

Über kapillare Leitung des Wassers im Boden (Aufstieg, Versickerung und Anwendung auf die Bewässerung)

Von

Josef Kozeny in Wien

(Mit 6 Textfiguren)

(Vorgelegt in der Sitzung am 28. April 1927)

Wer die einschlägige Literatur überprüft, findet eine Menge schon vorhandener wertvoller Beobachtungen und Messungen. Doch fehlt meist die gesetzmäßige Beziehung, in der die einzelnen Größen zueinander stehen und die in einer mehr oder weniger einfachen Formel zum Ausdruck kommt. Diesen Mangel empfinden insbesondere alle jene, die sich mit der Regelung des Wasserhaushaltes im Boden zum Nutzen der Landwirtschaft befassen. Die praktisch tätigen Kultur-Ingenieure, die die nötigen Bauwerke bemessen sollen, sind leider allzuoft auf grobe Schätzungen angewiesen. Diesem Übelstand abzuhelpfen, sollen nachstehende Betrachtungen dienen, wobei namentlich die Messungen von Wollny und von Atterberg wertvolle Dienste leisteten und deren strenge Systematik dem Bestreben nach Ermittlung der isolierten Faktoren entsprang.

In den folgenden Entwicklungen wird die Voraussetzung gemacht, daß sich die Bewegungsvorgänge in einem Geschwindigkeitsbereiche vollziehen, wo die Geschwindigkeit v proportional ist dem Druckgefälle I , also die Gleichung gilt

$$v = k \cdot I = k \cdot \frac{dh_1}{ds}, \quad (1)$$

wo k die Durchlässigkeit und h_1 die auf dem Stromlinienstück verbrauchte Druckhöhe darstellt. Versucht man für derartige Bewegungszustände des Bodenwassers die Bahnen sichtbar zu machen, wie dies schon von verschiedenen Seiten geschehen ist, so nimmt man bei flüchtiger Betrachtung Stromlinien wahr, wie sie die Potentialtheorie für die vorliegenden Bedingungen ergibt. Die nähere Betrachtung zeigt, daß die wahren Wege der Flüssigkeitsteilchen viel verwickelter um die Bodenkörner herum verlaufen. Der Versuch lehrt aber, daß es möglich ist, uns ein Bild des Vorganges zu machen, wenn wir einen Boden zugrunde legen, dessen Eigenschaften durch das Vorhandensein der früher erwähnten Stromlinien bedingt sind. Eine solche Eigenschaft können wir unmittelbar ableiten.

Denken wir uns eine Stromröhre vom Querschnitt F und dem freien Durchgangsquerschnitt f , so gilt für die in der Zeit dt durchfließende Wassermenge die Beziehung

$$q \cdot dt = F \cdot ds \cdot p, \quad (2)$$

wo q die in der Zeiteinheit durchfließende Menge, ds das in der Zeit dt zurückgelegte Wegelement und p das Porenvolumen in Bruchteilen des Gesamtvolumens bedeutet. Ist nun v_p die Porengeschwindigkeit und v die Filtergeschwindigkeit, nämlich $\frac{\text{Durchflußmenge}}{\text{Gesamtquerschnittsfläche}}$,

so gilt noch

$$v_p \cdot f = v \cdot F = q. \quad (3)$$

Aus (2) und (3) ergibt sich mit $v_p = \frac{ds}{dt}$

$$\frac{v}{v_p} = \frac{f}{F} = p. \quad (4)$$

Denken wir uns den Querschnitt der Stromröhre in der xy Ebene, so gilt die Bewegungsgleichung

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) v_p = - \frac{\gamma I}{\mu}, \quad (5)$$

wo v_p die Geschwindigkeit im Punkte x, y des Porenquerschnitts, γ das spezifische Gewicht und μ die Zähigkeit bedeuten. Mit den neuen Variablen

$$\xi = \frac{x}{\sqrt{f}} \quad \text{und} \quad \eta = \frac{y}{\sqrt{f}}$$

erhalten wir

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) v_p = - \frac{\gamma I}{\mu} \quad (6)$$

mit der Lösung

$$v_p = \frac{\gamma \cdot I \cdot f}{\mu} \Psi \left(\frac{x}{\sqrt{f}}, \frac{y}{\sqrt{f}} \right). \quad (7)$$

Die Funktion ψ ist gegeben durch

$$\psi \left(\frac{x}{\sqrt{f}}, \frac{y}{\sqrt{f}} \right) = - \frac{x^2 + y^2}{4} + \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n \cdot \Phi_n(x + iy), \quad (8)$$

wo Φ das Zeichen für eine harmonische Funktion sei und bei Annahme des Haftens die Randbedingung gilt

$$\psi \left(\frac{x}{\sqrt{f}}, \frac{y}{\sqrt{f}} \right) = 0 \quad (9)$$

oder

$$\frac{x^2 + y^2}{4f} = \sum_1^{\infty} a_n \cdot \Phi_n(x + iy). \quad (10)$$

Schreiben wir (10) in Polarkoordinaten r und φ , so kann für den Rand mit $r = \rho$ geschrieben werden

$$\frac{\rho^2}{4f} = \sum_1^{\infty} a_n \cdot \Phi_n(\rho \cdot e^{i\varphi}). \quad (11)$$

ist der Umfang des Porenquerschnitts u und sei der Halbmesser eines Kreises vom selben Umfang

$$\rho_m = \frac{u}{2\pi},$$

kann man für (8) mit Rücksicht auf die Randbedingung schreiben

$$\begin{aligned} \psi \left(\frac{r \cos \varphi}{\sqrt{f}}, \frac{r \sin \varphi}{\sqrt{f}} \right) &= \\ &= \frac{u^2}{16 \pi^2 \cdot f} \left(\sum_1^{\infty} a_n \cdot \Phi_n(r e^{i\varphi}) \cdot \frac{4f}{\rho_m^2} - \frac{r^2}{\rho_m^2} \right) = \frac{u^2}{16 \pi^2 \cdot f} \cdot A. \end{aligned} \quad (12)$$

Dann gilt für die mittlere Porengeschwindigkeit

$$v_p = \frac{\int v_p \cdot dF}{\int dF} = \frac{\gamma \cdot I f}{u \cdot F} = \frac{1}{16 \pi^2} \cdot \frac{u^2 \cdot F}{f} \cdot A_m, \quad (13)$$

wobei

$$A_m = \frac{\iint A \cdot r \, dr \, d\varphi}{\iint r \cdot dr \cdot d\varphi}$$

den über die Fläche genommenen Mittelwert von A darstellt. Wird

die Umfangsentwicklung durch $u_0 = \frac{u^2}{f}$ dargestellt, so ist einleuchtend, daß A und hiemit auch v_p um so kleiner werden, je größer u_0

wird. Im Grenzfall größter Umfangsentwicklung bei gegebener Fläche wird $v_p = \theta$, da alle Querschnittspunkte an den Rand rücken. Ebenso muß der Mittelwert A_m um so kleiner werden, je größer die Umfangsentwicklung wird, und zwar muß er in stärkerem Maße kleiner werden als

$$\frac{16 \pi^2 c}{u_0} \text{ kleiner wird,}$$

wobei c eine reine Zahl ist, die nur von der Form des Querschnitts abhängt. Diese Bedingung wird erfüllt durch den Ausdruck

$$\frac{16 \pi^2 \cdot c}{u_0^\zeta} \text{ für alle } \zeta > 1.$$

Nun besteht der Porenquerschnitt der gedachten Stromröhre aus einer bestimmten Anzahl n einzelner Porenquerschnitte, deren Größe f_1 wir vorerst als gleich annehmen wollen. Dann ist

$$f = n \cdot f_1 \text{ und } u = n \cdot u_1,$$

wenn u_1 der Umfang der Einzelpore ist.

Schreiben wir Gleichung (13) in der Form

$$v_p = \frac{\gamma I}{\mu} \cdot F \cdot W, \quad (14)$$

setzen wir also

$$W = \frac{f}{F} \cdot \frac{1}{16 \pi^2} \cdot \frac{u^2}{f} \cdot A_m, \quad (14a)$$

so muß dieser Ausdruck unveränderlich bleiben, wenn wir die Größe der Porenfläche, nicht aber ihre Form verändern, wenn wir also n ändern. Nun kann man nach früherem setzen

$$W = \frac{f}{F} \cdot c \cdot \frac{1}{u_0^{\zeta-1}} = \frac{c}{F} \cdot \frac{f^\zeta}{u^{2\zeta-2}} = \frac{c}{F} \cdot \frac{f_1^\zeta}{u_1^{2\zeta-2}} \cdot \frac{1}{n^{\zeta-2}}, \quad (15)$$

aus welcher Gleichung zu ersehen ist, das W in bezug auf n invariant ist, wenn der Exponent $\zeta = 2$ gesetzt wird.

Wohl aber ändert sich mit n die Filtergeschwindigkeit v . Wir erhalten die Gleichung

$$v_p = \frac{\gamma I}{\mu} \cdot c \cdot \frac{f}{F} \cdot \frac{f}{u^2} \cdot F \quad (16)$$

und weiter

$$v = k \cdot I = \frac{f}{F} \cdot v_p = \frac{\gamma I}{\mu} \cdot c \cdot \left(\frac{f}{u}\right)^2 \cdot \frac{f}{F}. \quad (17)$$

Da $\frac{f}{u}$ unabhängig von $\frac{f}{F}$ ist, und letzteres konstant $= p$ ist

längs der Stromlinie, so muß auch der Wert $\frac{f}{u}$ längs der Stromröhre konstant bleiben. Also muß für eine zylindrische Stromröhre, deren Querschnitt F immer gleiche Größe hat, auch f und daher u überall gleich groß sein, so daß die Bodenoberfläche in einer Stromröhre von der Länge l

$$o = u \cdot l$$

gesetzt werden kann. Wir können also auch schreiben

$$\frac{f}{u} = \frac{f}{F} \cdot \frac{1}{u \cdot l} \cdot l \cdot F = \frac{p}{o} \cdot V, \quad (18)$$

wenn V das Volumen der Stromröhre von der Länge l ist.

Dann kann für (17) geschrieben werden

$$v = \frac{\gamma I}{\mu} \cdot c \cdot \frac{p^3}{o^2} \cdot V^2 = \frac{\gamma I}{\mu} \cdot c \cdot \frac{p^3}{o_1^2} \quad (19)$$

und wir haben vor uns eine Beziehung, die schon E. Krüger¹ empirisch gefunden hat, daß die Filtergeschwindigkeit umgekehrt proportional ist dem Quadrat der Körneroberfläche pro Volumseinheit.

Die Formzahl c unterliegt nur kleinen Schwankungen, wie dies schon von Boussinesq² festgestellt wurde. Folgende Tabelle gibt eine Übersicht:

	Kreis	Quadrat	gleichs. Dreieck	Streifen
$\frac{u^2}{f}$	$4\pi = 12.57$	16	$12 \cdot \sqrt{3} = 20.78$	
	0.50	0.5619	0.5974	$\frac{2}{3} = 0.66$
$c \cdot \frac{f}{u^2}$	$\frac{1}{8\pi} = 0.0397$	0.0351	0.0288	

Während sich unsere bisherige Rechnung auf den scheinbaren Weg längs einer Stromlinie bezogen hat, müssen wir, um dieselbe Ergiebigkeit wie bei den tatsächlichen verwickelten Bahnen zu erhalten, das reduzierte Gefälle einführen

$$I_{\text{red.}} = \frac{l_s}{l_w} \cdot I,$$

wo l_s der scheinbare einfachere Weg längs einer Stromlinie und l_w der viel verwickeltere wirkliche Weg ist. Dieses Verhältnis $\frac{l_s}{l_w}$ wird um so

kleiner, je kleiner die in der Durchströmungsrichtung gelegene Dimension des Bodenkornes ist, gegenüber jenen in der zur Strömungsrichtung senkrechten Ebene. Sind die Körner nicht vollkommen sym-

metrisch, so kann sich bei orientierter Lagerung das Verhältnis $\frac{l_s}{l_w}$

in jeder Richtung ändern. Also wird je nach der Strömungsrichtung eine größere oder kleinere Durchlässigkeit vorkommen können, wobei es eine Richtung größter und kleinster Durchlässigkeit geben wird. Es ist ohneweiters verständlich, daß zum Beispiel Material aus gerichteten schuppigen Teilchen beinahe undurchlässig ist, falls

¹ E. Krüger, Die Grundwasserbewegung. Internationale Mitteilungen für Bodenkunde, 1918, Bd. VIII, p. 105.

² J. Boussinesq, Comptes rendus de l'académie, Paris 1914.

die Strömungsrichtung senkrecht zu den Schüppchen steht und die größte Durchlässigkeit auftritt, wenn die Strömung in der Ebene dieser Schüppchen erfolgt. Der Wert $\frac{l_s}{l_w}$ läßt sich zahlenmäßig schwer fassen,¹ jedenfalls ist er kleiner als 1.

Die Oberfläche, bezogen auf die Volumseinheit, ist vor allem abhängig von der Größe und der Form der Bodenkörner. Da das Volumen mit der dritten Potenz der Längenausdehnung wächst, die Oberfläche jedoch nur mit der zweiten Potenz, so wird α_1 bei kleinen Kornabmessungen große Werte annehmen.

Beziehen wir die Oberfläche eines runden Bodenkornes auf jene eines plättchenförmigen Gebildes mit derselben Raumerfüllung und sei die Dicke δ des letzteren nur der n te Teil des Korndurchmessers, so finden wir, daß die Oberfläche des Plättchens etwa $\frac{n}{3}$ mal größer wird als jene des runden Kornes. Die Durchlässigkeit nimmt dann umgekehrt proportional mit n^2 , also ziemlich rasch ab. Die weiteren folgenden Betrachtungen sollen sich vorerst nur auf Sande mit mehr oder weniger runden Körnern beziehen. Führen wir den Begriff des wirksamen Korndurchmessers d_w im Sinne E. Krügers ein, indem wir uns ein Kugelhaufwerk gleich großer Kugeln denken mit demselben Porenvolumen und derselben Körneroberfläche in der Raumeinheit wie bei dem vorliegenden zu untersuchenden Sandgemisch, so gilt bei einer Anzahl n der Kugeln

$$\frac{n \pi d_w^3}{6} = V \cdot (1-p) \quad \text{und} \quad n \cdot \pi \cdot d_w^2 = \alpha,$$

also ist

$$\frac{V}{\alpha} = \frac{1}{\alpha_1} = \frac{d_w}{6(1-p)},$$

so daß die Gleichung (19) die Form erhält

$$v = \frac{\gamma I}{\mu} \cdot c \cdot \frac{l_s}{l_w} \cdot \frac{p^3}{\alpha_1^2} = \frac{\gamma I}{\mu} \cdot c \cdot \frac{l_s}{l_w} \cdot \frac{p^3}{36(1-p)^2} \cdot d_w^2. \quad (20)$$

Sehr wichtig ist die richtige Bestimmung von d_w , und es seien hier insbesondere die Arbeiten von Zunker,² Krauss³ u. a. erwähnt.

¹ Slichter berechnet die Porenlänge für Kugelhaufwerke bestimmter Lagerung. Siehe Annual Report of the United States Geological Survey 1899, p. 311.

² Zunker, Die spezifische Oberfläche des Bodens. Der Kulturtechniker. Breslau 1923, p. 311.

³ Krauss, Vortrag auf dem Kongreß für Bodenkunde zu Prag 1922, Der Kulturtechniker 1923, p. 106.

Kozeny, Über Grundwasserbewegung, Wasserkraft und Wasserwirtschaft 1927, p. 69 und 70.

Daß die Filtergeschwindigkeit proportional mit $\frac{p^3}{(1-p)^2}$ wächst,

scheinen Versuche, die Dr. J. Donat¹ ausgeführt hat, zu bestätigen. Verwendet wurde reiner Feuersteinsand, dessen Körner ganz unregelmäßig geformt, eckig und ziemlich platt waren. Die mittlere Ausdehnung betrug etwa 0·12 mm und wurde mit dem Mikroskop gemessen. Dieser Feinsand wurde in einen Glaszylinder geschüttet;

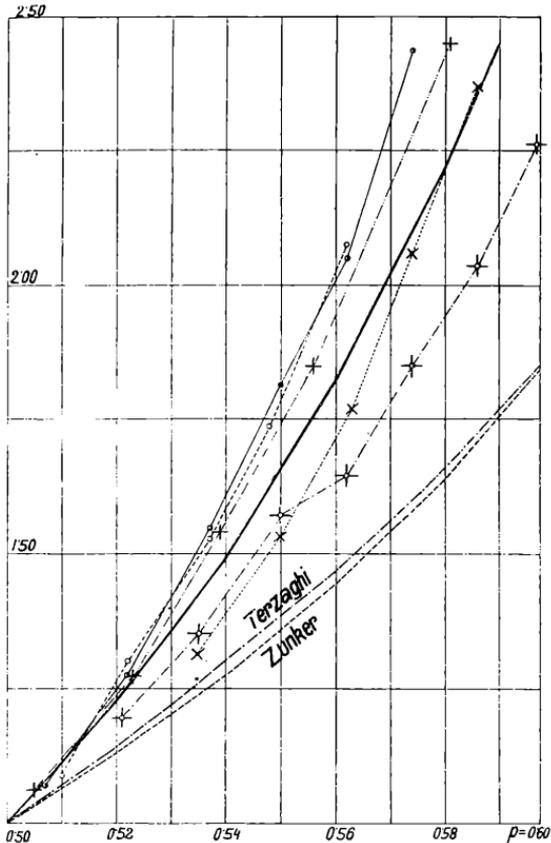


Fig. 1.

er zeigte ein Porenvolumen von etwa 50% des Gesamtvolumens. Nun wurde durch eine Bodenöffnung Wasser durchgeleitet und oben wieder abgeleitet. Bei einer bestimmten kritischen Geschwindigkeit erfolgte eine Umlagerung, das Porenvolumen wurde größer, was sich im Wachsen der Höhe der Sandsäule bemerkbar machte. Es konnte ein größtes Porenvolumen von etwa 60% des Gesamtvolumens erreicht werden. War letzteres geschehen, so konnten alle Zwischenstufen des Porenvolumens von 60 bis 50% durch entsprechendes

¹ Die Versuche wurden an der Hochschule für Bodenkultur in Wien ausgeführt.

Klopfen an den Zylinder erzeugt werden. Für jedes so erhaltene Porenvolumen wurde dann die Durchlässigkeitsuntersuchung gemacht, indem das Wasser — von oben nach unten — zurückgeleitet wurde. Die ermittelten Durchlässigkeiten wurden auf jene bei 50% Porenvolumen als Einheit bezogen und in der Figur 1 als Funktionen der Porenvolumina aufgetragen. In derselben Weise wurde mit den rechnerisch ermittelten Werten verfahren, nämlich

$$k = k_1 \cdot \frac{p^3}{(1-p)^2} \text{ nach vorliegender Entwicklung,}$$

$$\text{beziehungsweise } k = k_2 \cdot \frac{p}{(1-p)^2} \text{ nach Zunker}$$

$$\text{und } k = k_3 \cdot \frac{p-0.13}{\sqrt[3]{1-p}} \text{ nach Terzaghi,}^1$$

wobei wieder die Werte $k_{p=0.50}$ als Einheit genommen wurden, also

$$k_1 = 2, \quad k_2 = 0.5 \quad \text{und} \quad k_3 = \frac{\sqrt[3]{1-0.5}}{0.5-0.13} = 4.59 \text{ sind.}$$

Eine Übersicht der gerechneten Werte gibt nachstehende Tabelle.

p	$\frac{p}{(1-p)^2}$	$\frac{p-0.13}{\sqrt[3]{1-p}}$	$\frac{p^3}{(1-p)^2}$	k nach		
				Zunker	Terzaghi	Kozeny
0.50	2	0.218	0.5	1	1	1
0.52	2.26	0.249	0.613	1.13	1.143	1.226
0.54	2.55	0.284	0.747	1.27	1.30	1.494
0.56	2.89	0.32	0.91	1.445	1.468	1.82
0.58	3.28	0.362	1.11	1.64	1.66	2.22
0.60	3.75	0.409	1.35	1.875	1.878	2.70

Die mit $\frac{p^3}{(1-p)^2}$ gerechneten k sind in der Figur 1 durch eine stärkere Kurve verbunden, die gut mit den Messungen zusammenfällt.

O. Schmiedel² findet aus Versuchen von Darcy, daß die Durchlässigkeiten von Sanden mit $p = 0.30, 0.36$ und 0.40 sich verhalten wie $\frac{10.000}{18} : 1000 : \frac{10.000}{7}$ oder wie $1 : 1.8 : 2.57$. Dies

würde der Formel mit $\frac{p^{2.5}}{(1-p)^{1.5}}$ entsprechen, die die Werte $1 : 1.80 : 2.54$ ergibt.

¹ Terzaghi, Erdbaumechanik, Wien 1925, p. 119.

² O. Schmiedel, Estudio sobre les cantidades de agua necesarias en el riego. Revista del Universidad de Buenos Aires Nr. 122, p. 228, 1925.

Gehen wir nun über zur kapillaren Leitung, wobei wir uns auf den Zustand vollgefüllter Poren beschränken wollen. Bekanntlich kann man aus dem zweiten Hauptsatz der Kapillarität ableiten, daß die Wand eines Zylinders von beliebiger Querschnittsform und dem Umfang u eine Zug-, beziehungsweise Tragkraft auf eine benetzende Flüssigkeit ausübt

$$P = \sigma \cdot u = \sigma \frac{u}{f} \cdot f = \frac{6\sigma}{d_w} \cdot (1-p) \cdot F, \quad (21)$$

wobei σ die Kapillaritätskonstante etwa $74 \text{ Dyn} \cdot \text{cm}^{-1}$ beträgt. Diese Zugkraft bewirkt, daß das Wasser in den Poren des Sandgemisches aufsteigt, und auch hier gilt der Satz, daß die zeitliche Änderung der Bewegungsgröße gleich ist den wirksamen Kräften.

Ist nun B die Bewegungsgröße, W der Bewegungswiderstand, G das Gewicht des gehobenen Wassers und β der Winkel, den das Stromlinienelement ds mit der Wagrechten einschließt, so gilt

$$\frac{dB}{dt} = P - W - G \sin \beta. \quad (22)$$

Nun ist

$$B = \rho \cdot p \cdot F \cdot s \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{\rho \cdot p \cdot F}{2} \cdot \frac{ds^2}{dt}, \quad (23)$$

wobei ρ die Dichte vorstellt, oder

$$\frac{dB}{dt} = \frac{\rho \cdot p \cdot F}{2} \cdot \frac{d^2 s^2}{dt^2}. \quad (24)$$

Mit Rücksicht auf Gleichung (1) ist die zur Überwindung des Widerstandes nötige Pressung

$$W = \rho \cdot g \cdot h_1 \cdot p \cdot F = \frac{\rho \cdot g \cdot F \cdot p}{2k} \frac{ds^2}{dt}, \quad (25)$$

ferner ist

$$G \sin \beta = p \cdot s \cdot F \cdot \rho \cdot g \cdot \sin \beta, \quad (26)$$

also verwandelt sich (22) in

$$\frac{\rho p F}{2} \cdot \frac{d^2 s^2}{dt^2} = \frac{6 \cdot \sigma (1-p)}{d_w} \cdot F - \frac{\rho g p F}{2k} \frac{ds^2}{dt} - \rho \cdot g \cdot p \cdot s \cdot F \sin \beta \quad (27)$$

oder

$$\frac{d^2 s^2}{dt^2} + m \frac{ds^2}{dt} + \nu s + n = \Theta, \quad (28)$$

wenn

$$\frac{g}{k} = m, \quad 2g \sin \beta = \nu \quad \text{und} \quad -\frac{12\sigma}{\rho d_w} \frac{1-p}{p} = n$$

gesetzt wird.

Für den Fall horizontaler kapillarer Leitung ist $\sin \beta$ und hiemit $\nu = \theta$ und die Lösung von

$$\frac{d^2 s^2}{dt^2} + m \cdot \frac{ds^2}{dt} + n = \theta \quad (29)$$

lautet

$$s^2 + \frac{n}{m} t + c_0 = c_1 \cdot e^{-c_2 t} \quad (30)$$

mit den Konstanten c_0 , c_1 und c_2 . Sei für $t = \theta$, auch $s = \theta$, so muß $c_0 = c_1$ sein.

Aus (29) ist $c_2 = m$ also gilt

$$s^2 + \frac{n}{m} t = c_1 (e^{-mt} - 1) \quad (30a)$$

und weiters

$$\left(\frac{ds}{dt} \right)_{t=\theta} = \frac{-\frac{n}{m} - mc_1}{\theta} \quad (31)$$

Da $\frac{ds}{dt}$ am Beginne der Bewegung einen endlichen Wert haben soll, so muß nach (31)

$$\frac{n}{m} = -mc_1, \text{ beziehungsweise } c_1 = -\frac{n}{m^2}$$

sein.

Daher lautet die Lösung

$$s^2 + \frac{n}{m} t = -\frac{n}{m^2} (e^{-mt} - 1) \quad (32)$$

mit der Anfangsgeschwindigkeit

$$v_0 = \left(\frac{ds}{dt} \right)_{t=\theta} = \sqrt{-\frac{n}{2}} = \sqrt{\frac{6\sigma}{\rho d_w} \cdot \frac{(1-p)}{p}} \quad (33)$$

Also je kleiner der wirksame Korndurchmesser d_w ist, desto größer ist die Anfangsgeschwindigkeit.

Für den kapillaren Aufstieg in der lotrechten Richtung $s = h$ gilt die Bewegungsgleichung

$$\frac{d^2 h^2}{dt^2} + m \cdot \frac{dh^2}{dt} + \nu h + n = \theta, \quad (34)$$

wobei $\nu = 2g$ zu setzen ist, da $\sin \beta = 1$ ist. Man kann auch schreiben

$$\frac{d^2 h}{dt^2} + \frac{1}{h} \left(\frac{dh}{dt} \right)^2 + m \cdot \frac{dh}{dt} + \frac{n}{2h} + \frac{\nu}{2} = \theta. \quad (35)$$

Für den Gleichgewichtszustand der Ruhe, wenn also $\frac{d^2 h}{dt^2}$ und $\frac{dh}{dt}$ Null sind, ergibt sich die größte Steighöhe des Wassers

$$H = -\frac{n}{\nu} = \frac{6 \sigma}{\rho \cdot g} \cdot \frac{1-p}{p} \cdot \frac{1}{d_w} = 0.446 \cdot \frac{1-p}{p} \cdot \frac{1}{d_w}. \quad (36)$$

Als eine gute Näherungslösung von (35) kann betrachtet werden der Ausdruck

$$\begin{aligned} t + \frac{1}{m} (e^{-mt} - 1) &= \frac{2m}{\nu} \left\{ \frac{n}{\nu} \cdot \ln \left(\frac{n + \nu h}{n} \right) - h \right\} = \\ &= -\frac{2m}{\nu} \cdot \left\{ H \cdot \ln \left(1 - \frac{h}{H} \right) + h \right\} = +\frac{2m}{\nu} \cdot H \cdot \sum_2^{\xi} \frac{1}{\xi} \cdot \left(\frac{h}{H} \right)^{\xi}. \quad (37) \end{aligned}$$

Denn aus (37) läßt sich leicht durch Differenzieren ableiten der Ausdruck

$$\frac{d^2 h}{dt^2} + \frac{1}{1 - \frac{h}{H}} \cdot \frac{1}{h} \cdot \left(\frac{dh}{dt} \right)^2 + m \cdot \frac{dh}{dt} + \frac{n}{2h} + \frac{\nu}{2} = \theta, \quad (38)$$

welcher Ausdruck für den Beginn der Bewegung mit (35) identisch ist. Da die Anfangsgeschwindigkeit rasch abnimmt, kann für den größten Teil der Bewegung das Glied mit dem Geschwindigkeitsquadrat vernachlässigt werden.

Aus (37) ergibt sich

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1 - e^{-mt}}{\frac{2m}{\nu} \left(\frac{n}{n + \nu h} - 1 \right)} \quad (39)$$

und die Anfangsgeschwindigkeit für $t = \theta$, beziehungsweise $h = \theta$

$$v_0 = \left(\frac{dh}{dt} \right)_{t=\theta} = \frac{\theta}{\theta} = -\frac{n}{2} \cdot \frac{dt}{dh}$$

oder

$$\left(\frac{dh}{dt} \right)_{t=\theta} = \sqrt{-\frac{n}{2}} = \sqrt{gH} = \sqrt{0.446 \cdot \frac{(1-p)}{p} \cdot \frac{g}{d_w}}. \quad (40)$$

Die Anfangsgeschwindigkeit ist also um so größer, je größer die kapillare Steighöhe, je feiner also das Material ist.

Die Gleichung (37) kann man auch in der Form schreiben

$$\frac{h^2}{t} = -\frac{n}{2m} \cdot \frac{1 + \frac{e^{-mt} - 1}{mt}}{\sum_2^{\xi} \frac{1}{\xi} \cdot \left(\frac{h}{H}\right)^{\xi-2}} = t g \alpha. \quad (\text{Siehe Fig. 2,})$$

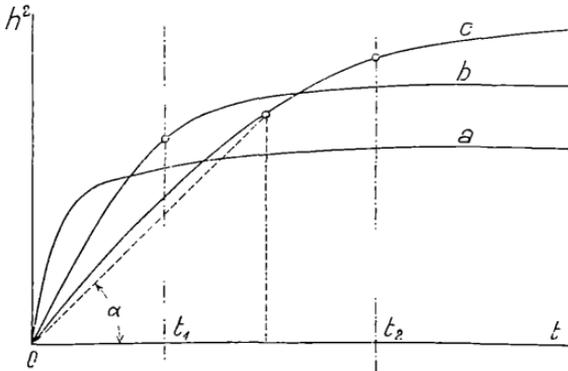


Fig. 2.

Tragen wir die charakteristische Kurve $h^2 = f(t)$ auf (Fig. 2), so sehen wir, daß mit wachsendem t und h der Wert von $\frac{h^2}{t}$ immer kleiner wird, und es beginnt die vorgenannte Kurve mit einem Grenzwert

$$\left(\frac{h^2}{t}\right)_{t=\infty} = -\frac{n}{m} = \frac{12 \sigma}{\rho \cdot g} \cdot \frac{1-p}{d_w} \cdot \frac{k}{p},$$

und da aus (1) und (20)

$$k = \frac{\gamma}{\mu} \cdot c \cdot \frac{p^3}{36(1-p)^2} \cdot d_w^2,$$

so ist

$$\left(\frac{h^2}{t}\right)_{t=\infty} = \frac{\sigma \cdot c}{3 \mu} \cdot \frac{p^2}{(1-p)} \cdot d_w.$$

Die Kurven $h^2 = f(t)$ sind am Anfang um so steiler, je größer H ist. Um so kleiner aber ist die kapillare Steighöhe H , also auch $\frac{h^2}{t}$. Daher müssen sich die Kurven schneiden (Fig. 2), und zwar so, daß zu jedem Zeitpunkt eine bestimmte Korngröße die größte Steigung aufweist. Mit zunehmender Zeit t kommt das Maximum des Anstieges immer feinerem Material zu. Dies wird durch die Untersuchung von Atterberg¹ bestätigt, und dieser schreibt der Korngröße 0.05 bis 0.02 mm, die den größten Anstieg innerhalb 24 Stunden aufweist, eine besondere Bedeutung zu.

¹ Atterberg, Studien auf dem Gebiete der Bodenkunde. Landwirtschaftl. Versuchsstationen 1908, Bd. LXIX, p. 96 und 97.

Nachstehende Tabelle gibt eine Übersicht.¹

Tiefe, mm	h, gemessene Steighöhe in mm nach		
	5 Minuten	35 Minuten	1 Tag
2·0		15	22
1·0	33	37	54
	70	77	115
1	<u>115</u>	150	214
	105	<u>265</u>	376
1 - 0·05			530
0·02			<u>1153</u>
0·01			485
(Tonkreide Versuch)	32	65	192
(Tonboden h. Liebenberg)		3	35

Die entwickelten Gleichungen können wir unmittelbar für das Sickeren des Wassers verwenden bei konstanter Spiegelhöhe z_0 dem Boden. Nur müssen wir v negativ und $n = -2g(H+z_0)$ nehmen, wenn H wieder die kapillare Steighöhe darstellt. Wir erhalten aus (37) die Gleichung

$$1 - e^{-mt} = -\frac{2m}{v} \cdot \left\{ (z_0 + H) \cdot \ln \left(1 + \frac{h}{H+z_0} \right) - h \right\} \quad (43)$$

für die Geschwindigkeit

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= \frac{v}{2m} \cdot (1 - e^{-mt}) \cdot \left(\frac{H+z_0+h}{h} \right) = \\ &= k \left(1 - e^{-\frac{gt}{k}} \right) \cdot \left(\frac{H+z_0+h}{h} \right), \quad (44) \end{aligned}$$

für den Beginn gilt

$$v_0 = \left(\frac{dh}{dt} \right)_{t=0} = \sqrt{g \cdot (H+z_0)} \quad (45)$$

nach langer Zeit, also für große h , wird die Sickerergeschwindigkeit v der Durchlässigkeit k . Auch hier können wir für $\frac{h^2}{t}$ einen

¹ In den Versuchen von Wollny, Forschungen auf dem Gebiete der Agri-physik, 1884, VII. Bd., p. 280, ergibt die zeichnerische Auftragung, daß im Durchmesser 0·01 bis 0·071 mm Durchmesser das Wasser innerhalb einer halben Stunde etwa 234 mm hoch gehoben wurde.

Näherungsausdruck aus (43) entwickeln und erhalten bei Vernachlässigung von $\frac{e^{-mt}-1}{mt}$ die Gleichung

$$\frac{h^2}{t} = \frac{k \cdot (H+z_0)}{\sum_2^{\xi} (-1)^{\xi} \cdot \frac{1}{\xi} \left(\frac{h}{H+z_0}\right)^{\xi-2}}, \quad (46)$$

welcher Ausdruck für kleine h , beziehungsweise große H übergeht in

$$\frac{h^2}{t} = 2k \cdot (H+z_0) = \text{konstant} \quad (47)$$

oder

$$\frac{h}{\sqrt{t}} = \text{konstant} = c. \quad (47a)$$

Daß die Gleichung (47), beziehungsweise (47a) dort zutrifft, wo die gemachten Voraussetzungen erfüllt werden, zeigen die Untersuchungen von E. Wollny,¹ deren Ergebnisse für pulverförmigen Lehmboden in folgender Tabelle verzeichnet sind. Dabei wurde auf zeichnerischem Wege durch Extrapolation ermittelt, daß der Beginn der Versickerung etwa $3\frac{1}{2}$ Minuten vor $8^h 30'$ früh des ersten Versuchstages stattgefunden hat, weil zu diesem Zeitpunkt bereits eine Versickerungstiefe von $3 \cdot 5 \text{ cm}$ beobachtet worden ist. In der folgenden Tabelle sind auch die Versickerungsgeschwindigkeiten eingetragen, und zwar ergibt sich aus (47a)

$$\frac{dh}{dt} = w = \frac{c}{2\sqrt{t}}. \quad (47b)$$

Zeitpunkt	Dauer t in sec	\sqrt{t}	h in cm	$\frac{h}{\sqrt{t}} = c$	$w = \frac{cm}{2\sqrt{t}}$
$8^h 26' 30''$	\ominus	\ominus	\ominus		
8 30	210	14.5	3.5	0.241	0.008
8 45	1110	33.3	7.9	0.237	0.0035
9	2010	44.7	9.9	0.222	0.00259
9 15	2910	54	12.2	0.226	0.00215
9 30	3810	61	14.5	0.235	0.0019
10 30	7410	86.0	19.7	0.229	0.00135
11 30	11011	104.9	24.0	0.229	0.00110
12 30	14610	120.8	28.9	0.239	0.00096
18 30	34410	185.5	43.5	0.234	0.00063
23 30	52410	228.9	56.0	0.244	0.00051
$c_m = 0.232$					

1 E. Wollny, Forschungen auf dem Gebiete der Agrikultur-Physik, 1884, p. 287.

Aus der Tabelle ist ersichtlich, daß die Versickerungsgeschwindigkeit innerhalb 15 Stunden auf etwa 6% des Anfangswertes herabgesunken ist (Fig. 3). Die pulverförmige Ackerde Wollnys zeigt ähnliche Verhältnisse. Während bei dem vorgenannten Versuche der Wasserspiegel konstant 1 cm über dem Boden gehalten wurde, ließ Wollny beim Quarzsand stetig so viel Wasser auftropfen, daß kaum

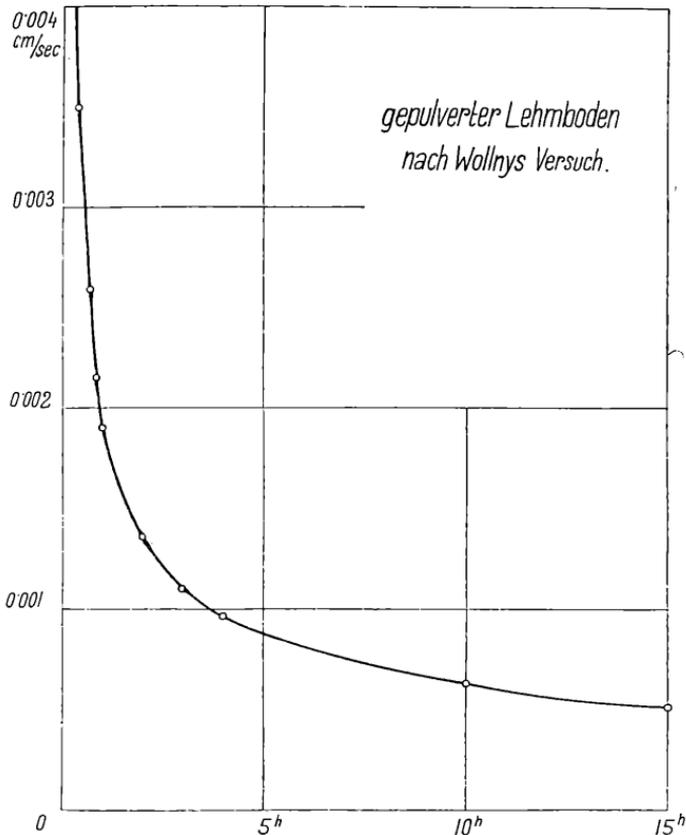


Fig. 3.

eine dünne Wasserschichte gebildet wurde. Auch hier zeigt die folgende Tabelle¹ für den sehr dichten Quarzsand $\alpha = 0.01 - 0.071 \text{ mm}$, daß $\frac{h}{\sqrt{t}}$ in der ersten Zeit konstant bleibt.

t in Stunden	\sqrt{t} in $\text{sec}^{1/2}$	h in cm	$\frac{h}{\sqrt{t}} = c$	$\frac{dh}{dt} = w = \frac{c}{2\sqrt{t}} \text{ cm}^2/\text{sec}$
0.5	42.4	9.9	0.233	0.0028
1	60.0	14.2	0.237	0.00195

¹ Nach Mitscherlich's Bodenkunde, 1905, p. 201.

t in Stunden	\sqrt{t} in $\text{sec}^{1/2}$	h in cm	$\frac{h}{\sqrt{t}} = c$	$\frac{dh}{dt} = w = \frac{c}{2\sqrt{t}} \text{ cm, Sec}$
2	84.9	20.4	0.240	0.0014
4	120	29.0	0.241	0.0010
7	159.7	38.8	0.243	0.00077
10	190	46.0	0.242	0.00064

Ein Maß für die Größenverhältnisse von c bei einzelnen Bodenproben Wollny¹ vermag die folgende Tabelle zu geben.

Bodenart	Zeitpunkt	Versickerungstiefe h in cm	$\frac{h}{\sqrt{t}}$	Versuchsbeginn
Ton	1. Tag 6 ^h abends	10.0	0.059	} 8 ^h 30'' früh
	10. Tag 6 ^h abends	51.5	0.057	
Humus	1. Tag 6 ^h abends	16.4	0.09	
	6. Tag 6 ^h abends	80.0	0.089	
Lehm	24. April 11 ^h 30' vormittags	12.3	0.118	
	25. April 8 ^h früh	32.9	0.113	
Quarzsand	1. Tag 6 ^h abends	47	0.254	
	2. Tag 6 ^h abends	79	0.227	

Ähnlich kann der Fall behandelt werden, wenn der Wasserspiegel nicht auf konstanter Höhe gehalten wird, sondern nach Maßgabe der Versickerung absinkt. Das ist der Fall, wie er bei praktischen Sickersversuchen häufig vorkommt.² Hier wirken die kapillare Zugkraft P und die aus der Schwere stammende Kraft G in einem Sinne, und es gilt bei Vernachlässigung der Änderung der Bewegungsgröße

$$G + P = W \quad (48)$$

¹ Wollny, Forschungen, 1885, p. 209 und 213.

² Der Fall ist auch von A. Vitols behandelt. Siehe Acta Universitatis Lntviensis, XIV, 1926. Quelques remarques sur l'infiltration des eaux superficielles.

Ist z_0 die Höhe der aufgetragenen Wasserschicht und h der im Sande zurückgelegte Weg, so ist mit Beibehaltung der früheren Bezeichnungen

$$G = \rho g p F \{h(1-p) + z_0\}$$

$$P = \sigma u = \rho \cdot g \cdot p \cdot H \cdot F$$

und

$$W = \frac{\rho g}{k} \cdot p \cdot F \cdot h \frac{dh}{dt},$$

also ist aus (48)

$$\frac{h}{k} \cdot \frac{dh}{dt} = h(1-p) + z_0 + H \quad (49)$$

oder, wenn z die jeweilige Absenkung des freien Wasserspiegels ist,

$$\frac{z \cdot dz}{k p^2 dt} = z \cdot \frac{1-p}{p} + z_0 + H, \quad (50)$$

woraus sich ergibt

$$k \cdot p(1-p) t = z - (z_0 + H) \cdot \frac{p}{1-p} \cdot \ln \left\{ z + (z_0 + H) \frac{p}{1-p} \right\} + c. \quad (51)$$

Diese Lösung kann für Werte von t , die nicht zu nahe dem Anfangswert $t = \Theta$ liegen, gut verwendet werden. Sind die zu den Zeiten t_2 und t_1 gehörigen Absenkungen z_2 beziehungsweise z_1 , so gilt

$$\begin{aligned} k \cdot p(1-p) \cdot (t_2 - t_1) &= \\ &= z_2 - z_1 - \frac{p}{1-p} (z_0 + H) \cdot \ln \frac{z_2 + (z_0 + H) \frac{p}{1-p}}{z_1 + (z_0 + H) \frac{p}{1-p}}. \end{aligned} \quad (52)$$

Für große H gegen z kann man die letzte Gleichung leicht in die Form von (47) überführen, wenn $h = \frac{z}{p}$ oder $z = h p$ gesetzt wird.

Für den Fall, daß wieder die kapillare Steighöhe H groß wäre gegen z , geht die Gleichung (51) über in Gleichung (47), was leicht nachgewiesen werden kann, wenn $z = h \cdot p$ gesetzt wird. Diese Tatsache ist von großer Bedeutung, da sie eine unmittelbare Anwendung bei den Versickerungsproben und hiemit auch in der kulturtechnischen Praxis erlaubt. Solche Versuche hat auf freiem Felde H. Meixner¹ vorgenommen in der Art, daß er eine 16 cm weite und 20 cm hohe Eisenblechröhre 16 cm tief in den Boden eintrieb und eine Wasserschicht von 1 bis 2 cm Höhe aufbrachte. Er beobachtete die Geschwindigkeit, mit der der Wasserspiegel nach abwärts sank, also $v = \frac{dz}{dt}$. Dann muß nach unseren Darlegungen in den ersten Stunden

¹ Österr. Wochenschr. f. d. öffentl. Baudienst, 1917, p. 362.

das Produkt $v \cdot \sqrt{t}$ einen gleichbleibenden Wert haben, was im Durchschnitt auch zutrifft, wie aus nachstehender Tabelle zu ersehen ist. Letztere gilt für bearbeiteten Gartenboden auf Lehm (Löß).

Versickerungszeit t		\sqrt{t} in $\text{sec}^{1/2}$	\sqrt{t}
nach 2 Min.	0·00833	11	0·0916
11	0·00191	25·7	0·049
	0·00185	38·7	0·072
45	0·00145	52	0·074
nach 1 Stunde	0·00130	60	0·078
nach 1 St. 40 Min.	0·00130	77·4	0·1062
nach 12 Stunden	0·00040	208	0·0832

Die Beziehung (47) ermöglicht die Lösung verschiedener Bewässerungsaufgaben. Soll z. B. zum Zwecke der Bewässerung durch Überstauung eine Fläche $F = 10 \text{ ha}$ mit einer mittleren Höhe $z_m = 25 \text{ cm}$ überflutet werden in der Zeit $t = 1$ Tag und 10 Stunden = 122.400 sec, so ist zur Füllung eine sekundliche Wassermenge

$$q = \frac{F(z_m + c \cdot p \cdot \sqrt{t})}{t}$$

nötig, c muß aus der Versickerungsprobe ermittelt werden. Ist z. B. pro Quadratmeter und Tag eine Wassermenge von $0 \cdot 10 \text{ m}^3$ versickert, also eine Wassersäule von 10 cm Höhe in 86.400 Sekunden, so gibt das bei einem Porenvolumen $p = 40\%$ vom Gesamtvolumen einen Versickerungsweg $h = 25 \text{ cm}$; also ist dann

$$c = \frac{h}{\sqrt{t}} = \frac{25}{\sqrt{86400}} = 0 \cdot 085,$$

und es ist

$$q = \frac{10 \cdot 10000^2 \cdot (25 + 0 \cdot 085 \cdot 0 \cdot 4 \cdot \sqrt{122400})}{122400} \text{ cm}^3/\text{sec} = 301 \cdot 5 \text{ l/sec.}$$

Würde dagegen eine gleichförmige Versickerungsgeschwindigkeit zugrunde gelegt werden, so würde eine Wassermenge von 250 l/sec genügen.¹ Es wird also mit dem durch Gleichung (47) dargestellten Versickerungsgesetz etwa 1·2 mal soviel Wasser gebraucht infolge der größeren Verluste. Letztere scheinen mit die Ursache zu sein, daß die bisherigen Rieselformeln erheblich kleinere Wassermengen

¹ Siehe A. Friedrich, Kulturtechn. Wasserbau. I. Bd., III. Aufl., p. 443.

gegeben, als in Wirklichkeit verwendet werden.¹ Vor Besprechung der Rieselung soll noch das weitere Schicksal der versickernden Wassermenge verfolgt werden. Fällt der freie Wasserspiegel in die Bodenoberfläche, so wird der Bewegungsvorgang ein anderer. Denn durch die Schwere der Wassermasse muß nicht nur der Bewegungswiderstand überwunden werden, es muß noch jene Arbeit geleistet werden, die zur Erzeugung der freien Oberfläche des die Poren nicht voll erfüllenden Hangwassers nötig ist. Sehen wir von der zeitlichen Änderung der Bewegungsgröße ab, so gilt die Gleichung

$$\text{Gewicht} - \text{Widerstand} = \sigma \cdot \frac{d\sigma}{dh} = \Theta,$$

wo σ wieder die Oberflächenspannung und $\sigma \left(\frac{d\sigma}{dh} \right)$ die Kraft darstellt, die zur Vergrößerung der freien Oberfläche notwendig ist. Man sieht sofort, das es einen Fall der Ruhe gibt, wenn

$$G = \text{Gewicht} = \sigma \cdot \frac{d\sigma}{dh} \text{ ist.}$$

Da die freie Oberfläche des Hangwassers um so größer ist, je feiner das Material ist, so wird auch das Gewicht des gehaltenen Wassers (für den Grenzfall des Gleichgewichtes) mit der Feinheit des Bodenkornes zunehmen. Wird das Grenzgewicht G der aufgegossenen Menge überschritten, so sinkt das Wasser so lange tiefer, bis der Unterschied zwischen dem Gewichte der aufgebrachten Menge und dem Gewicht des Hangwassers gleich G ist. Bezeichnet h_0 die Höhe der aufgebrachten Wasserschichte und ist ihr Gewicht $G_0 > G$, so versinkt die Wassermenge so lange, bis

$$G_0 - G_{\text{Hangwasser}} = G,$$

wobei die oberen Schichten je nach der Feinheit des Kornes mehr oder weniger befeuchtet bleiben, während die Hauptmenge tiefer sinkt. Es gilt entsprechend der Figur 4 die Gleichung für die erreichte Grenztiefe h_e

$$\gamma \cdot F \cdot h_0 = \gamma \cdot p \cdot F \cdot (h_e - h_s) \cdot w_k + \gamma p F \cdot h_s, \tag{52}$$

wobei w_k den Wassergehalt in Bruchteilen des Porenvolumens ausdrückt.

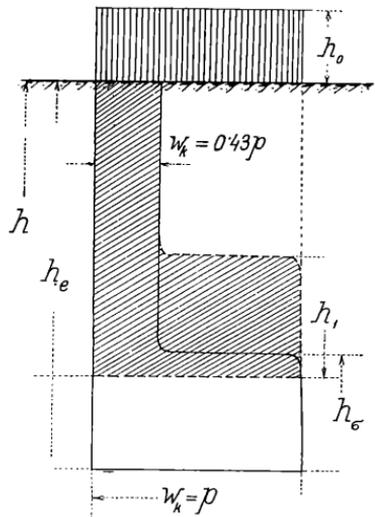


Fig. 4.

Die Gültigkeit der Gleichung (52), die wir auch in der Form schreiben können

$$h_0 = p \cdot (h_c - h_s) \cdot w_k + p \cdot h_s, \quad (53)$$

kann an den klassischen Versuchen Atterbergs¹ nachgewiesen werden. Nach diesen Versuchen zeigte namentlich der Sand $d = 0.2 - 0.1 \text{ mm}$ mit $p = 0.4$ ein ausgeprägtes Verhalten. Wasserschichten bis zu 70 mm Stärke hatten nicht jenes Gewicht G überschritten, um die beim Weitersinken zu leistende Arbeit zur Vergrößerung der freien Oberfläche des Hangwassers erzeugen zu können. Die Beobachtungen sind in folgender Tabelle zusammengestellt.

Nr.	Höhe der Wasserschichte h_0 in <i>cm</i>	Erreichte Grenztiefe h_c in <i>cm</i>	w_k in Volumprozenten auf die ganze Säule bezogen	Benötigte Zeit	Anmerkung	
1	1.0	2.4	}	sehr klein	} Poren voll erfüllt	
	2.0	5.1				
3	3.0	7.7				
4	4.0	10.2				
	5.0	12.4				
6	6.0	14.9	}	5 Tage	} Poren nicht voll erfüllt, freie Oberfläche	
7	7.0	17.5				
8	8.0	22.3				36.0%
9	9.0	25.0				36.0%
10	10.0	30.8				33.40%
11	12.0	45.5				26.60%

Aus der Tabelle ist ersichtlich, daß eine aufgebrauchte Wasserschichte $h_0 = 7.0 \text{ cm}$ noch vollständig gehalten wird. Wenden wir z. B. unsere Gleichung (53) an auf Nr. 11 und 8 der Tabelle, so ist

$$12 = 0.4 (45.5 - h_s) \cdot w_k + 0.4 h_s$$

und

$$8 = 0.4 (22.3 - h_s) w_k + 0.4 h_s$$

oder

$$\frac{12 - 0.4 h_s}{8 - 0.4 h_s} = \frac{45.5 - h_s}{22.3 - h_s},$$

$$h_s = 18.26 \text{ cm} \text{ und } h_0 = p \cdot h_s \sim 7.3 \text{ cm}. \quad (53a)$$

Sobald also $h_0 > 7.3 \text{ cm}$ ist, kann die Wasserschichte nicht mehr vollständig in der oberen Schichte gehalten werden und

¹ Atterberg, Studien auf dem Gebiete der Bodenkunde. Landwirtschaftliche Versuchsstationen, 1908, Bd. LXIX, p. 96 und 97.

dieselbst keine volle Porenerfüllung herrschen, was durch die Versuchsergebnisse in der vorhergehenden Tabelle bewiesen wird. Der Wassergehalt im Gebiete des Hangwassers mit freier Oberfläche ist

$$w_k = \frac{12 - 0.4 h_s}{0.4 (45.5 - h_s)} \sim 0.43. \quad (53b)$$

Dieses w_k ist zugleich die kleinste Wasserkapazität und beträgt also 43% des Porenvolumens. Je größer das Material ist, desto kleiner w_k , desto kleiner ist auch h_s und h_0 . So gelten für Atterberg's¹ Sand $d = 2-1 \text{ mm}$, $p \sim 0.4$ folgende Zahlen:

Nr.	h_0 in <i>cm</i>	h_c in <i>cm</i>	Zeit	w_k in %		Anmerkung
				Volumen	Porenraum	
1	0.25		1 Tag	9.6	24	Keine volle Porenerfüllung, Bildung freier Oberflächen
	0.5	5.1	3 Tage	9.9	25	
3	1.0	27.8	41 ₂ Stunden	3.3	8.25	

Aus Nr. 1 und 3 ist mit Gleichung (53)

$$0.25 = 0.4 (2.7 - h_s) \cdot w_k + 0.4 h_s$$

$$1.0 = 0.4 (27.8 - h_s) \cdot w_k + 0.4 h_s$$

oder

$$h_s = 0.46 \text{ cm} \text{ und } h_0 = 0.4 h_s = 0.184 \text{ cm}$$

und $w_k \sim 0.074$, also nur 7.4% des Porenvolumens. Da die kleinste aufgebrachte Wassermenge eine Schichtenhöhe von 0.25 *cm* einnahm, konnte nicht die ganze Menge gehalten werden, und es wurde freie Oberfläche des Hangwassers gebildet. Umgekehrt ergibt sich z. B. w_k bezogen auf die ganze Tiefe h_c für Nr. 1 mit

$$w_k = \frac{(2.7 - 0.46) \cdot 0.074}{2.7} \cdot 0.40 = 0.093$$

oder 9.3% gegen 9.6% in der Tabelle.

Ebenso ergab Atterberg's Sand mit $d = 1-0.5 \text{ mm}$, $p = 0.418$ und $H = 131 \text{ mm}$ eine regelmäßige Reihe.

Nr.	h_0 in <i>mm</i>	h_c in <i>mm</i>	t	w_k in % vom Gesamtvolumen
1	5.0	58	3 Tage	8.7
	10	160	3	6.2
3	20	tiefer als 450	1 Tag	4.4
4	50	400		

Ohne den Sand vollständig zu feuchten

¹ l. c., p. 114.

Aus Nr. 1 und 2 ist wieder mit Gleichung (53)

$$0.5 = 0.418 (5.8 - h_s) \cdot w_k + 0.418 h_s$$

$$1.0 = 0.418 (16.0 - h_s) \cdot w_k + 0.418 h_s$$

oder

$$\frac{0.5 - 0.418 h_s}{1.0 - 0.418 h_s} = \frac{5.8 - h_s}{16.0 - h_s},$$

woraus $h_s = 0.58 \text{ cm}$ und

$$w_k = \frac{h_0 - p h_s}{p (h_e - h_s)} = \frac{1.0 - 0.418 \cdot 0.58}{0.418 (16 - 0.58)} = 0.117$$

vom Porenvolumen oder $w_k = 0.117 \cdot 0.418 \sim 0.049$ vom Gesamtvolumen $= 4.9\%$, während nach der Tabelle für Nr. 3, wo das Wasser tiefer sank, als die Sandsäule lang war, nur 4.4% vom Gesamtvolumen an Wasser zurückgehalten wurde, welche Menge als kleinste Wasserkapazität dieses Sandes anzusehen wäre. Nachdem die grundlegenden Annahmen durch Atterberg's Versuche bestätigt werden, so können wir den Bewegungsvorgang rechnerisch verfolgen. Bei Vernachlässigung der Änderung der Bewegungsgröße gilt mit den früheren Bezeichnungen

$$G - W - \sigma \cdot \frac{d o}{d h} = \Theta, \quad (54)$$

Gewicht $G = \gamma \cdot p \cdot F \cdot h_1$, wobei

$$h_1 = \frac{\frac{h_0}{p} - h w_k}{1 - w_k}$$

ist und h die jeweilige Tiefe der untersten Wasserschichte unter der Bodenfläche ist. Der Widerstand

$$W = \gamma \cdot p \cdot F \cdot h_w = \frac{\gamma p F \cdot h_1}{k} \cdot \frac{d h}{d t}.$$

Setzen wir $\frac{\sigma d o}{d h} = \gamma p F h_s$, wo h_s eine jedem Boden eigentümliche Konstante darstellt, so erhalten wir aus (54)

$$t = \frac{1}{k} \cdot \int \frac{h_1}{h_1 - h_s} \cdot d h, \quad (55)$$

und da

$$d h = \frac{w_k - 1}{w_k} \cdot d h_1, \quad (56)$$

so ist

$$t = \frac{w_k - 1}{k \cdot w_k} \cdot \int \frac{h_1}{h_1 - h_s} d h_1 = \frac{w_k - 1}{k \cdot w_k} \cdot \{h_1 + h_s \ln (h_1 - h_s)\} + c \quad (57)$$

für $t = \theta$ wird $h_1 = \frac{h_0}{p}$, also ist

$$\theta = \frac{w_k - 1}{k \cdot w_k} \cdot \left\{ \frac{h_0}{p} + h_s \cdot \ln \left(\frac{h_0}{p} - h_s \right) \right\} + c \quad (57a)$$

und mit (57)

$$t = \frac{w_k - 1}{k \cdot w_k} \left\{ h_1 - \frac{h_0}{p} + h_s \cdot \ln \frac{h_1 - h_s}{\frac{h_0}{p} - h_s} \right\}. \quad (58)$$

Sobald $h_1 = h_s$ wird, tritt Ruhe ein. Das geschieht zur Zeit $t = \infty$. h_s läßt sich aus einem Versuche leicht ermitteln, und zwar ist

$$h_s = \frac{\frac{h_0}{p} - w_k \cdot h_c}{1 - w_k}.$$

Wir sehen, daß die Geschwindigkeit des Niedersinkens immer kleiner wird, wie dies wieder die Versuche von Atterberg zeigen. Beim Sand $d = 0.2 - 0.1 \text{ mm}$ sank eine Wasserschicht von 100 mm

gleich	263 mm
nach 1 Stunde	276
4 $\frac{1}{2}$ Stunden	277
1 Tag	283
2 Tagen	290
5	308

Die größte zu erwartende Tiefe würde nach unendlich langer Zeit erreicht werden und beträgt mit (53a) und (53b)

$$h_c = \frac{\frac{h_0}{p} - h_1 (1 - w_k)}{w_k} = \frac{10}{0.4} - 18 \cdot 26 (1 - 0.43) = 0.43 = 34 \text{ cm} = 340 \text{ mm}.$$

Gehen wir nun zur Anwendung der ermittelten Gesetzmäßigkeiten für die Bewässerung durch Hangrieselung, wobei es sich darum handelt, die erforderlichen Dimensionen der Hänge, beziehungsweise den Abstand der Rieselrinnen und die erforderliche Wassermenge zu bestimmen. Dabei soll die Bedingung größtmöglicher Ausnützung der aufgebrauchten Wassermenge eingehalten werden, beziehungsweise jeder Verlust auf das geringste Maß eingeschränkt werden.

Bei der Bewässerung durch Rieselung fließt bekanntlich das Wasser in dünner Schicht über die talseitige Kante der Rieselrinne

(Fig. 5) und wird, sich in den Unebenheiten des Hanges sammelnd, eine mittlere Schichtendicke δ aufweisen. Ist q_0 der sekundliche Zufluß pro Längeneinheit der Rieselrinne und die Versickerungsgeschwindigkeit $w_1 = \frac{c_1}{2\sqrt{t}}$, so gilt die Kontinuitätsbedingung¹

$$q_0 \cdot dt = \int_0^l (w_1 \cdot dt) \cdot dx + \delta \cdot dl = \int_0^l \frac{c_1}{2\sqrt{t}} \cdot dt \cdot dx + \delta \cdot dl, \quad (59)$$

wenn l die jeweilige zur Zeit t_l erreichte Hanglänge l ist.² Wir können die Kontinuitätsbedingung auch in der Form schreiben

$$q_0 = \varphi(t) \cdot \frac{c_1}{2\sqrt{t_l}} \cdot l + \delta \cdot \frac{dl}{dt}, \quad (60)$$

wobei wir eine mittlere Versickerungsgeschwindigkeit $w_m = \varphi(t) \cdot \frac{c_1}{2\sqrt{t_l}}$ eingeführt haben. Die zahlenmäßige Auswertung zeigt, daß $\varphi(t)$ eine derart geringe Veränderlichkeit mit der Zeit aufweist, daß für unsere Zwecke φ als konstant betrachtet werden kann. Setzen wir in erster Näherung $\varphi = 2$, so geht (60) über in

$$q_0 = \frac{c_1}{\sqrt{t_l}} \cdot l + \delta \cdot \frac{dl}{dt} \quad (61)$$

mit der Lösung

$$l = \frac{q_0}{c_1} \left\{ \sqrt{t_l} + \frac{\delta}{2c_1} (e^{-\frac{2c_1}{\delta} \sqrt{t_l}} - 1) \right\}. \quad (62)$$

Unter der Annahme $c_1 = 0.2$, $\delta = 1.0 \text{ cm}$ (gut planiert) und einer Speisung mit 2 sl für 15 m Rieselrinnenlänge, also $q_0 = 1.33 \text{ cm}^3/\text{sec}$ und cm wurde für verschiedene Zeiten t die erreichte Länge l gerechnet und in Figur 5 aufgetragen. Aus der erhaltenen Kurve $t = f(l)$ kann jeweils die Zeitdifferenz ermittelt werden, die zwischen dem Erreichen zweier Hanglängen verfließt. Es kann dann zeichnerisch und mit dem Planimeter die jeweilige versickernde Wassermenge

$$q_s = \int_0^l \frac{c_1}{2\sqrt{t_l - t}} \cdot dx$$

ermittelt werden.

Es wurde gefunden, daß nach $t_l = 400, 1600, 4900$ und 10.000 Sekunden die Hanglängen $l = 114, 244, 439$, beziehungsweise 634 cm erreicht werden. Die ungleichförmig verteilte Sickerwassermenge, die als Verlust Δ_1 anzusehen ist, ergab sich mit $1.4, 1.47$.

¹ Diese Bedingung wurde von R. Fischer zum erstenmal aufgestellt; siehe A. Friedrich, Kulturtechnischer Wasserbau. I. Bd., III. und IV. Aufl.

² w_1 und $c_1 = c_p$ sind auf den absinkenden Wasserspiegel bezogen.

1.56, beziehungsweise $1.6 \cdot \frac{c_1}{2\sqrt{t_1}}$, so daß innerhalb 9600 Sekunden φ zugenommen hat von 1.4 auf 1.6. Setzt man $\varphi = \sqrt{3}$ so

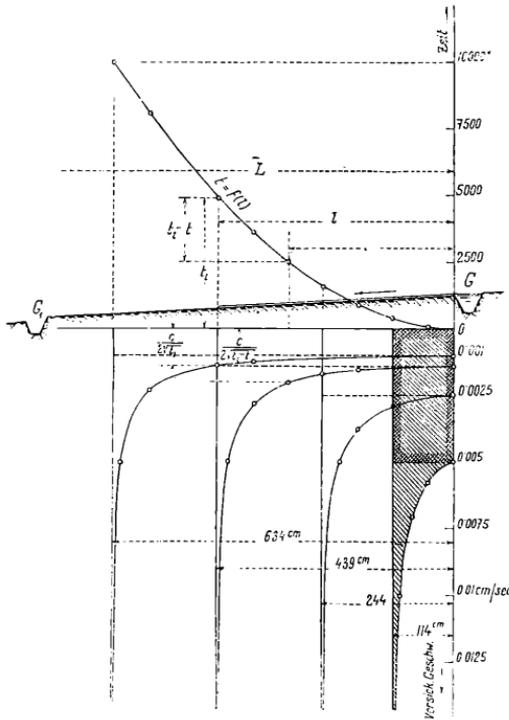


Fig.

kommt man der Wirklichkeit sehr nahe, was durch die Kontrolle bei den gerechneten Beispielen bewiesen wird. Es wäre also für (62) zu schreiben

$$l = \frac{2 q_0}{\sqrt{3} c_1} \left\{ \sqrt{t_1} + \frac{\delta}{\sqrt{3} c_1} (e^{-\frac{\sqrt{3} c_1}{\delta} \sqrt{t_1}} - 1) \right\} \quad (63)$$

Da die größtmögliche Hanglänge erst in unendlich langer Zeit erreicht würde und somit der durch ungleichförmige Verteilung herbeigeführte Verlust sehr groß würde, macht man die Hanglänge kleiner und erhält so einen Oberflächenabfluß in den unteren Entwässerungsgraben G_1 (Fig. 5), der ebenfalls einen Verlust Δ_2 darstellt.

Wird mit L die Entfernung zwischen Rieselrinne G und Graben G_1 (Fig. 5) bezeichnet und ist t_1 die Zeit, die nötig ist, um den Weg L zurückzulegen, ferner t_2 die Zeit, um die nutzbare gleichförmig verteilte Menge aufzubringen, so ist der Verlust durch Oberflächenabfluß

$$\begin{aligned}\Delta_2 &= q_0 t_2 - L \cdot \int_{t_1}^{t_1+t_2} v \cdot dt = q_0 t_2 - \frac{\varphi}{2} L \cdot c_1 \cdot \int_{t_1}^{t_1+t_2} \frac{dt}{\sqrt{t}} = \\ &= q_0 t_2 - \varphi L \cdot c_1 (\sqrt{t_1+t_2} - \sqrt{t_1}).\end{aligned}$$

Da t_1 in der Regel einen größeren Wert darstellt, kann aus (60) und (62) die Hanglänge bestimmt werden

$$L = \frac{2 q_0}{\varphi c_1} \left(\sqrt{t_1} - \frac{\delta}{\varphi c_1} \right) = \frac{2 q_0}{h \varphi} \cdot t_2 \sqrt{\frac{t_1}{t_2}} \left(1 - \frac{\delta}{\varphi h} \sqrt{\frac{t_2}{t_1}} \right) \quad (63a)$$

wo h wieder die Höhe der aufzubringenden Wasserschichte ist. Für den Oberflächenabfluß gilt

$$\Delta_2 = q_0 \cdot t_2 - 2 q_0 (\sqrt{t_1+t_2} - \sqrt{t_1}) \cdot \sqrt{t_1} \left(1 - \frac{\delta}{\varphi h} \sqrt{\frac{t_2}{t_1}} \right).$$

Nachdem in der Zeit t_1 die Menge

$$\Delta_1 = q_0 t_1 - \delta L$$

ungleichförmig verteilt wird und diese als Verlust anzusehen ist, beträgt der Gesamtverlust

$$\begin{aligned}\Delta &= \Delta_1 + \Delta_2 = q_0 (t_1 + t_2) - 2 q_0 \cdot \sqrt{t_1} \\ &\quad \left(1 - \frac{\delta}{\varphi h} \sqrt{\frac{t_2}{t_1}} \right) \left(\sqrt{t_1+t_2} - \sqrt{t_1} + \frac{\delta}{\varphi h} \sqrt{t_2} \right)\end{aligned}$$

und da die aufgeleitete Menge, beziehungsweise der Bedarf

$$Q = q_0 \cdot (t_1 + t_2),$$

so beträgt der spezifische Verlust nämlich das Verhältnis

$$\begin{aligned}E = \frac{\text{Verlust}}{\text{Bedarf}} &= 1 - 2 \left(1 - \frac{\delta}{\varphi h} \sqrt{\frac{t_2}{t_1}} \right) \\ &\quad \left(\sqrt{1 + \frac{t_2}{t_1}} - 1 + \frac{\delta}{\varphi h} \sqrt{\frac{t_2}{t_1}} \right) \frac{1}{1 + \frac{t_2}{t_1}} = 1 - f \left(\frac{t_2}{t_1} \right).\end{aligned} \quad (64)$$

Die Funktion $f\left(\frac{t_2}{t_1}\right)$ wird Null für $\frac{t_2}{t_1} = \Theta$, $\left(\frac{\varphi h}{\delta}\right)^2$ und ∞ .

Zwischen den beiden ersten Werten liegt ein Maximum von $\left(\frac{t_2}{t_1}\right)$; folglich liegt zwischen $\frac{t_2}{t_1} = \Theta$, beziehungsweise $\left(\frac{\varphi h}{\delta}\right)^2$ ein Minimum von E .

Nun besteht die Beziehung

$$\frac{Q}{t_1 + t_2} = q_0 \frac{F}{L}, \quad (65)$$

wobei F die zu bewässernde Fläche darstellt. Ferner ist

$$\text{Bedarf} = Q = F \cdot h + \text{Verlust}$$

und mit (64)

$$\frac{Q}{F} = \frac{Fh}{1 - E}$$

So ergibt sich

$$q_0 \cdot \frac{F}{L} = \frac{Fh}{1 - E} \cdot \frac{1}{t_1 + t_2} = \frac{F \varphi h}{2 \sqrt{t_1 + t_2}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\delta}{\varphi h} \cdot \sqrt{\frac{t_2}{t_1}}}$$

oder

$$E = 1 - \frac{2}{\varphi} \cdot \frac{\sqrt{\frac{t_2}{t_1}}}{1 + \frac{t_2}{t_1}} \cdot \left(1 - \frac{\delta}{\varphi h} \cdot \sqrt{\frac{t_2}{t_1}}\right). \quad (66)$$

(64) und (66) geben die Beziehung

$$\varphi = \left(1 - \frac{\delta}{h}\right) \frac{\sqrt{\frac{t_2}{t_1}}}{\sqrt{1 + \frac{t_2}{t_1}} - 1}, \quad (67)$$

Gleichung (67) stellt eine eindeutige Beziehung zwischen $\frac{\delta}{h}$ und $\frac{t_2}{t_1}$ dar bei festgesetztem φ . Dagegen gibt es für jeden Wert E , mit Ausnahme des Minimums, zwei positive Werte von $\frac{t_2}{t_1}$ im Bereiche $\Theta < \frac{t_2}{t_1} < \left(\frac{\varphi h}{\delta}\right)^2$

Es können also (64) und (67) nur dann gleichzeitig erfüllt sein, wenn der aus (67) errechnete Wert $\frac{t_2}{t_1}$ jener ist, bei dem E in Gleichung (66) ein Minimum wird.

Dies muß natürlich auch für $\frac{\delta}{h} = \vartheta$, also bei glatter Oberfläche der Fall sein. Dann wird nach (64) E zu einem Minimum, wenn $\frac{t_2}{t_1} = 3$ ist, so daß¹

$$\varphi = \frac{\sqrt{\frac{t_2}{t_1}}}{\sqrt{1 + \frac{t_2}{t_1} - 1}} = \sqrt{3}$$

Der Wert E wird dann 0·5.

Aus der Beziehung

$$\sqrt{3} = \left(1 - \frac{\delta}{h}\right) \cdot \frac{\sqrt{\frac{t_2}{t_1}}}{\sqrt{1 + \frac{t_2}{t_1} - 1}} \quad (67a)$$

läßt sich für jeden Wert von $\frac{\delta}{h} < 1$ der zugehörige Wert $\frac{t_2}{t_1}$ ermitteln, für den E ein Minimum ist. $\frac{\delta}{h}$ dürfte etwa 0·05—0·3 betragen. Aus den Formeln ergibt sich folgende kleine Zusammenstellung:

$\frac{\delta}{h}$	$\frac{t_2}{t_1}$	E	Bedarf = $\frac{Fh}{1-E}$
ϑ	3	0·5	$2 Fh$
0·1		0·4996	$\sim 2 Fh$
0·29	1	0·481	$1·92 Fh$

Die vorstehende Tabelle zeigt, daß der Bedarf von der Bodenbeschaffenheit nur sehr wenig abhängig sein kann und daß das Verhältnis $\frac{t_2}{t_1}$ nur von der Form der Bodenoberfläche abhängig ist, falls die spezifischen Verluste zu einem Minimum gemacht werden.

¹ Der Wert $\varphi = \sqrt{3} = 1·73$ ist etwas größer als die auf Seite 25 durch Planimetrie aus Fig. 5 gefundenen Werte, was ja begrifflich ist wegen der ∞ langen Ordinate $\left[\frac{c}{2(t_2 - t_1)} \right]$.

Gleichung (64) zeigt, daß bei der Berieselung im günstigsten Fall rund die Hälfte der aufgeleiteten Wassermenge zur gleichförmigen Verteilung kommt.

Wir wollen nun die erforderlichen Wassermengen errechnen, wenn die fehlenden Niederschlagsmengen bekannt sind. Und zwar wollen wir dies an den Beispielen durchführen, die H. Pfeiffer im «Kulturtechniker», 1922, p. 106/7, für Süddeutschland erwähnt hat. Dabei soll vorausgesetzt werden, daß der zum Pflanzenwuchse nötige Bedarf durch die idealen Regenhöhen Wohltmann's für Wiesen gegeben wäre. Nachstehende Tabelle gibt eine Übersicht.

Zeitraum	h_n Niederschlagshöhen für Trockenjahre in <i>mm</i>				Ideale Regen- höhe nach Wohltmann h_w
	Tauber- und Neckartal	Enz und Nagold	Kocher und Jagst	Donautal	
15.—30. April	12	14	14	13	$\frac{60}{2}$
Mai	28	36	33	45	
Juni	33	50	41		60
Juli	40	29	37	42	
August	27	29	22	33	60
1.—15. Sept.	18	16	19		$\frac{40}{2}$
Summe	158	174	156	207	330
$\Delta = \Sigma h_n - \Sigma h_w$	172	156	174	123	
$Q = 2 \cdot \Delta \cdot 10$ in m^3/ha	3350	3040	3395	2399	

Pfeiffer gibt den Bedarf mit 2500 bis 3000 m^3/ha an.

Nehmen wir an, daß in einem der obigen Gebiete eine zehntägige Trockenperiode durch Bewässerung mittels Rieselung bei sparsamster Wasserverwendung überwunden werden soll, wobei der tägliche Bedarf mit 7 *mm* Niederschlagshöhe angenommen werden soll. Die Versickerungsprobe auf der Wiese hätte ergeben, daß 11 *cm* in 4 Stunden versickert wären, also im Mittel etwa 0.008 *mm/sec*. Das Porenvolumen wäre 0.4, so ist nach unseren Darlegungen

$$c = \frac{11 \cdot 0}{0.4 \sqrt{4 \cdot 3600}} \cong 0.23,$$

was ungefähr dem früher erwähnten Lehmboden Wollny's entsprechen würde. Der Bedarf für die Bewässerung wäre $2,700 = 1400 m^3/ha$, wobei vorausgesetzt wird, daß der Boden 7 *cm* Wasser-

säule ganz halten kann. Bei Sand von $d \cong 0.2-0.1 \text{ mm}$ ist das, wie wir gesehen haben, der Fall. Dann ist bei guter Planierung,

$$\left(\frac{\delta}{h} = 0.1\right)$$

$$t_2 = \frac{\left(\frac{7}{0.4}\right)^2}{0.23^2} \sim 5800''$$

$$t_1 = 0.5 t_2 = 2900''.$$

Beschicken wir eine Rieselinne von 15 m Länge mit 2 sl, kommt auf 1 cm Länge rund $1.33 \text{ cm}^3/\text{sec} = q_0$, und die Hanglänge ist:

$$L = \frac{2.1.33}{\sqrt{3.0.23.0.4}} \left(\sqrt{2900} - \frac{0.7}{\sqrt{3.0.23.0.4}} \right) = 827 \text{ cm} \sim 8.3 \text{ m}.$$

Der sekundliche Zulauf für 1 ha würde betragen bei sparsamster Wasserverwendung

$$q = \frac{Q}{t_1 + t_2} = \frac{1400}{8700} \sim 0.161 \text{ m}^3/\text{sec} = 161 \text{ sl}.$$

Eine einfache Kontrolle ist folgende: Die Länge der Rieselinnen pro ha beträgt

$$L_1 = \frac{F}{L} = \frac{10.000}{8.27} \cong 1209.2 \text{ m},$$

dann muß $q_0 \cdot L_1 = q$ sein, unsere Rechnung ergibt

$$q_0 \cdot L_1 = \frac{1.33.1209.2}{10} \sim 160.8 \text{ sl},$$

also eine ganz kleine Differenz gegen den oberen Betrag.

Zu den Verlusten aus ungleichförmiger Verteilung und Oberflächenabfluß könnten noch jene hinzukommen, die aus einer Wasserabgabe der Oberschichte in den den Pflanzenwurzeln nicht mehr erreichbaren Untergrund hervorgehen. Wie wir früher gesehen haben, vermag jeder Boden nur eine bestimmte Wassermenge in der oberen Schichte festzuhalten, die um so größer ist, je kleiner das Bodenkorn ist. Wird diese überschritten, so sinkt die Hauptmenge tiefer. Es ist einzusehen, daß man die Verluste in den Untergrund durch Einhaltung angemessener Einzelgaben auf ein Minimum beschränken kann. Atterberg¹ fand z. B., daß Sand mit $d = 0.2-0.5 \text{ mm}$ eine Wassermenge von 30 mm noch in der oberen Schichte von etwa

6 cm (Kapillarröhe) halten kann, während von 50 mm die Hauptmasse innerhalb 45' durch die ganze Sandsäule von 40 cm Länge durchdringt. Aus dieser Tatsache ist zu erkennen, daß diese Verluste mit der Intensität der Bewässerung unverhältnismäßig steigen können, weshalb man eine zwecklose Überlastung auf alle Fälle vermeiden sollte. Daher wird man leichte Böden öfter, aber mit kleineren Gaben bewässern, wobei sich jedoch die Verluste infolge Wasserabgabe der Oberschichte an den Untergrund wegen der ungleichförmigen Beschickung des Hanges nie gänzlich vermeiden lassen werden. Atterberg's Untersuchungen zeigen, daß Sand mit $\mu = 0.2 - 0.1 \text{ mm}$, der die Grenze zwischen den schlechten trockenen und den besseren feuchten Sanden bildet, keine solchen Verluste aufweisen würde, solange die Einzelgabe etwa 73 mm nicht überschreitet. Denn er vermag diese Wassermenge in der oberen Schichte noch zu halten, so daß für ihn dieselben Bedarfsmengen gelten wie bei schwereren Böden. Die geringe Abhängigkeit der Bedarfsmengen von der Bodenart ist bemerkenswert, und wenn Müntz und Lainé¹ bemängeln, daß bisher in Frankreich der kontinuierliche Zulauf für alle Bodengattungen gleich, nämlich mit 1 sl/ha angenommen wurde, so kann gegen diesen gleichartigen Zulauf nach den vorliegenden Betrachtungen nichts eingewendet werden. Daran können auch die Versuche der genannten Forscher nichts ändern, da ihre Bewässerungsversuche nicht unter der Bedingung sparsamsten Wasserverbrauches durchgeführt wurden. Dagegen scheint jedoch die Menge von 1 sl/ha auch nach unseren Entwicklungen zu groß zu sein, selbst bei Berücksichtigung der größeren Transpirationsverluste.

Es sei noch erwähnt, daß es bei der Rieselung praktisch darauf ankommt, das Wasser in möglichst gleichförmiger Schichte zu verteilen. Aus diesem Grunde haben sich in der Praxis schon gewisse Grenzen der Entfernung der Rieselrinnen beim Hangbau, beziehungsweise der Rückenbreite beim Rückenbau als vorteilhaft erwiesen. Nach den Angaben von Vincent² soll man die Rieselrinnen in einer Entfernung von 5 bis 10 m anlegen und die Breite der Rücken zwischen 5 und 30 m wählen. Dann kann man die Aufgabe der Bewässerung so behandeln, daß man mit Rücksicht auf die Oberflächenverhältnisse des Bodens den Abstand der Rieselrinnen oder die Rückenbreite wählt und die Wassermenge q_0 rechnet, zur Speisung der Rinnen bei sparsamster Wasserverwendung. Dabei wird man in sehr ebenem Gelände die Rieselrinnen weiter, in unregelmäßigem Gelände näher wählen.

Nehmen wir an, daß eine Bewässerung mittels Kunstrückenbaues erfolgen soll. Infolge verschiedener Umstände soll die Breite des Rückens mit 30 m gewählt werden, so daß die Hanglänge $L = 15 \text{ m}$ beträgt. Die Länge des Rückens, also auch der Riesel-

¹ Comptes rendus de l'académie des sciences, Paris 1912.

² Vincent-Breitenbach, Bewässerung und Entwässerung. Berlin 1926, 25 und 29.

rinne am First, betrage 30 m. Das Porenvolumen $p = 0.45$, $c = 0$, aus einer Versickerungsprobe ermittelt. Mit welcher Wassermenge soll die Rieselrinne beschickt werden, damit eine Einzelgabe v , $h = 10$ cm bei sparsamster Verwendung aufgebracht werde?

Aus (65) ist

$$q = \frac{Q}{t_1 + t_2} = \frac{2 F h}{t_1 + t_2}.$$

Nun ist

$$t_2 = \frac{\left(\frac{h}{p}\right)^2}{c^2} = \frac{492 \cdot 84}{0.09} \sim 5476''$$

$$t_1 = 0.5 t_2 = 2738''$$

und

$$q = \frac{2000}{8214} = 0.2435 \text{ m}^3/\text{sec} = 243.5 \text{ sl}$$

oder für die Rieselrinne

$$q_r = q \frac{900}{10000} = 21.9 \text{ sl}.$$

Die bisherigen Berechnungen der Zuflußmengen, Hanglängen usw. bei der Bewässerung wären gewissermaßen nur ein frommer Wunsch, wenn nicht auch die Möglichkeit geschaffen würde, daß das Wasser in dem gewünschten Ausmaß rieseln kann. Es muß sich zur früheren Kontinuitätsbedingung noch die Bewegungsgleichung hinzugesellen. Der Bewegungsvorgang ist zwar nicht gleichförmig und nicht stationär. Doch kann man behaupten, daß nach einem kleineren zurückgelegten Weg die zeitlichen Änderungen nicht mehr in Betracht kommen. Führen wir eine mittlere Tiefe R (Schichthöhe) und eine mittlere Rieselgeschwindigkeit v ein, so wird zufolge des starken örtlichen Wechsels der Geschwindigkeiten infolge der großen Rauigkeit das quadratische Widerstandsgesetz für die mittlere Bewegung Geltung haben. Das ergeben auch die bisherigen Versuche und Ermittlungen. Nach den Versuchen von Ringelmann,¹ bei denen das Wasser allerdings über rauhes Pflaster rieselte, mit dem Gefälle $I = 0.051$ ergibt sich folgende Tabelle, aus welcher zu ersehen ist, daß bei Ausschluß von Nr. VI für $\frac{v}{R\sqrt{I}}$ der Mittelwert (78) gesetzt werden kann. Ebenso ergibt die Bazin'sche Gleichung

$$v = \frac{87\sqrt{\bar{R}}}{\sqrt{R \cdot + \gamma}} \cdot \sqrt{\bar{R}I}$$

¹ Comptes rendus de l'académie de sciences. Paris 1912, Nr. 26.

kleine R , daß

$$v = \frac{87}{\gamma} R \cdot \sqrt{I}$$

ersetzt werden kann. Denn R beträgt beim Rieseln einige Millimeter und $\gamma = 0.85 - 1.3 \text{ m}^{1/2}$. Auch die Versuche von Carrier¹ in der Ebene von Loyettes ergaben $v = c \cdot R \sqrt{I}$, wobei für $c = 20$ beim Rieseln gleich nach einem Heuschnitt gefunden wurde. Die Konstante c müßte noch durch weitere Versuche festgelegt werden. Setzen wir in der Gleichung (63a) $q_0 = v \cdot R$ ein, so ist ohneweiters ersichtlich, daß die Entfernung der Rieselrinnen mit der Quadratwurzel des Hanggefälles wächst.

	I	II	III	IV	V	VI
R in mm. . .	1.395	5.056	6.416	8.10	10.34	12.16
..	21.6	89.3	118.2	140.4	198.2	416.0
$R \sqrt{I}$	69	78	81	76	84	152

Zum Schlusse sei erwähnt, daß der Vorgang der kapillaren Leitung durch das Zwischentreten der Luft eine Änderung erfahren kann. Die verhältnismäßig kleinen Abweichungen unserer Rechnung von den Messungen sind wohl zum Teil auf diesen Umstand zurückzuführen. So bemerkt man beim kapillaren Aufsteigen, daß sich dasselbe nie vollständig gleichmäßig über den ganzen Querschnitt der Sandsäule vollzieht, weshalb die Wasseroberfläche stets mehr oder weniger scharf beobachtet wird. Schon beim Beginn eilt das Wasser in den engeren Poren vor, um sich dann auch seitwärts auszubreiten. Dadurch wird die zurückbleibende Luft vom Wasser eingehüllt, das Wasser kann den vorhandenen Porenraum nicht ganz erfüllen. Die Wegdifferenz in den feineren und gröberen Poren wird um so größer, je höher der Anstieg erfolgt ist; desto größer sind die eingehüllten Luftmengen. Daher wird der Wassergehalt von unten nach oben abnehmen. Mit einer einfachen Vorrichtung kann man dies messen (Fig. 6). Sie besteht aus einem vertikalen Glasrohr, das unten mit einem feinen Metalldraht-

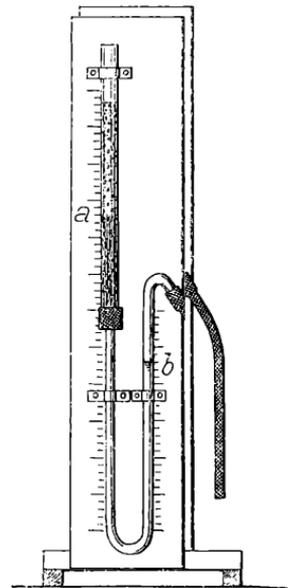


Fig. 6.

¹ Jules Crevat, Les conditions d'irrigation rationelle. Paris 1907.

sieb abgeschlossen ist und unten mit einem U-Rohr mit vertikalen Schenkeln in Verbindung steht. In das erstere Rohr wurde feiner Sand von $0.1-0.5\text{ mm}$ Durchmesser trocken eingebracht und durch Klopfen in eine dichtere Lagerung versetzt. Hierauf wurde das dünnere U-Rohr mit Wasser gefüllt, so daß der sandseitige Spiegel nahe der Sandunterfläche kam. Durch Quetschen eines am anderen U-Rohrschenkel angebrachten Gummischlauches konnte der Wasserspiegel an den Sand gebracht und der Beginn des kapillaren Aufstieges bewerkstelligt werden. An einer Skala wurde nun zu gleicher Zeit die jeweilige Höhe des kapillar gehobenen Wassers in der Sandsäule und des fallenden Spiegels im U-Rohr ermittelt. So konnte die Wassermenge bestimmt werden, die zwischen zwei Ablesungen in den Sand eingedrungen ist. Es ergaben sich folgende Ablesungen:

Nr.	Zeit	Ablesung in <i>cm</i>		$\frac{a_n - a_1}{b_1 - b_n}$	Anmerkung
		<i>a</i> im Sande	<i>b</i> im U-Rohr		
1	12 ^h 42' 20"	22.4	16.6		Die Unterfläche des Sandes lag auf 21.0. Am Beginn konnte am U-Rohr nicht abgelesen werden. Einpressen von Wasser durch Quetschen des Schlauches.
	44' 0"		15.95	0.54	
3	48' 10"	23.0	15.5	0.54	
4	52' 20"	23.3	15.15	0.62	
	13 ^h 6' 10"	23.7	14.7	0.684	
6	51' 40"	24.45	14.05	0.773	
	14 ^h 59'	24.8—24.9	13.65	0.83	
8	16 ^h	25.2	13.35	0.861	
9	16 ^h 44'	25.3	13.25	0.865	
10	16 ^h 44'	25.4	11.5	0.59	
11	45' 30"	25.5	11.3	0.585	
12	51'	25.6	11.35	0.61	
13	18 ^h	25.7	11.2	0.61	
14	13 ^h 46'	26.8	10.6	0.73	

Die Zunahme von $\frac{a_n - a_1}{b_1 - b_n}$ mit der Höhe beweist, daß die Wassermenge in der Sandsäule nach oben zu abnimmt; daher konnte nach gewisser Zeit (um 16^h 44') durch Quetschen des Schlauches Wasser aus dem U-Rohr in die Sandsäule gepreßt werden, ohne daß sich der kapillare Saum irgendwie geändert hätte, während der Spiegel im U-Rohr von 13.25 auf 11.5, also um 1.75 *cm* gefallen ist. Diese hinzugefügte Wassermenge wurde, wie man aus der Tabelle sieht, vom Sande gehalten, und es erfolgte noch ein weiterer kapillarer Aufstieg.

Während durch das Zwischentreten der Luft eine Änderung des Widerstandes der kapillaren Leitung hervorgerufen werden kann, scheint dies für die größte Steighöhe ohne Einfluß zu sein. Denn ist für den Spannungszustand der Oberfläche die Form unterhalb und das Vorhandensein von Luftblasen im Innern gleichgültig. In der Tat zeigen die Messungen von Atterberg u. a. eine gute Übereinstimmung mit den Rechnungsergebnissen aus Gleichung (36). Dies ist auch darauf zurückzuführen, daß der Korndurchmesser der verwendeten Sande innerhalb enger Grenzen schwankte und die Gefahr einer Entmischung beim Einfüllen in die Zylinder eine sehr geringe war. Letzterer Umstand ist aber für die Bestimmung der Steighöhe von größter Bedeutung, und es genügt die Entmischung in einer dünnen Schichte, damit an dieser Stelle das kapillar aufsteigende Wasser hängen bleibe. Wäre die Entmischung nicht, so könnte man aus der Beobachtung der größten Steighöhe in Sandgemischen, wie sie neuere Forscher¹ verwendet haben, den wirksamen Korndurchmesser bestimmen. Daß aber eine wenn auch beschränkte Entmischung bei noch so großer Sorgfalt eintritt, zeigen die sich widersprechenden Meßergebnisse.²

Wie erwähnt, sind die Atterberg'schen Versuche für ziemlich gleichkörnige Sande vorgenommen worden; da aber bei jeder Gruppe nur die obere und untere Grenze des Korndurchmessers angegeben ist, während über die Verteilung innerhalb der Grenzen nichts bekannt ist, kann der wirksame Korndurchmesser nicht ohneweiters bestimmt werden.

Für ein Korngemisch vom Gewichte $G = 1$ gilt die Beziehung,³

$$\frac{1}{d_w} = \int \frac{dG}{d},$$

wo $G = \varphi(d)$ die Gewichtsanteilssummenlinie darstellt. Zwischen zwei genügend nahen Grenzen d_1 und d_2 kann nach der Trapezregel

$$\frac{1}{d_w} = \left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} \right) \cdot \frac{1}{2}$$

gesetzt werden, während bei Annahme einer gleichmäßigen Verteilung über das Intervall $d_1 - d_2$ nach der Simpson'schen Regel in erster Näherung wäre

$$\frac{1}{d_w} = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{d_1} + \frac{8}{d_1 + d_2} + \frac{1}{d_2} \right).$$

¹ Siehe z. B. E. Krüger, »Über die Verteilung des Wassers im Boden« Kulturtechniker, 1925, p. 185. Obwohl die Versuche VII und VIII an gleichem Korngemisch durchgeführt wurden, zeigt VII bei kleinerem Porenvolumen eine kleinere Steighöhe als VIII. Ferner ist zwischen der kapillaren Steighöhe von VII und VI ein verhältnismäßig kleiner Unterschied, obwohl bei VII zirka 8·35 Gewichtsprozent der Korngruppe 0—0·01 mm gegen 0·220/0 bei VI vorhanden sind.

² l. c., p. 33.

³ J. Kozeny, »Über Grundwasserbewegung«. Wasserkraft und Wasserwirtschaft, Berlin-München 1927, p. 69.

Zwischen beiden Werten liegt der mittlere Wert

$$\frac{1}{d_w} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{d_1} + \frac{2}{d_1 + d_2} + \frac{1}{d_2} \right).$$

Nachstehendes Beispiel an der Korngruppe Atterberg's vor:
 $d = 0.5 - 0.2 \text{ mm}$ soll die Abweichungen nach den drei Formeln
 vor Augen führen, und zwar ist

nach der Trapezregel	$d_w = 0.286 \text{ mm}$
nach Simpson	$d_w = 0.325$
der mittlere Wert	$d_w = 0.305$

In der folgenden Tabelle wurde aus den Messungen Atterberg's
 mittels Gleichung (36) d_w berechnet, und der Vergleich mit den d_i
 aus den obigen Formeln ergab, daß für die gröberen Kornsorten der
 Wert d_w kleiner ist als der mittlere Wert, für feinere hingegen größer.
 Im allgemeinen wird auch hier bestätigt, daß die kapillare Steighöhe
 umgekehrt proportional ist dem wirksamen Korndurchmesser.

Korndurchmesser d in cm	Mittlerer Korndurchmesser cm	Porenvolumen p 0/10	Beobachtete Steighöhe H in cm	$d_w = \frac{0.446 (1-p)}{H} \cdot p$	d_w nach Trapezregel, mittlerer Wert, nach Simpson in cm
0.5—0.2	0.35	40.1	2.5	0.27	0.286 0.305 0.325
0.2—0.1	0.15	40.4	6.5	0.101	0.133 0.139 0.144
0.1—0.05	0.075	41.8	13.1	0.061	0.067 0.069 0.072
0.05—0.02	0.035	40.5	24.6	0.027	0.0286 0.0305 0.0325
0.02—0.01	0.015	40.4	42.8	0.015	0.0133 0.014 0.0144
0.01—0.005	0.0075	41.0	105.5	0.008	0.0067 0.0069 0.0072
0.005—0.002	0.0035	41.0	200	0.0032	0.00286 0.00305 0.00325

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse](#)

Jahr/Year: 1927

Band/Volume: [136_2a](#)

Autor(en)/Author(s): Kozeny Josef

Artikel/Article: [Über kapillare Leitung des Wassers im Boden. \(Aufstieg, Versickerung und Anwendung auf die Bewässerung\) 271-306](#)