λ_1 bis λ_2 , soweit ihnen ein merklicher Beitrag zur Intensität entspricht, zur Verfügung. Analog zu (45) erhalten wir aus (40)

$$\mathfrak{R}'_R = \frac{(q_c + \bar{q}_1) \cdot \alpha}{q_c \cdot \alpha} \Delta\psi \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda (|\bar{\mathfrak{Q}}_R|^2 + |\bar{\mathfrak{Q}}_R^2|) \quad (53)$$

und es folgt aus (30) mit Benützung von (48) für konstantes α also konstantes τ_0 , genähert:

$$d\lambda = \frac{\lambda^3}{16\pi^2 \sin^2 \tau_0} d\psi' \quad (54)$$

worin λ^3 wieder als konstante Größe angesehen werden darf. Die entsprechende Wiederholung der obigen Überlegungen führt zu dem Ergebnis:

$$\mathfrak{R}'_R = \frac{1}{2} \mathfrak{Q}_c^2 \sqrt{\frac{\sin(\tau_{10} + \varphi)}{\sin(\tau_{10} - \varphi)}} \Delta\psi \frac{\lambda B S}{2} \frac{1 + |\cos \frac{\psi}{2}|}{\sin^2 \tau_0} \quad (55)$$

III. Statt der einfallenden soll schließlich die reflektierte Welle auf einen äußerst schmalen Winkelbereich $\Delta\psi_R$ (ψ_R Glanzwinkel der reflektierten Welle in bezug auf die Kristalloberfläche) beschränkt sein. Wir setzen noch:

$$\psi_R = \tau'_0 + \varphi, \quad (56)$$

worin dann τ'_0 den Glanzwinkel der reflektierten Welle bezüglich der Netzebene² bedeutet. Die für diesen Fall in der ersten Arbeit (p. 549, 550) abgeleitete Formel lautet in unserer jetzigen Schreibweise

$$d\lambda = \frac{\lambda^3}{16\pi^2 \sin^2 \tau_0} \frac{\sin(\tau_{10} - \varphi)}{\sin(\tau_{10} + \varphi)} d\psi \quad (57)$$

Der Faktor, um den sich (57) von (54) unterscheidet, fällt aber in dem Ansatz (40) wieder heraus. Es gilt ja:

$$(\bar{\mathfrak{Q}}_c^2 + \bar{\mathfrak{Q}}_c^2) d\lambda d\psi = (\bar{\mathfrak{Q}}_c^2 + \bar{\mathfrak{Q}}_c^2) \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \psi} \right)_{\psi_R} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \psi_R} \right) d\psi d\psi_R \quad (58)$$

$\left(\frac{\partial \lambda}{\partial \psi} \right)_{\psi_R}$ ist durch (57) gegeben, den Wert für $\left(\frac{\partial \psi}{\partial \psi_R} \right)_{\lambda} = \left(\frac{\partial \tau'_0}{\partial \tau_0} \right)_{\lambda}$ erhält man, wenn man unter Beibehaltung kleiner Größen erster Ordnung statt (33):

$$q_e + \bar{q}_1 - \frac{1}{2} \frac{\mu}{(q_e + \bar{q}_1) \cdot a} = \frac{2\pi}{\lambda} n_R \quad (59)$$

setzt, mit $\bar{q}_1$ skalar multipliziert, wobei sich $n_R \cdot \bar{q}_1 = \frac{2\pi}{\lambda(\bar{a})} \sin \eta'$ ergibt und μ mittels (15 c) eliminiert. Es folgt dann, innerhalb unserer Näherung natürlich:

$$\left(\frac{\partial \eta}{\partial \eta'}\right)_\lambda = \frac{\sin(\eta_0 + \varphi)}{\sin(\eta_0 - \varphi)} \quad (60)$$

Man erhält demgemäß übereinstimmend mit (55):

$$\mathfrak{R}''_R = \frac{1}{2} \Omega_c^2 \sqrt{\frac{\sin(\eta_0 + \varphi)}{\sin(\eta_0 - \varphi)}} \Delta \psi_R \frac{\lambda B S 1 + |\cos \xi|}{2 \sin^2 \eta_0} \quad (61)$$

Die Verhältnisse bei den üblichen Verfahren der Röntgenspektroskopie werden durch unsere 1. Idealisierung, welche zu Formel (52) führt, approximiert. Handelt es sich speziell um eine bezüglich der Kristalloberfläche symmetrische Reflexion ($\varphi = 0$), so wird genähert:

$$\cos \xi = \cos 2\eta_0, \quad (62)$$

also

$$\frac{1 + \cos \xi'}{\sin 2\eta_0} = \begin{cases} \cot \eta_0 & \text{für } 2\eta_0 < 90^\circ \\ \tan \eta_0 & \text{für } 2\eta_0 > 90^\circ \end{cases} \quad (63)$$

Die Formel

$$\mathfrak{R}_R = \frac{\Omega_c^2}{2} (\Delta \lambda) B S \cot \eta_0 \quad (52')$$

für $2\eta_0 < 90^\circ$ entspricht im wesentlichen der von P. P. Ewald¹ unter analogen Voraussetzungen aus seiner Theorie abgeleiteten, welche er mit den von Sir W. H. Bragg² an kleinen Diamantkrystallen durchgeführten Intensitätsmessungen in guter Übereinstimmung fand.

Wie schon in der ersten Arbeit (p. 551) gezeigt wurde, ergibt sich die Intensität aus meiner Theorie (in Übereinstimmung mit der Erfahrung) der ersten Potenz des »Strukturfaktors B proportional. In der oben zitierten Arbeit kommt Ewald zum gleichen Resultat.³

Das Analogon eines »Gitters« mit »Basis« bildet jetzt das Zusammenwirken verschiedener stofflicher Gleichungspaare der

¹ P. P. Ewald, Phys. Zeitschr., 26, 31, 1925.

² W. H. Bragg, Proc. London, Phys. Soc., 33, 304, 1921.

Wie bei I. Waller: »Zur Theorie der Röntgenreflexion«, Ann. d. Phys., 79, 261, 1926, ist auch bei mir die Proportionalität mit B eine Folge der Voraussetzung, daß die Kristallplatte hinreichend dick

Gruppe. *i*. Gemäß (1), (10), (11), (12) ist der Koeffizient $\beta_1 B_z$ von $e^{i\tilde{\alpha}_z \cdot \mathbf{r}}$ genähert durch:

$$\beta_1 B_z = - \sum_i \beta_{1i} P_i B_{iz} \quad (64)$$

oder, wenn wir den Index *i* für den Augenblick, um Verwechslung mit der imaginären Einheit zu vermeiden, durch *t* ersetzen, durch:

$$\beta_1 B_z = - \sum_t \beta_{1t} P_t B_{tz} = - \sum_t \beta_{1t} P_t B_{tz} e^{i\alpha_{tz}} \quad (64a)$$

gegeben. Um die formale Übereinstimmung des Koeffizienten B_z mit der »Strukturamplitude« hervortreten zu lassen, kann man noch die Bezeichnungen:

$$- \frac{1}{\beta_1} \beta_{1t} P_t |B_{tz}| = A_{tz}, \quad \rho_{tz} = \bar{\alpha}_z \cdot \mathbf{r}_{tz} \quad (65)$$

einführen, worin die $\mathbf{r}_{t0}$ geeignet gewählte konstante Vektoren bedeuten. Die Übereinstimmung ist aber natürlich nur eine formale. Da wir nicht von einem Atom-, beziehungsweise Ionengitter ausgegangen sind, stehen uns alle Fourier-Koeffizienten B_{tz} (beziehungsweise B_{iz}) für die Anpassung der Formeln an die Erfahrung zur Verfügung.¹ Vermöge der von der Frequenz abhängenden Größen P_t (beziehungsweise P_i) wird die Anpassung auch in dieser Hinsicht sichergestellt. Der Charakter der Frequenzabhängigkeit entspricht hier dem Jaumann'schen Dispersionsgesetz, wollte man eine formale Übereinstimmung mit der Ewald'schen Fassung erreichen, so müßte man von der am Schlusse der ersten Arbeit skizzierten Variante ausgehen.

Bei unsymmetrischer Reflexion bezüglich der Krystalloberfläche ist nach (47) und (56):

$$\psi < \psi_R \quad \text{für } \varphi > 0$$

$$\psi > \psi_R \quad \text{für } \varphi < 0.$$

Charakterisieren wir für gleiches η_0 und gleiche Beträge von φ die Intensität im ersten Falle durch $\mathfrak{I}_{R_1}$, im zweiten Falle durch $\mathfrak{I}_{R_2}$, so wird nach (52):

$$\frac{\mathfrak{I}_{R_1}}{\mathfrak{I}_{R_2}} = \frac{\sin(\eta_0 + \varphi)}{\sin(\eta_0 - \varphi)} \quad (66)$$

¹ Wogegen der korpuskulartheoretische »Strukturfaktor« im engeren Sinne zur Charakterisierung der Intensität im allgemeinen nicht ausreicht. Vgl. diesbezüglich etwa A. E. van Arkel, Zeitschr. f. Phys., 37, 672, 1926.

worin φ positiv zu zählen ist. Diese Folgerung entspricht, wie Ewald (l. c.) zeigte, im wesentlichen den Messungen R. v. Nar-droff's.¹

Die Intensitätsformeln (52), (55), (61) lassen sich (vgl. I, p. 550 und 551) für hinreichend dicke, planparallele Krystallplatten un-mittelbar auf den Lauefall übertragen. Bezeichnen wir den Glanz-winkel der einfallenden Welle wieder mit ψ , jenen der abgelenkten, austretenden Welle mit ψ_A , so können wir jetzt genähert:

$$\psi = \varphi + \eta_0$$

$$\psi_A = \varphi - \eta_0$$

setzen und haben demgemäß in den Intensitätsformeln:

$$\sqrt{\frac{\sin(\varphi - \eta_0)}{\sin(\varphi + \eta_0)}} \text{ statt } \sqrt{\frac{\sin(\eta_0 + \varphi)}{\sin(\eta_0 - \varphi)}} \quad (67)$$

zu schreiben, im übrigen bleiben sie, bis auf einen anderen numeri-schen Wert der Konstante S , unverändert.

Die Verhältnisse bei den Laueaufnahmen entsprechen einiger-maßen, allerdings nur im Falle einer Nebenwelle, unserer zweiten Idealisierung:

$$\mathfrak{I}_A = \frac{1}{2} \mathfrak{L}_e^2 \sqrt{\frac{\sin(\varphi - \eta_0)}{\sin(\varphi + \eta_0)}} \Delta \psi \frac{\lambda B S}{2} \frac{1 + |\cos \xi|}{\sin^2 \eta_0} \quad (55')$$

Bei senkrechtem Einfall, also $\psi = 90^\circ$, hätten wir speziell:

$$\mathfrak{I}'_A = \frac{1}{2} \mathfrak{L}_e^2 \Delta \psi \lambda B S \frac{\cos^2 \eta_0 \sqrt{\cos 2 \eta_0}}{\sin^2 \eta_0} \quad (55'')$$

$\frac{\lambda^2}{\sin^2 \eta_0}$ stimmt nach (2), (16), (36) mit dem Lorentz'schen Faktor überein. Für zunehmende Werte von η_0 muß die Intensität nach (55'') in den höheren Ordnungen merklich stärker abnehmen, als es dem Lorentz'schen Faktor entspricht.

Treten bei senkrechter Inzidenz n symmetrische Nebenwellen auf, so erhält man:²

$$\mathfrak{I}'_A = 2 \frac{1}{\sqrt{n}} \mathfrak{L}_e^2 \Delta \psi \lambda B S \frac{\cos \eta_0 \sqrt{\cos 2 \eta_0}}{\sin^2 \eta_0} \quad (55''')$$

¹ Phys. Rev., 24, 143, 1924.

Für die Berechnung dieser Formel vgl. Anm., p. 662 und I, p. 553 und 554! Infolge der geforderten Symmetriebedingungen ist die Lage der Hauptwellenamplitude $\mathfrak{L}_0$ innerhalb der auf q_0 senkrechten Ebene für die Wellenausbreitung gleichgültig und man erhält stets die in Anm., p. 662 angeschriebenen ω -Werte. Die Integrationsvariable ist jetzt statt durch $x = \frac{\mu'}{2B} \sqrt{\frac{q_e \cdot \alpha}{(q_e + \bar{q}_1) \cdot \alpha}}$, beziehungsweise $x' = \frac{\mu'}{2B} \frac{1}{|\cos \xi|}$ gegeben. Dem-

Schlußwort.

Die knapp gefaßten Untersuchungen dieser Mitteilung sollen lediglich meine Theorie der Röntgenstrahlenausbreitung in Krystallen in einigen praktisch nicht unwichtigen Punkten ergänzen.

Obchon das hier vorgeschlagene System der Differentialgesetze etwas allgemeiner und, wie ich glaube, der Natur der Sache adäquater ist als jenes, von dem ich seinerzeit ausging, variiert es doch nur denselben Grundgedanken. Insbesondere eine vollständige Kontinuitätstheorie der Emission und Absorption wird diese Differentialgesetze noch wesentlich umgestalten müssen.

Bezüglich der Einzelheiten in den Deduktionen konnte meist auf die erste Arbeit verwiesen werden. Es sei hier nochmals betont, daß dort das Randproblem sowohl im Laue- wie im Braggfall mit Berücksichtigung der Schwingungsrichtung und Phase gelöst wurde. Die seither von H. Mark und L. Szilard² durchgeführten Versuche über »Die Polarisierung von Röntgenstrahlen durch Reflexion an Krystallen« entsprechen vollkommen den theoretischen Ergebnissen meiner ersten Arbeit.

Die der Theorie zugrunde liegenden Differentialgesetze umfassen (wie das schon in I, p. 570, skizziert wurde) auch die »elektrostofflichen« Longitudinalstrahlen, welche in der Kontinuitätstheorie an die Stelle der Korpuskularstrahlen treten. Die räumliche Periodizität der Materialkonstanten in Krystallen muß sich bei geeigneten Versuchsbedingungen (entsprechender Wellenlänge) auch in den Erscheinungen der Ausbreitung und Reflexion von Longitudinalstrahlen auswirken. Es wäre prinzipiell ein Leichtes, aus den vorliegenden Differentialgesetzen, in weitgehender formaler Analogie mit dem Rechenverfahren bei Röntgenstrahlen, entsprechende Formeln für Longitudinalstrahlen abzuleiten. Die Absorption dürfte dabei allerdings nicht mehr vernachlässigt und die Voraussetzung, daß der normale Brechungsexponent stets nahezu gleich Eins sei, müßte fallen gelassen werden.² Derartige Deduktionen würden aber, solange die nötige experimentelle Grundlage fehlt, gewissermaßen in der Luft hängen und höchstens formales Interesse haben, sie wurden aus diesem Grunde vorläufig nicht durchgeführt. Positive Versuchsergebnisse, insbesondere bei der Reflexion von Longitudinalstrahlen geeigneter Wellenlänge an Krystallober-

gemäß tritt $\cos \gamma_0$ in (55''') an die Stelle von $\cos^2 \gamma_0$ in (55'') und es erklärt sich das merkwürdige Ergebnis der Proportionalität von $\mathfrak{N}_A$ mit $\frac{1}{\sqrt{n}}$, statt mit $\frac{1}{n}$ man zunächst erwarten würde, aus dem Umstande, daß jetzt ein größerer Wellenlängenbereich noch merkliche Beiträge zur Intensität liefert als im Falle nur einer Nebenwelle.

¹ H. Mark und L. Szilard, Zeitschr. f. Phys., 743, 1925.

Falls die Longitudinalstrahlen, wie in den weiter unten erwähnten Versuchen, im elektrischen Felde verlaufen, wäre überdies auf die allgemeine nicht-lineare Form der Jaumann'schen Differentialgesetze zurückzugreifen.

flächen sind vom Standpunkte der Kontinuitätstheorie grundsätzlich zu erwarten.

Es ist in diesem Zusammenhange außerordentlich interessant, daß die von C. Davisson und C. H. Kunsman¹ gemessene Winkelabhängigkeit von Elektronen (also von Longitudinalstrahlen), die an einer Platin-, beziehungsweise Magnesiumplatte reflektiert waren, ausgesprochene Maxima und Minima aufweist. W. Elsasser² sieht in diesen Experimenten, er allerdings vom Standpunkte der neuesten Quantenmechanik, Anzeichen für eine »Interferenz der Kathodenstrahlen« und kündigt neue Versuche in dieser Richtung an. Solche Versuche könnten für die Undulationstheorie der Kathodenstrahlen und aller »Korpuskularstrahlen«, wie sie die Jaumann'sche Kontinuitätstheorie³ seit drei Jahrzehnten durchgebildet hat, von entscheidender Bedeutung werden.

¹ C. Davisson und C. H. Kunsman, *Phy. Rev.* 22 (2), 242, 1923.

W. Elsasser, *Naturw.* 13, 711, 1925.

Erste Konzeption bei Jaumann, *Wied. Ann.*, 147, 1896.

Physikalisches Institut der deutschen Technischen Hochschule in Brünn.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse](#)

Jahr/Year: 1926

Band/Volume: [135_2a](#)

Autor(en)/Author(s): Lohr Erwin

Artikel/Article: [Ergänzungen zur Kontinuitätstheorie der Röntgenstrahlenausbreitung in Krystallen. 655-674](#)