

Quantitative Beziehungen in der Farbenlehre

Von

Prof. Dr. Eduard Haschek

(Aus dem II. physikalischen Institut der Universität)

(Vorgelegt in der Sitzung am 7. Juli 1927)

König und Dieterici¹ haben durch ihre Messungen der Grundempfindungskurven die Möglichkeit zu quantitativen Überlegungen auf dem Gebiete der Farbenlehre gegeben. Solange man farbige Empfindungen, wie sie uns durch eine Reizung der Zapfen vermittelt werden, als durch Helligkeit, Sättigung und Farbton charakterisiert ansah, ohne über diese drei Qualitäten zahlenmäßige Angaben machen zu können und ihren quantitativen Zusammenhang mit den Grundempfindungen zu kennen, war die Young-Helmholtz'sche Theorie kaum mehr als eine interessante Hypothese.

Die Bedeutung der Arbeit von König und Dieterici wird aber sofort klar, wenn wir den Versuch machen, die Bestimmungsstücke Helligkeit, Sättigung und Farbton quantitativ aus den Erregungen der Grundempfindungen anzugeben. Es ist ja klar, daß jede Reizung des Auges — vom Stäbchensehen wollen wir absehen —, die eine Lichtempfindung zur Folge hat, die Grundempfindungen je in irgendeinem Ausmaße betrifft und daß die Stärke der Gesamtempfindung, die wir gemeinlich als Helligkeit bezeichnen, der Summe dieser Reizungen gleich sein muß. Wir erhalten dann, wenn R , G , B die Reizungen der Grundempfindungen bedeutet und H die Helligkeit ist, die Gleichung

$$H = R + G + B. \quad (1)$$

So wie jeder andere Farbton wird auch Weiß empfunden, wenn alle drei Grundempfindungen erregt sind. Es ist dazu ein bestimmtes Verhältnis der Reizungen nötig. Ist dieses kritische Verhältnis nicht erreicht, so haben wir irgendeine ungesättigte Farbempfindung. Die Sättigung als typische Eigenschaft einer farbigen Empfindung gibt uns den Grad der Farbigkeit derselben an. Das bedeutet, daß wir psychologisch die Empfindung als eine Summe zweier auffassen, einer reinfarbigen und einer Weißempfindung.

Je nachdem nun die eine oder die andere überwiegt, empfinden wir die gegebene Farbe als farbiger oder weißlicher, als gesättigter

¹ König und Dieterici, Zeitschrift für Psychologie und Physiologie der Sinnesorgane, Bd. 4, 1892; vgl. auch »Gesammelte Abhandlungen zur Physiologischen Optik« von A. König (J. A. Barth, Leipzig, 1903).

oder ungesättigter. Wir könnten als Maß der Sättigung etwa das Verhältnis der farbigen zur Weißempfindung nehmen. Das würde aber Maßzahlen ergeben, die zwischen Unendlich und Null variieren würden. Um nun bequeme Maßzahlen zu haben, wählte F. Exner¹ den Prozentgehalt der reinfarbigen in der Gesamtempfindung, d. h. er definierte als Sättigung

$$s = \frac{f}{f+w} \quad (2)$$

Darin bedeuten f und w die Helligkeiten der reinfarbigen, respektive Weißempfindung, $f+w$ ist die Gesamtempfindung, also identisch mit dem H der Gleichung (1).

Zur Definition des Farbtones stehen uns wieder zwei Wege offen. Zunächst haben wir bei der Definition der Sättigung bereits die Empfindung als Summe des farbigen und des weißen Anteiles aufgefaßt. Wir werden bei einer quantitativen Überlegung diese Anteile so wählen müssen, daß der berechnete farbige Anteil nur mehr durch das Zusammenwirken zweier Grundempfindungen bedingt erscheint. Wir können dann als Farbton oder Nuance das Verhältnis dieser zwei restlichen Grundempfindungen wählen oder analog vorgehen, wie es Exner bezüglich der Sättigung tat. Wir wollen, um im Endlichen bleiben zu können, den relativen Gehalt des Gesamtrestes an der einen Grundempfindung wählen. Nennen wir diese Reste etwa Γ_1, Γ_2 — auch diese Werte bedeuten Helligkeiten — und wählen wir zur Bezeichnung der Farbnuance den Buchstaben ν , so ist dann

$$\nu = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_1 + \Gamma_2} \quad \text{oder} \quad \nu' = \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2}, \quad (3)$$

je nachdem wir von der einen oder der andern der beiden Grundempfindungen ausgehen.

Es entspricht dies genau der Bezeichnung der Farbnuancen durch Punkte in den Seiten des Farbendreiecks, wo auch jeder Punkt durch zwei solche Verhältniszahlen gegeben ist. Es ist sichtlich identisch, ob ein Punkt der Dreieckseite durch das Verhältnis seines Abstandes von dem einen oder dem andern Eckpunkt zur ganzen Länge der Seite definiert ist. Es wird sich, um nicht zu Mehrdeutigkeiten von Zahlenangaben Anlaß zu geben, empfehlen, eine bestimmte Rechnungsweise anzunehmen. Man zeichnet das Farbendreieck konventionell so, daß die den drei Grundempfindungen R, G, B entsprechenden Eckpunkte in dieser Reihenfolge passiert werden, wenn man im Uhrzeigersinn herumgeht. Es dürfte sich empfehlen, die Indizes 1 und 2 der obigen ersten Formel in diesem Sinne zu wählen und den Zahlenwert ν zur Farbtonbezeichnung zu verwenden.

¹ F. Exner und S. Exner, Diese Ber., Abt. 1, Bd. CXIX (1910).

Wir bekommen so auf jeder Dreiecksseite im Spektrum vorkommende, respektive den Purpurtönen entsprechende Farbtöne durch Werte zwischen Eins und Null definiert. Jedem Eckpunkt der Dreiecksseite kommen diese beiden Werte Eins und Null gleichzeitig zu, je nachdem er als Anfangs- oder Endpunkt der Seite der obigen Definition entsprechend figuriert. Gleiche Werte zwischen Null und Eins bezeichnen auf den Dreiecksseiten RG — GB — BR verschiedene Nuancen, die eindeutig durch Indizes bezeichnet werden können, welche dem Anfangsbuchstaben der betreffenden Seite entsprechen. Es ist dann v_r eine im Spektrum zwischen Rot und Grün, analog v_g eine zwischen Grün und Blau liegende, v_b eine Violett- oder Purpurnuance.

Solche aus bloß zwei Grundempfindungen zusammengesetzte Farbempfindungen sind für unser Farbsehen nur in den Endstrecken des Spektrums realisiert. Allen anderen Empfindungen kommt eine kleinere Sättigung zu, die entsprechenden Farbpunkte liegen bekanntlich innerhalb der Fläche des Farbdreieckes. Man nimmt gewöhnlich an, daß nuancengleiche Farben verschiedener Sättigung im Farbdreieck durch Punkte gerader Linien definiert sind, die sich im Weißpunkt durchschneiden. Es ist also Weiß Farbe von der Sättigung Null.

Die Spektralfarben sind aus leicht begreiflichen Gründen die sattesten Farben, die wir objektiv erzeugen können. Es genügt also, da nach dem Obigen jeder erzeugbare Farbton als eine Mischung aus Weiß und einer oder höchstens zwei (für die Purpurtöne) Spektralfarben angesehen werden kann, für die Farben des Spektrums die Verhältniszahlen zu bestimmen, nach denen die Grundempfindungen gereizt werden. Dies sollten die Grundempfindungskurven von König und Dieterici leisten. Da aber eine Möglichkeit nicht bestand, die zur Nachahmung einer Spektralfarbe verwendeten Helligkeiten Rot, Grün, Violett miteinander photometrisch zu vergleichen, haben König und Dieterici willkürliche Einheiten benutzt, die so gewählt waren, daß Weiß durch das Verhältnis der Maßzahlen $R:G:B = 1:1:1$ definiert erscheint. Diese Supposition macht, wenn man mit Zahlenwerten rechnet, die den König'schen Kurven entnommen sind, die oben angeführten Gleichungen zu eher symbolischen als streng quantitativen. Es schadet das in vielen Fällen nicht wesentlich, ist aber manchmal doch bedenklich.

Man könnte nun hinterher, wo sich Methoden gefunden haben, die es gestatten, relative Helligkeitswerte für die Farben im Spektrum einer bestimmten Lichtquelle zu messen, rechnerisch die König'schen Kurven von der oben genannten Willkürlichkeit befreien, da dadurch die Helligkeiten Rot, Grün, Blau in einer gemeinsamen Helligkeitseinheit angebar sind. Sind nämlich nicht zufällig die von König und Dieterici gewählten Einheiten untereinander gleich, so können wir durch Multiplikation mit gewissen Faktoren ρ , γ , β die Reduktion der tatsächlich gewählten Einheiten auf eine den Grundempfindungsreizungen und der Helligkeit gemeinsame durch-

führen. Es würde dann die Gleichung (1) wirklich eine mathematische werden, die uns die Helligkeit als Summe der Reizungen der Grundempfindungen quantitativ anzugeben gestattet.

Diese Faktoren ρ , γ , β ließen sich bestimmen, wenn uns die Verteilung der Helligkeit über das Spektrum einer weißen Lichtquelle bekannt wäre. König und Dieterici wählten als weißes Licht jenes der Sonne, für das auch ihre Zahlenangaben der Grundempfindungskurven gelten. Es wäre wohl besser, eine andere Lichtquelle zum Standard zu wählen, etwa den schwarzen Körper bestimmter Temperatur oder das dem Krater einer Bogenlampe unter wohldefinierten Bedingungen entströmende Licht. Es ist ja infolge der wechselnden Trübungen und Schlieren in der Luft das Sonnenlicht durchaus keine konstante Lichtquelle, weder was Farbe noch was Helligkeit anlangt. Ich habe deshalb nach der Methode, die F. Exner¹ zur Bestimmung der Helligkeitsverteilung anwendete, eine Reihe von Messungen machen lassen, teilweise um zu bestimmen, inwieweit diese individuellen Variationen unterliegt, teilweise auch, um die Brauchbarkeit der Methode selbst zu prüfen. Die Stufenmethode, die F. Exner anwendete, beruht ja darauf, daß experimentell das Helligkeitsverhältnis benachbarter Teile im Normalspektrum bestimmt wird. Diese Verhältnisse als Funktion der Wellenlänge dargestellt erlauben sehr einfach, die jeder Stelle im Spektrum der gewählten Lichtquelle zukommende Helligkeit in einem für alle Farben einheitlichen, sonst willkürlichen Maß festzulegen. Gegen die Brauchbarkeit dieser Methode wurde vor allem der Einwand gemacht, daß sie auf heterochromer Photometrie beruhe und daß man nicht so sehr auf gleiche Helligkeit als vielmehr auf geringste Verschiedenheit der Felder einstelle. Dieser Einwand ist berechtigt, wenn der Wellenlängenunterschied der Felder, die Stufenhöhe, so groß gewählt wird, daß ein Nuancenunterschied merkbar wird. Nun ist aber die Nuancenempfindlichkeit begrenzt, und es bereitet bei geeigneter Apparatur und Ausdehnung des Spektrums keine Schwierigkeit, Farbfelder auszublenden und zu vergleichen, die weder in sich selbst noch gegeneinander Nuancierungen zeigen. Es hat auf meine Veranlassung Frau Doktor Reichenberg diese Versuche durchgeführt, und zwar für Wellenlängenunterschiede von 2, 4 und 8 $\mu\mu$. Derartig distanzierte Farbfelder liegen für 2 $\mu\mu$ über den ganzen Spektralbereich, für 4 $\mu\mu$ für den allergrößten und für 8 $\mu\mu$ immerhin noch für einen beträchtlichen Teil desselben innerhalb der Nuancenempfindlichkeit. Wäre nun der obige Einwand richtig, so müßten die drei darnach errechneten Helligkeitsverteilungskurven voneinander systematische Abweichungen zeigen; sie sind aber identisch innerhalb der unvermeidlichen Versuchsfehler. Diese Helligkeitsverteilungskurven sind am Bogenspektrum gewonnen. Es hat nun Herr Dr. Ortner auf meine Veranlassung die Reduktionsfaktoren bestimmt, mit deren

¹ F. Exner, Diese Ber., Abt. IIa, Bd. 129 (1920).

Hilfe sie auf die mittlere Kurve der Helligkeitsverteilung der Sonne umgerechnet werden können. Diese Faktoren wurden sowohl auf Grund direkter spektrophotometrischer Vergleichung wie auch aus den beiden für die Sonne und für den Bogen beobachteten Helligkeitsverteilungskurven errechnet. Die folgenden Werte sind als Mittel aus zahlreichen Versuchen wohl ziemlich frei von zufälligen Einflüssen.

Ist H_s die Helligkeit im Sonnenspektrum, H_b jene im Bogenspektrum, so bedeutet $\alpha = \frac{H_b}{H_s}$ den Umrechnungsfaktor, der in der folgenden Tabelle für die dort angeführten Wellenlängen angegeben ist.

λ		λ	
685·0	1·31	563·7	0·95
675·7	1·27	554·4	0·92
666·3	1·23	545·1	0·90
657·0	1·20	535·7	0·87
647·7	1·17	526·4	0·83
638·4	1·14	517·1	0·82
629·0	1·12	507·7	0·79
619·7	1·10	498·4	0·76
610·4	1·08	489·1	0·73
601·0	1·05	479·7	0·70
591·7	1·04	470·4	0·68
582·4	1·01	461·1	0·65
573·0	0·98	451·8	0·62

Frau Dr. Reichenberg hat nun nicht nur für sich selbst die Helligkeitsverteilungskurve im Bogenspektrum bestimmt, sondern auch noch fünf andere Personen zu solchen Messungen veranlaßt. Es stehen mir dadurch, die Zahlen von F. Exner und Dr. Ortner sowie zwei jüngst bestimmte Kurven von Fr. Jankovic und Herrn Hochreiter mit eingerechnet, 10 Werte zur Verfügung. In der folgenden Tabelle sind sie wiedergegeben. Am Kopf der Tabelle sind unter den Namen der Beobachter jeweils die Wellenlängen angegeben, bei denen für sie im Spektrum die maximale Intensität herrscht. Die Zahlen bedeuten Helligkeiten im Sonnenspektrum, bezogen auf die maximale, die gleich 100 gesetzt ist.

Man sieht zunächst, daß diese Zahlen sehr großen individuellen Schwankungen unterliegen, wenn auch im allgemeinen der Charakter der Kurve gewahrt bleibt. Diese Schwankungen beziehen sich sowohl auf die Werte an bestimmten Stellen im Spektrum wie auf die Lage des Maximums.

	Exner 558	Ortner 558	Frl. Reichenberg 564	Svoboda 572	S. Martina 569	König 572	Frl. Jankovic 572	Hochreiter 574	Bergles 557	Frl. Berger 551
685	3·4	4·0	3·7	16·0	3·7	7·4	1·5	0·1	3·1	3·4
670	7·4	10·0	8·5	24·6	8·5	13·3	4·6	0·3	5·4	9·1
660	11·2	14·5	14·4	33·4	15·5	20·1	9·6	1·1	9·0	14·0
650	16·6	20·3	22·5	43·0	22·2	29·2	16·4	2·8	14·7	20·0
640	24·2	26·5	33·7	52·5	30·9	42·0	26·6	6·8	22·2	28·5
630	32·7	34·4	47·7	61·7	43·6	55·4	40·1	15·0	32·9	43·6
620	44·7	43·0	63·0	72·3	56·5	67·0	55·5	31·4	51·0	55·5
610	57·3	54·0	77·0	81·0	70·2	77·0	72·0	51·6	66·6	63·6
600	70·8	65·0	86·1	89·0	82·6	83·6	85·2	72·6	78·1	70·4
590	83·0	76·0	92·3	94·9	91·9	93·6	93·7	91·4	85·4	75·8
580	93·2	87·0	96·5	98·8	97·6	98·8	97·6	98·0	91·0	81·2
570	98·6	95·0	99·4	99·8	99·6	100·0	99·7	98·5	95·4	88·5
558	100·0	100·0	98·7	95·1	95·6	94·2	87·8	84·4	99·6	99·9
550	99·0	97·5	92·7	88·3	88·2	82·0	77·6	66·7	97·9	99·6
540	93·8	89·0	82·9	77·8	76·4	63·4	59·5	44·2	94·5	91·4
530	81·7	77·5	67·0	62·4	60·2	41·5	42·7	26·3	88·5	82·6
520	61·2	61·0	49·3	45·1	43·6	25·3	27·8	14·2	78·8	69·7
510	39·0	42·0	29·6	30·3	28·2	13·8	16·2	6·9	69·6	51·6
500	23·4	28·5	15·0	17·5	16·5	9·3	8·1	3·3	42·4	34·9
490	14·2	23·6	8·4	9·1	10·8	8·0	4·5	2·0	28·8	29·0
480	11·0	19·6	5·7	5·6	9·4	7·7	3·0	1·7	22·7	23·7
470	8·5	16·0	4·4	3·3	7·6	5·9	2·1	1·5	19·0	17·4
460	6·0	12·0	3·0	2·2	6·4	4·3	1·4	1·1	13·7	13·4
450	4·9	9·0	2·0	1·6	6·3	2·6	0·8	1·0	11·4	—

Wir könnten nun darangehen, da uns die Helligkeitskurve bekannt ist, die obige Gleichung aufzulösen und die Werte von ρ , γ , β zu bestimmen. Es sind dies dieselben Werte, die F. Exner bestimmt hat als jene Faktoren, mit denen die Ordinaten der Grundempfindungskurven zu multiplizieren sind, damit ihre Summe die relative Helligkeit an der betreffenden Stelle im Spektrum wiedergebe. Exner gibt das Verhältnis dieser Faktoren mit 1:0·742:0·024 an. Daß diese Zahlen nur für sein Auge Geltung hatten, ist ohne

weiteres klar, wenn man die obigen Zahlen betrachtet. Versucht man nun, aus Gleichungstripeln, in denen als Koeffizienten die Ordinatenwerte der König'schen Kurven und die Helligkeit bei den gewählten Wellenlängen, als Unbekannte ρ , γ , β enthalten sind, diese zu bestimmen, so erhält man je nach der Wahl der Wellenlängen immer wieder andere zusammengehörige Werte, die für β zwischen positiven und negativen herumschwanken. Außerdem zeigt sich ein deutlicher Gang, der darauf hinweist, daß der von König und Dieterici gewählte Maßstab über das Spektrum nicht konstant ist. Es sind also ρ , γ , β nicht bestimmte Zahlenwerte, sondern irgendwelche Funktionen der Wellenlänge.

Daß eine solche lineare Transformation nicht zum Ziele führt, zeigt übrigens schon der direkte Vergleich mit der Kurve, die man durch Addition der Grundempfindungswerte für die Wellenlängen des Spektrums erhält. Sie zeigt zwei Maxima, ist also nicht allgemein durch eine einfache lineare Transformation in eine Kurve mit nur einem Maximum überführbar. Es ließe sich nur ein Fall denken, in dem eine Angleichung bis zu einem gewissen Grade möglich wäre, nämlich der, auf den auch E. Schrödinger hinweist. Nimmt man an — und der Zahlenwert Exner's läßt dies plausibel erscheinen —, daß die Blauempfindung zur Helligkeit nichts beiträgt, so würde die Addition der Grundempfindungswerte Rot und Grün eine Kurve mit nur einem großen Maximum ergeben. Ich habe mich bemüht, auch unter dieser Voraussetzung die Transformation durchzuführen, ohne daß ich zu einem anderen Resultat gekommen wäre als dem oben bereits wiedergegebenen.

Daß F. Exner doch Zahlenwerte finden konnte, welche ihm die Transformation der König'schen Kurven auf seine Helligkeitsverteilungskurve ermöglichen, mag letzten Endes auf einem Zufall beruhen. Exner hat nämlich im Alter von nahezu 70 Jahren seine Helligkeitsverteilungskurve bestimmt. Seine Retina war, wie er mir gelegentlich selbst mitteilte, auffallend stark gelb gefärbt, sie mußte also als Absorptionsfilter für Blau wirken. Nun zeigt die Helligkeitsverteilungskurve für das Auge Exner's im Blau eine Einbuchtung, genau so wie sie einem begrenzten Absorptionstreifen entsprechen würde, und im Gebiete der kürzeren Wellen daher einen flacheren Verlauf als die Kurven der wesentlich jüngeren andern Beobachter, einen Verlauf, wie er etwa dem zweiten flacheren Maximum der König'schen Rotempfindungskurve entspricht. Es kann sein, daß dieser Zufall die genügende Übereinstimmung der umgerechneten Grundempfindungskurven König's mit der Helligkeitsverteilungskurve Exner's bewirkte.

Es ergibt sich also der Schluß, daß die bisherigen Kenntnisse noch nicht hinreichen, daß vor allem neue Bestimmungen der Anteile nötig sind, die jeder der drei Grundempfindungen in einer farbigen Empfindung zukommen unter strengster Beachtung der Einheitlichkeit des Helligkeitsmaßes. Derartige Versuche sind in Vorbereitung.

Es zeigen also alle diese Überlegungen, daß sich zwar theoretisch die Grundempfindungstheorie lückenlos zu quantitativen Angaben über die Qualitäten einer farbigen Empfindung benützen ließe, daß aber trotz zahlreicher Messungen auf dem Gebiete der Farbenlehre wirklich quantitative Angaben sich bis jetzt nicht machen lassen. Es liegt dies hauptsächlich daran, daß die Angaben von König und Dieterici nicht über den ganzen Bereich des Spektrums auf einem unveränderlichen System von Einheiten für jede der Grundempfindungen basieren, so daß sie auch durch Heranziehung späterer Messungen nicht auf ein einheitliches Maß der Helligkeit reduzierbar sind.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften
mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse](#)

Jahr/Year: 1927

Band/Volume: [136_2a](#)

Autor(en)/Author(s): Haschek Eduard

Artikel/Article: [Quantitative Beziehungen in der Farbenlehre. 461-468](#)