Gedruckt mit Unterstützung aus dem Jerome und Margaret Stonborough-Fonds

Die Stabilität des Rahmenstabes

Von

Ing. Dr. Ernst Chwalla

(Mit 6 Textfiguren)

(Vorgelegt in der Sitzung am 30. Juni 1927)

Die konstruktive Bedeutung gegliederter Druckstäbe wie die Schwere einzelner, auf das Versagen derartiger Konstruktionselemente zurückzuführender Bauunfälle verlangte zur Erfassung des Verhaltens solcher Stäbe nach einer Theorie ihrer Stabilität, die, eingeleitet von Engesser, Müller-Breslau und L. Mann, in neuerer Zeit durch die Arbeiten Grüning's[1] und v. Mises[2] wertvolle Bereicherung erfuhr. Zur Erweiterung und Vertiefung der bisherigen strengeren Untersuchungen des Rahmenstabes soll nun in vorliegender Arbeit auch eine Verschiedenartigkeit der Querverbindungen, deren einflußreiches Gleiten und das bedeutungsvolle Nachgeben ihrer Nietanschlüsse sowie auch unelastisches Verhalten des Gurtmaterials[3] in Rücksicht gezogen und die Bedingung für das Erreichen von Stabilitätsgrenzen in dieser umfassenden Allgemeinheit einschließlich ihrer höheren Wurzeln für gerade wie ungerade Felderzahlen in geschlossener Form abgeleitet werden. Eine Diskussion der den einzelnen Stabilitätsgrenzen zugeordneten Gleichgewichtsformen und Untersuchungen über die Inanspruchnahme der Querverbindungen mögen die Arbeit vervollständigen und anschließende Zahlenbeispiele die Verbindung mit der Praxis herstellen. Der Herleitung wird der im Brücken- und Eisenbau häufigste und auch zweckmäßigste[4] Typus des Gliederstabes, der aus zwei gleichartigen Gurten gebildete Rahmenstab gleicher Felderteilung zugrunde gelegt.

Stabile und instabile Gleichgewichtszustände sind durch die Eindeutigkeit, beziehungsweise Mehrdeutigkeit des zugehörigen

---

[1] M. Grüning, Die Statik des ebenen Tragwerkes, 1925.

[2] R. v. Mises und J. Ratzersdorfer, Die Knicksicherheit von Rahmentragwerken. In der »Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik«, Juni 1926.

[3] Eine Näherungsableitung F. Bleich's (Theorie und Berechnung der eisernen Brücken), die auf der Annahme einer Sinuslinie als Gurtbiegelinie basiert, schließt den unelastischen Bereich ein.

[4] Das Stabilitätsproblem des Gliederstabes zerfällt grundsätzlich in das des »Gitterstabes« und das des »Rahmenstabes« und zeigen beide Ausbildungsarten schon im ersten stabilen Gleichgewichtsbereich wesentliche Unterschiede; die Ausfachung eines Gitterstabes steht bei jeder von Null verschiedenen Axialbelastung unter Spannung und erzeugt in den Gurtstäben nicht unbeträchtliche Zusatzspannungen, welcher Tatsache mit Beziehung auf die Stabilität insofern eine gewisse Unterlegenheit des Gitterstabes gegenüber dem Rahmenstab entspringt, als diese Zusatzspannungen ein vorzeitiges Erreichen der Quetschgrenze in den Gurtstäben zur Folge haben, die erfahrungsgemäß der Knickspannung eine obere Grenze setzt.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Gleichgewichtsproblems charakterisiert; der Bereich des einen Zustandes wird von dem des anderen durch jenen Grenzzustand des »indifferenten« Gleichgewichtes getrennt, der dadurch gekennzeichnet ist, daß die zweite Variation des zugehörigen Gesamtpotentials den Sonderwert Null annimmt und für den sich entsprechend der Eigenschaft dieser Stabilitätsgrenzen, Verzweigungsstellen des Gleichgewichtes zu liefern, die Mehrdeutigkeit des Gleichgewichtsproblems auf unendlich nahe benachbarte Formen bezieht. Der frei gelagerte, durch die zentrisch-axiale Druckkraft »P« belastete Rahmenstab weist, so lange »P« kleiner als die Knicklast »P_K« ist, in den beiden Gurtstäben Spannungen auf, die reine Druckspannungen σ_p sind und bei entsprechend großem Knickwiderstand auch über der Elastizitätsgrenze σ_E liegen können; wird $P \geqq P_K$, so ist gemäß obigem Kriterium noch eine zweite

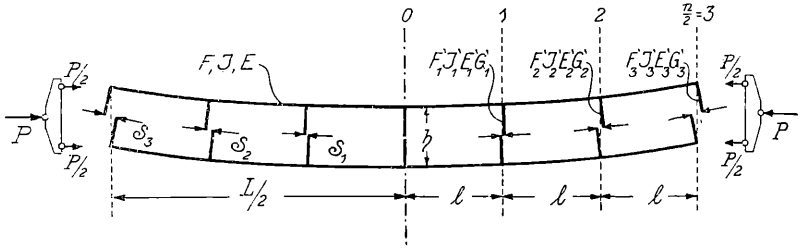

Fig. 1.

Gleichgewichtsform möglich, bei der die Gurtstäbe in der Rahmenebene verbogen werden und es erscheint für die hier einzig behandelte Stabilitätsgrenze diese zweite Form der ursprünglichen unendlich nahe benachbart. Eine Verbiegung der Gurtstäbe in der Rahmenebene weckt nun notwendigerweise in den Mittelquerschnitten der Querverbindungen Scherkräfte «S«, so daß die Frage nach den Stabilitätsgrenzen auch dahin zu fassen ist, unter welchen Bedingungen (Knickbedingungen) bei Wahrung aller Gleichgewichts- und Lagerungsbeziehungen solche von Null verschiedene Scherkräfte »S« auftreten können. Der den ausgebogenen Gleichgewichtsformen zugeordnete statisch bestimmte Grundfall wird durch Durchschneiden sämtlicher Querverbindungen in ihren Mitten gewonnen und das durch diese Schnittführung unterbundene Spiel der Innenkräfte durch die Anbringung äußerer Kräfte wettgemacht. Nun zeigt sich, daß bei der vorausgesetzten gleichen Biegungssteifigkeit beider Gurtstäbe unter der berechtigten (vgl. Mises, l. c., p. 194) Vernachlässigung der Längenänderungen der Querverbindungen die erwähnten Kräfte »S« allein ausreichen, um die im belasteten Grundfall auftretenden gegenseitigen Schnittflächenverschiebungen (Fig. 1 zeigt eine der möglichen Gleichgewichtsformen in entsprechender Verzerrung) auch bei unelastischem Materialverhalten, Verformung der Querverbindungen und Nachgeben

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

der Anschlüsse vollständig auf Null zurückzuführen, so daß mit einem einzigen Typus überzähliger Wirkungsgrößen das Auslangen gefunden werden kann. Die Schließung aller Schnittfugen durch die »S« hat gemeinsam zu erfolgen, da jede einzelne Überzählige wegen der von ihr bewirkten Gurtlängenänderungen die Größe sämtlicher übrigen Schnittfugen und damit die Größe sämtlicher »S« beeinflußt.

Ist der Knickwiderstand des Rahmenstabes groß, so kann schon vor Erreichung der Stabilitätsgrenze die Gurtspannung die Elastizitätsgrenze überschreiten; da weder die Krümmungsverhältnisse der Gurtstäbe noch die Richtungen der einzelnen »S« aller instabilen Gleichgewichtslagen (die höheren Formen können bekanntlich durch Verhinderung der Ausbildung der niederen erzwungen werden) bekannt sind und die Allgemeinheit der Ableitung keine derartigen Voraussetzungen verträgt, müssen vorerst die in die Entwicklungen einzuführenden Materialkonstanten auf ihre Unabhängigkeit von der Stabverformung geprüft werden. Denkt man sich ein Feld einer beliebigen Gleichgewichtsform $y = \Phi(x)$ des Rahmenstabes herausgegriffen (vgl. Fig. 1), so ist zu erkennen, daß jeder der beiden Gurtstäbe unter einer primären Druckspannung

$$\sigma_p = \frac{P}{2F} \gtreqless \sigma_E$$

steht, über die sich eine Spannungsverteilung lagert, die den in Richtung und Größe unbekannten Gurtkräften ΣS_i und Gurtmomenten

$$\frac{P}{2} \cdot y - \sum S_i \frac{h}{2}$$

entspringt. Das Dehnmaß des Gurtmaterials an einer Stelle $\sigma \gtreqless \sigma_E$ sei mit $E_1 = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}$ und das einer Entlastung an dieser Stelle mit E_2 bezeichnet, wobei E_2 dem Elastizitätsmodul E gleichgesetzt werden kann, da nur die elastischen Formänderungen rückgängig gemacht werden. Aus der Überlegung, daß notwendigerweise an jeder Stelle die Zusatzkräfte ΣS_i in den beiden Gurtstäben entgegengesetztes Vorzeichen aufweisen müssen, folgt, daß in jedem der Felder sowohl E_1 als auch E_2 auftreten muß und somit der Anteil der Gurtlängenänderung an der Zusammenführung der Schnittflächen des Grundsystems in der Form

$$\triangle = \frac{\Sigma S_i . l}{F} \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right) = \frac{\Sigma S_i . l}{F} \cdot \eta$$

unabhängig ist von der Form das Gleichgewichts. Die Momente

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$\frac{P}{2}\cdot y - \Sigma S_i \cdot \frac{h}{2}$$

erzeugen in den mit $\sigma \gtrless \sigma_E$ vorgespannten Gurten Verbiegungen noch unbekannter Krümmungsverhältnisse; da diese Vorspannung σ an jeder Stelle »x« des Gurtstabes in gleicher Größe vorhanden ist, sind E_1 und E_2 in jedem der Felder jedenfalls von »x« unabhängige Werte. Nimmt man mit Bezug auf eine später folgende Begründung die Verteilung der Biegedruckspannungen geradlinig an, so führen die bekannten Gedankengänge Engesser's und Kármán's zu folgenden Beziehungen[1] (Fig. 2a):

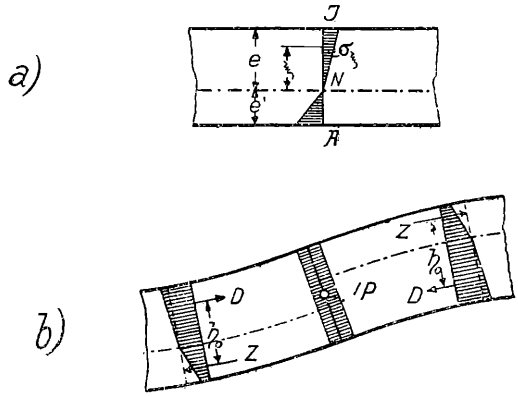

Fig. 2.

Das Gleichgewicht verlangt für jede Querschnittsstelle »x«

$$\int_F \sigma_\xi \,.\, dF = 0, \quad \int_F \sigma_\xi \,.\, \xi \,.\, dF + \mathfrak{M}_x = 0;$$

da nun die Querschnitte bei kleinen Verbiegungen eben bleiben, ergibt sich mit $\frac{\sigma_\xi}{\xi} = \frac{1}{\rho}$ für die Spannungen auf der Biegedruckseite $\sigma_\xi = E_1 \frac{\xi}{\rho}$, auf der Biegezugseite $\sigma'_\xi = E_2 \frac{\xi}{\rho}$, so daß bei Einführung der Symbole: »N« Nullinie, »I« .. innerer. gedrückter Rand und »A« äußerer, gezogener Rand die Gleichgewichtsbedingungen

$$\int_N^I E_1 \cdot \frac{\xi}{\rho} \cdot dF + \int_N^A E_2 \cdot \frac{\xi}{\rho} \cdot dF = 0,$$

[1] Vgl. etwa R. Mayer, Die Knickfestigkeit, 1921.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$\int_N^I E_1 \cdot \frac{\xi^2}{\rho} \, dF + \int_N^A E_2 \cdot \frac{\xi^2}{\rho} \, dF + \mathfrak{M}_x = 0$$

lauten. Führt man die statischen Momente

$$\mathfrak{S}_I = \int_N^I \xi . dF, \quad \mathfrak{S}_A = \int_N^A \xi \, dF$$

und die Trägheitsmomente

$$\mathfrak{J}_I = \int_N^I \xi^2 . dF, \quad \mathfrak{J}_A = \int_N^A \xi^2 . dF$$

ein, so erhält man die beiden, für jede Stelle »x« geltenden Bedingungen

$$\begin{cases} E_1 . \mathfrak{S}_I + E_2 . \mathfrak{S}_A = 0 \\ E_1 . \mathfrak{J}_I + E_2 . \mathfrak{J}_A + \mathfrak{M}_x . \rho = 0, \end{cases}$$

die mit Zuziehung der Annäherung

$$y'' = \frac{1}{\rho}$$

die Beziehung

$$y'' + \frac{\mathfrak{M}_x}{\bar{E} . I} = 0$$

ergeben, wobei

$$\bar{E} = \frac{E_1 . \mathfrak{J}_I + E_2 \mathfrak{J}_A}{I}$$

den »resultierenden Modul« vorstellt. Die erste Gleichung liefert die Lage der Nullinie, die somit eine zur Biegungsachse parallele Gerade ist und den Querschnitt nach

$$»\mathfrak{S}_A : \mathfrak{S}_I = E_1 : E_2«$$

unterteilt; auf diese Gerade sind $\mathfrak{J}_I$ und $\mathfrak{J}_A$ bezogen, während I das Trägheitsmoment des ganzen Gurtquerschnittes um seine Schwerachse bedeutet.[4] Die Nullinie liegt demnach in konstanter,

---

[1] Für den Rechteckquerschnitt findet man $\bar{E} = \frac{4 E_1 E_2}{(\sqrt{E_1} + \sqrt{E_2})^2}$, welche Beziehung für andere Querschnittsformen nur geringfügige Änderung erfährt. Die Anwendung dieser Formel setzt die Kenntnis von E_1 voraus; um nun von den speziellen Materialeigenschaften unabhängig zu sein, kann für Knickzustände aus

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

nur von E_1 und E_2, also der Vorspannung, abhängiger Entfernung vom Rand und springt bei einem Wechsel des Biegungssinnes im Wendepunkt, somit an biegungsfreier Stelle, in die auf der anderen Seite der Stabachse gelegene neue Lage (Fig. 2*b*); da auch der innere Hebelsarm »h_0« im ganzen Gurtstab unverändert bleibt, erscheint die Beziehung

$$y'' + \frac{\mathfrak{M}_x}{\bar{E} I} = 0$$

jedem Krümmungsverlauf gewachsen. Handelt es sich um starke Überschreitungen der Stabilitätsgrenze, also um stark ausgebogene Gleichgewichtslagen, so sind die Gurtkräfte von Feld zu Feld verschieden, somit auch die E_1, E_2, $\bar{E}$ und η von Feld zu Feld verschieden als Funktionen der überzähligen »S« (wobei dieser funktionale Zusammenhang nur in der graphischen Darstellung des Spannungs-Verformungsdiagramms zur Verfügung steht, was jede strengere Berechnung stärker verbogener Gleichgewichtslagen im unelastischen Bereich als aussichtslos erscheinen läßt); ferner stellt die Voraussetzung einer geradlinigen Verteilung der Biegedruckspannungen wie die Vernachlässigung der Gurtverformung bei der Momentenbildung

$$\sum S_i \cdot \frac{h}{2}$$

und auch die übliche Beziehung

$$y'' = \frac{1}{\rho}$$

nur eine Annäherung dar. Die in der allgemeinen Ableitung einzig vorkommenden Materialgrößen $\bar{E}$ und $\frac{1}{\bar{E} \cdot \eta}$ ändern sich mit den Zusatzkräften »S« im elastischen Bereich gar nicht, im unelastischen Bereich nur unbedeutend; die den übrigen Annäherungen entspringenden Abweichungen können gegenüber »S« wohl als von höherer Ordnung klein angesehen werden, so daß die unbeschränkte Annäherung des Gleichgewichtszustandes an die hier einzig behandelte Grenze der Stabilität (Verzweigungsstelle des Gleich-

---

der Gleichsetzung der Knicklasten nach Euler und Tetmajer ein Nährungswert in der Form

$$\bar{E} = \frac{\sigma_K \cdot (3 \cdot 1 - \sigma_K)^2}{\pi^2 \cdot 0 \cdot 0114^2} = 0 \cdot 3655 \cdot E \cdot \sigma_K \cdot (3 \cdot 1 - \sigma_K)^2$$

gewonnen werden, aus dem mit Verwendung obiger Formel auch auf die Größe von E_1 geschlossen werden kann.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

gewichtes) alle diese Abweichungen einen Grenzwert annehmen läßt, der die Zulassung dieser Annäherungen auch im unelastischen Bereich (und zwar mit Einführung des auf der Knickspannung σ_K fußenden $\bar{E}$ und η) als gerechtfertigt erscheinen läßt.[1]

Nach diesen, insbesonders der Möglichkeit eines unelastischen Verhaltens des Gurtmaterials gewidmeten Bemerkungen sei noch eine kurze Betrachtung über das sogenannte »Nachgeben« der Querverbindungen angeschlossen, worunter mit Beziehung auf den gewählten Grundfall jener Anteil an der Zusammenführung der gegenseitig verschobenen Schnittflächen verstanden ist, der der Verformung der Querverbindungen und ihrer Anschlüsse entspringt.

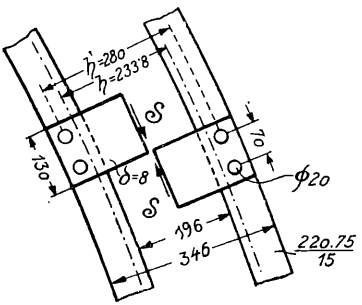

Fig. 3.

Um die Größenverhältnisse dieser Verformungen zu beleuchten, sei die Querverbindung des Versuchsstabes untersucht, der später im Zahlenbeispiel II behandelt werden wird; die Gurte dieses Rahmenstabes sind aus zwei U-Eisen 220.75, die Querverbindungen durch außen liegende Bindeblechpaare $\frac{346.130}{8}$ mit je zwei Anschlußnieten (Φ 20 angenommen) in $e = 70\ mm$ Distanz gebildet (Fig. 3). Der Anteil, den die Nachgiebigkeit der Querverbindungen an der Fugenschließung liefert, setzt sich zusammen aus dem Beitrag $\triangle_1$, den die Verbiegung der Bindeblech-Kragträger ergibt, dem Beitrag $\triangle_2$ zufolge der Gleitung der Bindebleche und

---

[1] Auch in der üblichen Herleitung der Euler-Last wirkt sich die Beziehung $y'' = \frac{1}{\rho}$ mit Rücksicht auf die gesuchte Grenze der Stabilität nicht als Annäherung aus, wie ein Vergleich des Resultats mit dem einer strengeren Ableitung zeigt. Würde man einen stark ausgebogenen Zustand voraussetzen, so würden die das Gleichgewicht gewährleistenden Beziehungen nur angenähert gelten, somit die daraus erhaltenen Axialkräfte (Knicklasten) nur Näherungswerte für jene Axialkräfte vorstellen, die tatsächlich dem stark verbogenen Stab das Gleichgewicht halten; aus der Güte der eingeführten Annäherung kann umgekehrt auf eine starke Zunahme der Ausbiegung bei geringen Überschreitungen der Knicklast geschlossen werden.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

dem Beitrag $\triangle_3$, der durch das Nachgeben der Nietanschlüsse verursacht wird. Mit

$$F' = 2.10 \cdot 4 = 20 \cdot 8\ cm^2,$$

$$I' = 2\ \frac{0 \cdot 8.13^3}{12} = 292 \cdot 9\ cm^4,$$

$$E' = 2000^{\text{ton}}/cm^2$$

und $G' = 770^{\text{ton}}/cm^2$ wird

$$\triangle_1 = \frac{h^3}{24\,E'\,I'} \cdot S = \frac{23 \cdot 38^3}{24.2000.292 \cdot 9} \cdot S = 0 \cdot 00091.S$$

und

$$\triangle_2 = \frac{h}{2\,G'\,F'} \cdot S = \frac{23 \cdot 38}{2.770.20 \cdot 8} \cdot S = 0 \cdot 00073.S,$$

so daß sich die Gleitung trotz des großen »h« als nahezu so einflußreich wie die Biegung erweist; $\triangle_3$ ist aufgespalten in die beiden Anteile $\triangle_3'$ und $\triangle_3''$, wobei

$$\triangle_3' = \frac{d}{4\,F_n\,G_n} \cdot S = \frac{0 \cdot 40 + 0 \cdot 75}{4.3 \cdot 14.770} \cdot S = 0 \cdot 000119.S$$

der elastischen Nietgleitung in Gurtrichtung entspricht (für »d« wurde die halbe Bindeblechdicke plus der halben Flanschstärke eingesetzt) und $\triangle_3''$ durch die Komponente

$$S \cdot \frac{h'}{2\,e} = S \cdot \frac{28}{2.7} = 2.S$$

in Richtung senkrecht zur Gurtachse hervorgerufen wird, die den oberen Niet um

$$2.S\ \frac{d}{2\,F_n\,G_n} = 2.S\ \frac{0 \cdot 40 + 0 \cdot 75}{2.3 \cdot 14.770} = 0 \cdot 000476.S$$

nach der einen Seite, den unteren um denselben Betrag nach der anderen Seite verschiebt, so daß zufolge der Hebelübersetzung

$$\triangle_3'' = 0 \cdot 000476.S\ \frac{h'}{e} = 0 \cdot 000476.S\ \frac{28}{7} = 0 \cdot 001904.S$$

wird. Diese der rein elastischen Nietgleitung entspringende Verschiebung

$$\triangle_3 = \triangle_3' + \triangle_3'' = 0 \cdot 002023.S = N.S$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

kann allgemein noch mit einem Koeffizienten $\alpha \geqq 1$ versehen werden, der der Möglichkeit eines ungenauen Passens der Nietschäfte Rechnung trägt und erfahrungsgemäß ein Vielfaches der elastischen Gleitung ausmachen kann. Der Vergleich der Beiträge $\triangle_1$, $\triangle_2$ und $\triangle_3$ läßt die völlige Unzulänglichkeit einer bloßen Berücksichtigung der Verbiegung der Querverbindungen erkennen; der Anteil der Gleitung ist schon bei diesen Gurtdistanzen rund dreimal so groß als der der Biegung und wird bei den üblichen kleineren Werten »h« noch größer, da das Biegungsglied mit dem Kubus abnimmt. Die Zulassung der Fiktion starrer Querverbindungen erscheint in erster Linie als eine Vernachlässigung der Nietgleitung.

Nach diesen Vorbereitungen können nun die allgemeinen Bedingungen für das Erreichen von Stabilitätsgrenzen in geschlossener Form abgeleitet werden. All die möglichen instabilen Gleichgewichtsformen lassen sich zwei Gruppen zuordnen, die durch bestehende, beziehungsweise fehlende Symmetrie bezüglich der zur ursprünglichen Stabachse normal stehenden Stabhalbierenden gekennzeichnet sind. Da die maßgebende, kleinste Knicklast der Gruppe der symmetrischen Lagen zugeordnet ist, wird die Ableitung in allgemeiner Fassung für diese Gruppe gebracht. Die Einfachheit der Ableitung verlangt ferner nach der Unterscheidung, ob die durch die Querverbindungen geschaffenen Felder in gerader oder ungerader Anzahl vorhanden sind.

A) Allgemeine Ableitung für gerade Felderzahlen:

Dem Gurtepaar eines jeden der $\frac{n}{2}$ Felder einer Stabhälfte, auf die sich die Untersuchung wegen der Symmetrie der behandelten Gruppe von Gleichgewichtsformen sowie der nun vorausgesetzten Symmetrie der Stabausbildung beschränken kann, wird ein eigenes Paar von Koordinatenkreuzen gemeinsamer Ordinatenachse zugeordnet, das in beliebiger Höhe über dem Feld gelegen ist und dessen Abszissenachsen gleich den Gurtstäben die gegenseitige Entfernung »h« aufweisen (Fig. 4). Die Axialkräfte »2 mal $^1/_2$ P« werden vorerst bei jedem Feld in den beiden Abszissenachsen liegend gedacht. Von der Stabmitte gegen das Ende fortschreitend, wird nun für jedes Feld Gleichgewicht unter der Bedingung verlangt, daß alle überzähligen »S« die bestehenden gegenseitigen Schnittflächenverschiebungen gleichzeitig auf Null zurückführen und an jeder Querverbindungsstelle für die beiden benachbarten Gurtstücke gemeinsame Tangentenneigung besteht. Verlangt man dann weiters die Vereinigung der Abszissenachsen sämtlicher Felder zu einem einzigen Achsenpaar, das durch die Endpunkte des Gurtepaares geht, so sind offenbar alle Bedingungen erfüllt, die von einem ausgebogenen, unter der zentrisch-axialen Druckkraft »P« im Gleichgewicht befindlichen Rahmenstab verlangt

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

werden können; die Befriedigung aller dieser Forderungen muß somit die Möglichkeit eines (unendlich wenig) ausgebogenen Gleichgewichtszustandes liefern und nach den einleitenden Bemerkungen gleichbedeutend mit der Erreichung von Grenzen der Stabilität sein.

Feld 0 bis 1:

Der nach einleitender Begründung für den indifferenten Zustand auch bei unelastischem Materialverhalten zutreffende Zusammenhang

$$\bar{E}.I.y'' + \mathfrak{M}_x = 0$$

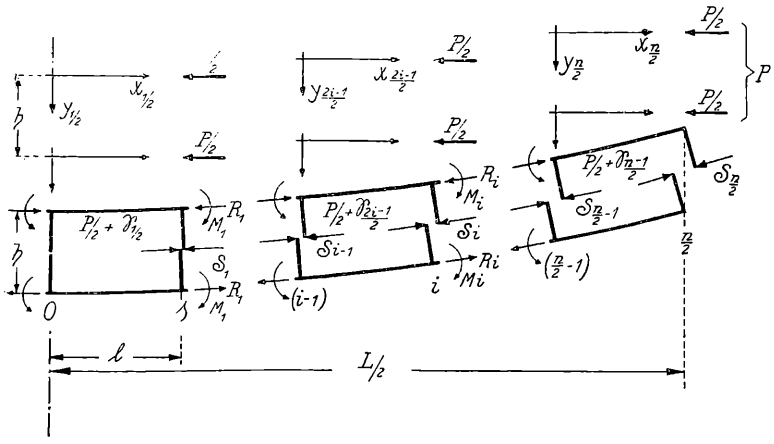

Fig. 4.

liefert für jeden der beiden Gurtstäbe dieses im Gleichgewicht befindlichen Feldes mit Beziehung auf die zugehörigen Koordinatenkreuze die Differentialgleichung

$$\bar{E}.I.y''_{1/2} + \frac{P}{2}\cdot y_{1/2} - \frac{h}{2}\cdot S_1 - M_1 =$$

$$= \bar{E}.I.y''_{1/2} + \frac{P}{2}\cdot y_{1/2} - \frac{h}{2}\cdot\left(S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_{\frac{n}{2}}\right) = 0,$$

die mit

$$\mathfrak{S}_{1/2} = S_1 + R_1 = \sum_{1}^{n/2} S_i$$

die Form

$$\bar{E}.I.y''_{1/2} + \frac{P}{2}\cdot y_{1/2} - \frac{h}{2}\cdot \mathfrak{S}_{1/2} = 0$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

annimmt und deren allgemeine Lösung

$$y_{1/2} = A_{1/2} . \sin K x + B_{1/2} . \cos K x + \frac{h}{P} \cdot \mathfrak{S}_{1/2}$$

mit

$$K = \sqrt{\frac{P}{2 . \bar{E} . I}}$$

lautet.

Zur Bestimmung von $A_{1/2}$ und $B_{1/2}$ dienen die oben erwähnten Bedingungen einer knicklosen Anschlußmöglichkeit an das Nachbarfeld (übereinstimmende Tangentenneigung an der Stelle 0) und der Zusammenführung der um $\triangle_{(1)}$ verschobenen Schnittflächen der Querverbindungen an der Stelle 1. Die erste Bedingung fordert für

$$x_{1/2} = 0, \quad y'_{1/2} = 0 \text{ und ergibt } A_{1/2} = 0,$$

während die zweite durch die Gleichung

$$\triangle_{(1)} = -y'_{1/2}\Big|_{x=l} . h = \frac{l}{E_1 . F} \cdot \mathfrak{S}_{1/2} + \frac{l}{E_2 . F} \mathfrak{S}_{1/2} +$$

$$+ 2 . S_1 . \left(\frac{h^3}{24 . E'_1 . I'_1} + \frac{h}{2 . G'_1 . F'_1} + N_1 \right) \quad \text{(vgl. dazu p. 494)}$$

zum Ausdruck gebracht wird, wobei das Minuszeichen darauf hinweist, daß es sich für die gemäß Fig. 4 festgelegten positiven Überzähligenrichtungen um den Tangens eines Supplementwinkels handelt; mit Einführung des einleitend erwähnten

$$\eta = \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}$$

und der zur Kennzeichnung der Nachgiebigkeit der i-ten Querverbindung und deren Anschlüsse dienenden Hilfsgröße

$$\delta_i = \frac{h . F}{l . \eta} \cdot \left(\frac{h^2}{12 . E'_i . I'_i} + \frac{1}{G'_i . F'_i} + \frac{2 . N_i}{h} \right)$$

nimmt diese Gleichung die Form

$$-y'_{1/2} = \frac{l . \eta}{h . F} \cdot (\mathfrak{S}_{1/2} + S_1 \, \delta_1)$$

an und liefert

$$B_{1/2} = \frac{1}{K . \sin K l} \cdot \frac{l . \eta}{h . F} \cdot (\mathfrak{S}_{1/2} + S_1 \, \delta_1).$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Die Gurtbiegelinie des Feldes 0 bis 1 ist somit durch die Gleichung

$$y_{1/2} = \frac{l.\eta}{h.F.K.\sin Kl}\cdot(\mathfrak{S}_{1/2} + S_1.\delta_1).\cos Kx + \frac{h}{P}\cdot\mathfrak{S}_{1/2}$$

festgelegt und erscheint mit

$$\mathfrak{S}_{\xi-\frac{1}{2}} = \sum_{\xi}^{n/2} S_i$$

einzig in Abhängigkeit von den überzähligen »S«. Kann die erste Querverbindung und ihr Anschluß als starr angesehen werden, so gilt $\delta_1 = 0$; verhält sich das Gurtmaterial an der gesuchten Stabilitätsgrenze elastisch, so wird $\bar{E} = E$ und $\eta = \frac{2}{E}$.

Feld 1 bis 2:

Die Ausgangsgleichung

$$\bar{E}.I.y''_{3/2} + \frac{P}{2}\cdot y_{3/2} - \frac{h}{2}\cdot S_2 - M_2 =$$

$$= \bar{E}.I.y''_{3/2} + \frac{P}{2}\cdot y_{3/2} - \frac{h}{2}\cdot\left(S_2 + S_3 + \quad + S_{\frac{n}{2}}\right) =$$

$$= \bar{E}.I.y''_{3/2} + \frac{P}{2}\cdot y_{3/2} - \frac{h}{2}\cdot\mathfrak{S}_{3/2} = 0$$

liefert

$$y_{3/2} = A_{3/2}\sin Kx + B_{3/2}.\cos Kx + \frac{h}{P}\cdot\mathfrak{S}_{3/2}$$

und es fordern die erwähnten beiden Randbedingungen für die Stelle $x_{3/2} = 0$,

$$-y'_{3/2} = -y'_{1/2}|_{x=l} = \frac{l.\eta}{h.F}\cdot(\mathfrak{S}_{1/2} + S_1.\delta_1)$$

und für die Stelle $x_{3/2} = l$ die Erfüllung der Gleichung

$$-y'_{3/2} = \frac{\triangle_{(2)}}{h} = \frac{l.\eta}{h.F}\cdot(\mathfrak{S}_{1/2} + \mathfrak{S}_{3/2} + S_2.\delta_2).$$

Diese beiden Randbedingungen ergeben $A_{3/2}$ und $B_{3/2}$ und damit die Gurtbiegelinie des zweiten Feldes in der Form

$$y_{3/2} = \frac{l.\eta}{h.F.K.\sin Kl}\cdot$$

$$\cdot\Big\{[\mathfrak{S}_{1/2} + \mathfrak{S}_{3/2} + S_2.\delta_2 - (\mathfrak{S}_{1/2} + S_1.\delta_1).\cos Kl].\cos Kx -$$

$$-(\mathfrak{S}_{1/2} + S_1.\delta_1).\sin Kl.\sin Kx\Big\} + \frac{h}{P}\cdot\mathfrak{S}_{3/2}.$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

In gleicher Weise findet man

$$y_{5/2} = \frac{l.\eta}{h.F.K.\sin Kl}\cdot$$

$$\Big\{[\mathfrak{S}_{1/2}+\mathfrak{S}_{3/2}+\mathfrak{S}_{5/2}+S_3.\delta_3-(\mathfrak{S}_{1/2}+\mathfrak{S}_{3/2}+S_2.\delta_2).\cos Kl].\cos Kx-$$

$$-(\mathfrak{S}_{1/2}+\mathfrak{S}_{3/2}+S_2.\delta_2).\sin Kl.\sin Kx\Big\}+\frac{h}{P}\cdot\mathfrak{S}_{5/2}$$

und analog weiter bis zum

Endfeld $\left(\frac{n}{2}-1\right)-\frac{n}{2}$:

$$v_{\frac{n-1}{2}} = \frac{l.\eta}{h.F.K.\sin Kl}\cdot$$

$$\Big\{\Big[\mathfrak{S}_{1/2}+\mathfrak{S}_{3/2}+\quad+\mathfrak{S}_{\frac{n-1}{2}}+S_{\frac{n}{2}}.\delta_{\frac{n}{2}}-\Big(\mathfrak{S}_{1/2}+\mathfrak{S}_{3/2}+\ldots+\mathfrak{S}_{\frac{n-3}{2}}+$$

$$+S_{\frac{n}{2}-1}.\delta_{\frac{n}{2}-1}\Big)\cos Kl\Big].\cos Kx-\Big(\mathfrak{S}_{1/2}+\mathfrak{S}_{3/2}+\ldots+\mathfrak{S}_{\frac{n-3}{2}}+$$

$$+S_{\frac{n}{2}-1}.\delta_{\frac{n}{2}-1}\Big).\sin Kl.\sin Kx\Big\}+\frac{h}{P}\cdot\mathfrak{S}_{\frac{n-1}{2}}$$

Jede dieser $\frac{n}{2}$ Biegeliniengleichungen bezieht sich auf ihr eigenes Koordinatensystem und ist homogen in den Überzähligen »S«; fordert man nun in Form der $\frac{n}{2}$-Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} y_{1/2}\big|_{x=l}-y_{3/2}\big|_{x=0} &= 0\\ y_{3/2}\big|_{x=l}-y_{5/2}\big|_{x=0} &= 0\\ &\vdots\\ v_{\frac{n-3}{2}}\Big|_{x=l}-y_{\frac{n-1}{2}}\Big|_{x=0} &= 0\\ v_{\frac{n-1}{2}}\Big|_{x=l} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

die Vereinigung aller Feldabszissenachsen zu einem gemeinsamen, durch die Gurtenden gehenden Achsenpaar, so ist auch der Bedingung einer momentenfreien Lagerung des Rahmenstabes

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$\left(\mathfrak{M}_{\frac{n}{2}} = -\bar{E}\,.\,I.y''_{\frac{n-1}{2}}\Big|_{x=l} = -\mathfrak{S}_{\frac{n-1}{2}}\cdot\frac{h}{2} = -S_{\frac{n}{2}}\cdot\frac{h}{2}\,,\right.$$

somit unmittelbar rechts vom Lager $\mathfrak{M} = 0$) Genüge geleistet und erhält man mit Einführung der Hilfsgrößen

$$\omega = 1 - \cos Kl$$

und

$$\gamma = 1 + \frac{F.h^2}{l.\eta.P}\cdot K.\ \sin Kl = 1 + \frac{F.h^2}{2.\bar{E}.I.\eta}\cdot\frac{\sin Kl}{Kl} =$$

$$= 1 + \frac{F.h^2}{4.I}\cdot\mu\cdot\frac{\sin Kl}{Kl}\,,$$

$$\mu = \frac{2}{\bar{E}.\eta}\,,$$

nach Herausheben des allgemein nicht verschwindenden Faktors » $\frac{l.\eta}{h.F.K.\sin Kl}$ « das Gleichungssystem:[1]

$$\mathfrak{S}_{1/2}.\omega - S_1.\left(\frac{\gamma}{2} + \delta_1.\cos Kl\right) + S_2.\frac{\delta_2}{2} = 0 \tag{1}$$

$$\left(\mathfrak{S}_{1/2} + \mathfrak{S}_{3/2}\right).\omega + S_1.\frac{\delta_1}{2} - S_2.\left(\frac{\gamma}{2} + \delta_2.\cos Kl\right) + S_3.\frac{\delta_3}{2} = 0 \tag{2}$$

$$\left(\mathfrak{S}_{1/2} + \mathfrak{S}_{3/2} + \mathfrak{S}_{5/2}\right).\omega + S_2.\frac{\delta_2}{2} -$$

$$- S_3.\left(\frac{\gamma}{2} + \delta_3.\cos Kl\right) + S_4.\frac{\delta_4}{2} = 0 \tag{3}$$

usw. bis

$$\left(\mathfrak{S}_{1/2} + \mathfrak{S}_{3/2} + \ .\ + \mathfrak{S}_{\frac{n-3}{2}}\right).\omega + S_{\frac{n}{2}-2}.\frac{\delta_{\frac{n}{2}-2}}{2} - S_{\frac{n}{2}-1}$$

$$.\left(\frac{\gamma}{2} + \delta_{\frac{n}{2}-1}.\cos Kl\right) + S_{\frac{n}{2}}.\frac{\delta_{\frac{n}{2}}}{2} = 0 \qquad \left(\frac{n}{2} - 1\right)$$

$$\left(\mathfrak{S}_{1/2} + \mathfrak{S}_{3/2} + .\ .\ + \mathfrak{S}_{\frac{n-1}{2}}\right).\omega + S_{\frac{n}{2}-1}.\delta_{\frac{n}{2}-1} -$$

$$- S_{\frac{n}{2}}.\left(\gamma + \delta_{\frac{n}{2}}.\cos Kl\right) = 0\,. \qquad \left(\frac{n}{2}\right)$$

[1] Note siehe p. 501.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Subtrahiert man nun jede i-te Zeile von der $(i+1)$-ten und berücksichtigt die Beziehung

$$S_i = \mathfrak{S}_{\frac{2i-1}{2}} - \mathfrak{S}_{\frac{2i+1}{2}},$$

so resultiert dieses System von $\frac{n}{2}$ Bedingungsgleichungen in der Form

$$\mathfrak{S}_{1/2}\cdot\left[\omega - \frac{\gamma}{2} - \delta_1\cdot\cos Kl\right] + \mathfrak{S}_{3/2}\cdot\left[\frac{\gamma}{2} + \delta_1\cdot\cos Kl + \frac{\delta_2}{2}\right] + \mathfrak{S}_{5/2}\cdot\left(-\frac{\delta_2}{2}\right) = 0 \qquad (1)$$

$$\mathfrak{S}_{1/2}\cdot\left[\frac{\gamma}{2} + \delta_1\left(\frac{1}{2} + \cos Kl\right)\right] + \mathfrak{S}_{3/2}\cdot\left[\omega - \gamma - \left(\delta_1 + \delta_2\right)\cdot\left(\frac{1}{2} + \cos Kl\right)\right] + \mathfrak{S}_{5/2}\cdot\left[\frac{\gamma}{2} + \delta_2\left(\frac{1}{2} + \cos Kl\right) + \frac{\delta_3}{2}\right] + \mathfrak{S}_{7/2}\cdot\left(-\frac{\delta_3}{2}\right) = 0 \qquad (2)$$

$$\mathfrak{S}_{1/2}\cdot\left(-\frac{\delta_1}{2}\right) + \mathfrak{S}_{3/2}\cdot\left[\frac{\gamma}{2} + \delta_2\left(\frac{1}{2} + \cos Kl\right) + \frac{\delta_1}{2}\right] + \mathfrak{S}_{5/2}\cdot\left[\omega - \gamma - \left(\delta_2 + \delta_3\right)\cdot\left(\frac{1}{2} + \cos Kl\right)\right] + \mathfrak{S}_{7/2}\cdot\left[\frac{\gamma}{2} + \delta_3\left(\frac{1}{2} + \cos Kl\right) + \frac{\delta_4}{2}\right] + \mathfrak{S}_{9/2}\cdot\left(-\frac{\delta_4}{2}\right) = 0 \qquad (3)$$

usw. bis

$$\mathfrak{S}_{\frac{n-7}{2}}\cdot\left(-\frac{\delta_{\frac{n}{2}-3}}{2}\right) + \mathfrak{S}_{\frac{n-5}{2}}\cdot\left[\frac{\gamma}{2} + \delta_{\frac{n}{2}-2}\left(\frac{1}{2} + \cos Kl\right) + \frac{\delta_{\frac{n}{2}-3}}{2}\right] + \mathfrak{S}_{\frac{n-3}{2}}\cdot\left[\omega - \gamma - \left(\delta_{\frac{n}{2}-2} + \delta_{\frac{n}{2}-1}\right)\cdot\left(\frac{1}{2} + \cos Kl\right)\right] + \mathfrak{S}_{\frac{n-1}{2}}\cdot\left[\frac{\gamma}{2} + \delta_{\frac{n}{2}-1}\left(\frac{1}{2} + \cos Kl\right) + \frac{1}{2}\delta_{\frac{n}{2}}\right] = 0 \qquad \left(\frac{n}{2} - 1\right)$$

} I.

[1] Im elastischen Bereich ist $\mu = 1$, im unelastischen beispielsweise für den Rechteckquerschnitt

$$\mu = 2\cdot\frac{(\sqrt{E_1} + \sqrt{E_2})^2}{4\cdot E_1\cdot E_2\cdot\left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}\right)} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{E_1\cdot E_2}}{E_1 + E_2}.$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$\mathfrak{S}_{\frac{n-5}{2}}\cdot\left(-\frac{\delta_{\frac{n}{2}-2}}{2}\right)+\mathfrak{S}_{\frac{n-3}{2}}\cdot\left[\frac{\gamma}{2}+\delta_{\frac{n}{2}-1}\left(1+\cos Kl\right)+\frac{1}{2}\cdot\delta_{\frac{n}{2}-2}\right]+$$
$$+\mathfrak{S}_{\frac{n-1}{2}}\cdot\left[\omega-\frac{3\gamma}{2}-\left(\delta_{\frac{n}{2}-1}+\delta_{\frac{n}{2}}\right)\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\left(\frac{1}{2}+\cos Kl\right)-\frac{1}{2}\delta_{\frac{n}{2}-1}\right]=0 \qquad \left(\frac{n}{2}\right)$$

Da sich die Herleitung auf symmetrische Gleichgewichtslagen beschränkt, besteht offenbar

$$\mathfrak{S}_{-\frac{1}{2}}=\mathfrak{S}_{+\frac{1}{2}} \quad \text{und} \quad \mathfrak{S}_{-\frac{3}{2}}=\mathfrak{S}_{+\frac{3}{2}};$$

da weiters der vorausgesetzten Symmetrie der Stabausbildung

$$\delta_{-1}=\delta_{+1}$$

entspringt, können die ersten beiden Gleichungszeilen den gleichen gesetzmäßigen Aufbau erhalten wie die dritte bis $\left(\frac{n}{2}-2\right)$-te Zeile und wie diese durch die Differenzengleichung

$$\mathfrak{S}_{x-2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\delta_{x-3/2}\right)+$$
$$+\mathfrak{S}_{x-1}\cdot\left[\frac{\gamma}{2}+\delta_{x-1/2}\cdot\left(\frac{1}{2}+\cos Kl\right)+\frac{1}{2}\delta_{x-3/2}\right]+$$
$$+\mathfrak{S}_{x}\cdot\left[\omega-\gamma-\left(\delta_{x-1/2}+\delta_{x+1/2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+\cos Kl\right)\right]+$$
$$+\mathfrak{S}_{x+1}\cdot\left[\frac{\gamma}{2}+\delta_{x+1/2}\cdot\left(\frac{1}{2}+\cos Kl\right)+\frac{1}{2}\delta_{x+3/2}\right]+$$
$$+\mathfrak{S}_{x+2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\delta_{x+3/2}\right)=0$$

vertreten werden. Diese Differenzengleichung schließt mit

$$»\mathfrak{S}_{\frac{n+1}{2}}=0«$$

auch die $\left(\frac{n}{2}-1\right)$-te Gleichungszeile ein und läuft dann von

$$x=\frac{1}{2} \quad \text{bis} \quad x=\frac{n-3}{2};$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

als Randbedingungen sind ihr obige beiden Symmetriebeziehungen, ferner die Bedingung

$$\mathfrak{S}_{\frac{n+1}{2}} = 0$$

und die letzte, $\frac{n}{2}$-te Gleichungszeile zugeordnet.

Da die Auswertung dieses Ergebnisses für gerade und ungerade Felderzahlen gemeinsam erfolgen kann, sei anschließend vorerst die allgemeine Herleitung für den Fall ungerader Felderzahlen gebracht.

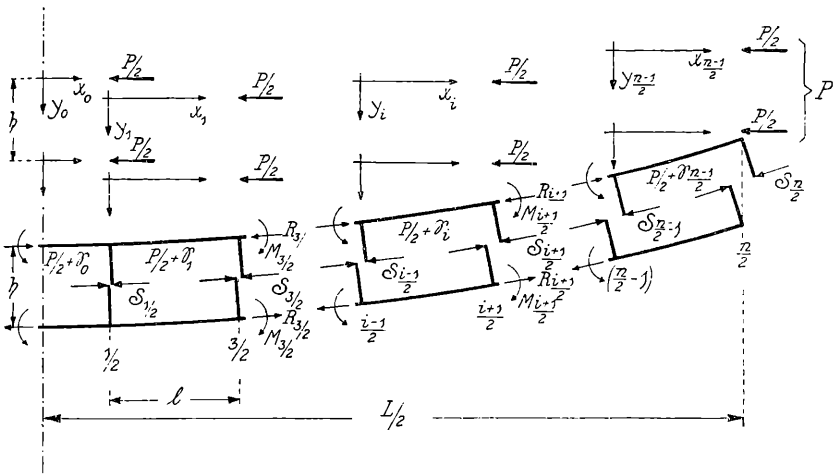

Fig. 5.

B) Allgemeine Ableitung für ungerade Felderzahlen:

Die Herleitung erfolgt in voller Analogie zu der für gerade Felderzahlen und es kann daher der verbindende Text weitgehend eingeschränkt werden. Mit Verwendung der bekannten Haupt- und Hilfsgrößen ergibt sich mit Bezug auf Fig. 5 für das erste (Halb-)Feld:

$$\bar{E}.I.y_0'' + \frac{P}{2}.y_0 - \frac{h}{2}S_{1/2} - M_{1/2} =$$

$$= \bar{E}.I.y_0'' + \frac{P}{2}.y_0 - \frac{h}{2}.\left(S_{1/2} + S_{3/2} + \quad + S_{\frac{n}{2}}\right) =$$

$$= \bar{E}.I.y_0'' + \frac{P}{2}y_0 - \frac{h}{2}.\mathfrak{S}_0 = 0$$

mit der allgemeinen Lösung

$$y_0 = A_0.\sin Kx + B_0.\cos Kx + \frac{h}{P}.\mathfrak{S}_0,$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$K = \sqrt{\frac{P}{2\,\bar{E}.I}}$$

sowie den beiden Randbedingungen der knicklosen Anschlußmöglichkeit und der Zusammenführung der gegenseitig verschobenen Schnittflächen der ersten Querverbindung:

$$x_0 = 0, \quad y_0' = 0, \quad A_0 = 0;$$

$$x_0 = \frac{l}{2}, \quad \triangle_{(1/2)} = -y_0'.h = \frac{l}{2\,E_1\,F}.\mathfrak{S}_0 + \frac{l}{2\,E_2\,F}.\mathfrak{S}_0 +$$

$$+ 2\,S_{1/2}.\left[\frac{h^3}{24.E_{1/2}'.I_{1/2}'} + \frac{h}{2\,G_{1/2}'\,F_{1/2}'} + N_{1/2}\right]$$

oder

$$-y_0' = \frac{l.\eta}{h.F}.\left(\frac{1}{2}\,\mathfrak{S}_0 + S_{1/2}.\delta_{1/2}\right);$$

daraus

$$B_0 = \frac{l.\eta}{h.F.K.\sin\frac{Kl}{2}}.\left(\frac{1}{2}\,\mathfrak{S}_0 + S_{1/2}.\delta_{1/2}\right)$$

und damit die Gleichung der Gurtbiegelinie des ersten halben Feldes

$$y_0 = \frac{2.l.\eta.\cos\frac{Kl}{2}}{h.F.K.\sin Kl}.\left(\frac{1}{2}\,\mathfrak{S}_0 + S_{1/2}.\delta_{1/2}\right)\cos Kx + \frac{h}{P}.\mathfrak{S}_0.$$

Feld $^1/_2$ bis $^3/_2$:

$$\bar{E}.I.y_1'' + \frac{P}{2}.y_1 - \frac{h}{2}.S_{3/2} - M_{3/2} =$$

$$= \bar{E}.I.y_1'' + \frac{P}{2}.y_1 - \frac{h}{2}.\left(S_{3/2} + S_{5/2} + \quad + S_{\frac{n}{2}}\right) =$$

$$= \bar{E}.I.y_1'' + \frac{P}{2}.y_1 - \frac{h}{2}.\mathfrak{S}_1 = 0,$$

$$y_1 = A_1.\sin Kx + B_1.\cos Kx + \frac{h}{P}.\mathfrak{S}_1,$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$x_1 = 0, \quad -y_1' = -y_0'\Big|_{x=\frac{l}{2}} = \frac{l.\eta}{h.F}.\left(\frac{1}{2}\mathfrak{S}_0 + S_{1/2}.\delta_{1/2}\right),$$

$$x_1 = l, \quad -y_1' = \frac{l.\eta}{h\ F}.\left(\frac{1}{2}\mathfrak{S}_0 + \mathfrak{S}_1 + S_{3/2}.\delta_{3/2}\right),$$

daraus A_1 und B_1 und damit

$$y_1 = \frac{l.\eta}{h.F.K.\sin Kl}.$$

$$.\left\{\left[\frac{1}{2}\mathfrak{S}_0 + \mathfrak{S}_1 + S_{3/2}.\delta_{3/2} - \left(\frac{1}{2}\mathfrak{S}_0 + S_{1/2}.\delta_{1/2}\right)\cos Kl\right].\cos Kx - \right.$$

$$\left. -\left(\frac{1}{2}\mathfrak{S}_0 + S_{1/2}.\delta_{1/2}\right).\sin Kl.\sin Kx\right\} + \frac{h}{P}.\mathfrak{S}_1.$$

Analog weiter bis zum Endfeld $\left(\frac{n}{2} - 1\right) - \frac{n}{2}$:

$$y_{\frac{n-1}{2}} = \frac{l.\eta}{h.F.K.\sin Kl}.$$

$$.\left\{\left[\frac{1}{2}\mathfrak{S}_0 + \mathfrak{S}_1 + \quad + \mathfrak{S}_{\frac{n-1}{2}} + \mathfrak{S}_{\frac{n}{2}}.\delta_{\frac{n}{2}} - \right.\right.$$

$$\left. -\left(\frac{1}{2}\mathfrak{S}_0 + \mathfrak{S}_1 \quad \mathfrak{S}_{\frac{n-3}{2}} + S_{\frac{n}{2}-1}.\delta_{\frac{n}{2}-1}\right)\cos Kl\right].\cos Kx -$$

$$-\left(\frac{1}{2}\mathfrak{S}_0 + \mathfrak{S}_1 + \quad + \mathfrak{S}_{\frac{n-3}{2}} + S_{\frac{n}{2}-1}\ \delta_{\frac{n}{2}-1}\right).$$

$$\left. .\sin Kl\ \sin Kx\right\} + \frac{h}{P}.\mathfrak{S}_{\frac{n-1}{2}}$$

Fordert man nun wieder in Form der $\frac{n+1}{2}$ Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} y_0\Big|_{x=\frac{l}{2}} - y_1\Big|_{x=0} &= 0 \\ y_1\Big|_{x=l} - y_2\Big|_{x=0} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$\left.\begin{aligned} y'_{\frac{n-3}{2}}\Big|_{x=l} - y_{\frac{n-1}{2}}\Big|_{x=0} &= 0, \\ y'_{\frac{n-1}{2}}\Big|_{x=l} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

die Vereinigung der den einzelnen Feldern zugehörigen Abszissenachsen zu einem einzigen Achsenpaar, das durch die Endpunkte der Gurten geht und damit wieder die momentenfreie Lagerung des Rahmenstabes gewährleistet, so erhält man nach Einführung der bekannten Hilfsgrößen ω und das System von $\frac{n+1}{2}$-Bedingungsgleichungen:

$$\frac{1}{2}\mathfrak{S}_0 \cdot \omega - S_{1/2} \cdot \left(\frac{\gamma}{2} + \delta_{1/2} \cos Kl + \frac{1}{2}\delta_{1/2}\right) + S_{3/2} \cdot \frac{\delta_{3/2}}{2} = 0 \qquad (1)$$

$$\left(\frac{1}{2}\mathfrak{S}_0 + \mathfrak{S}_1\right) \cdot \omega + S_{1/2} \cdot \frac{\delta_{1/2}}{2} - \\ - S_{3/2} \cdot \left(\frac{\gamma}{2} + \delta_{3/2} \cos Kl\right) + S_{5/2} \cdot \frac{\delta_{5/2}}{2} = 0 \qquad (2)$$

$$\left(\frac{1}{2}\mathfrak{S}_0 + \mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_2\right) \cdot \omega + S_{3/2} \cdot \frac{\delta_{3/2}}{2} - S_{5/2} \cdot \\ \cdot \left(\frac{\gamma}{2} + \delta_{5/2} \cos Kl\right) + S_{7/2} \frac{\delta_{7/2}}{2} = 0 \qquad (3)$$

usw. bis

$$\left(\frac{1}{2}\mathfrak{S}_0 + \mathfrak{S}_1 + \quad + S_{\frac{n-3}{2}}\right) \cdot \omega + S_{\frac{n}{2}-2} \cdot \frac{1}{2}\delta_{\frac{n}{2}-2} - S_{\frac{n}{2}-1} \\ \cdot \left(\frac{\gamma}{2} + \delta_{\frac{n}{2}-1} \cdot \cos Kl\right) + S_{\frac{n}{2}} \cdot \frac{\delta_{n/2}}{2} = 0 \qquad \left(\frac{n-1}{2}\right)$$

$$\left(\frac{1}{2}\mathfrak{S}_0 + \mathfrak{S}_1 + \quad + \mathfrak{S}_{\frac{n-1}{2}}\right) \cdot \omega + S_{\frac{n}{2}-1} \cdot \delta_{\frac{n}{2}-1} - \\ - S_{\frac{n}{2}} \cdot \left(\gamma + \delta_{\frac{n}{2}} \cos Kl\right) = 0, \qquad \left(\frac{n+1}{2}\right)$$

das sich durch Subtraktion jeder i-ten Gleichungszeile von der $(i+1)$-ten und Berücksichtigung der Beziehung

$$S_{\frac{2i-1}{2}} = \mathfrak{S}_{i-1} - \mathfrak{S}_i$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

auf die Form:

$$\mathfrak{S}_0 \cdot \left[\frac{\omega}{2} - \frac{\gamma}{2} - \delta_{1/2} \cdot \left(\frac{1}{2} + \cos Kl\right)\right] +$$

$$+ \mathfrak{S}_1 \cdot \left[\frac{\gamma}{2} + \delta_{1/2} \cdot \left(\frac{1}{2} + \cos Kl\right) + \frac{1}{2}\,\delta_{3/2}\right] + \mathfrak{S}_2 \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot \delta_{3/2}\right) = 0 \quad (1)$$

$$\mathfrak{S}_0 \cdot \left[\frac{\gamma}{2} + \delta_{1/2} \cdot (1 + \cos Kl)\right] + \mathfrak{S}_1 \cdot \left[\omega - \gamma - (\delta_{1/2} + \delta_{3/2}) \cdot\right.$$

$$\left.\cdot \left(\frac{1}{2} + \cos Kl\right) - \frac{1}{2}\,\delta_{3/2}\right] + \mathfrak{S}_2 \cdot \left[\frac{\gamma}{2} + \delta_{3/2} \cdot \left(\frac{1}{2} + \cos Kl\right) + \frac{\delta_{5/2}}{2}\right] +$$

$$+ \mathfrak{S}_3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\,\delta_{5/2}\right) = 0 \quad (2)$$

$$\mathfrak{S}_0 \cdot \left(-\frac{1}{2}\,\delta_{1/2}\right) + \mathfrak{S}_1 \cdot \left[\frac{\gamma}{2} + \delta_{3/2} \cdot \left(\frac{1}{2} + \cos Kl\right) + \frac{\delta_{1/2}}{2}\right] +$$

$$+ \mathfrak{S}_2 \cdot \left[\omega - \gamma - \left(\delta_{3/2} + \delta_{5/2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} + \cos Kl\right)\right] +$$

$$+ \mathfrak{S}_3 \cdot \left[\frac{\gamma}{2} + \delta_{5/2} \left(\frac{1}{2} + \cos Kl\right) + \frac{\delta_{7/2}}{2}\right] + \mathfrak{S}_4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\,\delta_{7/2}\right) = 0 \quad (3)$$

usw. bis

$$\mathfrak{S}_{\frac{n-7}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\,\delta_{\frac{n}{2}-3}\right) +$$

$$+ \mathfrak{S}_{\frac{n-5}{2}} \cdot \left[\frac{\gamma}{2} + \delta_{\frac{n}{2}-2} \left(\frac{1}{2} + \cos Kl\right) + \frac{1}{2} \cdot \delta_{\frac{n}{2}-3}\right] +$$

$$+ \mathfrak{S}_{\frac{n-3}{2}} \cdot \left[\omega - \gamma - \left(\delta_{\frac{n}{2}-2} + \delta_{\frac{n}{2}-1}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} + \cos Kl\right)\right] +$$

$$+ \mathfrak{S}_{\frac{n-1}{2}} \cdot \left[\frac{\gamma}{2} + \delta_{\frac{n}{2}-1} \cdot \left(\frac{1}{2} + \cos Kl\right) + \delta_{\frac{n}{2}}\right] = 0 \qquad \left(\frac{n-1}{2}\right)$$

$$\mathfrak{S}_{\frac{n-5}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\,\delta_{\frac{n}{2}-2}\right) +$$

$$+ \mathfrak{S}_{\frac{n-3}{2}} \cdot \left[\frac{\gamma}{2} + \delta_{\frac{n}{2}-1} \cdot (1 + \cos Kl) + \frac{1}{2}\,\delta_{\frac{n}{2}-2}\right] +$$

$$+ \mathfrak{S}_{\frac{n-1}{2}} \cdot \left[\omega - \frac{3\gamma}{2} - \left(\delta_{\frac{n}{2}-1} + \delta_{\frac{n}{2}}\right) \cdot\right.$$

$$\left.\cdot \left(\frac{1}{2} + \cos Kl\right) - \frac{1}{2}\,\delta_{\frac{n}{2}-1}\right] = 0 \qquad \left(\frac{n+1}{2}\right)$$

II.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

bringen läßt. Die vorausgesetzte Symmetrie der Gleichgewichtsformen liefert

$$\mathfrak{S}_{-1} = \mathfrak{S}_{+1} \quad \text{und} \quad \mathfrak{S}_{-2} = \mathfrak{S}_{+2},$$

so daß mit der der Stabsymmetrie entspringenden Beziehung

$$\delta_{-\frac{1}{2}} = \delta_{+\frac{1}{2}}$$

den ersten beiden Gleichungszeilen derselbe gesetzmäßige Aufbau zuzuweisen ist, den die dritte bis $\frac{n-3}{2}$-te Zeile besitzt und der die Vertretung durch eine Differenzengleichung vierter Ordnung zuläßt, die mit der Seite 502 angeschriebenen identisch ist; auch die beiden, neben obigen Symmetriebeziehungen vorzuschreibenden Randbedingungen,

$$\mathfrak{S}_{\frac{n+1}{2}} = 0$$

und die letzte Gleichungszeile, sind dieselben wie im Falle gerader Felderzahlen.

C) Die allgemeine Bedingung für das Erreichen von Stabilitätsgrenzen für einen Rahmenstab beliebiger Felderzahl.

Die Befriedigung der in »$\mathfrak{S}$« homogenen Gleichungssysteme (I) und (II) gewährleistet in allgemeiner Form das Bestehen des Gleichgewichtes an einem zentrisch-axial gedrückten Rahmenstab gerader oder ungerader Felderzahl. Eine Möglichkeit der Erfüllung dieser Systeme liegt jedenfalls im Verschwinden sämtlicher »$\mathfrak{S}$« und die zugehörige Gleichgewichtslage ist, da dann auch alle $S = 0$ und $y = 0$, die gerade verbleibende Stabachse des ersten stabilen Zustandes; jede weitere Befriedigungsmöglichkeit setzt das Verschwinden der Nennerdeterminante »D« des Systems voraus und werden damit die von Null verschiedenen Lösungen »$\mathfrak{S}$«, also die (nach den Bemerkungen p. 492 unendlich wenig) ausgebogenen Gleichgewichtsformen geliefert. Die Bedingungsgleichung »$D = 0$« ist vom $\frac{n}{2}$-ten, beziehungsweise $\frac{n+1}{2}$-ten (für gerade, beziehungsweise ungerade Felderzahlen) Grade und ergibt $\frac{n}{2}$, beziehungsweise $\frac{n+1}{2}$ verschiedene »Knickbedingungen«, denen $\frac{n}{2}$, beziehungsweise $\frac{n+1}{2}$ verschiedene ausgebogene Gleichgewichtszustände zugeordnet sind, die in ihrer Gesamtheit die der Ableitung zugrunde gelegte »Gruppe der symmetrischen Formen«

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

bilden. Da ein n-feldriger Rahmenstab im instabilen Zustand insgesamt »n« verschiedene ausgebogene Gleichgewichtslagen annehmen kann, entfallen somit $\frac{n}{2}$ bei geraden und $\frac{n+1}{2}$ bei ungeraden Felderzahlen auf die zur Stabmitte symmetrischen Formen. Die Auflösung der Gleichung »$D = 0$« wäre bei größeren Felderzahlen recht schwerfällig und es kann das Verfahren unter Zuhilfenahme der Differenzenrechnung durch ein ungleich eleganteres ersetzt werden; insolange die Nachgiebigkeit der einzelnen Querverbindungen untereinander verschieden ist (welcher allgemeinsten Problemfassung überdies gar keine praktische Bedeutung zukommt), liegt der Wert der Differenzengleichungen, deren Theorie bei variablen Koeffizienten noch des Ausbaues bedarf, wohl einzig in einer geschlossenen Fassung des Resultats in der Form:

$$\left.\begin{aligned}
&\mathfrak{S}_{x-2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\,\delta_{x-3/2}\right)+\mathfrak{S}_{x-1}\cdot\left[\frac{\gamma}{2}+\delta_{x-1/2}\cdot\left(\frac{1}{2}+\cos Kl\right)+\right.\\
&\left.+\frac{1}{2}\cdot\delta_{x-3/2}\right]+\mathfrak{S}_{x}\cdot\left[\omega-\gamma-\left(\delta_{x-1/2}+\delta_{x+1/2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+\cos Kl\right)\right]+\\
&+\mathfrak{S}_{x+1}\cdot\left[\frac{\gamma}{2}+\delta_{x+1/2}\left(\frac{1}{2}+\cos Kl\right)+\frac{1}{2}\,\delta_{x+3/2}\right]+\\
&+\mathfrak{S}_{x+2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\,\delta_{x+3/2}\right)=0,
\end{aligned}\right\}$$

deren symmetrische Lösung den beiden Randbedingungen

$$\left.\begin{aligned}
&\mathfrak{S}_{\frac{n+1}{2}}=0,\\
&\mathfrak{S}_{\frac{n-5}{2}}\cdot\left(-\frac{1}{2}\,\delta_{\frac{n}{2}-2}\right)+\mathfrak{S}_{\frac{n-3}{2}}\cdot\left[\frac{\gamma}{2}+\delta_{\frac{n}{2}-1}\cdot\left(1+\cos Kl\right)+\right.\\
&\left.+\frac{1}{2}\,\delta_{\frac{n}{2}-2}\right]+\mathfrak{S}_{\frac{n-1}{2}}\cdot\left[\omega-\frac{3\gamma}{2}-\left(\delta_{\frac{n}{2}-1}+\delta_{\frac{n}{2}}\right)\cdot\right.\\
&\left.\cdot\left(\frac{1}{2}+\cos Kl\right)-\frac{1}{2}\,\delta_{\frac{n}{2}-1}\right]=0
\end{aligned}\right\}\text{III.}$$

zu genügen hat; dabei ist:

$$\delta_i=\frac{F.h}{l.\eta}\cdot\left(\frac{h^2}{12.E_i'.I_i'}+\frac{1}{G_i'F_i'}+\frac{2\,N_i}{h}\right),$$

$$\gamma=1+\frac{F.h^2}{4.I}.\mu.\frac{\sin Kl}{Kl},$$

$$\omega=1-\cos Kl,\quad K=\sqrt{\frac{P}{2\,\bar{E}I}},\quad \mu=\frac{2}{\bar{E}.\eta},\quad \eta=\frac{1}{E_1}+\frac{1}{E_2}.$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Die Einführung der allgemeinen symmetrischen, somit die beiden Symmetriebeziehungen

$$\mathfrak{S}_{-\frac{1}{2}} = \mathfrak{S}_{+\frac{1}{2}}, \quad \mathfrak{S}_{-} = \mathfrak{S}_{+\,3/2}$$

bei geraden oder

$$\mathfrak{S}_{-1} = \mathfrak{S}_{+1}, \quad \mathfrak{S}_{-2} = \mathfrak{S}_{+2}$$

bei ungeraden Felderzahlen befriedigende Lösung in die beiden Randbedingungen ergibt ein in den beiden Integrationskonstanten C_1 und C_2 homogenes Gleichungspaar, das jedenfalls die Nulllösung

$$C_1 = C_2 = 0$$

besitzt und damit wegen

$$\mathfrak{S} = S = y = 0$$

die Gleichgewichtslagen des ersten stabilen Zustandes liefert und für jede von Null verschiedene Lösung, also zur Ermöglichung ausgebogener Gleichgewichtsformen, das Verschwinden der Nennerdeterminante »$\triangle$« dieses Gleichungspaares fordert. Die Bedingung für das Erreichen von Stabilitätsgrenzen wird somit durch die Gleichung

$$\triangle = 0$$

zum Ausdruck gebracht, wobei die Determinante $\triangle$ trotz der umfassenden Allgemeinheit und unabhängig von der Felderzahl nur zweiten Grades ist; aus dieser Bedingung resultieren allgemein $\frac{n}{2}$, beziehungsweise $\frac{n+1}{2}$ verschiedene Wurzeln (Knickbedingungen), denen $\frac{n}{2}$, beziehungsweise $\frac{n+1}{2}$ verschiedene ausgebogene Gleichgewichtslagen zugeordnet sind, die in ihrer Gesamtheit die der Ableitung zugrunde gelegte Gruppe der symmetrischen Formen bilden.[1]

---

[1] Verzichtet man bei der Herleitung auf die Einführung der »$\mathfrak{S}$« und drückt die »y« einzig durch die Überzähligen »S« aus, so erhält man nach zweimaliger Subtraktion der Gleichungszeilen die Differenzengleichung:

$$S_{x-2}\left(-\frac{\delta_{x-2}}{2}\right) + S_{x-1}.\left[\frac{\gamma}{2} + \delta_{x-1}.(1+\cos Kl)\right] +$$

$$+ S_x.\left[\omega - \gamma - \delta_x.(1+2\cos Kl)\right] + S_{x+1}.\left[\frac{\gamma}{2} + \delta_{x+1}.(1+\cos Kl)\right] +$$

$$+ S_{x+2}.\left(-\frac{\delta_{x+2}}{2}\right) = 0,$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

D) Der Sonderfall gleichartig ausgebildeter Querverbindungen.

Die gewöhnlich die Regel bildende Gleichartigkeit der Ausbildung sämtlicher Querverbindungen liefert $\delta_i = \delta =$ konst. und macht die Koeffizienten von (III) unabhängig vom Zeiger »x«. Für die dieserart vereinfachte Differenzengleichung:

$$\mathfrak{S}_{x-2}\cdot\left(-\frac{\delta}{2}\right)+\mathfrak{S}_{x-1}\cdot\left[\frac{\gamma}{2}+\delta\cdot(1+\cos Kl)\right]+$$
$$+\mathfrak{S}_{x}\cdot\left[\omega-\gamma-\delta\cdot(1+2\cos Kl)\right]+$$
$$+\mathfrak{S}_{x+1}\cdot\left[\frac{\gamma}{2}+\delta\cdot(1+\cos Kl)\right]+\mathfrak{S}_{x+2}\cdot\left(-\frac{\delta}{2}\right)=0 \qquad \text{IV}$$

wird im Ansatz $\mathfrak{S}_x = \cos ax$ eine die Symmetriebedingungen befriedigende partikuläre Lösung gefunden, deren Einführung die charakteristische Gleichung

$$\left(-\frac{\delta}{2}\right)\cdot\left[\cos(ax-2a)+\cos(ax+2a)\right]+\left[\frac{\gamma}{2}+\delta\cdot(1+\cos Kl)\right]\cdot$$
$$\cdot\left[\cos(ax-a)+\cos(ax+a)\right]+\left[\omega-\gamma-\delta\cdot(1+2\cos Kl)\right]\cdot\cos ax=0$$

---

deren allgemeine Lösung außer den beiden Symmetriebeziehungen

$$S_0=0,\quad S_{-1}=S_{+1}$$

bei geraden oder

$$S_{-1/2}=S_{+1/2},\quad S_{-3/2}=S_{+3/2}$$

bei ungeraden Felderzahlen die beiden Randbedingungen

$$\left.\begin{aligned}
&S_{\frac{n}{2}-3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\cdot\delta_{\frac{n}{2}-3}\right)+S_{\frac{n}{2}-2}\left[\frac{\gamma}{2}+\delta_{\frac{n}{2}-2}\cdot(1+\cos Kl)\right]+\\
&\quad+S_{\frac{n}{2}-1}\cdot\left[\omega-\gamma-\delta_{\frac{n}{2}-1}\cdot\left(\frac{3}{2}+2\cos Kl\right)\right]+\\
&\quad\quad+S_{\frac{n}{2}}\left[\gamma+\delta_{\frac{n}{2}}\cdot(1+\cos Kl)\right]=0,\\
&S_{\frac{n}{2}}\cdot\left(-\frac{1}{2}\cdot\delta_{\frac{n}{2}-2}\right)+S_{\frac{n}{2}-1}\cdot\left[\frac{\gamma}{2}+\delta_{\frac{n}{2}-1}\cdot(1+\cos Kl)\right]+\\
&\quad\quad+S_{\frac{n}{2}}\cdot\left[\omega-\gamma-\delta_{\frac{n}{2}}\cdot\left(\frac{1}{2}+\cos Kl\right)\right]=0
\end{aligned}\right\}$$

erfüllen muß.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

oder

$$\cos a_{1,2} = \frac{1}{2\delta}\left[\frac{\gamma}{2} + \delta.(1+\cos Kl) \pm\right.$$

$$\left.\pm\sqrt{\left[\frac{\gamma}{2} + \delta.(1+\cos Kl)\right]^2 + 2\delta.(\omega - \gamma - 2\delta\cos Kl)}\right]$$

ergibt. Die allgemeine symmetrische Lösung dieser Differenzengleichung vierter Ordnung lautet dann

$$\mathfrak{S}_x = C_1.\cos a_1 x + C_2.\cos a_2 x$$

und ihre Einführung in die beiden Randbedingungen liefert das Gleichungspaar

$$\left.\begin{aligned}
&C_1.\cos a_1\frac{n+1}{2} + C_2.\cos a_2\frac{n+1}{2} = 0,\\
&\left(-\frac{\delta}{2}\right).\left(C_1\cos a_1\frac{n-5}{2} + C_2\cos a_2\frac{n-5}{2}\right) +\\
&+\left[\frac{\gamma}{2} + \delta.\left(\frac{3}{2} + \cos Kl\right)\right].\left(C_1.\cos a_1\frac{n-3}{2} + C_2.\cos a_2\frac{n-3}{2}\right) +\\
&+\left[\omega - \frac{3\gamma}{2} - \delta.\left(\frac{3}{2} + 2\cos Kl\right)\right].\\
&.\left(C_1.\cos a_1\frac{n-1}{2} + C_2.\cos a_2\frac{n-1}{2}\right) = 0,
\end{aligned}\right\}$$

aus dem nach einfacher Substitution die allgemeine, sämtliche symmetrischen Gleichgewichtsformen umfassende Bedingung für das Erreichen von Stabilitätsgrenzen in der Form

$$\left.\begin{aligned}
&\left(-\frac{\delta}{2}\right).\left[\cos a_1\frac{n-5}{2} - \frac{\cos a_1\frac{n+1}{2}}{\cos a_2\frac{n+1}{2}}.\cos a_2\frac{n-5}{2}\right] +\\
&+\left[\frac{\gamma}{2} + \delta.\left(\frac{3}{2} + \cos Kl\right)\right].\\
&.\left[\cos a_1\frac{n-3}{2} - \frac{\cos a_1\frac{n+1}{2}}{\cos a_2\frac{n+1}{2}}\cos a_2\frac{n-3}{2}\right] +
\end{aligned}\right\}\text{V.}$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$+\left[\omega - \frac{3\gamma}{2} - \delta.\left(\frac{3}{2} + 2\cos Kl\right)\right].$$

$$.\left[\cos a_1 \frac{n-1}{2} - \frac{\cos a_1 \frac{n+1}{2}}{\cos a_2 \frac{n+1}{2}} \cos a_2 \frac{n-1}{2}\right] = 0$$

resultiert. Die Praxis interessiert nur die »maßgebende« Wurzel dieser Bedingung, der die kleinste Knicklast zugeordnet ist und deren Kriterium, wie später noch dargelegt werden wird, in der Gleichheit der Vorzeichen aller »S« besteht. Bezüglich der Anwendung vergleiche das Zahlenbeispiel p. 526, bei dem auch unelastisches Materialverhalten in Rücksicht gezogen wurde. Die Verwendung von Näherungslösungen, etwa wie sie Mises (l. c. p. 197) vorschlägt, erscheint bei den üblichen kleinen Felderzahlen für einigermaßen größere Werte h und $\frac{I}{I'}$ gewagt; im erwähnten Zahlenbeispiel würden sich negative Knicklasten ergeben.[1]

E) Der Sonderfall der Starrheit aller Querverbindungen und deren Anschlüsse.

Die diesem Sonderfall zugeordnete Beziehung $\delta_i = 0$ gestattet die Reduktion der Ordnungszahl von vier auf zwei und vereinfacht die Differenzengleichung (III) zu:

$$\mathfrak{S}_{x-1} \cdot \frac{\gamma}{2} + \mathfrak{S}_x \cdot (\omega - \gamma) + \mathfrak{S}_{x+1} \cdot \frac{\gamma}{2} = 0,$$

deren allgemeine Lösung die Symmetriebeziehung

$$\mathfrak{S}_{-\frac{1}{2}} = \mathfrak{S}_{+\frac{1}{2}}$$

für gerade, beziehungsweise $\mathfrak{S}_{-1} = \mathfrak{S}_{+1}$ für ungerade Felderzahlen und die Randbedingung

$$\frac{\gamma}{2} \cdot \mathfrak{S}_{\frac{n-3}{2}} + \left(\omega - \frac{3\gamma}{2}\right) \cdot \mathfrak{S}_{\frac{n-1}{2}} = 0$$

zu befriedigen hat. VI.

Der symmetrische Ansatz $\mathfrak{S}_x = \cos ax$ liefert die charakteristische Gleichung

$$\frac{\gamma}{2} \cdot \left[\cos(ax - a) + \cos(ax + a)\right] + (\omega - \gamma) \cdot \cos ax = 0$$

[1] Auch Grüning's (l. c.) Formel würde stark abweichende Werte liefern.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

oder

$$\cos a = \frac{\gamma - \omega}{\gamma}$$

und damit die allgemeine symmetrische Lösung

$$\mathfrak{S}_x = C . \cos a\, x,$$

deren Einführung in die Randbedingung die Gleichung

$$\frac{\gamma}{2} . C . \cos a \frac{n-3}{2} + \left(\omega - \frac{3\gamma}{2}\right) . C . \cos a \frac{n-1}{2} = 0$$

ergibt. Die Bedingung für das Erreichen von Stabilitätsgrenzen lautet somit:

$$\cos a . \frac{n-3}{2} + \left(\frac{2\omega}{\gamma} - 3\right) . \cos a \frac{n-1}{2} = 0$$

oder, da aus der charakteristischen Gleichung für

$$\frac{2\omega}{\gamma} - 3 = \frac{2(\omega - \gamma)}{\gamma} - 1 = -(1 + 2\cos a)$$

folgt,

$$\left.\begin{aligned} &\cos a \frac{n-3}{2} - (1 + 2\cos a) . \cos a \frac{n-1}{2} = 0, \\ &\cos a = \frac{\gamma - \omega}{\gamma}, \quad \gamma = 1 + \frac{F . h^2}{4 . I} . \mu . \frac{\sin Kl}{Kl}, \\ &\omega = 1 - \cos Kl. \end{aligned}\right\} \text{VII.}$$

Eine sämtliche geraden und ungeraden Felderzahlen umfassende Lösung ist in $a = \frac{\pi}{n}$ gefunden, wie man sich durch Einsetzen:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{2n}\right) - \left(1 + 2\cos\frac{\pi}{n}\right) . \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2n}\right) =$$

$$= \sin\frac{3\pi}{2n} - \left(\sin^2\frac{\pi}{2n} + \cos^2\frac{\pi}{2n} +\right.$$

$$\left. + 2\cos^2\frac{\pi}{2n} - 2\sin^2\frac{\pi}{2n}\right) \sin\frac{\pi}{2n} =$$

$$= \sin\frac{3\pi}{2n} - \left(3\sin\frac{\pi}{2n}\cos^2\frac{\pi}{2n} - \sin^3\frac{\pi}{2n}\right) = 0$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

überzeugen kann. Die Beziehung $a = \frac{\pi}{n}$ muß daher eine Knickbedingung vorstellen, die von $n = 1$ aufwärts Geltung besitzt; da im Fall $n = 1$ überhaupt nur ein einziger Typus einer ausgebogenen Gleichgewichtsform des Rahmen-(nicht des einzelnen Gurt-)stabes in Betracht kommt, nämlich die Ausbiegung nach einer einzigen Halbwelle, muß eine solche Form der Knickbedingung $a = \frac{\pi}{n}$ allgemein zugeordnet sein und es zeigt sich, daß dieser Gleichgewichtsform die kleinstmögliche Axialkraft zugehört. Diese Lösung $a = \frac{\pi}{n}$ gibt mit Zuziehung der charakteristischen Gleichung

$$\cos\frac{\pi}{n} = \frac{\gamma - \omega}{\gamma}$$

oder

$$\omega = \left(1 - \cos\frac{\pi}{n}\right)\cdot\gamma,$$

$$(1 - \cos Kl) = \left(1 - \cos\frac{\pi}{n}\right)\cdot\left(1 + \frac{F h^2}{4 I}\,\mu\,\frac{\sin Kl}{Kl}\right),$$

somit die Knickbedingung in der Form:

$$\frac{\cos\frac{\pi}{n} - \cos Kl}{1 - \cos\frac{\pi}{n}} = \frac{F.h^2}{4 I}\,\mu\cdot\frac{\sin Kl}{Kl}, \qquad \text{VIII.}$$

welche Beziehung die maßgebende, d. h. die kleinste Knicklast liefernde Knickbedingung für einen zweiteiligen, gleichgurtigen Rahmenstab gleicher Felderteilung und starrer Querverbindungen vorstellt und für jede Felderzahl »n« Geltung besitzt. Beschränkt man sich auf den elastischen Bereich, so wird $\bar{E} = E$ und $\mu = 1$ und es besteht dann vollkommene Übereinstimmung mit der von Mises (l. c. p. 195) abgeleiteten Knickbedingung.[1]

F) Über die Beanspruchung der Querverbindungen und deren Anschlüsse.

Die Frage nach der Stabilitätsgrenze erscheint in der Herleitung durch die Frage nach der Möglichkeit von Null verschiedener

[1] L. Mann (Zeitschrift für Bauwesen 1909, p. 565) erhielt, wie einige Umformungen zeigen, die gleiche Beziehung schon im Jahre 1909.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Überzähligen »S« ersetzt und es wurde demgemäß für den indifferenten Zustand die Widerspruchsfreiheit eines in den »S«, beziehungsweise »$\mathfrak{S}$« homogenen Gleichungssystems verlangt; dieses Gleichungssystem (I), beziehungsweise (II) gestattet somit für den Fall, daß die Axialkraft den Sonderwert einer Knicklast annimmt, die Ermittlung der gegenseitigen Verhältnisse aller »S«. Die Resultate gelten zwar in Schärfe nur für unendlich kleine Stabausbiegungen, doch sind die in die Herleitung eingeführten Annäherungen (vgl. p. 492) im elastischen und auch im unelastischen Bereich von solcher Güte, daß die Ergebnisse auch bei kleineren endlichen Stabausbiegungen als ausreichend genau anzusehen sind. Da die Inanspruchnahme der Querverbindungen nur in dem praktisch maßgebenden Fall der Ausknickung nach einer Halbwelle interessiert, dem, wie erwähnt, die kleinste Knicklast zugeordnet ist, kann durch Festlegung eines bestimmten Biegungspfeiles (Ausbiegung in Stabmitte, etwa in Bruchteilen der Stablänge) ein Verformungszustand herausgegriffen werden, für den dann absolute Werte für die »S« zu erhalten sind, so daß die Beanspruchungen aller Querverbindungen auf elementarem Wege ermittelt werden können. Diesem Vorgang kommt die Herleitung auch insofern zustatten, als sie für die Ausbiegung in Stabmitte die einfacher gebauten Beziehungen (vgl. p. 498, beziehungsweise 504)

$$y_1 = \frac{l.\eta}{h.F.K.\sin Kl}\left[\left(S_1 + S_2 + \quad + S_{\frac{n}{2}}\right) + S_1.\delta_1\right] + \\ + \frac{h}{P_K}\left(S_1 + S_2 + . \quad . + S_{\frac{n}{2}}\right)$$

für gerade, beziehungsweise

$$y_0 = \frac{l.\eta}{h.F.K.\sin\frac{Kl}{2}}\left[\frac{1}{2}\left(S_{1/2} + S_{3/2} + \quad + S_{\frac{n}{2}}\right) + S_{1/2}.\delta_{1/2}\right] + \\ + \frac{h}{P_K}\left(S_{1/2} + S_{3/2} + \quad + S_{\frac{n}{2}}\right)$$

für ungerade Felderzahlen festlegte, in die einerseits für »y« der gewählte Biegungspfeil $\frac{L}{z}$, anderseits die Summe aller Überzähligen als Funktion einer von ihnen (Gleichungssystem I, beziehungsweise II) einzuführen ist und aus denen sich eine und damit alle Scherkräfte »S« ergeben.

Diese Betrachtungen führen auch auf die Möglichkeit eines relativ einfacheren Dimensionierungsverfahrens für die einzelnen Querverbindungen, das darauf beruht, daß man der Bestimmung der Knicklast die in der Praxis wohl einzig brauchbare Formel VIII,

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

also die Vernachlässigung der Nachgiebigkeit der Querverbindungen und deren Anschlüsse, zugrunde legt und nach dem oben geschilderten Vorgang für einen festgelegten, die unvermeidlichen Angriffsexzentrizitäten einigermaßen in Rücksicht ziehenden Biegungspfeil die absoluten Werte der einzelnen »S« ermittelt; dimensioniert man nun die einzelnen Querverbindungen und ihre Anschlüsse so, daß unter dem Angriff des zugehörigen »S« etwa die Fließgrenze erreicht wird, so erzielt man in wirtschaftlicher Weise, daß einerseits ein vorzeitiges Versagen einzelner Querverbindungen mit Sicherheit verhindert wird und anderseits die Fiktion starrer Querverbindungen, also die Verwendung der Formel (VIII) in gewissem Maße [vgl. Zahlenbeispiel (I)] tatsächlich gerechtfertigt erscheint.

Anschließend sei noch die interessante Tatsache vermerkt, daß im allgemeinen nicht die Endquerverbindungen, sondern die diesen benachbarten, vorletzten, die stärkst beanspruchten sind. Vernachlässigt man die Nachgiebigkeit, so folgt unmittelbar aus der letzten Zeile der Gleichungssysteme (I) oder (II):

$$\mathfrak{S}_{\frac{n-3}{2}} \cdot \frac{\gamma}{2} + \mathfrak{S}_{\frac{n-1}{2}} \cdot \left(\omega - \frac{3\gamma}{2}\right) = \left(S_{\frac{n}{2}-1} + S_{\frac{n}{2}}\right) \cdot \frac{\gamma}{2} + \\ + S_{\frac{n}{2}} \left(\omega - \frac{3\gamma}{2}\right) = 0,$$

$$S_{\frac{n}{2}-1} = 2 \cdot \left(1 - \frac{\omega}{\gamma}\right) \cdot S_{\frac{n}{2}};$$

sollen diese beiden Scherkräfte in von Null verschiedener Größe möglich sein, so muß eine Stabilitätsgrenze erreicht sein, und es wurde als maßgebende Bedingung hiezu p. 515 die Beziehung

$$\omega = \left(1 - \cos\frac{\pi}{n}\right) \cdot \gamma$$

gefunden, deren Einführung die Gleichung

$$S_{\frac{n}{2}-1} = 2 \cdot \left[1 - \left(1 - \cos\frac{\pi}{n}\right)\right] \cdot S_{\frac{n}{2}} = 2 \cdot \cos\frac{\pi}{n} \; S_{\frac{n}{2}} \qquad \text{(IX)}$$

ergibt. Da für die Existenz eines $S_{\frac{n}{2}-1}$ nur eine Felderzahl $n \geqq 3$ in Betracht kommt, gilt

$$\frac{1}{2} \leqq \cos\frac{\pi}{n} < 1$$

und damit für beginnendes Ausknicken:

$$S_{\frac{n}{2}} \leqq S_{\frac{n}{2}-1} < 2 \cdot S_{\frac{n}{2}}$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Ein Nachgeben der Querverbindungen im üblichen Ausmaß vermag diese Beziehungen nur quantitativ zu verändern [vgl. dazu das Zahlenbeispiel (II)]. Zur Bekräftigung dieses Ergebnisses dienen folgende Überlegungen: Das Moment $\frac{P}{2} \cdot y$ im Gurte eines ausknickenden Rahmenstabes nimmt gegen das Stabende hin ab und wird entsprechend der Randbedingung am Lager Null, während in der letzten Querverbindung ein $S_{\frac{n}{2}}$ wirksam ist, das entgegengesetzt dem $\frac{1}{2} \cdot P$ biegt und dessen Gurtmoment $S_{\frac{n}{2}} \cdot \frac{h}{2}$ am Stabende in unverminderter Größe vorhanden ist; daraus folgt, daß in der Nähe des Stabendes das negative Moment $S_{\frac{n}{2}} \cdot \frac{h}{2}$ überwiegt und daher die Gurtbiegelinie einen Wendepunkt aufweisen muß. Dieser Krümmungswechsel an den Gurtenden vermindert nun notwendigerweise den Zuwachs an gegenseitiger Schnittflächenverschiebung im ausgebogenen Grundfall für die Endquerverbindung, so daß dementsprechend auch die zugehörige überzählige Wirkungsgröße »$S_{\frac{n}{2}}$ kleiner sein kann als das benachbarte »$S_{\frac{n}{2}-1}$

G) Einige Fälle kleiner Felderzahl; Diskussion der höheren Knickwurzeln.

Die Zahl der ausgebogenen Gleichgewichtsformen des n-feldrigen Rahmenstabes beträgt, wie schon dargelegt wurde, für die symmetrische Gruppe $Z_1 = \frac{n}{2}$, beziehungsweise $\frac{n+1}{2}$, für die asymmetrische Gruppe $Z_2 = \frac{n}{2}$, beziehungsweise $\frac{n-1}{2}$ für gerade, beziehungsweise ungerade Felderzahlen. Für sämtliche Gleichgewichtslagen kommen unabhängig von der Nachgiebigkeit der Querverbindungen zwei Grenzfälle A und B in Betracht, die dadurch gekennzeichnet sind, daß die Gurtstäbe bei endlicher Biegungssteifigkeit gegen axiale Längenänderungen vollkommen widerstandslos, beziehungsweise unendlich widerstandsfähig erscheinen. Wie man aus Formel (VIII) entnehmen kann, gilt für die symmetrische Gruppe im Grenzfall A

$$\frac{\cos\frac{\pi}{n} - \cos Kl}{1 - \cos\frac{\pi}{n}} \to 0,$$

also $Kl \to \frac{\pi}{n}$ und somit für die auf einen der beiden Gurtstäbe bezogene maßgebende (kleinste) Knicklast

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$\frac{P_K}{2} \to \frac{\pi^2 \bar{E} I}{n^2 l^2} = \frac{\pi^2 \bar{E} I}{L^2};$$

für den Grenzfall B wird

$$\frac{\sin K l}{K l} \to 0, \quad K l \to \pi$$

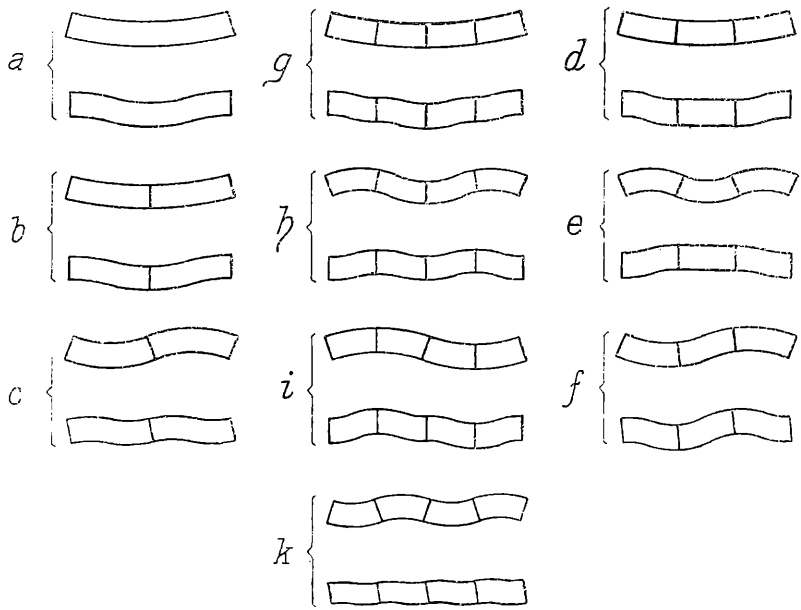

Fig. 6.

mi t Ausnahme des Falles $n = 1$) und

(

$$\frac{P_K}{2} \to \frac{\pi^2 \bar{E} I}{l^2}.$$

Z wischen diesen beiden Grenzlasten müssen alle Knickkräfte des R ahmenstabes liegen und es sind die ihnen zugeordneten Gleichge wichtsformen durch die Darstellung der beiden Grenzformen A un d B ausreichend gekennzeichnet (Fig. 6). Zur Festlegung der Form de s Mittelfeldes der Grenzlage B, die für ungerade Felderzahlen nicht oh ne weiteres klar ist, dient folgendes: Für gerade Felderzahlen wir d mit $\delta = 0$ die Biegelinie des Mittelfeldes (p. 498)

$$y_{\frac{n}{2}} = (S_1 + S_2 + \quad . + S_{\frac{n}{2}}) \cdot \frac{h}{P} \cdot \left(\frac{\cos K x}{\frac{F . h^2}{4 . I} . \mu . \frac{\sin K l}{K l}} + 1 \right)$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

und ist sie in von Null verschiedener Größe nur bei Erfüllung der Knickbedingung, hier also bei $Kl \to \pi$ möglich; man erhält mit Einführung dieses Wertes

$$y_{1/2} = (S_1 + S_2 + \quad . + S_{\frac{n}{2}}) \cdot \frac{h}{P_K} \cdot \left(\frac{1 - \cos\frac{\pi}{n}}{1 + \cos\frac{\pi}{n}} \cdot \cos\frac{\pi x}{l} + 1 \right),$$

somit eine Kosinuslinie. Für ungerade Felderzahlen ist analog (p. 504)

$$y_0 = (S_{1/2} + S_{3/2} + . \quad + S_{\frac{n}{2}}) \cdot \frac{h}{P} \cdot \left(\frac{\cos Kx}{\frac{F.h^2}{4.I} \cdot \mu \cdot \frac{\sin Kl}{Kl}} \cdot \cos\frac{Kl}{2} + 1 \right)$$

und im Grenzfall B mit $Kl \to \pi$:

$$y_0 = (S_{1/2} + S_{3/2} + . \quad + S_{\frac{n}{2}}) \cdot \frac{h}{P_K} \cdot (0 + 1) = \text{Konst.},$$

somit die Biegelinie eine Gerade.

Der Fall $n = 1$:

Mit $\mathfrak{S}_0 = S_{1/2}$ folgt aus der Bedingung

$$y_0 \Big|_{x = \frac{l}{2}} = 0$$

in der Herleitung p. 504

$$\frac{2 . l . \eta . \cos^2 \frac{Kl}{2}}{h . F . K . \sin Kl} \cdot \left(\frac{1}{2} \mathfrak{S}_0 + \mathfrak{S}_0 . \delta \right) + \frac{h}{P} . \mathfrak{S}_0 = 0$$

und daraus für $\mathfrak{S}_0 \neq 0$ die einzige ($Z_1 = 1$, $Z_2 = 0$) Knickbedingung

$$-\left(\frac{1}{2} + \delta \right) . (1 + \cos Kl) = \frac{F . h^2}{4 . I} \cdot \mu \cdot \frac{\sin Kl}{Kl},$$

der die Halbwelle als Gleichgewichtslage zugeordnet ist und die für starre Querverbindungen ($\delta = 0$) unmittelbar aus (VIII) folgt. Fig. 6a[1] zeigt die Gleichgewichtsformen der beiden Grenzfälle A

$$\left(Kl \to \frac{\pi}{n} = \pi \right) \text{ und } B \left(Kl \to 2\pi > \frac{\pi}{n} \right).$$

---

[1] Grenzform B könnte sich auch analog zu der in Fig. 6, c, k, ausbilden und umgekehrt.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Der Fall $n = 2$:

Mit $\mathfrak{S}_{1/2} = S_1$ folgt aus

$$y_{1/2}\Big|_{x=l} = 0$$

in der Herleitung p. 498 die einzige symmetrische ($Z_1 = 1$, $Z_2 = 1$) Knickbedingung (vgl. als Sonderfall Mises, l. c., p. 198)

$$-(1 + \delta_1) . \cos Kl = \frac{F . h^2}{4 . I} . \mu . \frac{\sin Kl}{Kl},$$

die für $\delta_1 = 0$ aus (VIII) unmittelbar zu erhalten ist und mit $l = \frac{L}{2}$ übereinstimmt mit der des Falles $n = 1$. Die beiden Grenzfälle der symmetrischen

$$\left(Kl \to \frac{\pi}{2}, \text{ beziehungsweise } Kl \to \pi\right)$$

und der asymmetrischen Form

$$(Kl \to \pi, \text{ beziehungsweise } Kl \to 2\pi)$$

zeigt Fig. 6, *b*, *c*.

Der Fall $n = 3$:

Für starre Querverbindungen lautet die allgemeine Bedingung für das Erreichen von Stabilitätsgrenzen [(VII), p. 514]:

$$1 - (1 + 2 \cos a) . \cos a = 0,$$

daraus

$$\cos a = \frac{\gamma - \omega}{\gamma} = -\frac{1}{4} \pm \frac{3}{4}$$

oder

$$\omega_1 = \frac{\gamma}{2}, \ \omega_2 = 2\gamma;$$

eine dritte Knickbedingung entspringt der asymmetrischen Lage. Die Grenzfälle der drei Gleichgewichtsformen zeigt Fig. 6, *d*, *e*,[1] *f*. Wie Formel (VIII) ergibt, ist die Knickbedingung $\omega_1 = \frac{\gamma}{2}$ die maßgebende und liefert das Gleichungssystem p. 506, das für $n = 3$ und $\delta = 0$:

$$\begin{cases} S_{1/2} . (\omega - \gamma) + S_{3/2} . \omega = 0 \\ S_{1/2} . \omega + S_{3/2} (3\omega - 2\gamma) = 0 \end{cases}$$

lautet, bei Erfüllung dieser Knickbedingung die Beziehung $S_{1/2} = + S_{3/2}$, wie auch aus Formel (IX) hervorgeht; die Gleichheit der Vorzeichen beider »S«, das Kriterium für die maßgebende Knick-

[1] Die Grenzform *B* der Fig. 6 *e* soll richtig Analogie zu der in Fig. oder *c*, *k* verlaufen.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

bedingung, erweist sich als erfüllt. Diese Beziehung gestattet nun auch die Bestimmung der Neigungsverhältnisse der Gleichgewichtslage und findet man in der Herleitung p. 504 für die Orte der Querverbindungen, somit gleichzeitig für die Verdrehungen der letzteren,

$$\mathfrak{y}'_0\Big|_{x=\frac{l}{2}} : \mathfrak{y}'_1\Big|_{x=l} = (S_{1/2} + S_{3/2}) : (S_{1/2} + 3 . S_{3/2}) = 1 : 2,$$

womit die maßgebende Gleichgewichtsform bis auf den unbestimmten Biegungspfeil festgelegt erscheint. Für die andere symmetrische Lage erhält man ganz analog

$$S_{1/2} : S_{3/2} = 1 : \left(-\frac{1}{2}\right)$$

und

$$\mathfrak{y}'_0\Big|_{x=\frac{l}{2}} : \mathfrak{y}'_1\Big|_{x=l} = 1 : (-1).$$

Der Fall $n = 4$:

Aus (VIII) folgt

$$\cos\frac{a}{2} - (1 + 2\cos a)\cos\frac{3}{2}a = 0,$$

daraus

$$\cos a = \frac{\gamma - \omega}{\gamma} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

oder

$$\omega_1 = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right).\gamma, \quad \omega_2 = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right).\gamma;$$

zwei weitere Knickbedingungen entspringen den unsymmetrischen Formen. Das Gleichungssystem p. 500 lautet für $n = 4$ und $\delta = 0$:

$$S_1 . \left(\omega - \frac{\gamma}{2}\right) + S_2 . \omega = 0$$

$$S_1 . \omega + S_2 . (2\,\omega - \gamma) = 0$$

und liefert für die maßgebende, auch aus Formel (VIII) resultierende Knickwurzel ω_1 die Beziehung

$$S_1 \;\; S_2 = \sqrt{2} \;\; 1,$$

womit sich für die Orte der Querverbindungen die Neigungen

$$\mathfrak{y}'_{1/2}\Big|_{x=l} : \mathfrak{y}'_{3/2}\Big|_{x=l} = 1 \;\; \sqrt{2}$$

ergeben, die wieder die Gleichgewichtslage eindeutig festlegen. Für die andere Knickbedingung

$$\omega_2 = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right).\gamma$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

ergibt sich analog

$$S_1 : S_2 = (-\sqrt{2}) : 1$$

und

$$y'_{1/2}\Big|_{x=l} : y'_{3/2}\Big|_{x=l} = 1 : (-\sqrt{2}).$$

Die Grenzfälle aller vier Gleichgewichtsformen sind in Fig. 6, *g*, *h*, *i*, *k* dargestellt.

Der Fall $n = 5$:

Aus (VII) folgt

$$\cos a - (1 + 2\cos a) . \cos 2a = 0,$$

daraus

$$\cos a = \cos\frac{\pi}{5}, \ (1 \cdot 00), \ (-0 \ 309)$$

und damit

$$\omega_1 = 0 \cdot 191 . \gamma, \ \omega_2 = 2 \cdot 000 . \gamma, \ \omega_3 = 1 \cdot 309 . \gamma.$$

Das Gleichungssystem p. 506 lautet

$$\begin{cases} S_{1/2} . (\omega - \gamma) + S_{3/2} . \omega + S_{5/2} . \omega = 0 \\ S_{1/2} . \omega + S_{3/2} . (3\,\omega - \gamma) + S_{5/2} . 3\,\omega = 0 \\ S_{1/2} . \omega + S_{3/2} . 3\,\omega + S_{5/2} . (5\,\omega - 2\,\gamma) = 0 \end{cases}$$

und ergibt für die maßgebende Knickbedingung $\omega_1 = 0 \cdot 191 . \gamma$ [vgl. auch Formel (VIII)] die Verhältnisse:

$$S_{1/2} : S_{3/2} : S_{5/2} = 1 : 2 \cdot 72 : 1 \cdot 68$$

und

$$y'_0\Big|_{x=\frac{l}{2}} : y'_1\Big|_{x=l} : y'_2\Big|_{x=l} = 5 \cdot 4 : 14 \cdot 2 : 17 \cdot 6,$$

für die Wurzel ω_2 die Verhältnisse

$$S_{1/2} : S_{3/2} : S_{5/2} = 1 : (-1) : \frac{1}{2}$$

und

$$y'_0\Big|_{x=\frac{l}{2}} : y'_1\Big|_{x=l} : y'_2\Big|_{x=l} = 1 : (-1) : 1$$

und für ω_3 die Verhältnisse

$$S_{1/2} . S_{3/2} : S_{5/2} = 1 : 0 \cdot 38 : (-0 \cdot 62),$$

$$y'_0\Big|_{x=\frac{l}{2}} : y'_1\Big|_{x=l} : y'_2\Big|_{x=l} = 0 \cdot 76 : 0 \cdot 29 : (-0 \cdot 94).$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Der Fall $n = 6$:

Aus (VII) ergibt sich

$$\cos\frac{3}{2}a - (1 + 2\cos a).\cos\frac{5}{2}a = 0$$

mit

$$\cos a = 0 \text{ oder } \cos a = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

und damit

$$\omega_1 = \gamma,\ \omega_2 = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right).\gamma,\ \omega_3 = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right).\gamma,$$

wobei ω_2 die maßgebende, auch aus (VIII) resultierende Wurzel vorstellt. Diesen drei Knickbedingungen sind drei Gleichgewichtslagen zugeordnet, die wieder durch die Verhältnisse

$$\begin{cases} S_1\ S_2\ S_3 = 1:0:\left(-\frac{1}{2}\right), \\ \qquad\qquad = 1\ \sqrt{3}:1, \\ \qquad\qquad = 1:(-\sqrt{3}):1 \end{cases}$$

und

$$\begin{cases} \mathfrak{Y}'_{1/2}\Big|_{x=l} : \mathfrak{Y}'_{3/2}\Big|_{x=l} : \mathfrak{Y}'_{5/2}\Big|_{x=l} = \frac{1}{2}:0\ \left(-\frac{1}{2}\right) \\ \qquad\qquad = 3\cdot73:6\cdot46:7\cdot46 \\ \qquad\qquad = 0\cdot268:(-0\cdot464):0\cdot536 \end{cases}$$

festgelegt erscheinen. Drei weitere Formen gehören der asymmetrischen Gruppe zu.

Eine graphische Darstellung der aus (VII) resultierenden Knickbedingungen (mit den »Kl« als Abszissen) vermag deren Eigenschaften restlos zu beleuchten und insbesondere die Lage und Ausdehnung der durch die Fälle A und B begrenzten Bereiche der »Kl«, somit der Knicklasten, aufzuzeigen.

H) Zwei Zahlenbeispiele.

I.) Beispiel für Knickung im elastischen Bereich bei geringer Nachgiebigkeit der Querverbindungen: Die Berliner Versuche anläßlich des Einsturzes des Hamburger Gasbehälters.[1]

Die beiden Gurte bestehen aus nach außen gekehrten U-Eisen $\frac{160.65}{7\cdot5.10\cdot5}$, die durch beiderseits angeordnete Bindelaschen zu gemeinsamer Wirkung befähigt werden. $n = 3$ Felder, $L = 340\ cm$, $l = 113\cdot3\,cm$, $F = 24\,cm^2$, $I = 85\cdot3\,cm^4$, $h = 6\cdot28\,cm$; $E = 2045^t/cm^2$ für

[1] Rudeloff, Zeitschr. Beförderung des Gewerbefleißes, 1912.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

den dem Grenzfall »Knickung« am nächsten kommenden der drei Versuche. Querverbindungen in Form von Bindeblechpaaren $2 \times \frac{155.140}{8}$, angeschlossen mit einem Nietpaar Φ 20, $e = 7\ cm$, $h' = 9 \cdot 6\ cm$. Bei Vernachlässigung der offensichtlich bedeutungslosen Nachgiebigkeit der Querverbindungen erhält man aus der maßgebenden Knickbedingung (VIII)

$$\frac{\cos\frac{\pi}{3} - \cos Kl}{1 - \cos\frac{\pi}{3}} = \frac{24.6 \cdot 28^2}{4.85 \cdot 3} \cdot 1 \cdot \frac{\sin Kl}{Kl},$$

daraus $Kl = 1 \cdot 815$ und

$$P_K = \frac{1 \cdot 815^2 . 2.2045 . 85 \cdot 3}{113 \cdot 3^2} = 89 \cdot 51^t;$$

die Voraussetzung des elastischen Bereiches ($\bar{E} = E$, $\mu = 1$) ist wegen

$$\sigma_K = \frac{P_K}{2F} = 1 \cdot 864^t/cm^2$$

gerechtfertigt. Der Versuch ergab $P = 89 \cdot 4^t$ in guter Übereinstimmung.

Für den dreiteiligen Rahmenstab wurde [vgl. Beziehung (IX)] $S_{1/2} = S_{3/2} = S$ gefunden und wird damit die Ausbiegung in Stabmitte (vgl. p. 516)

$$y'_0\Big|_{x=0} = 2 . S\left(\frac{l\,\eta}{2\,h\,F\,K \sin\frac{Kl}{2}} + \frac{h}{P}\right),$$

also für den Knickzustand

$$y_0\Big|_{x=0} = 2 . S . \left(\frac{113 \cdot 3}{6 \cdot 28 . 2045 . 24 . 0 \cdot 016 . 0 \cdot 787} + \right.$$
$$\left. + \frac{6 \cdot 28}{89 \cdot 51}\right) = 0 \cdot 1986 . S.$$

Die Fließgrenze (etwa $2 \cdot 5^t/cm^2$) wird in den Bindeblechen, die ein Widerstandmoment netto $W' = 2.20 \cdot 5\ cm^3$ besitzen, bei

$$S_B = \frac{2\,W'}{h'} . 2 \cdot 5 = 21 \cdot 3^t,$$

in den Nietanschlüssen (Fließgrenze etwa $2 \cdot 1^t/cm^2$) bei

$$S_N = \frac{4 . f_N . 2 \cdot 1}{\sqrt{1 + \left(\frac{h'}{e}\right)^2}} = 15 \cdot 5^t < S_B$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

erreicht; die Anschlüsse der Querverbindungen beginnen somit bei

$$\bar{y}_0 = 0 \cdot 1986 \,.\, 15 \cdot 5 = 3 \cdot 08 \; cm = \frac{L}{110}$$

zu versagen. Beim Versuch war die den unvermeidlichen Exzentrizitäten entspringende Ausbiegung vor der Zerstörung bedeutend kleiner, so daß ein Vergleich dieser Zerstörungskraft mit der auf starren Querverbindungen basierenden Knicklast in gewissem Maße gerechtfertigt und damit die gute Übereinstimmung begründet erscheint.

II.) Beispiel für Knickung im unelastischen Bereich bei starker Nachgiebigkeit der Querverbindungen: Stab Nr. 14 der Pariser Versuche.[1]

Die Gurte sind durch zwei nach außen gekehrte U-Eisen $\frac{220.75}{15}$, die Querverbindungen aus beiderseits angeordneten Bindelaschen $2 \times \frac{346.130}{8}$ gebildet (vgl. Fig. 3). $n = 6$ Felder, $L = 625 \; cm$, $l = 104 \cdot 2 \; cm$, $F = 47 \cdot 4 \; cm^2$, $I = 190 \; cm^4$, $h = 23 \cdot 38 \; cm$, $e = 7 \; cm$, $h' = 28 \; cm$. Vernachlässigt man die Nachgiebigkeit der Bindebleche, so erhält man aus der maßgebenden Knickbedingung (VIII)

$$\frac{\cos\frac{\pi}{6} - \cos Kl}{1 - \cos\frac{\pi}{6}} = \frac{47 \cdot 4 \,.\, 23 \cdot 38^2}{4 \,.\, 190} \,.\, 0 \cdot 95 \,.\, \frac{\sin Kl}{Kl},$$

daraus $Kl = 2 \cdot 25$ und

$$P_K = \frac{2 \cdot 25^2 \,.\, 2 \,.\, 1200 \,.\, 190}{104 \cdot 2^2} = 213^t;$$

die eingeführten Werte $\bar{E}$ und μ erscheinen nachträglich bestätigt, da sich für

$$\sigma_K = \frac{213}{2 \,.\, 47 \cdot 4} = 2 \cdot 247^t/cm^2$$

aus der Formel p. 492 (Fußnote) bei Voraussetzung eines Modul $E = 2000^t/cm^2$ tatsächlich

$$\bar{E} = 0 \cdot 3655 \,.\, 2000 \,.\, 2 \cdot 247 \,.\, (3 \cdot 1 - 2 \cdot 247)^2 \doteq 1200^t/cm^2$$

und damit, zurückgerechnet aus der für den Rechteckquerschnitt abgeleiteten, jedoch gegen Änderungen der Querschnittsform wenig empfindlichen Formel

$$\bar{E} = \frac{4 \, E_1 \, E}{(\sqrt{E_1} + \sqrt{E})^2}$$

---

[1] Krohn, Zentralblatt der Bauverwaltung, 1908.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

ein $E_1 = 798^t/cm^2$ ergibt, so daß das eingeführte

$$\mu = \frac{2}{\bar{E}.\left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E}\right)} = 0 \cdot 95$$

erhalten wird. Für den sechsfeldrigen Rahmenstab wurde (p. 524)

$$S_1 : S_2 : S_3 = 1 \sqrt{3} : 1$$

gefunden und ist damit die Ausbiegung in Stabmitte

$$y_{1/2}\Big|_{x=0} = 2 \cdot 153 . S_2 . \left[\frac{104 \cdot 2.0 \cdot 001754}{23 \cdot 38.47 \cdot 4.0 \cdot 0216.0 \cdot 777} + \right.$$
$$\left. + \frac{23 \cdot 38}{213}\right] = 0 \cdot 257 . S_2.$$

Die Spannung im Bindeblech, das ein Widerstandsmoment netto $W' = 2.16 \cdot 45\ cm^3$ aufweist, erreicht bei

$$S_B = \frac{2.32 \cdot 9}{28 \cdot 0} . 2 \cdot 5 = 5 \cdot 88^t,$$

die Nietspannung bei

$$S_N = \frac{4.3 \cdot 14.2 \cdot 1}{\sqrt{1 + \left(\frac{28 \cdot 0}{7 \cdot 0}\right)^2}} = 6 \cdot 41^t$$

die Fließgrenze und ist somit der kritische Ausbiegungswert

$$\bar{y}_0 = 0 \cdot 257 . 5 \cdot 88 = 1 \cdot 51\ cm \doteq \frac{L}{414}.$$

Der Stab verlor beim Versuch zufolge Versagens der Querverbindungen bei $P = 184\,t$ sein Tragvermögen; die Ausbiegung unmittelbar vor Erreichung der Zerstörungslast war fragelos bedeutend größer als der obige kritische Wert.

Auf p. 494 wurden die Einzeleinflüsse der Nachgiebigkeit dieser Querverbindung ermittelt; denkt man sich die dort erwähnten elastischen Verschiebungen $\triangle_1$, $\triangle_2$, $\triangle_3$ in ihrer Summe mit einem Koeffizienten $\beta \doteq 2 \cdot 66$ multipliziert (was etwa der Einführung kleinerer, oberhalb der Elastizitätsgrenze gelegener Moduli gleichkommt oder auch einem ungenauen Passen der Nietschäfte zugeschrieben werden kann), so wird die »Nachgiebigkeit«

$$\delta = \frac{2.F}{l.\eta}\ \beta.(\triangle_1 + \triangle_2 + \triangle_3) = 868.0 \cdot 00974 = 8 \cdot 45$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

(bezüglich η siehe unten). Für diesen Wert »δ« erhält man aus der allgemeinen Knickbedingung (V) als maßgebendes Resultat $P_K = 184 \cdot 0^t$, wovon man sich wie folgt überzeugen kann:

$$P_K = 184 \cdot 0^t, \quad \sigma_K = \frac{184 \cdot 0}{2.47 \cdot 4} = 1 \cdot 94 > \sigma_{El};$$

in gleicher Weise wie früher findet man

$$\bar{E} = 1912^t/cm^2, \quad E_1 = 1826^t/cm^2, \quad \eta = 0 \cdot 001048 \text{ und } \mu = 0 \cdot 998,$$

ferner

$$K = \sqrt{\frac{184 \cdot 0}{2.1912.190}} = 0 \cdot 0159, \quad \cos Kl = -0 \cdot 0872, \quad \sin Kl =$$

$$= +0 \cdot 9962, \quad \omega = 1 \cdot 0872, \quad \gamma = 1 + \frac{Fh^2}{4I} \cdot \mu \cdot \frac{\sin Kl}{Kl} =$$

$$= 21 \cdot 45, \quad \delta = 8 \cdot 45.$$

Die Lösungen der charakteristischen Gleichung (siehe p. 512) lauten

$$\cos a_{1,2} = \frac{18 \cdot 437 \pm \sqrt{18 \cdot 437^2 - 16 \cdot 9.18 \cdot 89}}{16 \cdot 9} = \begin{cases} 1 \cdot 358 \\ 0 \cdot 823 \end{cases},$$

daraus

$$\begin{cases} a_1 = i.0 \cdot 8227 \\ a_2 = 34^\circ\, 37' \end{cases}$$

und ist mit diesen Werten die Knickbedingung (V) für den sechsfeldrigen Rahmenstab:

$$\left(-\frac{\delta}{2}\right)\left[\cos\frac{a_1}{2} - \frac{\cos\frac{7a_1}{2}}{\cos\frac{7a_2}{2}} \cdot \cos\frac{a_2}{2}\right] + \left[\frac{\gamma}{2} + \delta.\left(\frac{3}{2} + \cos Kl\right)\right].$$

$$.\left[\cos\frac{3a_1}{2} - \frac{\cos\frac{7a_1}{2}}{\cos\frac{7a_2}{2}} \cdot \cos\frac{3a_2}{2}\right] + \left[\omega - \frac{3}{2}\gamma -\right.$$

$$\left. - \delta.\left(\frac{3}{2} + 2\cos Kl\right)\right]\left[\cos\frac{5a_1}{2} - \frac{\cos\frac{7a_1}{2}}{\cos\frac{7a_2}{2}} \cdot \cos\frac{5a_2}{2}\right] = 0$$

tatsächlich erfüllt. Diese Befriedigung der Knickbedingung gewährleistet nun die Widerspruchsfreiheit des in »$\mathfrak{S}$« homogenen Gleichungssystems p. 500 und dieses nimmt nach Einführung obiger Werte die Form an:

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$\begin{cases} -8\cdot 90\ .\mathfrak{S}_{1/2} + 14\cdot 21\,.\mathfrak{S}_{3/2} - 4\cdot 225\,.\mathfrak{S}_{5/2} = 0 \\ 14\cdot 21\ .\mathfrak{S}_{1} - 27\cdot 33\,.\mathfrak{S}_{3/2} + 18\cdot 44\ .\mathfrak{S}_{5/2} = 0 \\ -4\cdot 225\,.\mathfrak{S}_{1} + 22\cdot 67\,.\mathfrak{S}_{3/2} - 42\cdot 29\ .\mathfrak{S}_{5/2} = 0. \end{cases}$$

Die Lösungen lauten

$$\mathfrak{S}_{3/2} = 2\cdot 51\,.\mathfrak{S}_{5/2},\ \mathfrak{S}_{1/2} = 3\cdot 535\,.\mathfrak{S}_{5/2}$$

oder

$$S_1\ \ S_2\ \ S_3 = 1\ \ 1\cdot 47\ \ 1\cdot 02.$$

Ein Vergleich dieses Ergebnisses mit dem für starre Querverbindungen läßt die ausgleichende Wirkung der »Nachgiebigkeit« erkennen; die Gleichheit der Vorzeichen aller drei Überzähligen »S« beweist nun auch, daß $P_K = 184^t$ die kleinste, der Halbwelle zugeordnete Wurzel vorstellt. Für die Ausbiegung in Stabmitte als Funktion der größten und daher maßgebenden Scherkraft »S_2« gewinnt man (siehe p. 516) die Beziehung:

$$y_{1/2}\Big|_{x=0} = \left(\frac{104\cdot 2.0\cdot 001048}{47\cdot 4.23\cdot 38.0\cdot 0159.0\cdot 9962}\,.\right.$$

$$\left..8\cdot 128 + \frac{23.38}{184\cdot 0}.2\cdot 378\right).S_2 = 0\cdot 3528\,.S_2$$

und erreicht demnach die Spannung im vorletzten Bindeblech bei einer Ausbiegung von

$$\bar{y}_{1/2} = 0\cdot 3528\,.5\cdot 88 = 2\cdot 07\ cm \doteq \frac{L}{300}$$

die Fließgrenze. Da die Ausbiegung beim Versuch vor Erreichung von $P = 184\,t$ sicherlich größer als dieses $\frac{L}{300}$ war, standen die Querverbindungen schon vor Erreichung dieser Last an der Grenze ihrer Leistungsfähigkeit. Die Beeinflussung der Wirkungsfähigkeit der Querverbindungen durch unvermeidliche Angriffsexzentrizitäten erscheint somit für die Tragfähigkeit hier sehr wesentlich und ebenso bedeutungsvoll wie die bekannte Überlastung des biegedruckseitigen Teilstabes; würde man sie allein für die Verminderung der Knicklast von $213\,t$ auf $184\,t$ verantwortlich machen, so müßte auf die dieser Art begründete starke Nachgiebigkeit der Querverbindungen Rücksicht genommen werden, was hier durch die Einführung eines Koeffizienten $\beta = 2\cdot 66$ zum Ausdruck gebracht werden sollte.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1927

Band/Volume: 136_2a

Autor(en)/Author(s): Chwalla Ernst

Artikel/Article: Die Stabilität des Rahmenstabes. 487-529