

Über vektorischen Ausgleich geschlossener geodätischer Figuren in der Ebene im Falle beliebiger Gewichte für Strecken und Richtungen

Von

Richard Schumann

k. M. d. Akad. d. Wiss.

(Vorgelegt in der Sitzung am 17. Juni 1927)

1. Eine ebene Dreieckseite kann als Vektor behandelt werden. In der Stuttgarter »Zeitschrift für Vermessungswesen«, Jahrg. 1926, Hefte 20, 21 und 23, habe ich für gleichgewichtige Seiten und Richtungen mehrere Ausgleichsaufgaben aus Markscheidkunde und Geodäsie nebst Zahlenbeispielen vektorisch behandelt; im folgenden soll die Erweiterung auf den allgemeinen Fall ungleicher Gewichte gegeben werden.

Zunächst sind, angesichts der schwankenden Bezeichnungen in der Vektorrechnung, einige Festsetzungen nötig. Nennt man A den absoluten Betrag $|\mathfrak{A}|$ eines Vektors \mathfrak{A} , $\bar{\mathfrak{A}}$ den ihn richtenden Einheitsvektor, so ist der rechnermäßige Ausdruck für den Vektor selbst: $A \cdot \bar{\mathfrak{A}}$; der einfache Punkt bedeutet gewöhnliche Multiplikation im Sinne einer Vervielfältigung.

Das skalare (innere) Produkt zweier Vektoren \mathfrak{A} und \mathfrak{B} ist gleichwertig mit dem Produkt: $A \cdot B \cdot \cos(\mathfrak{A}\mathfrak{B})$. Ein besonderes Zeichen dafür einzuführen erscheint zweckmäßig; hier habe ich dazu Hohlklammern in folgender Form verwendet: $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$. Trennung durch ein Komma ist nötig, da auch eine Summe von Vektoren als Faktor auftreten kann.

Ein aus Beobachtungen erhaltener Vektor sei durch einen oberen Strich ' bezeichnet:

$$\mathfrak{A}' = A' \cdot \bar{\mathfrak{A}}'. \quad (1)$$

Beim Zusammensetzen zu Vielecken entstehen Widerspruchsvektoren:

$$\mathfrak{W} = W \cdot \bar{\mathfrak{W}}.$$

Soll das Dreieck schließen, so müssen die Seiten Verbesserungen erhalten, auch diese haben Betrag und Richtung. Ist \mathfrak{A} der ausgeglichene Vektor, so wird:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}' + d\mathfrak{A}';$$

$d\mathcal{W}'$ wie sein Absolutbetrag sind hier kleine Größen. Zweckmäßigerweise zerlegt man $d\mathcal{W}'$ in zwei Komponenten, indem man es sowohl auf die Richtung von \mathcal{W}' als auch auf die Normale projiziert. \mathcal{W}' erfährt dadurch eine Streckung und eine Querverschwenkung, sie haben beide Vektorcharakter; es wird:

$$d\mathcal{W}' = \text{Streckung} + \text{Querverschwenkung}.$$

Die Streckung läßt sich unmittelbar vektorisch schreiben als $dA' \cdot \overline{\mathcal{W}'}$. Für die Querverschwenkung führt man mit Vorteil, entsprechend dem ijk -System bei festen Achsen, den zu $\overline{\mathcal{W}'}$ senkrechten Einheitsvektor ein, er sei: $|\mathcal{W}'$. Ist a' der absolute Betrag der Querverschwenkung, so ist deren vektorischer Ausdruck: $a' |\mathcal{W}'$. Nunmehr ist es leicht, auch die Verbindung mit der beim gewöhnlichen Ausgleich gebräuchlichen Richtungsverbesserung v herzustellen. Die kleine Größe a' ist das A' -fache der Querverschwenkung von $\overline{\mathcal{W}'}$, also ist:

$$A' \cdot v = A' \cdot |d\overline{\mathcal{W}'}| = a'. \quad (2)$$

Dadurch erlangt man den zur Rechnung geeigneten Ausdruck:

$$d\mathcal{W}' = dA' \cdot \overline{\mathcal{W}'} + A' |d\overline{\mathcal{W}'}| \cdot |\mathcal{W}'|. \quad (3)$$

Für ein Dreieck mit den fehlerlosen Seiten \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , \mathfrak{C} soll sein:

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} = 0; \quad (4)$$

im Falle beobachteter Werte wird:

$$\mathcal{W}' + \mathcal{B}' + \mathcal{C}' + \mathcal{B}\mathcal{B} = 0. \quad (5)$$

Nennt man: $v_{\mathfrak{A}}$, $v_{\mathfrak{B}}$, $v_{\mathfrak{C}}$ die Verbesserungen der drei Richtungen, α , β , γ die drei Winkel zwischen ihnen, so ist:

$$d\alpha = v_{\mathfrak{C}} - v_{\mathfrak{B}} = |d\overline{\mathfrak{C}}| - |d\overline{\mathfrak{B}}|,$$

$$d\beta = v_{\mathfrak{A}} - v_{\mathfrak{C}} = |d\overline{\mathfrak{A}}| - |d\overline{\mathfrak{C}}|,$$

$$d\gamma = v_{\mathfrak{B}} - v_{\mathfrak{A}} = |d\overline{\mathfrak{B}}| - |d\overline{\mathfrak{A}}|;$$

somit ist hier immer:

$$d\alpha + d\beta + d\gamma \equiv 0.$$

Hier ist eine Schwierigkeit zu beheben; zwischen je drei Vektoren bestehen drei Winkel, die immer auf 180° schließen, mögen die Vektorrichtungen fehlerlos oder fehlerhaft sein. In der Praxis kann man Richtungen allein nicht messen, sondern nur Winkel, und diese gemessenen Winkel schließen im Dreieck nicht auf 180° . Bevor man demnach gemessene Winkel zu vektorischen Rechnungen

ansetzen kann, wird es nötig, sie für jedes einzelne Dreieck auszugleichen. Den Netzzusammenschluß bewirkt dann der vektorische Ausgleich; hierbei erhalten neben den Beträgen die Richtungen neuerliche Verbesserungen. Die Dreiecksschlüsse bleiben, den obigen drei Gleichungen gemäß, erhalten. Ein ähnlicher Vorgang ist die Einführung der Ergebnisse von Stationsausgleichen in eine Netzausgleichung.

Da der Winkelausgleich im einzelnen Dreieck sowohl in der Ebene wie auf der Kugel, mit oder ohne Gewichte sehr einfach ist, so soll er hier als erledigt vorausgesetzt werden. Bei der Berechnung mittlerer Fehler ist in Betracht zu ziehen, daß für jedes Dreieck bereits eine Bedingung erfüllt wurde. Vektorische Betrachtungen über Fehler haben K. Friedrich schon vor Jahren, Fr. Faltus neuerdings angestellt.

2. Vektorische Bedingungsgleichungen haben die bequeme Form einfacher Winkelgleichungen; die Form des Dreiecks geht nicht ein, die Koeffizienten der unbekanntenen Verbesserungen sind: $+1, -1, 0$. Dies erleichtert die Auflösung, namentlich dann, wenn regelmäßig gebaute Ketten oder Netze vorliegen; neuerdings wurde als erwünscht bezeichnet, sie dementsprechend anzulegen. Zu den notwendigen und hinreichenden Bedingungen tritt die Forderung, die skalare Quadratsumme der Fehlervektoren zum Minimum zu machen; sie deckt sich zwar einesteils mit der entsprechenden Forderung der üblichen Ausgleichung, weil das skalare Quadrat eines Vektors gleich dem Quadrat seines absoluten Betrages ist; anderenteils reicht aber die neue Forderung weiter, weil der vektorische Ausdruck des skalaren Quadrates auch den Einheitsvektor mitenthält, weil also auch nach ihm und damit nach der Richtung variiert werden kann.

Die nun vorliegende relative Minimumsaufgabe kann auch in eine absolute übergeführt werden; man multipliziert jede geometrische Bedingung skalar mit einem Korrelatvektor \mathfrak{Q} , addiert diese inneren Produkte zur skalaren Quadratsumme der Fehlervektoren und macht diese neue Summe zum Minimum. Aus Zweckmäßigkeitsgründen tritt auch hier ein Faktor: -2 hinzu.

Die Anzahl der Vektoren sei n , die der Bedingungen r ; α_{ik} bedeute $+1, -1$ oder 0 , i zählt von 1 bis n , k von 1 bis r . Die Vektoren sollen den Bedingungen unterliegen:

$$[\alpha_{ik} \cdot \mathfrak{U}_i] + \mathfrak{B}_k = 0, \quad (6)$$

die Fehlervektoren also:

$$[\alpha_{ik} \cdot d \mathfrak{U}_i] - \mathfrak{B}_k = 0. \quad (7)$$

Eckige Klammern sollen, wie nach Gauß üblich, in der Ausgleichsrechnung bedeuten: Summation über einen Index, hier über i .

Der Widerspruchsvektor \mathfrak{B}_k läßt sich nach Betrag und Richtung leicht aus (6) berechnen; jede dieser Gleichungen wird durch skalare Multiplikation erst mit $\bar{\mathfrak{U}}_i$, sodann mit $|\mathfrak{U}'_i$ in zwei Zahlengleichungen gespalten, die $t_g(\mathfrak{B}_k, \mathfrak{U}'_i)$ und W_k zu bestimmen erlauben. Die Winkel zwischen den Vektoren \mathfrak{U}'_i hängen in einfacher Weise mit den (abgestimmten) Dreieckswinkeln zusammen. Kontrollgleichungen erhält man durch Spalten mittels $\bar{\mathfrak{B}}$ und $|\mathfrak{B}$.

Für das skalare Quadrat eines Fehlervektors gilt:

$$\begin{aligned} (d\mathfrak{U}', d\mathfrak{U}') &= (dA' \cdot \bar{\mathfrak{U}}' + a' |\mathfrak{U}'', dA' \cdot \bar{\mathfrak{U}}' + a' |\mathfrak{U}'') = \\ &= (dA')^2 + (a')^2 = |\mathfrak{U}'|^2. \end{aligned} \quad (8)$$

Die zu einer Quadratsumme vereinten kleinen Größen dA' und a' haben gleiche Dimension; da die Meßgenauigkeit der Strecken und Richtungen im allgemeinen als ungleich anzunehmen ist, so müssen jenen beiden Quadraten verschiedene Gewichte zugelegt werden, sie sind aus den Strecken- und den Winkelmessungen zu ermitteln. Für den i -ten Fehlervektor sei das Gewicht der Streckung g_i^2 , das der Querverschwenkung p_i^2 . Beim üblichen Ausgleich wäre als Quadratsumme anzusetzen:

$$[g_i^2 \cdot (dA')^2 + p_i^2 \cdot (a')^2].$$

In vektorischer Form lautet die entsprechende »erweiterte Minimumsbedingung«:

$$\begin{aligned} &[(g_i \cdot dA'_i \cdot \bar{\mathfrak{U}}'_i + p_i \cdot a'_i \cdot |\mathfrak{U}'_i, g_i \cdot dA'_i \cdot \bar{\mathfrak{U}}'_i + p_i \cdot a'_i \cdot |\mathfrak{U}'_i)] - \\ &- 2 \sum_{k=1}^r ([\alpha_{ik} \cdot d\mathfrak{U}'_i] - \mathfrak{B}_k, \mathfrak{L}_k) = \text{Minimum}, \end{aligned} \quad (9)$$

und zwar in bezug auf die $2n + r$ Größen dA'_i , a'_i und \mathfrak{L}_k ; für sie ergeben sich in allgemeiner Form die Normalgleichungen:

$$\frac{\partial \text{Min}}{\partial dA'_i} = 0, \quad \frac{\partial \text{Min}}{\partial a'_i} = 0, \quad \frac{\partial \text{Min}}{\partial \mathfrak{L}_k} = 0. \quad (10)$$

Es handelt sich somit um Differentiation von Vektorprodukten, und zwar nicht nur nach Beträgen wie dA' und a' , sondern auch nach Vektoren. Hierfür gelten folgende Regeln; es ist:

$$\frac{\partial (\mathfrak{U}, \mathfrak{B})}{\partial \mathfrak{U}} = + \mathfrak{B}, \quad \frac{\partial (\mathfrak{U}, \mathfrak{B})}{\partial \mathfrak{B}} = + \mathfrak{U}, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\mathfrak{U}, \mathfrak{B})}{\partial A} &= \left(\frac{\partial (\mathfrak{U}, \mathfrak{B})}{\partial \mathfrak{U}}, \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial A} \right) = (\mathfrak{B}, \bar{\mathfrak{U}}) = \\ &= B \cdot \cos(\mathfrak{B}, \mathfrak{U}); \end{aligned} \quad (12)$$

Die lassen sich aus den Regeln für direkte und für implizite Differentiation von Zahlengrößen mechanisch gewinnen. Mein Kollege E. Müller hatte die Güte, darauf aufmerksam zu machen, daß sie aus einer allgemeinen Gleichung mit Notwendigkeit folgen, die sich in Hermann Graßmann's Ausdehnungslehre vom Jahre 1862 für die Differentiation extensiver Größen findet; siehe Hermann Graßmann's gesammelte Werke, herausgegeben von Hermann Graßmann dem Jüngeren und Friedrich Engel, Bd. I₂, p. 297, Nr. 440.

3. Mit Hilfe von (11) und (12) ergeben sich die Normalgleichungen zunächst in vektorischer Form; es folgt für dA'_i :

$$(g_i \cdot \bar{\mathcal{A}}'_i, g_i \cdot dA'_i \cdot \bar{\mathcal{A}}'_i + p_i \cdot a'_i \cdot \mathcal{A}'_i) - \sum_{k=1}^r (\alpha_{ik} \cdot \bar{\mathcal{A}}'_i, \mathcal{L}_k) = 0, \quad (13)$$

für a'_i :

$$(p_i \cdot \mathcal{A}'_i, g_i \cdot dA'_i \cdot \bar{\mathcal{A}}'_i + p_i \cdot a'_i \cdot \mathcal{A}'_i) - \sum_{k=1}^r (\alpha_{ik} \cdot \mathcal{A}'_i, \mathcal{L}_k) = 0, \quad (14)$$

für \mathcal{L}_k :

$$[\alpha_{ik} \cdot d\mathcal{A}'_i] - \mathfrak{B}_k = [\alpha_{ik} \cdot (dA'_i \cdot \bar{\mathcal{A}}'_i + a'_i \cdot \mathcal{A}'_i)] - \mathfrak{B}_k = 0. \quad (15)$$

Führt man (13) und (14) in Zahlengleichungen über, so folgen für die dA'_i und a'_i die Ausdrücke:

$$dA'_i = \frac{1}{g_i^2} \sum_{k=1}^r \alpha_{ik} \cdot L_k \cdot \cos(\mathcal{A}'_i \mathcal{L}_k), \quad i = 1 \dots n, \quad (16)$$

$$a'_i = \frac{1}{p_i} \sum_{k=1}^r \alpha_{ik} \cdot L_k \cdot \sin(\mathcal{A}'_i \mathcal{L}_k).$$

Setzt man diese Werte in (15) ein, spaltet jede der sich ergebenden k Gleichungen mittels \mathfrak{B}_k , ersetzt jeden Winkel $(\mathcal{A}'_i \mathcal{L}_k)$ nach der Formel:

$$\sphericalangle(\mathcal{A}'_i \mathcal{L}_k) = \sphericalangle(\mathcal{A}'_i \mathcal{A}'_1) + \sphericalangle(\mathcal{A}'_1 \mathcal{L}_k) \quad (17)$$

und entwickelt die \cos und \sin dieser Summenwinkel, so erhält man $2r$ lineare Gleichungen für die $2r$ Unbekannten

$$L_k \cdot \cos(\mathcal{A}'_1 \mathcal{L}_k) \text{ und } L_k \cdot \sin(\mathcal{A}'_1 \mathcal{L}_k);$$

aus ihnen folgen nach (17), (16) und (2) die gesuchten Unbekannten dA' , a' und v selbst.

Weitere Bestimmungs- und Kontrollgleichungen erhält man durch Spalten der Gleichungen (15) mittels anderer geeigneter Vektoren, etwa mittels der \mathfrak{L} .

4. Für den Sonderfall gleicher Gewichte tritt eine wesentliche Vereinfachung der Rechnung ein. Die »erweiterte Minimumsbedingung« lautet dann:

$$[(d \mathfrak{A}'_i, d \mathfrak{A}'_i)] - 2 \sum_{k=1}^r ([a_{ik} \cdot d \mathfrak{A}'_i] - \mathfrak{B}_k, \mathfrak{L}_k) = \text{Minimum}$$

in bezug auf die $n + r$ Vektoren $d \mathfrak{A}'_i$ und \mathfrak{L}_k . Die $n + r$ Normalgleichungen werden gemäß (11):

$$\frac{\partial \text{Min}}{\partial d \mathfrak{A}'_i} = 0, \quad \frac{\partial \text{Min}}{\partial \mathfrak{L}_k} = 0;$$

sie werden zunächst nach (11), sodann weiter behandelt wie in angegeben.

5. Zur Berechnung mittlerer Fehler dient auch hier die Quadratsumme der Verbesserungen, also der Fehlervektoren; die Quadratsumme setzt sich zusammen aus denen der Streckungen und der Querverschwenkungen. Mit Hilfe der Gleichungen (7) und (13 bis (16) läßt sie sich mehrfach berechnen:

als Funktion der Verbesserungen $d A'$ und a' allein,
 der \mathfrak{B} allein,
 der \mathfrak{L} allein und
 durch \mathfrak{M} und \mathfrak{L} zugleich.

Die Fälle $p = 0$ und $g = 0$ sind im vektorischen Ausgleich als Sonderfälle enthalten; Untersuchungen hierüber sowie Zahlenbeispiele werden demnächst an anderer Stelle erscheinen.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften
mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse](#)

Jahr/Year: 1927

Band/Volume: [136 2a](#)

Autor(en)/Author(s): Schumann Richard

Artikel/Article: [Über vektorischen Ausgleich geschlossener geodätischer
Figuren in der Ebene im Falle beliebiger Gewichte für Strecken und
Richtungen. 429-434](#)