Gedruckt mit Unterstützung aus dem Jerome und Margaret Stonborough-Fonds

Zur Integration der linearen Differentialgleichungen

(VI. Mitteilung)

Von

Alfred Tauber in Wien

(Vorgelegt in der Sitzung am 13. Jänner 1927)

Die doppelte funktionale Abhängigkeit der Lösung einer (gewöhnlichen) linearen Differentialgleichung, einerseits von der Unabhängigen selbst, anderseits aber auch von dem gewählten Sonderwerte der letzteren, für den diese Lösung bestimmte Bedingungen erfüllen soll, hat zum erstenmal Cauchy in Betracht gezogen und so eine Methode zur Integration der inhomogenen linearen Differentialgleichungen angegeben. Sein Satz,[1] in etwas geänderter Fassung ausgesprochen, lautet: Man erhält eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$\frac{d^m \eta}{dx^m} - \sum_1 P_\varkappa(x) \frac{d^{m-\varkappa}\eta}{dx^{m-\varkappa}} = Q(x), \tag{1}$$

wenn man diejenige Funktion $Y(x, c)$ von x und einem Parameter c bestimmt, welche der zu (1) gehörigen homogenen Differentialgleichung

$$\frac{d^m y}{dx^m} - \sum_1^m P_\varkappa(x) \frac{d^{m-\varkappa}y}{dx^{m-\varkappa}} = 0 \tag{2}$$

genügt und für $x = c$, zusammen mit ihren ersten m—2-Differentialquotienten nach x verschwindet, während ihr $(m-1)$-ter Differentialquotient für $x = c$ den Wert 1 annimmt, mittels der Gleichung

$$\eta = (-1)^m \int_x^c Q(t)\, Y(x, t)\, dt.$$

Diese ausgezeichnete »Parameterlösung« von (2) steht aber, vgl. Mitteilung I, in einer gewissermaßen dualen Abhängigkeit von x, c, da sie gleichzeitig bezüglich c der Lagrange'schen Adjungierten von (2) genügt, nämlich der (gewöhnlichen) linearen Differentialgleichung

[1] Vgl. B. Enzyklopädie der math. Wissenschaften, II, 1, p. 264.

$$\frac{\partial^m Y(x,c)}{\partial c^m} = \sum_1^m \bar{P}_\varkappa(c) \frac{\partial^{m-\varkappa} Y(x,c)}{\partial c^{m-\varkappa}}, \quad \bar{P}_\varkappa(x) =$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{\varkappa} (-1)^\lambda \binom{m-\lambda}{m-\varkappa} P_\lambda^{(\mu-\lambda)}(x). \tag{3}$$

Offenbar sind auch Lösungen von (2), respektive (3), die mit willkürlichen Funktionen χ gebildeten Aggregate

$$\sum \chi_\varkappa(c) \frac{\partial^\varkappa Y}{\partial c^\varkappa}, \text{ respektive } \sum \chi_\varkappa(x) \frac{\partial^\varkappa Y}{\partial x^\varkappa}$$

Eine für manche Probleme geeignetere Darstellung von $Y(x,c)$, welche gewisse Eigenschaften dieser Funktion sofort aufzeigt, ergibt sich, wenn $Y(x,c)$ als Funktion $H(x,\varepsilon)$ von x und $\varepsilon = c-x$ aufgefaßt wird. Man gelangt solcherart für die Lösungen der vorgelegten Differentialgleichung (2) vorerst zu einer Entwicklung der Form $\sum^{\infty} \psi_\nu(x) \frac{\varepsilon^\nu}{\nu!}$ mit welcher verglichen die sonst intendierte Entwicklung $\sum_0^{\infty} \varphi_\nu(c) \frac{x^\nu}{\nu!}$ übrigens um nichts einfacher ist, solange c ein allgemeiner Parameter bleibt, und welche sich schließlich immer in diese durch die Substitution $x = c-\varepsilon$ überführen läßt, wofern man nicht die früher besprochene Quadraturdarstellung vorzieht.

Ein ähnlicher Ansatz für die Lösungen der linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung lieferte ebenfalls, vgl. Mitteilung V, § 4, eine einfache Integrationsmethode, deren Grundprinzip auch auf nichtlineare partielle Differentialgleichungen erster Ordnung anwendbar ist, denn wenn man in

$$\frac{\partial z}{\partial x} = F\left(x, x_1, \ldots x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_1} \ldots \frac{\partial z}{\partial x_n}\right) \tag{4}$$

für einen Ansatz $\sum_0^{\infty} f_\nu(x, x_1, \ldots x_n) \frac{(c-x)^\nu}{\nu!}$ macht und diesem entsprechend die rechte Seite von (4) in eine Reihe $\sum_0^{\infty} F_\nu(x, x_1, \ldots x_n) \frac{(c-x)^\nu}{\nu!}$ nach Potenzen von $c-x$ entwickelt denkt, so bestimmen sich die gesuchten Entwicklungskoeffizienten f_ν aus der Rekursion $f_{\nu+1} = \frac{\partial f_\nu}{\partial x} - F_\nu$, bei willkürlich bleibendem f_0.

Der systematische Ausbau der skizzierten Theorie lag außerhalb des Rahmens dieser Mitteilungen, nur einzelne der zahlreichen entstehenden Probleme konnten hier Erörterung finden. Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist neben der Erweiterung einiger früherer Sätze die Betrachtung der allgemeinen Lame'schen Differentialgleichung

$$\overset{3}{L_0(x)}y''+\overset{2}{L_1(x)}y'+\overset{1}{L_2(x)}y=0, \tag{5}$$

wo der Grad der Polynome L_0, L_1, L_2, respektive 3, 2, 1 nicht übersteigt, sowie die Entwicklung der Lösung der in die Form

$$\overset{n}{L_0(x)}y^{(n)}+\overset{n-1}{L_1(x)}y^{(n-1)}+\qquad+\overset{1}{L_{n-1}(n)}y'+L_n y=0 \tag{6}$$

gebrachten allgemeinen linearen Differentialgleichung mit rationalen Koeffizienten, wofern bereits die Lösungen von Differentialgleichungen $(n-1)$-ter Ordnung der Form

$$\overset{n}{L_0(x)}y^{(n-1)}+\overset{n-1}{L_1(x)}y^{(n-2)}+\qquad+\overset{1}{L_{n-1}(x)}y=0 \tag{7}$$

bekannt sind. Für $n=3$ geht (7) in die allgemeine Lame'sche Differentialgleichung über.

§ 1. Stellt man die Koeffizienten der vorgelegten Differentialgleichung (2) der Einleitung als Quotienten mit einem gemeinsamen Nenner $L_0(x)$ dar

$$L_0(x)\frac{d^m y}{dx^m}+L_1(x)\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+\qquad+L_m(x)y=0, \tag{1}$$

so genügt die Parameterlösung $\bar{Y}=Y/L_0(c)$, bezüglich der Variabeln c, der Adjungierten von (1)

$$\sum_0^m \bar{L}_\varkappa(c)\frac{\partial^{m-\varkappa}\bar{Y}}{\partial c^{m-\varkappa}}=0,\quad \bar{L}_\varkappa(x)=\sum_{\lambda=0}^{\varkappa}(-1)^\lambda\binom{m-\lambda}{m-\varkappa}L_\lambda^{(\varkappa-\lambda)}(x), \tag{2}$$

und durch die Substitution $c=x+\varepsilon$ wird $\bar{Y}(x,c)$ zu einer Funktion $\bar{H}(x,\varepsilon)$, deren Potenzreihenentwicklung nach ε

$$\bar{H}=\frac{1}{L_0(x)}\left[\frac{\varepsilon^{m-1}}{(m-1)!}-\frac{\bar{L}_1(x)}{L_0(x)}\frac{\varepsilon^m}{m!}+\qquad\right] \tag{3}$$

lautet. Die Darstellung der übrigen Lösungen von (2) wird indes etwas einfacher, wenn man statt $\bar{Y}$ die Funktion

$$X(x,c)=L_0(x)\,\bar{Y}=\frac{\varepsilon^{m-1}}{(m-1)!}-\frac{\bar{L}_1(x)}{L_0(x)}\frac{\varepsilon^m}{m!}+ \tag{4}$$

einführt, dann sind $\frac{\partial X(x,c)}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 X(x,c)}{\partial x^2}$,

$$\frac{\partial X(x,c)}{\partial x} = -\frac{\varepsilon^{m-2}}{(m-2)!} + \frac{\bar{L}_1(x)}{L_0(x)}\frac{\varepsilon^{m-1}}{(m-1)!} - . \tag{5}$$

ebenfalls Lösungen von (2).

Auch der Zusammenhang zwischen den Lösungen irgendeiner Differentialgleichung und denjenigen der aus ihr durch Differentiationen hervorgehenden erhält mit Hilfe der Funktion $\bar{Y}$ eine einfache Form.

Differentiert man z. B. die mit irgendeinem Faktor $N(x)$ multiplizierte Differentialgleichung (1)

$$\sum_{\nu=0}^{m} N_\nu y^{(m-\nu)} = 0, \quad N_\nu = N L_\nu \tag{6}$$

nach x, so entsteht die Differentialgleichung

$$\sum_{\nu=0}^{m+1} K_\nu y^{(m+1-\nu)} = 0, \quad K_\nu = N_\nu + N'_{\nu-1} \tag{7}$$

$(N_{-1} = N_{m+1} = 0)$. Die Koeffizienten der Adjungierten zu (6), respektive (7) sind

$$\bar{N}_\lambda = \sum_{\mu=0}^{\lambda} (-1)^\mu \binom{m-\mu}{m-\lambda} N_\mu^{(\lambda-\mu)}, \text{ respektive } \bar{K}_\lambda =$$

$$= \sum_{\mu=0}^{\lambda} (-1)^\mu \binom{m+1-\mu}{m+1-\lambda} K_\mu^{(\lambda-\mu)} \tag{8}$$

und die Auswertung des zweiten Ausdruckes für $\lambda \leqq m$ zeigt die Gleichheit von $\bar{K}_\lambda$ und $\bar{N}_\lambda$, während $\bar{K}_{m+1}$ verschwindet. Weil nun nach dem früheren diejenige Lösung Y von (1) oder (6), deren Entwicklung mit $\frac{\varepsilon^{m-1}}{(m-1)!}$ beginnt, durch

$$Y = \frac{N_0(x+\varepsilon)}{N_0(x)} \Xi(x,\varepsilon) \tag{9}$$

gegeben ist, wobei Ξ der Differentialgleichung in bezug auf ε

$$\sum_{\lambda=0}^{m} \bar{N}_\lambda(x+\varepsilon) \frac{\partial^{m-\lambda}\Xi}{\partial \varepsilon^{m-\lambda}} = 0, \quad \Xi = \frac{\varepsilon^{m-1}}{(m-1)!} + \tag{9a}$$

genügt, anderseits analog die Lösung Y_1 von (7), welche mit $\varepsilon^m/m!$ beginnt, durch

$$Y_1 = \frac{K_0(x+\varepsilon)}{K_0(x)} \Xi_1(x,\varepsilon), \tag{10}$$

$$\sum_0^m \overline{K}_\lambda(x+\varepsilon) \frac{\partial^{m+1-\lambda}\Xi_1}{\partial \varepsilon^{m+1-\lambda}} = 0, \quad \Xi_1 = \frac{\varepsilon^m}{m!} + \tag{10a}$$

so muß, wegen $\overline{K}_\lambda = \overline{N}_\lambda$ für $\lambda \leqq m$, die Beziehung $\Xi = \frac{\partial \Xi_1}{\partial \varepsilon}$ bestehen. Dies liefert den Zusammenhang zwischen den Lösungen $Y(x,c) = H(x,\varepsilon)$ von (1) und $Y_1(x,c) = H_1(x,\varepsilon)$ von (7)

$$H = N_0(x+\varepsilon) \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \frac{H_1}{N_0(x+\varepsilon)} \tag{11}$$

Für die Lösungen $\overline{Y}(x,c) = \overline{H}(x,\varepsilon)$ und $\overline{Y}_1(x,c) = \overline{H}_1(x,\varepsilon)$, von (1) und (7), welche mit $\frac{1}{L_0(x)} \frac{\varepsilon^{m-1}}{(m-1)!}$, $\frac{1}{K_0(x)} \frac{\varepsilon^m}{m!}$ beginnen, wird der Zusammenhang einfacher

$$\overline{H} = N(x+\varepsilon) \frac{\partial \overline{H}_1}{\partial \varepsilon}$$

Im Falle $N=1$, wenn also lediglich die Differentialgleichung (1) nach x aufdifferentiiert wurde, ist $\overline{H} = \partial \overline{H}_1/\partial \varepsilon$ und allgemein $\overline{H} = \partial^\lambda \overline{H}_\lambda/\partial \varepsilon^\lambda$, wenn $\overline{Y}_\lambda(x,c) = \overline{H}_\lambda(x,\varepsilon)$ die mit $\frac{1}{L_0(x)} \frac{\varepsilon^{m+\lambda-1}}{(m+\lambda-1)!}$ beginnende Lösung der aus (1) durch λ-malige Differentiation nach x entstehenden Differentialgleichung bedeutet. Umgekehrt ist

$$\overline{H}_\lambda(x,\varepsilon) = \int_0^\varepsilon \frac{(\varepsilon-t)^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!} \overline{H}(x,t)\,dt, \quad \overline{Y}_\lambda(x,c) = \int_x^c \frac{(c-u)^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!} \overline{Y}(x,u)\,du. \tag{12}$$

§ 2.

Außer $\overline{Y}$ besitzt noch die zur Differentialgleichung (1) in § 1 gehörige Parameterlösung

$$Y^* = (-1)^m \varphi(c)\, Y, \quad L_0 \varphi' + L_1 \varphi = 0 \tag{1}$$

bemerkenswerte Eigenschaften, insbesondere ist sie bei Differentialgleichungen zweiter Ordnung eine alternierende Funktion von x, c. Die Entwicklung dieser Lösung nach Potenzen von ε hat zu Anfangstermen

$$(-1)^m \varphi(x) \left[\frac{\varepsilon^{m-1}}{(m-1)!} - \frac{(m-1)\, L_1(x)}{L_0(x)} \frac{\varepsilon^m}{m!} \right].$$

Wenn die Koeffizienten L Polynome von x sind, so gestattet Y^* eine Quadraturdarstellung, bei welcher (vgl. Mitteilung 5) gewisse aus den L zu gewinnende Polynome

$$M_{h\lambda}(x) = \sum_{\varkappa=0} \binom{h}{\lambda-\varkappa} L_{\varkappa}^{(\lambda-\varkappa)}(x) \tag{2}$$

auftreten. Nur wurde bisher die ganze Zahl h als positiv vorausgesetzt, während sich die Ausdehnung der Definition (2) auf negative h empfiehlt. Es gilt der Satz: Bildet man aus den Koeffizienten $\bar{L}_{\varkappa}$ der Adjungierten der vorgelegten Differentialgleichung die Polynome

$$\bar{M}_{h\lambda}(x) = \sum_{\varkappa=0} \binom{h}{\lambda-\varkappa} \bar{L}_{\varkappa}^{(\lambda-\varkappa)}(x), \tag{3}$$

so besteht die Beziehung

$$M_{h\lambda}(x) = (-1)^{\lambda}\, \bar{M}_{\lambda-m-h-1,\,\lambda}(x). \tag{4}$$

Zum Beweis ersetzt man in (2) die Koeffizienten $L_{\varkappa}$ durch die Werte

$$L_{\varkappa}(x) = \sum_{\mu=0}^{\varkappa} (-1)^{\mu} \binom{m-\mu}{\varkappa-\mu} \bar{L}_{\mu}^{(\varkappa-\mu)}(x) \tag{5}$$

(wie bekannt, sind die Beziehungen zwischen den L und $\bar{L}$ umkehrbar), dann wird

$$M_{h\lambda}(x) = \sum_{\varkappa=0} \binom{h}{\lambda-\varkappa} \sum_{\mu=0}^{\varkappa} (-1)^{\mu} \binom{m-\mu}{\varkappa-\mu} \bar{L}_{\mu}^{(\lambda-\mu)}(x),$$

und durch Vertauschung der Summationen ergibt sich mit Rücksicht auf

$$\sum_{\varkappa=\mu} \binom{m-\mu}{\varkappa-\mu} \binom{h}{\lambda-\varkappa} = \binom{m-\mu+h}{\lambda-\mu} = (-1)^{\lambda-\mu} \binom{\lambda-h-m-1}{\lambda-\mu}$$

die zu beweisende Gleichung (4).

Eine andere, unmittelbar abzuleitende Gleichung zwischen den M ist

$$M_{h\lambda}(x) - M_{h-1,\lambda}(x) = \frac{d\, M_{h-1,\lambda-1}(x)}{dx} \tag{6}$$

Die Polynome $M_{h\lambda}$ mit negativem h treten auch auf, wenn man eine Lösung der vorgelegten Differentialgleichung, § 1, (1), in der Laplace-Form $\int e^{xt}\Phi(t)\,dt$ aufsucht und $\Phi(t)$ formal nach Potenzen von t entwickelt, es sind dann, bei $\Phi(t) = \Sigma\alpha_i t^i$, die Rekursionen der Koeffizienten α für jedes ν

$$\sum_{i \geqq \nu - m} \alpha_i M_{-\nu-1,\, i+m-\nu}(0) = 0. \tag{7}$$

Beweis: Entwickelt man in der aufzulösenden Differentialgleichung $\sum\limits_{\varkappa=0} L_\varkappa(x) \dfrac{d^{m-\varkappa} y}{d x^{m-\varkappa}} = 0$ die $L_\varkappa(x)$ nach Potenzen von x, so erhält man für $\Phi(t)$ die »Transformierte«

$$\sum_{\varkappa=0} \sum_{\lambda} L_\varkappa^{(\lambda)}(0) \frac{(-1)^\lambda}{\lambda!} \frac{d^\lambda}{dt^\lambda} [t^{m-\varkappa} \Phi(t)] = 0 \tag{8}$$

und durch Ausdifferentiieren

$$\sum \sum L_\varkappa^{(\lambda)}(0)(-1)^\lambda \sum_{\mu=0} \binom{m-\varkappa}{\lambda-\mu} t^{m-\varkappa-\lambda+\mu} \frac{\Phi^{(\mu)}(t)}{\mu!} = 0. \tag{9}$$

Hierin ist $\Phi(t)$ formal durch eine Potenzreihe $\Sigma\alpha_i t^i$ zu ersetzen und die so entstehende vierfache Summe nach Potenzen von t zu ordnen. Der Koeffizient von t^ν, für $\nu = m+i-\varkappa-\lambda$,

$$\sum_{\varkappa} \sum_{\mu} \sum_{i} (-1)^{m+i-\varkappa-\nu} \binom{i}{\mu} \alpha_i \binom{m-\varkappa}{\mu+\nu-i} L_\varkappa^{(m+i-\varkappa-\nu)}(0), \tag{10}$$

läßt sich aber einfach berechnen, da die Summe über μ nach dem Additionssatz der Binomialkoeffizienten ausführbar wird

$$\sum_{\mu} \binom{i}{\mu} \binom{m-\varkappa}{\mu+\nu-i} = \binom{m+i-\varkappa}{\nu} = (-1)^{m+i-\varkappa-\nu} \binom{-\nu-1}{m+i-\varkappa-\nu},$$

er hat somit den Wert

$$\sum_{i} \alpha_i \sum_{\varkappa} \binom{-\nu-1}{m+i-\nu-\varkappa} L_\varkappa^{(m+i-\nu-\varkappa)}(0) \tag{11}$$

und seine Nullsetzung ergibt gemäß (2) die zu beweisende Bedingungsgleichung (7).

Bezüglich der Adjungierten von (1), § 1, folgt hieraus, daß die Lösung $\Phi(t)$ ihrer Transformierten eine formale Entwicklung

$\Phi(t) = \Sigma\, \bar{\alpha}_i\, t^i$ aufweist, für deren Koeffizienten analog (7) die Rekursionen $\Sigma \alpha_i \overline{M}_{-\nu-1,\, i+m-\nu}(0) = 0$ gelten, d. h. nach (4)

$$\sum \bar{\alpha}_i (-1)^i M_{i,\, i+m-\nu}(0) = 0. \tag{12}$$

§ 3.

Für die Lösung Y^* der allgemeinen Lamé'schen Differentialgleichung

$$L_0(x) y'' + L_1(x) y' + L_2(x) y = 0 \tag{1}$$

existiert nach den allgemeinen Sätzen in Mitteilung 5 eine Quadraturdarstellung

$$Y^* = \int_x^c \varphi(v) \sum_h \sum \frac{(x-v)^h}{h!} \frac{(c-v)^\nu}{\nu!} \frac{F_{h\nu}(v)}{L_0(v)^\nu} dv, \tag{2}$$

wobei die Polynome $F_{h\nu}(v)$ durch die Rekursion

$$\begin{aligned} F_{h\nu} = F'_{h,\nu-1} + M_{h-1,2} F_{h-1,\nu-1} + M_{h-1,3} L_0 F_{h-2,\nu-1} - \\ - (\mathfrak{F}_{h-1,\nu-2} + L_0 \mathfrak{F}_{h-2,\nu-1}) + L_0 \mathfrak{F}'_{h-2,\nu-2} - M_{h-2,1} \mathfrak{F}_{h-2,\nu-2} \end{aligned} \tag{3}$$

$(h > 0, \nu > 0)$ mit den Anfangsbedingungen

$$F_{h0} = 0 \text{ und } F_{0\nu} = 0 \text{ außer } F_{00} = 1 \tag{4}$$

bestimmt sind. Die Polynome $\mathfrak{F}$ bleiben willkürlich, nur muß ein $\mathfrak{F}$ mit einem negativen Index durch Null ersetzt werden. Die Wahl der $\mathfrak{F}$ soll nunmehr derart erfolgen, daß der zu integrierende Ausdruck in (2) eine symmetrische Funktion von x, c wird, was sofort die Forderung $Y^*(x, c) = -Y^*(c, x)$ erfüllt. Damit aber

$$F_{h\nu} = 0 \text{ für } h \neq \nu \tag{5}$$

wird, ist hinreichend (übrigens auch notwendig)

$$\mathfrak{F}_{h\nu} = 0 \text{ für } h \neq \nu \tag{6}$$

zu wählen. Dann darf man die Betrachtung der Gleichung (3) auf die Fälle $h = \nu-1$, $\nu, \nu+1$ beschränken, weil sonst, bei $h \leqq \nu-2$ oder $h \geqq \nu+2$, links und rechts ansatzgemäß der Wert Null auftritt. Aus (3) erhält man nun für $h = \nu-1$ die Bedingungen

$$0 = F'_{\nu-1,\nu-1} - \mathfrak{F}_{\nu-2,\nu-2} \quad \nu \geqq 2, \tag{7}$$

welche die $\mathfrak{F}$ als Funktionen der F bestimmen, ferner für $h = \nu+1$

$$0 = M_{\nu 3} L_0 F_{\nu-1,\nu-1} - L_0 \mathfrak{F}_{\nu-1,\nu-1}$$

oder nach (6), dort ν durch $\nu+1$ ersetzt,

$$F'_{\nu\nu} = M_{\nu 3} F_{\nu-1,\nu-1}, \tag{8}$$

schließlich für $h = \nu$

$$F_{\nu\nu} = M_{\nu-1,2} F_{\nu-1,\nu-1} + L_0 \mathfrak{F}'_{\nu-2,\nu-2} - M_{\nu-2,1} \mathfrak{F}_{\nu-2,\nu-2},$$

somit wegen (6)

$$F_{\nu\nu} = L_0 F''_{\nu-1,\nu-1} - M_{\nu-2,1} F'_{\nu-1,\nu-1} + M_{\nu-1,2} F_{\nu-1,\nu-1}. \tag{9}$$

Daher genügen die Polynome $F_{\nu\nu}$ von v, für die zur Abkürzung

$$F_{\nu\nu} = G_\nu, \quad G_0 = 1 \tag{10}$$

geschrieben werde, den beiden rekursiven Bedingungen

$$G_\nu = L_0 G''_{\nu-1} - M_{\nu-2,1} G'_{\nu-1} + M_{\nu-1,2} G_{\nu-1}, \tag{11a}$$

$$G'_\nu = M_{\nu 3} G_{\nu-1}, \tag{11b}$$

aus welchen sofort eine independente Bedingung für $G_{\nu-1}$ allein folgt, indem man (11 b) von der nach v differentiierten Gleichung (11 a) subtrahiert. Die so entstehende Differentialgleichung für $G_{\nu-1}$

$$0 = L_0 G'''_{\nu-1} - (M_{\nu-2,1} - L'_0) G_{\nu-1} +$$
$$+ (M_{\nu-1,2} - M'_{\nu-2,1}) G'_{\nu-1} - (M_{\nu 3} - M'_{\nu-1,2})$$

erlangt durch Anwendung von Formel (6), § 2, die einfachere Gestalt

$$0 = L_0 G'''_{\nu-1} - M_{\nu-3,1} G''_{\nu-1} + M_{\nu-2,2} G'_{\nu-1} - M_{\nu-1,3} G_{\nu-1}. \tag{12}$$

Die beiden Bedingungen (11 a) und (12) müssen also die Konsequenz haben, daß (12) richtig bleibt, wenn ν durch $\nu+1$ ersetzt wird. In der Tat gelangt man umgekehrt aus (11 a) und (12) zur Bedingung (11 b) und verifiziert dann mittels der Gleichungen

$$G''_\nu = M_{\nu 3} G'_{\nu-1}, \quad G'''_\nu = M_{\nu 3} G''_{\nu-1},$$

daß G_ν der Differentialgleichung

$$L_0 G'''_\nu - M_{\nu-2,1} G''_\nu + M_{\nu-1,2} G_\nu - M_{\nu 3} G_\nu = 0 \tag{13}$$

genügt. Daneben läßt sich auch eine lineare Rekursion der G aufstellen, denn wegen (11 b) ist $G'_{\nu-1} = M_{\nu-1,3} G_{\nu-2}$ und $G''_{\nu-1} = M_{\nu-1,3} G'_{\nu-2} = M_{\nu-1,3} M_{\nu-2,3} G_{\nu-3}$, wodurch (11 a) in eine lineare Beziehung zwischen vier aufeinanderfolgenden der G übergeht

$$G_\nu = M_{\nu-1,2} G_{\nu-1} - M_{\nu-2,1} M_{\nu-1,3} G_{\nu-2} + L_0 M_{\nu-1,3} M_{\nu-2,3} G_{\nu-3}. \tag{14}$$

Im folgenden darf vorausgesetzt werden, daß wenigstens eine der drei Größen L_0''', L_1'', L_2' von Null verschieden, G_ν also vom Grade ν in v ist, sonst würde der schon in Mitteilung III behandelte Fall vorliegen, für welchen sich G_ν auf Konstante g_ν reduzieren.

Durch (13) und (11 b) ist G_ν eindeutig definiert. Gemäß (11 b) besitzt in der Entwicklung der Halphen'schen Polynome G_ν nach Potenzen von v

$$G_\nu = \sum_{i=0}^{\nu} g_{\nu i}\, v^{\nu-i} \tag{15}$$

der Koeffizient $g_{\nu 0}$ die Rekursion

$$\nu g_{\nu 0} = M_{\nu 3} g_{\nu-1,0}, \quad g_{00} = 1, \tag{16}$$

hat daher den Wert

$$g_{\nu 0} = \frac{M_{13} M_{23} \ldots M_{\nu 3}}{\nu!} = \frac{M_{\overline{13}}^{|\nu}}{\nu!}, \quad M_{\overline{13}}^{|0} = 1 \tag{17}$$

und solange keine der Konstanten M_{i3} verschwindet, kann

$$G_\nu = g_{\nu 0} \sum_{i=0}^{\nu} a_{\nu i} \frac{v^{\nu-i}}{(\nu-i)!}, \quad a_{\nu 0} = 1 \tag{18}$$

gesetzt werden. Das Resultat der Substitution von (18) in (13) ist das $g_{\nu 0}$-fache von

$$\begin{aligned}
&\sum a_{\nu i} \frac{v^{\nu-i}}{(\nu-i)!} \left[\binom{\nu-i}{3} L_0''' - \binom{\nu-i}{2} M''_{\nu-2,1} + \binom{\nu-i}{1} M'_{\nu-1,2} - M_{\nu 3}\right] + \\
&+ \sum a_{\nu i} \frac{v^{\nu-i-1}}{(\nu-i-1)!} \left[\binom{\nu-i-1}{2} L_0''(0) - \binom{\nu-i-1}{1} M'_{\nu-2,1}(0) + \right. \\
&\qquad \left. + M_{\nu-1,2}(0)\right] + \\
&+ \sum a_{\nu i} \frac{v^{\nu-i-2}}{(\nu-i-2)!} \left[\binom{\nu-i-2}{1} L_0'(0) - M_{\nu-2,1}(0)\right] + \\
&\qquad + \sum a_{\nu i} \frac{v^{\nu-i-3}}{(\nu-i-3)!} L_0(0).
\end{aligned} \tag{19}$$

Es lassen sich aber die Ausdrücke in den eckigen Klammern von (18) einfach darstellen, sie sind gleich[1]

$$-M_{i3}, \quad M_{i2}(0), \quad -M_{i1}(0),$$

und hiedurch nimmt (19), mit (-1) multipliziert, die Form an

[1] Nach der allgemeinen Formel

$$\sum_{\lambda=0}^{\varkappa} (-1)^\lambda \binom{\nu-i}{\lambda} M^{(\lambda)}_{\nu-\lambda,\varkappa-\lambda}(x) = (-1)^\varkappa M_{i\varkappa}(x)$$

$$\sum M_{i3}\, a_{\nu i} \frac{v^{\nu-i}}{(\nu-i)\,!} - \sum M_{i2}(0)\, a_{\nu i} \frac{v^{\nu-i-1}}{(\nu-i-1)!} +$$
$$+ \sum M_{i1}(0)\, a_{\nu i} \frac{v^{\nu-i-2}}{(\nu-i-2)!} - L_0(0) \sum a_{\nu i} \frac{v^{\nu-i-3}}{(\nu-i-3)!}$$

Aus der Substitution von $i-1$, respektive $i-2$, $i-3$ in der zweiten, respektive dritten und vierten Summe findet man somit als Bedingung für die $a_{\nu i}$, daß das Polynom

$$\sum \frac{v^{\nu-i}}{(\nu-i)!} [M_{i3}\, a_{\nu i} - M_{i-1,\,2}(0)\, a_{\nu,\,i-1} + M_{i-2,\,1}(0)\, a_{\nu,\,i-2} - L_0(0)\, a_{\nu,\,i-3}]$$

identisch verschwinden soll. Ersichtlich enthalten, wenn der Koeffizient einer jeden Potenz von v verschwinden soll, die Koeffizienten der Bedingungsgleichungen für die $a_{\nu i}$ gar nicht die Zahl ν, so daß

$$a_{\nu i} = a_i, \quad a_0 = 1 \tag{20}$$

gesetzt, die Rekursion gilt

$$M_{i3}\, a_i = M_{i-1,\,2}(0)\, a_{i-1} - M_{i-2,\,1}(0)\, a_{i-2} + L_0(0)\, a_{i-3}. \tag{20a}$$

Ganz dieselbe Rekursion würde sich gemäß § 2, Formel (12), ergeben haben, wenn man bezüglich der Transformierten der zu (1) Adjungierten die gesuchte Lösung $\Phi(t)$ formal in eine Potenzreihe $\sum\limits_{0}^{\infty} a_i\, t^i$ entwickelt hätte.

Von der obigen Voraussetzung, daß keine der Konstanten M_{i3} verschwinde, ist es leicht frei zu werden, man braucht nur die Größen $b_i = G_i(0)$

$$b_i = a_i\, M^{|i}_{13}, \quad b_0 = 1 \tag{21}$$

einzuführen, deren Rekursion, vgl. (14),

$$b_i = b_{i-1}\, M_{i-1,\,2}(0) - b_{i-2}\, M_{i-2,\,1}(0)\, M_{i-1,\,3} + b_{i-3}\, L_0(0)\, M_{i-1,\,3}\, M_{i-2,\,3} \tag{22}$$

lautet, und erhält aus (18)

$$G_\nu = \sum_{i=0} b_i\, M^{|\nu-i}_{i+1,\,3} \frac{v^{\nu-i}}{(\nu-i)\,!}, \tag{23}$$

daher mit Rücksicht auf (5), (10) Y^* gleich

$$\int_x^c \varphi(v) \sum_0^\infty \frac{(x-v)^\nu (c-v)^\nu}{\nu!^2\, L_0(v)^\nu}\, G_\nu(v)\, dv = \tag{24}$$

$$=\int_x^c \varphi(v)\sum_0^{\infty}\frac{(x-v)^\nu(c-v)^\nu}{\nu!^2 L_0(v)^\nu}\sum_{i=0} M_{i+1,3}^{\nu-i}\frac{v^{\nu-i}dv}{(\nu-i)!}$$

Die zu integrierende Funktion geht bei $\nu = i+\varkappa$ in eine Potenzreihe der beiden Variabeln

$$\eta_1 = \frac{(x-v)(c-v)}{L_0(v)} \qquad \eta_2 = v\eta_1 \tag{25}$$

über, die noch auf ihre Konvergenz zu untersuchen bleibt, und für die gesuchte Parameterlösung ergibt sich

$$Y^* = \int_x^c \varphi(v)\sum_0^{\infty}\sum_0^{\infty}\frac{b_i M_{i+1,3}^{\varkappa}}{(i+\varkappa)!^2\varkappa!}\eta_1^i\eta_2^\varkappa dv, \tag{26}$$

als die allein mögliche Quadraturdarstellung, bei welcher die zu integrierende Funktion symmetrisch in x, c ist.

Die Untersuchung der Konvergenz der Potenzreihe in (26) zeigt, daß zumindest ein endliches, von Null verschiedenes Konvergenzbereich für die beiden Variabeln η_1, η_2 existiert, in besonderen Fällen darf sowohl η_1 als η_2 jeden endlichen Betrag annehmen.

Zum Beweise werde

$$\begin{aligned} L_0(x) &= \alpha_0 x^3+\beta_0 x^2+\gamma_0 x+\delta_0,\\ L_1(x) &= \alpha_1 x^3+\beta_1 x+\gamma_1,\\ L_2(x) &= \alpha_2 x\ +\beta_2 \end{aligned} \tag{27}$$

gesetzt, dann ist zunächst

$$M_{i3} = i\alpha_2+i(i-1)\alpha_1+i(i-1)(i-2)\alpha_0 \tag{28}$$

und daher bei

$$|\alpha_0| = \mathfrak{A}_0,\ |\alpha_1| = \mathfrak{A}_1,\ |\alpha_2| = \mathfrak{A}_2,\quad |M_{i3}| < i^3\,\mathfrak{A},\ \mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0+\mathfrak{A}_1+\mathfrak{A}_2,$$

somit wird in (26) die Summe der absoluten Beträge der von $\varkappa$ abhängigen Elemente

$$\sum_{\varkappa=0}^{\infty}\left|\frac{M_{i+1,3}^{\varkappa}\eta_2^\varkappa}{(i+\varkappa)!^2\varkappa!}\right| < \frac{(i+1)^3 \ldots (i+\varkappa)^3\,\mathfrak{A}^\varkappa|\eta_2|^\varkappa}{(i+\varkappa)!^2\varkappa!}, \tag{28a}$$

d. h. kleiner als

$$\frac{1}{i!^2}\sum_0^{\infty}\binom{i+\varkappa}{\varkappa}\mathfrak{A}^\varkappa|\eta_2|^\varkappa = \frac{(1-\mathfrak{A}|\eta_2|)^{-i-1}}{i!^2}$$

Für $\alpha_0 \neq 0$ konvergiert also die untersuchte Doppelreihe jedenfalls, wenn $|\eta_2|$ kleiner als $\mathfrak{A}^{-1}$ und die Reihe

$$\sum_0^\infty \frac{|b_i|\,\eta^i}{i!^2}, \quad \eta = \eta_1 (1 - \mathfrak{A}|\eta_2|) \tag{29}$$

konvergent ist. Hingegen darf für $\alpha_0 = 0$, wofern wieder die Reihe (29) für $\eta = \eta_1$ konvergiert, η_2 beliebig groß werden, weil dann $|M_{i3}| < \mathfrak{A} i^2$ und die linke Seite von (28a) kleiner ist als

$$\sum_0^\infty \frac{(i+1)^2 \ldots (i+\varkappa)^2}{(i+\varkappa)!^2\,\varkappa!} \mathfrak{A}^\varkappa |\eta_2|^\varkappa = \frac{e^{\mathfrak{A}|\eta_2|}}{i!^2}$$

Um über den Konvergenzradius von (29) eine Aussage machen zu können, werde die Rekursion (22) der b_i gemäß den Gleichungen (27) umgeschrieben, $b_i =$

$$[\beta_2 + (i-1)\beta_1 + (i-1)(i-2)\beta_0]\, b_{i-1} - (i-1)[\gamma_1 + (i-2)\gamma_0][\alpha_2 + $$
$$+ (i-2)\alpha_1 + (i-2)(i-3)\alpha_0]\, b_{i-2} + (i-1)(i-2)\delta_0 [\alpha_2 + (i-2)\alpha_1 +$$
$$+ (i-2)(i-3)\alpha_0][\alpha_2 + (i-3)\alpha_1 + (i-3)(i-4)\alpha_0]\, b_{i-3}$$

und zum Vergleiche diejenige von positiven Größen $c_i > |b_i|$

$$c_i = (\mathfrak{B}_2 + i\mathfrak{B}_1 + i^2\mathfrak{B}_0)\, c_{i-1} + i(\mathfrak{C}_1 + i\mathfrak{C}_0)(\mathfrak{A}_2 + i\mathfrak{A}_1 + i\mathfrak{A}_1 + i^2\mathfrak{A}_0)\, c_{i-2} +$$
$$+ i^2 |\delta_0| (\mathfrak{A}_2 + i\mathfrak{A}_1 + i^2\mathfrak{A}_0)^2\, c_{i-3}$$

herangezogen. Dabei bedeutet $\mathfrak{B}_0 = |\beta_0|$, $\mathfrak{C}_0 = |\gamma_0|$ usw.

Außerdem soll der Einfachheit halber $\delta_0 = 0$ angenommen werden, außer wenn $L_0(x)$ sich auf eine Konstante reduziert.

Im Falle $\beta_0 \neq 0$ kann man statt der c_i die Größen $d_i > c_i$ mit den Rekursionen

$$d_i = i^2 \mathfrak{B} d_{i-1} + \mathfrak{A}\mathfrak{C} i^4 d_{i-2}, \quad \mathfrak{B} = \mathfrak{B}_0 + \mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_2, \quad \mathfrak{C} = \mathfrak{C}_0 + \mathfrak{C}_1 \tag{31}$$

betrachten, aus denen wegen

$$d_i < i^2 \mathfrak{B} d_{i-1} + \mathfrak{A}\mathfrak{C} i^4 \frac{d_{i-1}}{(i-1)^2 \mathfrak{B}}$$

die Vergleichbarkeit von d_i/d_{i-1} mit i^2 folgt, so daß die Reihe (29) jedenfalls konvergiert, so lange $|\eta|$ unter einer angebbaren, von Null verschiedenen Schranke bleibt.

Mit derselben Schlußweise behandelt man den Fall $\beta_0 = 0$, $\alpha_0\gamma_0 \neq 0$. Man definiert Größen $d_i > c_i$ durch

$$d_i = i\mathfrak{B}\, d_{i-1} + i^4 \mathfrak{A}\mathfrak{C}\, d_{i-2}$$

und leitet eine Beziehung zwischen d_i, d_{i-2}, d_{i-4} ab, welche die Vergleichbarkeit von d_i/d_{i-2} mit i^4 zeigt, so daß sowohl die Summe der ungeraden als die der geraden Glieder in (29) konvergiert, wenn sich (η) unter einer gewissen Schranke hält.

In den drei übrigen Fällen, nämlich $L_0(x) = x^3, x, 1$ beweist man ebenso, daß die Reihe (29) für jedes endliche η konvergiert.

Als ein Vorzug der hier dargelegten Methode darf es wohl erachtet werden, daß das in (26) angegebene Integral unabhängig von der Wahl des Integrationsweges und auch in dem Falle, wo die sowohl hier als bei der Laplace-Transformation auftretende formale Potenzreihe $\Sigma a_i v^i$ für jedes $v \neq 0$ divergiert, immer eine Lösung von (1) darstellt.

Bezüglich der Differentialgleichung

$$L_0 \overset{3}{\overline{(x)}} y^{(m)} + L_1 \overset{2}{\overline{(x)}} y^{(m-1)} + L_2 \overset{1}{\overline{(x)}} y^{(m-2)} = 0 \tag{31}$$

resultieren nach Mitteilung 5, § 1, für die Quadraturdarstellung der mit $(-1)^m \varphi(x) \frac{\varepsilon^{m-1}}{(m-1)!}$ beginnenden Lösung ebendieselben Polynome F wie bei $m = 2$, diese Lösung ist also

$$\int_x^e \varphi(v) \sum_0^\infty \frac{(x-v)^{m+\nu-2}}{(m+\nu-2)!} \frac{(c-v)^\nu}{\nu!} \frac{G_\nu(v)}{L_0(v)^\nu} dv. \tag{32}$$

§ 4.

Bei Differentialgleichungen n-ter Stufe, d. h. der Form

$$\sum_{\varkappa=0}^{n} L_\varkappa(x) y^{(n-\varkappa)} = 0, \tag{1}$$

wo der Grad des Polynoms $L_\varkappa(x)$ nicht die Zahl $n-\varkappa$ übersteigen soll, ist auch $y^{(h)}$ Lösung einer Differentialgleichung n-ter Ordnung, und zwar von

$$\sum_{\mu=0} M_{h\mu}(x) \frac{d^{n-\mu} y^{(h)}}{d x^{n-\mu}} = 0, \tag{2}$$

wo die Polynome M wieder die Formel (2) in § 2 zur Definition haben. Die Richtigkeit von (2) erhellt, indem man h-mal die Differentialgleichung (1) nach x differentiiert,

$$\sum_{\varkappa=0}^{n} \sum_{\lambda=0}^{h,\, n-\varkappa} \binom{h}{\lambda} L_\varkappa^{(\lambda)}(x) y^{(n-\varkappa+h-\lambda)} = 0,$$

statt λ den Summationsbuchstaben $\mu = \varkappa + \lambda$ einführt und die Summationsfolge vertauscht.

In dem besonderen Falle, daß die Koeffizienten von (1) die Bedingung $M_{hn} = 0$ erfüllen, genügt $y^{(h+1)}$ einer Differentialgleichung bloß $(n-1)$-ter Ordnung.

Entwickelt man nun eine Lösung y von (1) formal nach Produkten der M_{hn}

$$y = \sum_{0}^{\infty} S_\varkappa y_\varkappa,\ S_0 = 1,\ S_\varkappa = M_{0n}\, M_{1n} \ldots M_{\varkappa-1\, n} \text{ für } \varkappa \geqq 1, \tag{3}$$

so werden die $y_\varkappa$ mit Hilfe derjenigen Funktionen z_i bestimmbar, auf die sich y reduziert, wenn die Konstanten der Differentialgleichung (1) die spezielle Bedingung $M_{in} = 0$ befriedigen.

Zur Durchführung dieser Aufgabe bezeichne L_n^i denjenigen Wert von L_n, welcher M_{in} annulliert, d. h.

$$L_n^i = -\left[\binom{i}{1} L'_{n-1} + \binom{i}{2} L''_{n-2} + \ldots + \binom{i}{n} L_0^{(n)}\right] \tag{4}$$

und M_{hn}^i den Wert von M_{hn} für $L_n = L_n^i$

$$M_{hn}^i = \left[\binom{h}{1} - \binom{i}{1}\right] L'_{n-1} + \left[\binom{h}{2} - \binom{i}{2}\right] L_{n-2} + \ldots + \left[\binom{h}{n} - \binom{i}{n}\right] L_0^{(n)}. \tag{5}$$

Dann entsteht durch die Substitution $L_n = L_n^i$ in (3) die Gleichung

$$z_i = \sum_{\varkappa=0} S_\varkappa^i y_\varkappa,\ S_0^i = 1,\ S_\varkappa^i = M_{0n}^i\, M_{1n}^i \ldots M_{\varkappa-1,\, n}^i \text{ für } \varkappa \geqq 1, \tag{6}$$

also für $i = 0, 1, 2, \ldots$ ein Gleichungssystem, welches gestattet, die $y_\varkappa$ durch die z_i auszudrücken, die ihrerseits die besondere Eigenschaft aufweisen, daß $d^{i+1} z_i / dx^{i+1}$ Lösung einer Differentialgleichung bloß $(n-1)$-ter Ordnung

$$\sum_{\mu=0}^{n-1} M_{i\mu} \frac{d^{n-1-\mu}}{dx^{n-1-\mu}} \left(\frac{d^{i+1} z_i}{dx^{i+1}}\right) = 0 \tag{7}$$

ist. Die Auflösung des linearen Gleichungssystems (6) ergibt für die gesuchten Funktionen $y_\varkappa$ die Werte

$$y_\varkappa = \frac{1}{\varkappa!} \sum_{i=0}^{\varkappa} \frac{(-1)^i \binom{\varkappa}{i} \chi_{ii} z_i}{\chi_{0i}\, \chi_{1i} \cdots \chi_{\varkappa i}}, \tag{8}$$

wobei die Konstanten χ_{hi} durch

$$\chi_{hi} = \frac{M^i_{hn}}{h-i} \tag{9}$$

definiert sind. Diese Definition von χ_{hi} kann auch auf den Fall $h = i$ ausgedehnt werden, obzwar der Wert χ_{ii} sich rechts in (8) überall heraushebt.

Die Verifikation von (8) kann auch direkt geschehen, ohne erst y als Funktion von L_n zu betrachten: Substituiert man die Werte (8) in $z_\lambda = \sum\limits_{\varkappa=0} S^\lambda_\varkappa y_\varkappa$ und führt hiebei die Größe

$$\Omega_i = \chi_{ii} z_i \tag{10}$$

ein, so handelt es sich darum, die Identität

$$\frac{\Omega_\lambda}{\chi_{\lambda\lambda}} = \sum_{\varkappa=0}^{\lambda} \frac{S^\lambda_\varkappa}{\varkappa!} \sum_{i=0}^{\varkappa} \frac{(-1)^i \binom{\varkappa}{i} \Omega_i}{\chi_{0i}\chi_{1i}\cdots\chi_{\varkappa i}} \tag{11}$$

nachzuweisen. Mittels der abkürzenden Bezeichnung

$$\chi^{|0}_{\mu\lambda} = 1,\ \chi^{|\varkappa}_{\mu\lambda} = \chi_{\mu\lambda}\chi_{\mu+1,\lambda}\cdots\chi_{\mu+\varkappa-1,\lambda} \text{ für } \varkappa \geqq 1 \tag{12}$$

läßt sich gemäß (6)

$$\frac{S^\lambda_\varkappa}{\varkappa!} = (-1)^\varkappa \binom{\lambda}{\varkappa} \chi^{|\varkappa}_{0\lambda} \tag{13}$$

schreiben, wodurch (11), wenn noch die Summationen vertauscht werden, die Gestalt erhält

$$\frac{\Omega_\lambda}{\chi_{\lambda\lambda}} = \sum_{i=0}^{\lambda} \Omega_i \sum_{\varkappa=i} (-1)^{\varkappa-i} \binom{\lambda}{\varkappa}\binom{\varkappa}{i} \frac{\chi^{|\varkappa}_{0\lambda}}{\chi^{|\varkappa+1}_{0i}}. \tag{14}$$

Rechts in (14) steht für den Wert $i = \lambda$ dasselbe wie links, also bleibt nur noch für $i < \lambda$

$$\sum_{\varkappa=i}^{\lambda} (-1)^{\varkappa-i} \binom{\lambda}{\varkappa}\binom{\varkappa}{i} \frac{\chi^{|\varkappa}_{0\lambda}}{\chi^{|\varkappa+1}_{0i}} = 0 \tag{15}$$

nachzuweisen, oder, durch Herausheben von $\chi^{|i}_{0\lambda}$ im Zähler und von $\chi^{|i+1}_{0i}$ im Nenner jeden Ausdrucks,

$$\sum_{\kappa=i}(-1)^{\kappa-i}\binom{\lambda}{\kappa}\binom{\kappa}{i}\frac{\chi_{i\lambda}^{\overline{|\kappa-i}}}{\chi_{i+1,\,i}^{\overline{|\kappa-i}}}=0,$$

was bei $\kappa=i+\mu$ in die Bedingung

$$\sum_{\mu=0}^{\lambda-i}(-1)^{\mu}\binom{\lambda-i}{\mu}\frac{\chi_{i\lambda}^{\overline{|\mu}}}{\chi_{i+1,\,i}^{\overline{|\mu}}}=0 \text{ bei } \lambda>i \tag{16}$$

übergeht. Durch sukzessive Betrachtung der Fälle $\mathfrak{j}=\lambda-i-1$, $\lambda-i-2,\ldots$ erkennt man die Richtigkeit von

$$\sum_{\mu=\mathfrak{j}}^{\lambda-i}(-1)^{\mu}\binom{\lambda-i}{\mu}\frac{\chi_{i\lambda}^{\overline{|\mu}}}{\chi_{i+1,\,i}^{\overline{|\mu}}}=(-1)^{\mathfrak{j}}\binom{\lambda-i-1}{\mathfrak{j}-1}\frac{\chi_{i+1,\,\lambda}^{\overline{|\mathfrak{j}-1}}}{\chi_{i+1,\,i}^{\overline{|\mathfrak{j}-1}}} \tag{17}$$

und für $\mathfrak{j}=1$ ist dies die zu beweisende Gleichung (16).
