Gedruckt mit Unterstützung aus dem Jerome und Margaret Stonborough-Fonds

Abhängigkeit des Turbulenzfaktors der Winde von der vertikalen Temperaturverteilung

Von

Felix M. Exner

w. M. d. Akad.

(Vorgelegt in der Sitzung am 7. Juli 1927)

Als seinerzeit G. Taylor und W. Schmidt die Theorie der Turbulenzerscheinungen des Windes über der Erdoberfläche entwickelten und einen Turbulenzkoeffizienten, den Schmidt'schen »Austausch«koeffizienten, quantitativ berechneten, schien mir der Grad der Stabilität der übereinander strömenden Luftmassen für die Größe des Austausches von Bedeutung, so daß ich keinen konstanten Wert desselben erwartete. Denn wenn die Luft am Boden z. B. stark erwärmt wird, dann ist der Austausch nach oben natürlich größer, als wenn sie nachts oder im Winter sehr kalt ist gegenüber der höheren Luftschichte.

Im Jahre 1925 hat L. F. Richardson[1] den Einfluß des vertikalen Temperaturgradienten auf die Windverteilung durch Beobachtungen in niedrigeren Höhen nachgewiesen und auch W. Schmidt[2] hat auf diese Tatsachen Rücksicht genommen.

Eine Theorie L. F. Richardson's[3] über die Abhängigkeit des Energieverbrauches durch Turbulenz von der vertikalen Temperaturverteilung gab mir den Anlaß, eine Darstellung zu suchen, in welcher Weise der Turbulenzkoeffizient von der vertikalen Temperaturverteilung abhängt. Ich will gleich anfangs bemerken, daß die folgende Darstellung dieser Abhängigkeit nur eine beiläufige, nicht theoretisch genaue ist und daß auch die Prüfung des Ergebnisses durch Beobachtungen nur eine vorläufige ist, da bisher keine passenden Beobachtungen in genügender Menge und Genauigkeit zu finden waren. Die folgende Mitteilung hat also nur den Zweck, zu einer genaueren empirischen und theoretischen Behandlung des Problems anzuregen.

Denken wir uns zwei Luftschichten übereinander mit verschiedener horizontaler Geschwindigkeit strömen, so üben sie aufeinander eine Scherkraft aus, indem die rascher strömende von der langsamer strömenden Luftschichte verzögert, die langsamer strömende von der anderen beschleunigt wird. Man muß sich vorstellen, daß bei dieser ungleichen Bewegung der beiden Luftschichten an der

1 Phil. Mag. 49, p. 81.

2 Der Massenaustausch in freier Luft und verwandte Erscheinungen (Probleme der kosmischen Physik), Hamburg 1925.

3 Proc. Roy. Soc. A. Vol. 97, 1920.

Grenzfläche Wirbel mit horizontalen Achsen entstehen (Walzen), wobei aus der unteren Luftschichte Luftteilchen in die obere gehoben und umgekehrt aus der oberen Teilchen in die untere hinabgedrückt werden. Lenken wir unsere Aufmerksamkeit zunächst auf eine tropfbare Flüssigkeit von konstanter Dichte, dann ist anzunehmen, daß eine Vermischung der oberen und unteren Strömungsschichte bis zu einem gewissen Grade eintreten wird. Offenbar ist, auch wenn die Dichte oben und unten dieselbe ist, eine Arbeitsleistung zur Erzeugung dieser Wirbel nötig, da die innere Reibung einen Widerstand gegen diese Bewegungen bietet. Es werden sich also infolge der inneren Reibung die Wirbel nicht von der Grenzschichte aus bis in beliebige Höhen hinauf und hinab ausdehnen, eine vollständige Vermischung der beiden Schichten mit anfangs verschiedener Strömung wird nicht geschehen, sondern es wird bei einer anfänglichen Strömungsdifferenz der oberen und unteren Schichte durch die Turbulenz nach einer gegebenen Zeit eine bestimmte Verringerung der Strömungsdifferenz eintreten; bei diesem Vorgang wäre die Turbulenz als der Normalwert der möglichen Turbulenzgrößen zu betrachten.

Andere Vermischungsmöglichkeiten (Turbulenzgrößen) ergeben sich nämlich, wenn die Dichte der tropfbaren Flüssigkeit in vertikaler Richtung nicht konstant ist. Nehmen wir z. B. an, die Dichte nehme nach oben ab, so wird die Arbeitsleistung zur Bildung eines Wirbels eine viel größere als im ersten Fall. Denn die untere schwerere Masse muß durch die Scherkraft gehoben, die obere leichtere in die schwerere hinabgedrückt werden. Es kann also bei einer gegebenen Strömungsdifferenz in diesem Fall nur ein geringerer Austausch entstehen, der Turbulenzfaktor wird kleiner sein. Anderseits tritt das umgekehrte ein, wenn die Dichte der oberen Schichte größer ist als die der unteren. Dann wird durch den Auftrieb der unteren und den Abtrieb der oberen Masse an der Grenzfläche der Wirbel wesentlich vergrößert; sobald die Dichtendifferenz genügend groß ist, daß die innere Reibung die vollständige Umlagerung der beiden Schichten nicht mehr hindert, erreicht der Austausch den höchsten möglichen Betrag, den wir in der Größe »unendlich« ansetzen können.

Es hängt also der Turbulenzfaktor sehr von der vertikalen Dichtenverteilung ab. Gehen wir nun auf Luftmassen über, so haben wir, bei Austausch in vertikaler Richtung, auf die adiabatische Temperaturänderung der Luft Rücksicht zu nehmen und sonach nicht die vertikale Verteilung der Dichte, sondern die der potentiellen Temperatur zu verwenden. Statt letzterer können wir bekanntlich auch die Abweichung der vertikalen Temperaturverteilung vom adiabatischen Temperaturgradienten benutzen.

Es ist somit zu erwarten, daß der »Normalwert« des Turbulenzfaktors jener ist, der sich bei dem adiabatischen Temperaturgefälle von $\frac{Ag}{c_p} = 1°$ C. pro 100 m zeigt. Kleiner muß der Faktor werden, wenn der Temperaturgradient kleiner ist als $1°/100\,m$, also $-\frac{dT}{dz} < \frac{Ag}{c_p}$; über den Normalwert steigt dieser Faktor, wenn $-\frac{dT}{dz} > \frac{Ag}{c_p}$, und von einer gewissen Grenze an, wo die innere Reibung den Auftrieb und Abtrieb nicht mehr hindert, muß der Faktor ins unendliche wachsen.

In erster Annäherung können wir also annehmen, daß der Turbulenzfaktor μ dem Werte $k+\frac{Ag}{c_p}+\frac{dT}{dz}$ verkehrt proportional ist, also

$$\mu = \frac{c}{k+\frac{Ag}{c_p}+\frac{dT}{dz}}.$$

Ist adiabatischer Temperaturgradient in der Luft gegeben, also

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{Ag}{c_p},$$

so wird $\mu = \frac{c}{k}$ der oben angegebene Normalwert sein. Ist der Temperaturgradient geringer, so wird μ kleiner, ist er größer, so wird μ größer; wenn $\frac{dT}{dz}+\frac{Ag}{c_p} = -k$, so wird μ unendlich.

Ich habe den Versuch gemacht, die Größe

$$k\left(\text{beziehungsweise } K = k+\frac{Ag}{c_p}\right)$$

aus Beobachtungen zu berechnen; hiefür verwendete ich die von A. Angot[1] veröffentlichten Eiffelturmbeobachtungen, wo Messungen der Windstärke in Paris und auf der Spitze des Eiffelturmes sowie Messungen der Temperatur in verschiedener Höhenlage vorliegen.

Da die Drehung des Windes nach aufwärts eine sehr komplizierte Formel der Windverteilung liefert, habe ich von dieser Drehung abgesehen; denn die Beobachtungen gestatten es leider nicht, die unbekannten Koeffizienten komplizierterer Gleichungen in größerer Zahl aus den Beobachtungen zu berechnen. Ich benutze daher nur eine einfache hydrodynamische Formel, welche die Wirkung der Erdrotation vernachlässigt. Sie lautet bekanntlich:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial z}\right).$$

[1] Résumé des observations anémometriques 1890—1895 und Résumé des observations météorologiques 1890—1894; Ann. Bur. Centr. mét. de France, 1896 und 1897.

Hier ist μ als variabel nach der Höhe angenommen. Um nun die erwähnte Konstante k aus den Beobachtungen zu berechnen, habe ich für die Angot'schen Windstärken, welche Mittelwerte aus fünf Jahren darstellen, die Beschleunigung $\frac{du}{dt} = 0$ gesetzt und den Druckgradienten $\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$ als von der Höhe z unabhängig angenommen. Bezeichnen wir diesen Wert mit A, so wird

$$\frac{d}{dz}\left(\mu \frac{du}{dz}\right) = A, \quad \mu \frac{du}{dz} = Az+B.$$

Die Größen A und B sind aus den Beobachtungen nicht direkt zu entnehmen. Ich habe daher neben μ nur A als Unbekannte und zu berechnende Größe in der Gleichung belassen und $B = 0$ gesetzt. Damit fällt die Windänderung mit der Höhe für den Boden selbst auf Null, was gewiß einen kleinen Fehler im Rechnungsergebnis verursachen kann. Die Messungen der Windstärke sind nach Angot's Darstellung nur in der Höhe von 32 *m* (Bureau Central) und auf der Spitze des Eiffelturms (in 302 *m* Höhe) gemacht. Es sind also nur diese beiden Werte von unten und oben gegeben, nicht eine nähere Abhängigkeit der Windstärke von der Höhe, so daß ich B vernachlässigen mußte.

In die Gleichung $\mu \frac{du}{dz} = Az$ ist nun der oben angegebene Wert für μ einzusetzen, wobei ich zur Vereinfachung $k + \frac{Ag}{c_p} = K$ schreibe; so wird

$$\frac{du}{dz} = \frac{A}{c}\left(K + \frac{dT}{dz}\right) z. \tag{1}$$

Die Temperaturbeobachtungen sind in Paris gegeben für Parc St. Maur (2 *m*), Bureau Central (32 *m*) und drei Höhenstufen des Eiffelturmes in 123, 197 und 302 *m*. Dabei hat Angot als Basisstation für die vertikale Temperaturverteilung Parc St. Maur benutzt, weil Bureau Central etwas zu hohe Stadttemperatur aufweist.

Mit den vier Stationen in 2, 123, 197 und 302 *m* läßt sich bis zu 300 *m* Höhe die Temperaturverteilung berechnen. Ich habe sie ausgedrückt durch $T = T_0 + \alpha z + \beta z^2$. T_0, α, β sind Konstante, die aus den Beobachtungen berechnet werden. Setzt man in die letzte Formel $\frac{dT}{dz} = \alpha + 2\beta z$ ein, so wird $\frac{du}{dz} = \frac{A}{c}(K + \alpha + 2\beta z) z$ und durch Integration $u_z - u_0 = \frac{A}{c}\left(\frac{K+\alpha}{2} + \frac{2}{3}\beta z\right) z^2$. Aus den Beobachtungen ergibt sich u_z, u_0, α, β, wobei $z = 300\,m$. Es sind also die zwei Größen $\frac{A}{c}$ und K zu berechnen. Dazu muß die Gleichung auf zwei Fälle angewendet werden.

Hiefür habe ich die fünfjährigen Mittelwerte der einzelnen Monate von u_z nnd u_0 (Jahre 1890 bis 1895) benutzt und für die gleichen Monate (der Jahre 1890—1894) die Mittelwerte der Temperatur zur Berechnung von α und β verwendet. Benutzt man aber zur Berechnung der beiden Konstanten zwei verschiedene Monate zusammen, z. B. Jänner und Juli, so ist der Wert A, der Druckgradient, hier nicht der gleiche. Er ist in den Beobachtungsresultaten Angot's auch nicht angegeben. Ich habe daher den Wert $\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = A$ der Geschwindigkeit u_z des betreffenden Monates proportional gesetzt und, um auch die in verschiedenen Jahreszeiten verschiedene Dichte ρ zu berücksichtigen, den Wert A proportional der absoluten Temperatur in $z = 300\,m$ angenommen $\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{RT}{p}\frac{\partial p}{\partial x}\right)$, wobei ich den Druck konstant setzte.

Um somit die Größe des durchschnittlichen Gradienten für verschiedene Monate zu berücksichtigen, wurde die Formel in der folgenden Weise benutzt:

$$\frac{du}{dz} = C u_z T_z (K + \alpha + 2\beta z) z, \tag{2}$$

$$u_z - u_0 = C u_z T_z \left(\frac{K+\alpha}{2} + \frac{2}{3}\beta z\right) z^2. \tag{3}$$

Die Größe C kann durch zwei Zahlengleichungen der letzten Art eliminiert und damit die Größe K berechnet werden.

Für diese Auswertung wurden die beobachteten Mittelwerte von sechs Monaten verwendet. Ich gebe sie in der folgenden Tabelle an, wobei ich die Höhe der Temperaturstationen auf die Höhe von Parc St. Maur beziehe.

	Wind in m/sek.		Temperatur ° C.			
	u_0	u_z	0 m	120 m	195 m	300 m
Jänner	2·38	10·48	2·17	2·10	1·93	1·68
April	2·16	8·09	9·76	9·12	8·79	8·31
Juni	2·06	7·33	16·50	15·98	15·52	14·95
Juli	2·08	7·90	18·13	17·63	17·20	16·64
Oktober	1·90	9·39	9·89	10·25	10·10	9·63
Dezember	2·32	9·34	2·57	2·63	2·43	2·21

Aus den Temperaturgrößen wurden die folgenden Werte α und β berechnet:

	Jänner	April	Juni	Juli	Oktober	Dezember
$\alpha =$	$-2 \cdot 512$	$-5 \cdot 660$	$-3 \cdot 770$	$-6 \cdot 085$	$5 \cdot 577$	$1 \cdot 632 \;.10^{-3}$
$\beta =$	$2 \cdot 933$	$2 \cdot 778$	$-4 \cdot 667$	$3 \cdot 732$	$-21 \cdot 480$	$-9 \cdot 444 \;.10^{-6}$

Nun wurden drei Kombinationen von Monaten für die Berechnung von K mittels der Formel (3) verwendet und sie ergaben die folgenden Werte:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Jänner}\\ \text{Juli}\end{array}\right\} K = 0 \cdot 0331$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{April}\\ \text{Oktober}\end{array}\right\} K = 0 \cdot 0220$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Juni}\\ \text{Dezember}\end{array}\right\} K = 0 \cdot 0413$$

Das Mittel dieser drei Resultate ist $K = 0 \cdot 0321$.

Um das Ergebnis auf noch einfachere Weise nachzuprüfen, habe ich die Formel (1) verwendet und für $\frac{d\,u}{d\,z}$ den Wert $\frac{u_z - u_0}{300}$, für $\frac{d\,T}{d\,z}$ den Wert $\frac{T_z - T_0}{300}$ eingesetzt (in Formel (1) ist natürlich für $\frac{A}{c}\, C u_z T_z$ benutzt, wobei unter u_z und T_z die Werte für 300 m Höhe gemeint sind).

Für diese Rechnung waren auch wieder Kombinationen von zwei Monaten notwendig. Ich habe hier vier Kombinationen benutzt und folgende Resultate erhalten:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Jänner}\\ \text{Juli}\end{array}\right\} K = 0 \cdot 0364 \qquad \left.\begin{array}{l}\text{April}\\ \text{Juni}\end{array}\right\} K = 0 \cdot 0121$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Juli}\\ \text{Oktober}\end{array}\right\} K = 0 \cdot 0419 \qquad \left.\begin{array}{l}\text{Juni}\\ \text{Dezember}\end{array}\right\} K = 0 \cdot 0474$$

Das Mittel dieser vier vereinfachten Rechnungen gibt $K = 0 \cdot 0344$.

Die Einzelresultate fallen nicht übereinstimmend aus. Das ist aber auch nicht zu erwarten, da die Unterschiede zwischen den kombinierten Monaten, was Winddifferenz $u_z - u_0$ und Temperaturabnahme betrifft, nicht sehr groß sind; das beruht auf der Tatsache der Mittelwerte. Hätte man genaue Beobachtungen von Einzelfällen, so könnte die Feststellung der Größe K vielleicht sicherer sein. Allerdings dürfte man dann die Beschleunigung $\frac{d\,u}{d\,t}$ nicht vernachlässigen und eventuell müßte auch die Variabilität des Druckgradienten in der Vertikalen berücksichtigt werden, was theoretische Schwierigkeiten machen würde.

Die Auffindung einer Größe K, die annähernd 0·034 beträgt, läßt vermuten, was diese Größe bedeutet. Beträgt der Temperaturgradient in der Luft —0·034°C/m, so bedeutet dies eine Gleichheit der Luftdichte in vertikaler Richtung. Dieser Fall bildet die Grenze des labilen Gleichgewichtes gegen die Gleichgewichtslosigkeit der Luft, wo vollständige vertikale Umstürze der Luftmassen ohne jeden Bewegungsanlaß eintreten. In diesem Fall wird der Turbulenzfaktor

$$\mu = \frac{c}{0 \cdot 034 + \frac{dT}{dz}}$$

unendlich und nach Gleichung (1) $\frac{du}{dz} = 0$, d. h. die Durchmischung der Luftschichten ist so vollständig, daß die Windstärke von der Höhe unabhängig wird. Es ist wahrscheinlich, daß der annähernd gefundene Wert für K somit eine physikalische Begründung auf die gesagte Art erhält. Nehmen wir ihn zu 0·034 an, so ist der Normalwert bei adiabatischer Temperaturverteilung $k = K - \frac{Ag}{c_p} = 0 \cdot 024$. In diesem Falle wird der Turbulenzfaktor $\frac{c}{0 \cdot 024}$, im Falle einer Isothermie $\frac{c}{0 \cdot 034}$, so daß sich die Turbulenzfaktoren hier etwa wie 3 2 verhalten.

Natürlich ist schon im labilen Gleichgewichtszustand, wenn $\frac{dT}{dz} > /0 \cdot 01/°/m$, die Tendenz zum Umsturz der Luftmassen vorhanden; aber die innere Reibung kann doch ein solches labiles Gleichgewicht noch erhalten, wie dies ja auch bei aerologischen Beobachtungen festgestellt wurde.

Wenn in einem speziellen Fall die unterste Luftschichte abnorm kalt ist, dann ist bei einem in der Höhe vorhandenen Wind erfahrungsgemäß die untere Schichte oft in Ruhe; die Turbulenz ist so gering, daß die obere Strömung sich nicht nach unten ausbreitet. Ich will im folgenden mit dem gefundenen Werte von K noch ein Beispiel berechnen, wie sich die Windverteilung gestaltet, wenn am Boden eine Inversion herrscht, und wie sie sich gestaltet, wenn der adiabatische Temperaturgradient besteht. Freilich kann bei der Ruhe der kalten Bodenschichte auch die Ungleichheit des Druckgradienten unten und oben mitspielen. Aber in dem folgenden Beispiel nehme ich zur Vereinfachung Konstanz des Druckgradienten nach der Höhe an.

Um eine Inversion der Temperatur in die oben benutzte Formel (1) hineinzubringen, setze ich $T = T_0 + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3$ an.

Es sei folgende Temperaturverteilung für die untersten 200 *m* angenommen:

$z =$ 0 *m*	$t =$ 10°
50	12
100	11·8
200	11·4

Ferner sei in 200 *m* $u_z = 10$ *m*/sek.

Man erhält zunächst $\alpha = 7{\cdot}3 . 10^{-2}$, $\beta = -7{\cdot}7 . 10^{-4}$, $\gamma = 2{\cdot}2 . 10^{-6}$ und daraus mit den aus den Eiffelturmwerten berechneten Größen C und K die folgende Windverteilung, wobei $u_0 = 0$ gesetzt ist:

$z =$ 10 *m*	$u =$ 0·07 *m*/sek.
50	1·22
100	2·79
150	4·49
200	10

Bei dem gleichen Druckgradienten, der in 200 *m* Höhe die Geschwindigkeit von 10 *m*/sek. bedingt, ergibt sich im Falle des adiabatischen Temperaturgradienten ($\alpha = -0{\cdot}01$, $\beta = \gamma = 0$) die folgende Windverteilung:

für $z =$ 0 *m*	$u =$ 3·04 *m*/sek.
10	3·06
50	3·48
100	4·78
150	6·96
200	10

Wir haben also bei gleicher Windstärke in 200 *m* Höhe gegenüber dem früheren Fall eine Verstärkung des Windes in 100 *m* um 2 *m*, am Boden um 3 *m*. Bei der Zunahme der Temperatur um 2° für die untersten 50 *m* wird $\frac{dT}{dz}$ rund $+0{\cdot}04$ und folglich der Turbulenzfaktor $\frac{c}{0{\cdot}074}$, gegenüber dem Wert bei adiabatischer Temperaturverteilung $\frac{c}{0{\cdot}024}$. Der Faktor ist also bei dieser Inversion nur ein Drittel des Normalwertes. Diese Zahlen deuten darauf hin, daß die Turbulenz bei Temperaturinversionen wesentlich geringer ist; es wird aber auch vielleicht die Ruhe der kalten Bodenluft zum Teil durch die Ausgleichung des Druckgradienten am Boden mit verursacht.

Wie schon vorhin erwähnt, sind die hier vorliegenden Rechnungen sowohl in theoretischer Beziehung wie auch die Beobachtungen betreffend nur sehr spärliche Anfänge. Es wäre sehr wünschenswert, daß die Größe K durch eigens zu dem Zwecke angestellte Messungen der Windstärke in ihrer Abhängigkeit von der Temperaturverteilung genauer geprüft würde.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1927

Band/Volume: 136_2a

Autor(en)/Author(s): Exner Felix Maria von

Artikel/Article: Abhängigkeit des Turbulenzfaktors der Winde von der vertikalen Temperaturverteilung. 453-460