

# Über relative Flächentheorie

## II. Mitteilung<sup>1</sup>

Von

Adalbert Duschek in Wien

(Vorgelegt in der Sitzung am 5. Mai 1927)

Es handelt sich im folgenden um die Einführung eines relativen Bogenelements« einer Fläche ( $\gamma$ ) bezüglich einer Eichfläche ( $e$ ). Das Quadrat dieses Relativbogenelements wird durch eine quadratische Differentialform  $\varphi$  zu definieren sein, von der man vernünftigerweise verlangen wird, daß sie

a) invariant ist gegenüber beliebigen Parametertransformationen mit nicht verschwindender Funktionaldeterminante,

b) durch ihre Nullrichtungen die relativisotropen Richtungen auf ( $\gamma$ ) liefert und schließlich

c) in die sogenannte erste Grundform der elementaren Flächentheorie übergeht, wenn man für ( $e$ ) die Einheitskugel nimmt.

Es zeigt sich, daß sich insbesondere die in »R. F. I« angegebenen, die Krümmungseigenschaften betreffenden Formeln mittels der Koeffizienten der Form  $\varphi$  in eine Gestalt bringen lassen, in der sie mit den entsprechenden Formeln der elementaren Flächentheorie formal völlig übereinstimmen. Dasselbe gilt auch für eine Reihe anderer Formeln (z. B. für die Weingarten'schen Formeln, vgl. unten, Ziffer 2).

Selbstverständlich muß die Form  $\varphi$  nicht positiv definit sein; entsprechend der Definition der relativisotropen Richtungen als jene, die zu den Asymptotenrichtungen der Eichfläche im entsprechenden Punkt parallel sind, ist dies nur in jenen Punkten der Fall, wo die Eichfläche positiv (in gewöhnlichem Sinn) gekrümmt ist.

Die Bezeichnungen von »R. F. I« werden beibehalten mit der einzigen Ausnahme, daß die Koeffizienten der zweiten Grundformen von ( $e$ ) und ( $\gamma$ ) nicht wie früher mit  $L, M, N$ , beziehungsweise  $L', M', N'$ , sondern mit  $l, m, n$ , beziehungsweise  $L, M, N$  bezeichnet werden [vgl. unten die Definitionsformeln (2) und (4)].

1. Es sei

$$\psi_0 = l du^2 + 2 m du dv + n dv^2, \quad (1)$$

wo

$$l = \frac{(e_{uu} e_u e_r)}{(e e_u e_r)} \quad m = \frac{(e_{uv} e_u e_r)}{(e e_u e_r)} \quad n = \frac{(e_{rr} e_u e_r)}{(e e_u e_r)} \quad (2)$$

<sup>1</sup> Vgl. diese Sitzungsber., IIa. 135. Bd. (1926). p. 1—8. Im folgenden kurz mit »R. F. I« zitiert.

ist, die zweite Grundform der Eichfläche ( $\epsilon$ ) und

$$\psi = L du^2 + 2 M du dv + N dv^2, \quad (3)$$

wo

$$L = \frac{(\xi_{uu} \xi_u \xi_v)}{(\epsilon \xi_u \xi_v)}, \quad M = \frac{(\xi_{uv} \xi_u \xi_v)}{(\epsilon \xi_u \xi_v)}, \quad N = \frac{(\xi_{vv} \xi_u \xi_v)}{(\epsilon \xi_u \xi_v)} \quad (4)$$

ist, die zweite Grundform der Fläche ( $\chi$ ). Dann gilt<sup>1</sup>

$$L = al + bm, \quad M = am + bn = cl + dm, \quad N = cm + dn \quad (5)$$

und

$$cl + (d - a)m - bn = 0. \quad (6)$$

Bezeichnen wir die Nullrichtungen von  $\psi_0$  mit  $du_1 dv_1$  und  $du_2 dv_2$ , die der gesuchten Form

$$\varphi = E du^2 + 2 F du dv + G dv^2 \quad (7)$$

mit  $du'_1 dv'_1$  und  $du'_2 dv'_2$  so müssen wegen der Forderung  $b$  die Vektoren

$$e_u du_1 + e_v dv_1 \quad \text{und} \quad e_u du_2 + e_v dv_2,$$

beziehungsweise parallel sein zu

$$\xi_u du'_1 + \xi_v dv'_1 \quad \text{und} \quad \xi_u du'_2 + \xi_v dv'_2,$$

ihre äußeren Produkte also verschwinden. Das gibt wegen  $e_u \times e_v = 0$  (Singularitäten irgendwelcher Art sollen selbstverständlich ausgeschlossen sein) und<sup>2</sup>

$$\xi_u = a e_u + b e_v, \quad \xi_v = c e_u + d e_v \quad (8)$$

sofort die Beziehung

$$b du_i dv'_i - a dv_i du'_i + d du_i dv'_i - c dv_i dv'_i = 0 \quad (i = 1, 2)$$

und nach einfacher Rechnung

$$\begin{aligned} E &= \lambda [a^2 l + 2 a b m + b^2 n] \\ F &= \lambda [a c l + (b c + a d) m + b d n] \\ G &= \lambda [c^2 l + 2 c d m + d^2 n] \end{aligned} \quad (9)$$

oder wegen (5)

$$\begin{aligned} E &= \lambda (a L + b M) \\ F &= \lambda (a M + b N) = \lambda (c L + d M) \\ G &= \lambda (c M + d N). \end{aligned} \quad (10)$$

<sup>1</sup> Vgl. »R. F. I«, (3) und (3').

»R. F. I«, (2).

Wie nicht anders zu erwarten, ist durch *b*) die Form  $\varphi$  bis auf den Faktor  $\lambda$  bestimmt. Erwähnt sei, daß aus (10) noch die zu (6) analoge Relation

$$cL + (d-a)M - bN = 0 \quad (11)$$

folgt.

2. Wir gehen nun an die Bestimmung von  $\lambda$  mittels der Forderungen *a*) und *c*). Es möge also durch

$$u = u(\bar{u}, \bar{v}), \quad v = v(\bar{u}, \bar{v}) \quad (12)$$

mit

$$\frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial(u, v)} = D \neq 0 \quad (13)$$

auf (e) und (g) neue Parameter eingeführt werden. Man erhält dann folgende Transformationsformeln<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} L &= \bar{u}_u^2 \bar{L} + 2 \bar{u}_u \bar{v}_u \bar{M} + \bar{v}_u^2 \bar{N} \\ M &= \bar{u}_u \bar{u}_v \bar{L} + (\bar{u}_u \bar{v}_v + \bar{u}_v \bar{v}_u) \bar{M} + \bar{v}_u \bar{v}_v \bar{N} \\ N &= \bar{u}_v^2 \bar{L} + 2 \bar{u}_v \bar{v}_v \bar{M} + \bar{v}_v^2 \bar{N} \end{aligned} \quad (14)$$

und

$$\begin{aligned} D \bar{a} &= -c \bar{u}_u \bar{v}_u - d \bar{u}_v \bar{v}_u + a \bar{u}_u \bar{v}_v + b \bar{u}_v \bar{v}_v \\ D \bar{b} &= -c \bar{v}_u^2 + (a-d) \bar{v}_u \bar{v}_v + b \bar{v}_v^2 \\ D \bar{c} &= c \bar{u}_u^2 + (d-a) \bar{u}_u \bar{u}_v - b \bar{u}_v^2 \\ D \bar{d} &= c \bar{u}_u \bar{v}_u + d \bar{u}_u \bar{v}_v - a \bar{u}_v \bar{v}_u - b \bar{u}_v \bar{v}_v. \end{aligned} \quad (15)$$

Aus (15) folgt insbesondere, daß

$$\bar{a} \bar{d} - \bar{b} \bar{c} = ad - bc \quad (16)$$

und

$$\bar{a} + \bar{d} = a + d \quad (17)$$

ist, d. h. daß diese Ausdrücke in der Tat Invarianten sind, wie es nach ihrer Bedeutung<sup>2</sup> nicht anders zu erwarten war.

Setzt man nun in

$$\frac{\varphi}{\lambda} = [\bar{a} \bar{L} + \bar{b} \bar{M}] d\bar{u}^2 + [\bar{c} \bar{L} + (\bar{a} + \bar{d}) \bar{M} + \bar{b} \bar{N}] d\bar{u} d\bar{v} + [\bar{c} \bar{M} + \bar{d} \bar{N}] d\bar{v}^2 \quad (18)$$

zunächst  $d\bar{u} = \bar{u}_u du + \bar{u}_v dv$ ,  $d\bar{v} = \bar{v}_u du + \bar{v}_v dv$  und für  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$ ,  $\bar{c}$ ,  $\bar{d}$  ihre Ausdrücke ein und ordnet nach  $du^2$ ,  $du dv$ ,  $dv^2$ , so erhält man z. B. als Koeffizient von  $du^2$

<sup>1</sup> W. Blaschke, Differentialgeometrie II, p. 104. Dieselben Formeln gelten natürlich auch für  $l$ ,  $m$  und  $n$ .

<sup>2</sup> R. F. I«, Formel (8') und (9').

$$a [\bar{L}\bar{u}_u^2 + 2\bar{M}\bar{u}_u\bar{v}_u + \bar{N}\bar{v}_u^2] + b [\bar{L}\bar{u}_u\bar{u}_v + \bar{M}(\bar{u}_u\bar{v}_v + \bar{u}_v\bar{v}_u) + \bar{N}\bar{v}_u\bar{v}_v] = \\ = aL + bM,$$

so daß sich für (18) schließlich

$$[aL + bM] du^2 + [cL + (a+d)M + bN] du dv + [cM + dN] dv^2 = \\ = \frac{\varphi}{\lambda}$$

ergibt. Das heißt aber, daß der Faktor  $\lambda$  eine Invariante sein muß, wenn die Forderung a) erfüllt sein soll; erst durch die Forderung c) wird  $\lambda$  völlig bestimmt. Beachtet man nämlich, daß in der elementaren Flächentheorie das Quadrat des Bogenelements des sphärischen Bildes mit der negativ genommenen vierten Grundform übereinstimmt, so wird man hier verlangen müssen, daß die Formeln (9) die Werte

$$E = e = -l, \quad F = f = m, \quad G = g = n$$

liefern, wenn man ( $\chi$ ) mit der Eichfläche ( $e$ ) zusammenfallen läßt, d. h. in (8) für den Augenblick  $a = d = 1$ ,  $b = c = 0$  setzt. Das gibt sofort  $\lambda = -1$ , so daß (9) und (10) richtig lauten

$$E = -[a^2l + abm + b^2n] = -[aL + bM] \quad (19) \\ F = -[acl + (bc + ad)m + bdn] = [aM + bN] = -[cL + dM] \\ G = -[c^2l + 2cdm + d^2n] = -[cM + dN].$$

Daraus ergibt sich noch

$$a = \frac{FM - EN}{LN - M^2} \quad b = \frac{EM - FL}{LN - M^2} \quad (20) \\ c = \frac{GM - FN}{LN - M^2} \quad d = \frac{FM - GL}{LN - M^2}$$

Setzt man diese Ausdrücke in (8) ein und löst diese nach  $e_u$  und  $e_v$  auf, so stimmt das Ergebnis formal vollständig mit den Weingarten'schen Formeln der elementaren Flächentheorie überein.

3. Die vier quadratischen Differentialformen  $\varphi, \psi,$

$$\varphi_0 = d\sigma^2 = e du^2 + f du dv + g dv^2 = -\psi_0$$

und  $\psi_0$  selbst bezeichnen wir der Reihe nach als erste, zweite, dritte und vierte Grundform der relativen Flächentheorie. Die dritte Grundform ist das Quadrat des Relativbogenelements der Eichfläche selbst. Sind

1 D. i. die zweite Grundform des sphärischen Bildes, also die Form (1) für (e) als Einheitskugel.

$$K = \frac{1}{ad-bc} = \frac{1}{R_1 R_2}, \quad H = \frac{1}{2} \frac{a+d}{ad-bc} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (21)$$

Relativkrümmung und mittlere Relativkrümmung von (x) bezüglich (e),  $R_1$  und  $R_2$  die Radien der Hauptflächen,<sup>1</sup> so bestätigt man leicht die Richtigkeit der Relation

$$K\varphi - 2H\psi + \psi_0 = 0. \quad (22)$$

Von den vier Grundformen sind also auch hier nur zwei unabhängig voneinander.

Für die Diskriminanten der Grundformen gilt

$$EG - F^2 = (ad-bc)(LN - M^2) = (ad-bc)^2(lu - m^2), \quad (23)$$

$$LN - M^2 = (ad-bc)(lu - m^2), \quad e\varrho - f^2 = lu - m^2.$$

Also wird

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{lu - m^2}{LN - M^2} = \sqrt{\frac{lu - m^2}{EG - F^2}} \quad (24)$$

Wir berechnen noch die bilinearen Invarianten der Grundformen. Zunächst ist

$$Lu - 2Mm + Nl = (a+d)(lu - m^2), \quad (25)$$

$$EN - 2FM + GL = (a+d)(LN - M^2); \quad (26)$$

daraus folgt wegen (21) und (23)

$$2H = \frac{EN - 2FM + GL}{EG - F^2} = \frac{Lu - 2Mm + Nl}{LN - M^2} \quad (27)$$

Ferner erhält man

$$\begin{aligned} E\varrho - 2Ff + Gc &= [(a+d)^2 - 2(ad-bc)](lu - m^2) = \\ &= 2(2H^2 - K)(EG - F^2). \end{aligned} \quad (28)$$

Nun ist aber

$$2H^2 - K = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} \right) = C \quad (29)$$

in der elementaren Flächentheorie die Casorati'sche Krümmung; folgt also, auch für die relative Flächentheorie, richtig,

$$2C = \frac{E\varrho - 2Ff + Gc}{EG - F^2} \quad (30)$$

<sup>1</sup>R. F. I., (8), (9), (8') und (9').

4. Wenn das Verhältnis  $ds:d\sigma$  der Relativbogenlängen entsprechenden Punkten von  $(\gamma)$  und  $(e)$  nur von den Parameterwerten, nicht aber von der Fortschrittrichtung abhängt, so kann man in naheliegender Verallgemeinerung von einer relativ-konformen Abbildung von  $(\gamma)$  auf  $(e)$  sprechen. Ähnlich wie der elementaren Flächentheorie gilt der Satz: Die einzigen Flächen, die sich auf die Eichfläche  $(e)$  relativ-konform abbilden lassen, sind die Relativminimalflächen und die aus  $(e)$  durch zentrische Ähnlichkeiten entstehenden Flächen

$$\gamma = R e + a, \quad (31)$$

die ja an Stelle der Kugeln des Raumes treten.

Ist nämlich  $(e)$  auf Asymptotenparameter bezogen, so ist  $l = n = 0$ ,  $m = 0$ , daher  $e = g = 0$ ,  $f = -m$  und somit  $E = -2abm$ ,  $F = -(ad+bc)m$ ,  $G = -2cdm$ . Damit also

$$\frac{ds^2}{d\sigma^2} = \frac{ab du^2 + (ad+bc) du dv + cd dv^2}{du dv}$$

von  $du$  und  $dv$  unabhängig wird, muß

$$ab = 0, \quad cd = 0, \quad ad+bc \neq 0.$$

Diese Bedingungen sind dann und nur dann erfüllt, wenn entweder  $a = d = 0$ ,  $bc \neq 0$  oder  $b = c = 0$ ,  $ad \neq 0$  ist. Im ersten Fall ergeben sich die Relativminimalflächen,<sup>1</sup> im zweiten erhält man wegen (6) zunächst  $a = d$ ; die Gleichungen (8) werden zu

$$\xi_u = a e_u, \quad \xi_v = a e_v \quad (32)$$

und daraus folgt durch Differentiation nach  $v$ , beziehungsweise  $u$

$$\xi_{uv} = a e_{uv} + a_v e_u = a e_{uv} + a_u e_v, \quad (33)$$

also  $a_v e_u = a_u e_v$  oder  $a_u = a_v = 0$ .  $a$  ist somit konstant und aus (32) folgt durch Integration

$$\xi = a e + a.$$

<sup>1</sup> Vgl. »R. F. I«, (14') und (16).

# ZOBODAT - [www.zobodat.at](http://www.zobodat.at)

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse](#)

Jahr/Year: 1927

Band/Volume: [136\\_2a](#)

Autor(en)/Author(s): Duschek Adalbert

Artikel/Article: [Über relative Flächentheorie. 265-270](#)