Gedruckt mit Unterstützung aus dem Jerome und Margaret Stonborough-Fonds

Das ebene Stabilitätsproblem des Kreisbogens

Von

Ing. Dr. Ernst Chwalla

(Mit 7 Textfiguren)

Vorgelegt in der Sitzung am 17. November 1927

Die erste Behandlung des ebenen Problems der Stabilität eines Kreisbogens verdankt man dem Franzosen Lévy,[1] der in den Achtzigerjahren des vorigen Jahrhunderts im Anschlusse an eine von Boussinesq[2] mit elementaren Hilfsmitteln versuchte Problemerfassung die Stabilität eines radial gedrückten, geschlossenen Kreisringes untersuchte und die bekannte einfache Formel für den kleinsten kritischen Außendruck herleitete, die in einwandfreier Schärfe noch im selben Jahre durch Halphen[3] bestätigt wurde. Ein Vierteljahrhundert später, als die fortschreitende Praxis des Brückenbaues auf eine Klarstellung der Stabilitätsverhältnisse von Bogenstäben drängte, begannen die Versuche einer theoretischen Beleuchtung des ebenen Knickproblems offener Bögen. Der radial gedrückte Kreisbogen wurde von Federhofer,[4] der vertikal belastete Zweigelenkbogen kleinerer Pfeilhöhe von Melan[5] behandelt; beide Arbeiten setzten die Symmetrie der maßgebenden Knicklinie voraus und wurden dadurch in ihren Ergebnissen irrtümlich. Die notwendige Asymmetrie der ersten Knickfigur war eindeutig aufgezeigt, als im Zuge des Wettbewerbes um eine Rheinstraßenbrücke in Köln im Jahre 1913 im Werke Gustavsburg durch R. Mayer Knickversuche[6] mit Bogenstäben angestellt wurden, die mit zwingender Deutlichkeit auf einen im Bogenscheitel gelegenen Wendepunkt der maßgebenden Knicklinie wiesen. In seiner im gleichen Jahre erschienenen Dissertation[7] behandelte nun Mayer unter anderem auch das Knickproblem des geschlossenen, gelenklosen Kreisringes und leitete aus diesem die erste Stabilitätsgrenze eines offenen Kreisbogens ab, wobei er unmittelbar die der Erfahrung entspringende Existenz eines Scheitelwendepunktes in Rücksicht zog; das Resultat war die einwandfreie, noch heute verwendete Formel für den kleinsten kritischen Kämpferdruck eines radial belasteten Kreisbogens, die, wie die erwähnten Gustavsburger Versuche zeigten,

[1] M. Lévy, Journ. de Liouville, 1884.

[2] J. Boussinesq, Compt. Rend., 1883.

[3] M. Halphen, Compt. Rend., 1884.

[4] K. Federhofer, Sitzungsber. d. kais. Akad. d. Wissenschaften, Wien, 1909, p. 1125.

[5] J. Melan, Handbuch d. Ingenieurwissenschaften, II. Bd., V. Abt., p. 130.

[6] G. Mehrtens und F. Bleich, Zeitschr. »Der Eisenbau«, 1913, p. 365.

[7] R. Mayer, Zeitschr. f. Math. Physik, 1913, p. 318.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

mit recht guter Näherung auch für vertikal belastete, flachere Zweigelenkbögen verwendet werden kann. Diese Formel, die überdies schon einige Jahre vorher mit elementaren Hilfsmitteln von Hurlbrink[1] gewonnen und auch von Timoschenko[2] angegeben wurde, ist in jüngerer Zeit von Usinger[3] auf Grund des Energiekriteriums bestätigt worden.

Nun mag die Kenntnis der kleinsten Knicklast dem Bedürfnis der Praxis Genüge leisten, vom theoretischen Standpunkt erscheint jedoch die Art[4] wie der Umfang der vorhandenen Problemerfassung nicht restlos befriedigend, womit das Erscheinen der vorliegenden Abhandlung gerechtfertigt sei. Ausgehend von den Gleichgewichtsbeziehungen für ein verformtes Bogenelement werden im folgenden die allgemeinen, auch alle höheren Wurzeln umfassenden Bedingungen für das Erreichen von Stabilitätsgrenzen im radial belasteten, gelenkig gelagerten Kreisbogen hergeleitet. Die den einzelnen Stabilitätsgrenzen zugeordneten Gleichgewichtsformen (»Deformationsfiguren«) sollen ferner untersucht und vom Grenzfall des gelenkig geschlossenen Kreisringes der Übergang auf das Knickproblem des gelenklosen Ringes bewerkstelligt werden. Für die resultierenden Knicklinien, deren höheren Formen bekanntlich durch die Verhinderung der Ausbildung aller niedrigeren zu erzwingen sind,[5] wird zusätzlich der Instabilitätsnachweis nach dem Energiekriterium erbracht und anhangweise eine auf der Energiebilanz fußende, schärfere Näherungslösung für die kleinste kritische Belastungsintensität eines vertikal belasteten Zweigelenkbogens kleinerer Pfeilhöhe abgeleitet, um auf die weitgehende, die Stabilität betreffende Übereinstimmung dieses Falles mit dem des radial gedrückten Kreisbogens hinweisen zu können, welcher Hinweis das Gebiet einer praktischen Nutzungsmöglichkeit der im folgenden gewonnenen Ergebnisse wesentlich zu vergrößern vermag.

Der Ableitung wird ein elastischer Bogenstab zugrunde gelegt, dessen eine Querschnittshauptachse in der Ebene der Achsenkurve gelegen ist und dessen Enden in unverschieblichen Gelenken gelagert sind.[6] Die Belastung besteht aus einem gleichmäßig verteilten

---

[1] E. Hurlbrink, Zeitschr. »Schiffbau« 1907 bis 1908, p. 640.

[2] S. Timoschenko, Stabilität elastischer Systeme, Kiew, 1910.

P. Usinger, Zeitschr. »Der Eisenbau«, 1918, p. 200.

[4] Während der Drucklegung dieser Arbeit fand ich eine kurze Abhandlung von P. Funk (Zeitschr. f. ang. Math. u. Mech., 1924, p. 143), in der, wie auch in einer von Funk erwähnten russischen Arbeit Nicolai's, im Zuge der Herleitung des kleinsten kritischen Belastungswertes die Ausbildung des Scheitelwendepunktes theoretisch begründet wird.

Beispielsweise kann, wie sich zeigen wird, durch die Verhinderung einer tangentialen Verschiebung des Bogenscheitels die kritische Last auf den Wert der zweiten Knickwurzel erhöht werden.

[6] Die Ableitung für den Fall einer Einspannung der Bogenenden erfolgt in voller Analogie zu der gegebenen, nur tritt an Stelle der Randbedingung einer momentenfreien Lagerung die Randbedingung der unveränderten Tangentenneigung. Der Fall geneigter Querschnittshauptachsen stellt ein räumliches (Kipp-) Problem vor und fällt daher außerhalb des Rahmens dieser Abhandlung.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Außendruck »p«, der ursprünglich normal zur Stabachse gerichtet ist und es auch bei kleineren ebenen Verformungen dieser Achse bleiben möge.

Der instabile Zustand, durch die Mehrdeutigkeit des zugehörigen Gleichgewichtsproblems gekennzeichnet, wird vom Bereiche der stabilen Gleichgewichtszustände durch den Grenzzustand des »indifferenten« Gleichgewichtes getrennt, der durch das Verschwinden der zweiten Variation des zugehörigen Gesamtpotentials charakterisiert ist und für den sich entsprechend seiner Eigenschaft, die Verzweigungsstellen des Gleichgewichtes zu liefern, die Mehrdeutigkeit des Gleichgewichtsproblems auf unendlich nahe benachbarte Formen bezieht. So lange die Außenlast »p« unter dem kleinsten zugelassenen[1] kritischen Werte liegt, ist das Gleichgewichtsproblem eindeutig und resultiert eine Verkürzung der Bogenachse, wodurch sämtliche Achspunkte eine Senkung erfahren; diese Senkungen bedingen eine Änderung der Bogenform[2] und es sei nun im Sinne des behandelten Problems vorausgesetzt, daß unter der Wirkung des gesuchten kritischen Belastungswertes die dieserart verformte Stabachse einen Kreis vorstellt, dessen Radius mit »r« bezeichnet sei. Im Stab wirkt dann ausschließlich eine axial gerichtete, dem Kämpferdruck gleiche Innenkraft $T_K = p.r$ und weckt reine Druckspannungen »σ_K«, die mit Beziehung auf das Eisen als hier wohl einzig in Betracht kommenden Baustoff unter- oder oberhalb der Elastizitätsgrenze gelegen sein können, so daß das Knickproblem in ein elastisches und ein unelastisches zerfällt; da nun »σ_K« eine primär vorhandene reine Druckspannung vorstellt, ist für die dem Knickzustande entspringende Verbiegung die Verwendung des »resultierenden« Moduls »E'« nach Engesser-Kármán gerechtfertigt[3] und wird

---

[1] Soll dieser Wert einer höheren Knickwurzel entsprechen, so bedingt dies, wie schon vermerkt wurde, eine Verhinderung der Ausbildung aller niedrigeren Formen.

[2] Diese der Achsenverkürzung entspringende Verformung weist in ihrem radialen Verlaufe eine einzige Halbwelle auf und ist in dieser Form charakteristisch für den ersten stabilen Bereich.

[3] Wird allgemein das Dehnmaß an einer Druckspannungsstelle $\sigma \lessgtr \sigma_{El}$ mit $E_1 = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}$ und das einer Entlastung an dieser Stelle mit E_2 bezeichnet (wobei »E_2« dem Elastizitätsmodul »E« gleichgesetzt werden kann, da nur die elastischen Verformungen rückgängig gemacht werden), so findet man für den »resultierenden« Modul im Falle eines Rechteckquerschnittes $E' = \frac{4.E_1.E_2}{(\sqrt{E_1} + \sqrt{E_2})^2}$, welche Beziehung mit guter Annäherung auch für andere Querschnittformen verwendet werden kann, jedoch die Kenntnis von »E_1« voraussetzt. Ein von den speziellen Materialeigenschaften unabhängiger Näherungswert kann für Knickzustände aus der Gleichsetzung der Knicklasten nach Euler und Tetmajer in der Form

$$E' = \frac{\sigma_K.(3\cdot 1 - \sigma_K)^2}{0\cdot 0114^2.\pi^2} = 0\cdot 3655.E.\sigma_K.(3\cdot 1 - \sigma_K)^2$$

gewonnen oder mit Verwendung der in allen Taschenbüchern zusammengestellten Knick-Abminderungskoeffizienten unmittelbar ermittelt werden.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

somit durch seine Einführung auch der Möglichkeit einer Überschreitung des elastischen Bereiches Rechnung getragen.

Im Sinne der Definition der Stabilitätsgrenze sind nun die Bedingungen aufzusuchen, unter denen außer der geschilderten, durch die Achsenverkürzung bedingten Gleichgewichtsform noch eine andere, der ersten unendlich nahe benachbarte Gleichgewichtslage möglich wird, bei der die kreisförmige Bogenachse Verzerrungen erfährt und damit im Stabe Biegespannungen geweckt werden. Einem derartigen neuen Gleichgewichtszustand entspricht dann auch ein anderes Maß an potentieller Energie des Gesamtsystems und bildet diese Änderung die Grundlage des später folgenden Instabilitätsbeweises.

1. Die virtuelle Verformung der Bogenachse.

Eine ebene Verformung der kreisförmigen Stabachse wird eindeutig festgelegt durch die Angabe der radialen Komponente »u« und der tangentialen Komponente »v« des Verschiebungsweges aller Achsenpunkte, wobei »u« in der Richtung zum Kreismittelpunkt und »v« in der Richtung wachsender Bogenlängen gezählt werden soll; beide Verschiebungskomponenten sind im Sinne der gesuchten Stabilitätsgrenze als unendlich klein anzusehen. Nun hat eine Verzerrung der Bogenachse allgemein auch Änderungen in der Achsenlänge, der Tangentenneigung und der Krümmung zur Folge und sind diese im weiteren benötigten Größen vorerst als Funktionen von u, v darzustellen.

Ein Punkt »P« der Bogenachse, deren Gesamtlänge »S« dem Zentriwinkel »2γ« zugehört, wird durch den Mittelpunktswinkel »φ« festgelegt, der von der Bogensymmetralen nach beiden Seiten gezählt und der Bogenlänge »s« zugeordnet werden soll (Abb. 1). Bezieht man »P« auf ein rechtwinkeliges Koordinatenkreuz, dessen Ursprung mit dem Kreismittelpunkt und dessen Ordinatenachse mit der Bogensymmetralen zusammenfällt, so ergeben sich als Koordinaten $x = r.\sin\varphi$, $y = r.\cos\varphi$; bei einer Verformung der Bogenachse erfährt nun »P« eine Verschiebung u, v und gelangt an eine Stelle »$\bar{P}$«, deren Koordinaten mit

$$\bar{x} = (r - u).\sin\varphi + v.\cos\varphi$$
$$\bar{y} = (r - u).\cos\varphi - v.\sin\varphi$$

unmittelbar der Abb. 1 zu entnehmen sind. Für die auf das Koordinatenkreuz bezogenen Projektionen »dx« und »dy« eines Achsenelementes »ds« findet man durch Differentiation

$$d\bar{x} = +\left[\left(r - u + \frac{dv}{d\varphi}\right).\cos\varphi - \left(v + \frac{du}{d\varphi}\right).\sin\varphi\right].d\varphi$$
$$d\bar{y} = -\left[\left(r - u + \frac{dv}{d\varphi}\right).\sin\varphi + \left(v + \frac{du}{d\varphi}\right).\cos\varphi\right].d\varphi,$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

so daß die Länge des Achsenelementes nach der Verzerrung

$$d\bar{s} = \sqrt{d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2} = d\varphi \cdot \sqrt{\left(r - u + \frac{dv}{d\varphi}\right)^2 + \left(v + \frac{du}{d\varphi}\right)^2}$$

beträgt. Die spezifische Dehnung

$$\varepsilon = \frac{d\bar{s} - ds}{ds}$$

der Bogenachse zufolge der Verformung u, v ergibt sich daraus mit

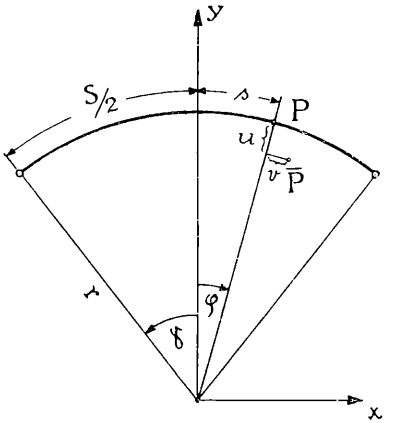

Fig. 1.

$$\varepsilon = \frac{d\bar{s}}{r \cdot d\varphi} - 1 =$$

$$= \sqrt{1 + \left[\frac{1}{r^2}\left(u - \frac{dv}{d\varphi}\right)^2 - \frac{2}{r} \cdot \left(u - \frac{dv}{d\varphi}\right) + \frac{1}{r^2}\left(v + \frac{du}{d\varphi}\right)^2\right]} - 1$$

und liefert eine bis inklusive Glieder zweiter Größenordnung genaue Reihenentwicklung die Beziehung

$$\varepsilon = 1 + \frac{1}{2} \cdot [\cdot/\cdot] - 1 = -\frac{1}{r}\left(u - \frac{dv}{d\varphi}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2r^2} \cdot \left[\left(u - \frac{dv}{d\varphi}\right)^2 + \left(v + \frac{du}{d\varphi}\right)^2\right]. \qquad (1)$$

Nun werden an den Stabilitätsgrenzen ausschließlich Gleichgewichtsformen zugelassen, welche für die Bogenachse Dehnungen bedingen, die von höherer Ordnung klein sind als die Verzerrung selbst[1];

[1] Eine derartige Voraussetzung vermag einen geraden Stab in der Ausbildung seiner Verzerrungsformen nich zu beeinflussen, bei primärer Krümmung bedeutet sie jedoch Einschränkungen geometrischer Natur. Das Stabilitätsproblem der »Schalen« weist Fälle auf, bei denen jede virtuelle Verformung an eine Dehnung der Mittelfläche von der Größenordnung der Verzerrung gebunden ist, und sind derartige

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

soferne die Krümmung »$\frac{1}{r}$« nicht die Größenordnung der Verzerrung erreicht (vgl. dazu auch p. 663), fordert diese »Dehnungslosigkeit« der Verformung in der allgemeinen Beziehung (1) das Verschwinden des ersten Summanden, dessen Größenordnung der der Verzerrung gleicht, und liefert damit die grundlegende Bedingung

$$u - \frac{dv}{d\varphi} = 0, \tag{2}$$

der die an der Stabilitätsgrenze maßgebenden virtuellen Verformungen u, v der ausreichend gekrümmten Bogenachse unterliegen.[1]

Durch die Achsverzerrung erfahren weiters die ursprünglichen Kreistangenten Verdrehungen, deren Maß »ψ«, wie eine Betrachtung des Bogenelementes im verformten Zustand lehrt, durch die Gleichung

$$\psi = \frac{du}{ds} + \frac{v}{r} \tag{3}$$

zum Ausdruck gebracht wird. Die Änderung $\frac{d\psi}{ds}$ dieser Tangentenverdrehung beeinflußt unmittelbar die Krümmung »$\frac{1}{\rho}$« der verformten Bogenachse und erhält man für diese, wie ohne weiteres verständlich ist, die Beziehung

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{r} + \frac{d\psi}{ds}. \tag{4}$$

Mit der Krümmung stehen die im Bogenstab auftretenden Biegemomente »B« in ursächlichem Zusammenhang und gilt

$$B = E'.I.\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r}\right) = E'.I\ \frac{d\psi}{ds}, \tag{5}$$

wobei »$E'.I$« die auch den Bereich der unelastischen Knickung erfassende Biegungssteifigkeit des Stabes in die Bogenebene vorstellt.

Gebilde begreiflicherweise wesentlich stabiler als solche, die eine »dehnungslose« Verformung zulassen. (Vgl. Föppl, Drang und Zwang, § 108, oder Love-Timpe, Lehrbuch der Elastizität, Kap. XXIII.)

[1] Diese Bedingung kann übrigens auch unmittelbar an einem Bogenelement der Länge »Eins«, somit des Zentriwinkels »1/ hergeleitet werden, das zufolge einer positiven Radialverschiebung »u« eine Achsendehnung erfährt, die in erster Näherung $\varepsilon' = -\frac{u}{r}$ beträgt; da anderseits durch die tangentiale Verzerrung $= +1\ \frac{dv}{ds}$ erzeugt wird, muß bei Ausschluß einer achsialen Dehnung der Größenordnung der jedenfalls $\varepsilon' + \varepsilon'' = 0$, somit bei endlichem Bogenradius $u - \frac{dv}{d\varphi} = 0$ bestehen.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

2. Die Gleichgewichtsbedingungen für das verformte Bogenelement.

Wie einleitend dargelegt wurde, ist an der Stabilitätsgrenze für die Bogenachse die Kreisform vorausgesetzt und wirkt dann im Stabe zufolge der radialen Außenlast »p« einzig die tangential gerichtete Druckkraft

$$T_K = p \cdot r, \tag{6}$$

die eine Druckspannung »σ_K« hervorruft und damit die Größe des in die Rechnung einzuführenden »resultierenden« Moduls »E'« bestimmt. Erfährt die Bogenachse eine virtuelle Verformung u, v, so werden im Stabe zusätzliche Wirkungen, und zwar in Richtung der Achsentangente eine Kraft »$\triangle T$«, in Richtung der Achsennormalen eine Kraft »N« und in der Achsenebene ein Biegemoment »B« geweckt, die im Sinne der gesuchten Stabilitätsgrenze wie die sie hervorrufende Verformung als unendlich klein anzusehen

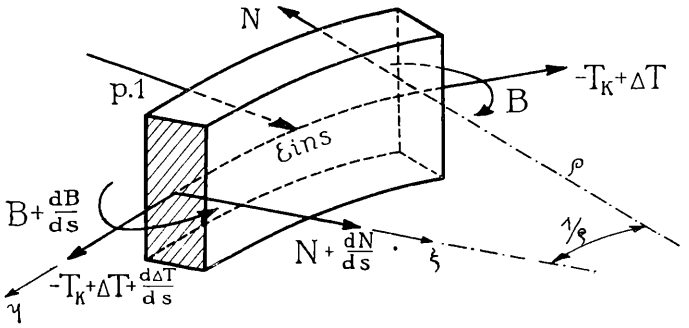

Fig.

sind. Da der neue, verzerrte Zustand auch ein Gleichgewichtszustand sein soll, unterliegen diese Wirkungsgrößen drei Bedingungsgleichungen, die das Gleichgewicht eines Bogenelementes bezüglich einer Verschiebung in der ξ- und η-Achse sowie einer Verdrehung gewährleisten und an Hand der Fig. 2 für ein verformtes Element der Länge »Eins« unmittelbar in der Form

$$\left.\begin{aligned} N + \frac{dN}{ds} - N \cos\frac{1}{\rho} + p \cdot \cos\frac{1}{2\rho} + (-T_K + \triangle T)\frac{1}{\rho} &= 0 \\ -T_K + \triangle T + \frac{d(\triangle T)}{ds} - (-T_K + \triangle T)\cos\frac{1}{\rho} - N\frac{1}{\rho} &= 0 \\ \frac{dB}{ds} + N \cdot 1 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

abgelesen werden können. Mit Einführung der Beziehungen (4) und (6) und der Reihenentwicklung für den Cosinus erhält man die Gleichungszeilen

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dN}{ds} + p - p \quad r \left(\frac{1}{r} + \frac{d\psi}{ds}\right) + \triangle T \quad \frac{1}{r} + \left[N \left(\frac{1}{2\rho^2} - \ldots\right) + \right. \\
&\qquad\qquad \left. + p \cdot \left(\frac{1}{8\rho^2} - \ldots\right) + \triangle T \quad \frac{d\psi}{ds}\right] = 0 \\
&\frac{d(\triangle T)}{ds} - N \quad \frac{1}{r}\left[(-pr + \triangle T) \left(\frac{1}{2\rho^2} - \quad\right) - N \quad \frac{d\psi}{ds}\right] = 0 \\
&\qquad\qquad \frac{dB}{ds} + N = 0,
\end{aligned}\right\} \tag{7 a}$$

in denen die in einer eckigen Klammer zusammengefaßten Glieder als klein von mindestens zweiter Größenordnung zu vernachlässigen sind, so daß als maßgebend nur

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dN}{ds} - T_K \cdot \frac{d\psi}{ds} + \triangle T \quad \frac{1}{r} &= 0 \\
\frac{d(\triangle T)}{ds} - N \quad \frac{1}{r} &= 0 \\
\frac{dB}{ds} + N &= 0
\end{aligned}\right\} \tag{7 b}$$

verbleibt. Aus den letzten beiden Bedingungen folgt

$$\frac{d(\triangle T)}{ds} = \frac{N}{r} = -\frac{1}{r}\frac{dB}{ds}$$

und

$$\frac{d^2N}{ds^2} = -\frac{d^3B}{ds^3}$$

damit lautet die nach »s« differenzierte erste Gleichung

$$\frac{d^3B}{ds^3} + \frac{1}{r^2}\frac{dB}{ds} + p \quad r \quad \frac{d^2\psi}{ds^2} = 0$$

und nimmt mit Verwendung der Beziehung (5) nach Division durch »$E'.I \neq 0$« die Form

$$\frac{d^4\psi}{ds^4} + \left(\frac{1}{r^2} + \frac{T_K}{E'.I}\right)\frac{d^2\psi}{ds^2} = 0$$

an. Aus den Beziehungen (2) und (3) lassen sich die Ableitungen von »ψ« als Funktionen der Radialverzerrung »n« darstellen und erhält man damit als Gleichgewichtsbedingung für das Bogen-

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

element die Differentialgleichung in der radialen Komponente »u« der virtuellen Verschiebung[1]

$$\frac{d^5 u}{d s^5} + \left(\frac{2}{r^2} + \frac{T_K}{E'.I}\right) \cdot \frac{d^3 u}{d s^3} + \frac{1}{r^2} \cdot \left(\frac{1}{r^2} + \frac{T_K}{E'.I}\right) \cdot \frac{d u}{d s} = 0, \tag{8}$$

aus der sich die tangentiale Verzerrungskomponente nach Zuhilfenahme der Bedingung (2) mit

$$v = \frac{1}{r} \left(\int u \, ds + C_1\right) \tag{9}$$

ergibt. Der Lösung dieser Differentialgleichung wird neben dem partikulären Integral »$u = C_2$« der Ansatz

$$u = \bar{C} . e^{\pm s \sqrt{\alpha}}$$

zugrunde gelegt, dessen Einführung die charakteristische Gleichung

$$\alpha^2 + \left(\frac{2}{r^2} + \frac{T_K}{E'.I}\right) . \alpha + \frac{1}{r^2} . \left(\frac{1}{r^2} + \frac{T_K}{E'.I}\right) = 0 \tag{10}$$

mit den beiden Wurzeln

$$\alpha_1 = -\frac{1}{r^2} \text{ und } \alpha_2 = -\left(\frac{1}{r^2} + \frac{T_K}{E'.I}\right) \text{ liefert.} \tag{11}$$

Die allgemeine Lösung von (8) lautet dann unter Voraussetzung eines endlichen Bogenradius »r«

$$u = C_2 + \bar{C}_1 . e^{+s\sqrt{\alpha_1}} + \bar{C}_2 . e^{-s\sqrt{\alpha_1}} + \bar{C}_3 . e^{+s\sqrt{\alpha_2}} + \bar{C}_4 . e^{-s\sqrt{\alpha_2}}$$

und kann zweckmäßig in der Form

$$u = C_2 + \sqrt{\alpha_1} \; C_3 \; e^{+s\sqrt{\alpha_1}} - \sqrt{\alpha_1} \; C_4 \; e^{-s\sqrt{\alpha_1}} + \\ + \sqrt{\alpha_2} \; C \; e^{+s\sqrt{\alpha_2}} - \sqrt{\alpha_2} \; C_6 \; e^{-s\sqrt{\alpha_2}} \tag{12}$$

---

[1] Mit Verwendung der Beziehung (2) kann die Gleichgewichtsbedingung auch als Differentialgleichung in der tangentialen Verzerrungskomponente »v« angeschrieben werden und lautet dann

$$\frac{d^6 v}{ds^6} + \left(\frac{2}{r^2} + \frac{T_K}{E'.I}\right) \frac{d^4 v}{ds^4} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{T_K}{E'.I}\right) \frac{d^2 v}{ds^2} = 0;$$

diese Form führt unmittelbar auf die Lösung (13) und wurde auch von K. Federhofer in seiner Stabilitätsuntersuchung geschlossener, gelenkloser Kreisringe gegeben (Zeitschr. »Der Eisenbau«, 1921, p. 291).

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

angeschrieben werden, so daß sich für die tangentiale Verzerrungskomponente gemäß Gleichung (9) die klare Beziehung

$$v = \frac{1}{r} \cdot \left\{ C_1 + C_2 \cdot s + C_3 \cdot e^{+s\sqrt{\alpha_1}} + C_4 \cdot e^{-s\sqrt{\alpha_1}} + \right.$$
$$\left. + C_5 \cdot e^{+s\sqrt{\alpha_2}} + C_6 \cdot e^{-s\sqrt{\alpha_2}} \right\} \qquad (13)$$

ergibt: Die Wurzeln (11) der charakteristischen Gleichung sind eindeutig als reell und untereinander verschieden festgelegt, so daß die Lösungsformen des Falles mehrfacher oder komplexer Wurzeln nicht in Betracht kommen.

Wächst der Bogenradius »r« unbeschränkt an, so verliert, wie bemerkt wurde, die Beziehung (2) ihre Gültigkeit und es nähert sich die tangentiale Verzerrungskomponente unbeschränkt der Null. Gleichungssystem (7 *b*) liefert in diesem Grenzfall bei Berücksichtigung der Beziehung (3)

$$\frac{dN}{ds} - T_K \cdot \frac{d^2 u}{ds^2} = 0 \text{ und } N = -\frac{dB}{ds},$$

somit als Bedingungsgleichung des Gleichgewichtes

$$\frac{d^2 B}{ds^2} + T_K \frac{d^2 u}{ds^2} = 0,$$

welche Gleichung mit Verwendung von (3) und (5) die Form

$$\frac{d^2 B}{ds^2} + \frac{T_K}{E \cdot I} \cdot B = 0$$

annimmt. Für verschwindende Querbelastung »p« gilt unmittelbar $B = T_K \; u$, so daß die Gleichgewichtsbedingung

$$\frac{d^2 u}{ds^2} + \frac{T_K}{E \cdot I} \; u = 0 \qquad (14)$$

resultiert und als Ausgangsgleichung der Stabilitätsuntersuchung gerader Stäbe nach Euler-Kármán erkannt wird.

3. Die Randbedingungen.

Der Bogenstab ist nach Voraussetzung in festen Gelenken gelagert zu denken; die Unverschieblichkeit des Lagers verlangt das Verschwinden der beiden Verzerrungskomponenten u, v an den beiden Lagerorten, während die Anordnung von Gelenken die Momentenfreiheit der Stabenden bedingt. Diese dem Problem auferlegten Randbedingungen werden durch die sechs Beziehungen

$$\text{Stelle } s = \pm \frac{S}{2} \qquad \cdot \left\{ \begin{array}{l} u = 0 \\ v = 0 \\ B = 0 \end{array} \right\} \qquad (15)$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

zum Ausdruck gebracht und dienen zur Festlegung aller Integrationskonstanten »C« der allgemeinen Lösung. Die geforderte Momentenfreiheit der Stabenden wird gemäß (5) durch das Verschwinden der ersten Ableitung der Tangentenneigung »ψ«, somit bei Rücksichtnahme auf (2) durch die Erfüllung der Bedingung

$$\left.\frac{d^2u}{ds^2}+\frac{u}{r}\right|_{s=\pm\frac{S}{2}}=0$$

gewährleistet und vereinfacht sich diese Beziehung zu $\frac{d^2u}{ds^2}=0$, da wegen der zusätzlich bestehenden Randbedingung »$u=0$« der zweite Summand Null wird. Mit Verwendung der Hilfsgrößen

$$\sigma=e^{+\frac{S}{2}\sqrt{\alpha_1}} \quad \text{und} \quad \tau=e^{+\frac{S}{2}\sqrt{\alpha_2}} \tag{16}$$

erhält man nun für (15) nach Einführung der allgemeinen Lösung (12), (13) das die Lagerungsbedingungen des Bogenstabes vertretende System von sechs in den Integrationskonstanten homogenen Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}
&C_2+\sqrt{\alpha_1}.\sigma.C_3-\sqrt{\alpha_1}\,\frac{1}{\sigma}\,C_4+\sqrt{\alpha_2}.\tau.C_5-\sqrt{\alpha_2}\,\frac{1}{\tau}\,C_6=0\\
&C_2+\sqrt{\alpha_1}.\frac{1}{\sigma}.C_3-\sqrt{\alpha_1}\,C_4+\sqrt{\alpha_2}.\frac{1}{\tau}\,C_5-\sqrt{\alpha_2}.\tau.C_6=0\\
&\frac{1}{r}.\left(C_1+\frac{S}{2}.C_2+\sigma.C_3+\frac{1}{\sigma}.C_4+\tau.C_5+\;^{1}.C_6\right)=0\\
&\frac{1}{r}.\left(C_1-\frac{S}{2}.C_2+\frac{1}{\sigma}\,C_3+\sigma.C_4+\frac{1}{\tau}.C_5+\tau.C_6\right)=0\\
&\alpha_1\sqrt{\alpha_1}\,C_3-\alpha_1\sqrt{\alpha_1}.\frac{1}{\sigma}.C_4+\alpha_2\sqrt{\alpha_2}.\tau.C_5-\alpha_2\sqrt{\alpha_2}.\frac{1}{\tau}\,C_6=0\\
&\alpha_1\sqrt{\alpha_1}.\frac{1}{\sigma}\,C_3-\alpha_1\sqrt{\alpha_1}.\sigma.C_4+\alpha_2\sqrt{\alpha_2}.\frac{1}{\tau}.C_5-\alpha_2\sqrt{\alpha_2}.\tau.C_6=0
\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

4. Die Bedingung für das Erreichen von Grenzen der Stabilität.

Eine Möglichkeit der Erfüllung obigen Systems von Bedingungsgleichungen liegt jedenfalls im Verschwinden sämtlicher Werte »C« und resultiert als Gleichgewichtsform, da dann auch die Verschiebungskomponenten u, v Null werden, der unverzerrte Kreisbogen. Jede weitere Befriedigungsmöglichkeit dieses homogenen Gleichungssystems setzt das Verschwinden seiner Nennerdeterminante »D« voraus, womit die von Null verschiedenen Lösungen u, v, also

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

die im Sinne der einleitenden Darlegungen unendlich wenig von der Kreisform abweichenden Gleichgewichtslagen erhalten werden. Mit der Beziehung

$$D = 0$$

ist demnach die allgemeine Bedingung für das Erreichen einer Stabilitätsgrenze gewonnen und liefert die Auswertung der Determinante für endliche Bogenradien

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \sqrt{\alpha_1}\,.\,\sigma & -\sqrt{\alpha_1}\,^{1} & \sqrt{\alpha_2}\,.\,\tau & -\sqrt{\alpha_2}\,.\,\frac{1}{\tau} \\ 0 & 1 & \sqrt{\alpha_1}\,\frac{1}{\sigma} & -\sqrt{\alpha_1}\,.\,\sigma & \sqrt{\alpha_2}\,.\,\frac{1}{\tau} & -\sqrt{\alpha_2}\,.\,\tau \\ 1 & \frac{S}{2} & & 1 & \tau & \frac{1}{\tau} \\ 1 & -\frac{S}{\sigma} & \frac{1}{\sigma} & & \frac{1}{\tau} & \tau \\ 0 & 0, & \alpha_1\,\sqrt{\alpha_1}\,.\,\sigma, & -\alpha_1\,.\,\sqrt{\alpha_1}\,.\,\frac{1}{\sigma}, & \alpha_2\,.\,\sqrt{\alpha_2}\,.\,\tau, & -\alpha_2\,\sqrt{\alpha_2}\,.\,\frac{1}{\tau} \\ 0 & 0, & \alpha_1\,\sqrt{\alpha_1}\,^{1} & -\alpha_1\,\sqrt{\alpha_1}\,.\,\sigma, & \alpha_2\,.\,\sqrt{\alpha_2}\,.\,\frac{1}{\tau}, & -\alpha_2\,\sqrt{\alpha_2}\,.\,\tau \end{vmatrix} =$$

$$= 32\,.\,(\alpha_1 - \alpha_2)\,.\,\sqrt{\alpha_1\alpha_2}\,.\,\mathfrak{Sin}\,\frac{S}{2}\sqrt{\alpha_1}\,.\,\mathfrak{Sin}\,\frac{S}{2}\sqrt{\alpha_2}\,\Big[\Big(\frac{S}{2}\,.\,\sqrt{\alpha_1}\,.\,\mathfrak{Cos}\,.\,\frac{S}{2}\sqrt{\alpha_1} -$$

$$- \mathfrak{Sin}\,\frac{S}{2}\sqrt{\alpha_1}\Big)\,.\,\alpha_2\sqrt{\alpha_2}\,.\,\mathfrak{Cos}\,\frac{S}{2}\sqrt{\alpha_2} - \Big(\frac{S}{2}\sqrt{\alpha_2}\,.\,\mathfrak{Cos}\,\frac{S}{2}\sqrt{\alpha_2} -$$

$$- \mathfrak{Sin}\,\frac{S}{2}\sqrt{\alpha_2}\Big)\,.\,\alpha_1\sqrt{\alpha_1}\,.\,\mathfrak{Cos}\,\frac{S}{2}\sqrt{\alpha_1}\Big] = 0. \quad (18)$$

Da der Faktor

$$32.\,(\alpha_1 - \alpha_2)\,.\,\sqrt{\alpha_1}\,.\,\alpha_2,$$

wie die Beziehung (11) zeigt, für $T_K > 0$ nicht verschwinden kann, verbleiben die drei Knickbedingungen

a) $\mathfrak{Sin}\,\frac{S}{2}\sqrt{\alpha_1} = 0$

b) $\mathfrak{Sin}\,\frac{S}{2}\,.\,\sqrt{\alpha_2} = 0$

c) $$\Big[\Big(\frac{S}{2}\sqrt{\alpha_1}\,.\,\mathfrak{Cos}\,\frac{S}{2}\sqrt{\alpha_1} - \mathfrak{Sin}\,\frac{S}{2}\sqrt{\alpha_1}\Big)\,.\,\alpha_2\,.\,\sqrt{\alpha_2}\,.\,\mathfrak{Cos}\,\frac{S}{2}\sqrt{\alpha_2} -$$

$$- \Big(\frac{S}{2}\sqrt{\alpha_2}\,.\,\mathfrak{Cos}\,\frac{S}{2}\sqrt{\alpha_2} - \mathfrak{Sin}\,\frac{S}{2}\sqrt{\alpha_2}\Big)\,.\,\alpha_1\,.\,\sqrt{\alpha_1}\,\mathfrak{Cos}\,\frac{S}{2}\sqrt{\alpha_1}\Big] = 0. \quad (19)$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Ad *a*: Aus

$$\mathfrak{Sin}\,\frac{S}{2}\sqrt{\alpha_1}=0 \text{ folgt } \frac{S}{2}\sqrt{\alpha_1}=i\,z\,\pi, \quad =0,\,1,\,2,\,3$$

oder mit Verwendung von (11) auch $S=0,\ 2\,r\,\pi,\ 4\,r\,\pi,\ldots$ die einzig in Betracht kommende Lösung

$$S=2\,r\,\pi \tag{I}$$

besagt, daß sich ein geschlossener Kreisring, für den mit Rücksicht auf die eingeführten Randbedingungen grundsätzlich die Einschaltung eines Gelenkes erforderlich wäre, unabhängig von der Größe der Außenlast »p« im indifferenten Zustand befindet. Das Ergebnis ist nicht überraschend, da der Gleichgewichtszustand eines radial gleichmäßig gedrückten Ringes jede deformationslose Lagenänderung zuläßt.

Ad *b*: Aus

$$\mathfrak{Sin}\,\frac{S}{2}\sqrt{\alpha_2}=0 \text{ folgt } \frac{S}{2}\sqrt{\alpha_2}=i\,z\,\pi,\ z=0,\,1,\,2,\,3.$$

oder unter Verwendung von (11) auch

$$\left(\frac{1}{r^2}+\frac{T_K}{E'.I}\right)=\left(\frac{2\,z\,\pi}{S}\right)^2$$

woraus sich der kritische Kämpferdruck mit

$$T_K=\frac{E'.I}{S^2}\left[(2\,z\,\pi)^2-\left(\frac{S}{r}\right)^2\right], \quad =1,\,2,\,3,. \tag{II}$$

ergibt.

Ad *c*: Setzt man mit Benützung von (11)

$$\frac{S}{2}\sqrt{\alpha_1}=i\,\frac{S}{2\,r}=i.\mu \text{ und } \frac{S}{2}\sqrt{\alpha_2}=i\,\frac{S}{2}\sqrt{\frac{1}{r^2}+\frac{T_K}{E'.I}}=i.\nu,$$

so nimmt die Knickbedingung die Form an

$$(\mu.\cos\mu-\sin\mu).\nu^3.\cos\nu-(\nu.\cos\nu-\sin\nu).\mu^3.\cos\mu=0,$$

woraus mit Rücksicht auf

$$\frac{\nu^2}{\mu^2}=1+\frac{T_K.r^2}{E'.I}$$

nach einigen Umformungen

$$\nu.\mu^2.\cos\mu.\left\{\left[\frac{S^2.T_K}{4\,E'.I}.\frac{1}{\mu}.\left(1-\frac{\operatorname{tg}\mu}{\mu}\right)-\operatorname{tg}\mu\right]\cos\nu+\frac{\mu}{\nu}.\sin\nu\right\}=0 \tag{20}$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

resultiert. Führt man nun zweckmäßigerweise die Hilfsgröße

$$\zeta = \frac{S}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{T_K}{E' . I}} \tag{21}$$

ein und beachtet, daß nach Voraussetzung

$$\nu . \mu^2 . \cos \mu \neq 0$$

gilt, so ergibt sich die, gemäß p. 650 (vgl. auch p. 663) an eine ausreichend große Achsenkrümmung gebundene Knickbedingung

$$\left[\left(\frac{\zeta \pi}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{\mu} \cdot \left(1 - \frac{\operatorname{tg} \mu}{\mu}\right) - \operatorname{tg} \mu\right] . \cos \sqrt{\mu^2 + \left(\frac{\zeta \pi}{2}\right)^2} +$$

$$+ \mu \cdot \frac{\sin \sqrt{\mu^2 + \left(\frac{\zeta \pi}{2}\right)^2}}{\sqrt{\mu^2 + \left(\frac{\zeta \pi}{2}\right)^2}} = 0. \tag{III}$$

Die Wurzeln »ζ« dieser transzendenten Gleichung liefern dann mit (21) die kritischen Kämpferdrücke in der einfachen Form

$$T_K = \frac{(\zeta \pi)^2 . E'}{S^2} \cdot I. \tag{22}$$

5. Diskussion der Knickwurzeln und der ihnen zugeordneten Gleichgewichtsformen.

Wie die Ergebnisse des vierten Abschnittes zeigen, zerfällt die Bedingung für das Erreichen von Grenzen der Stabilität bei offenen Bögen in zwei Gleichungen (II) und (III), denen offenbar Wurzelreihen entspringen, die zwei grundsätzlich verschiedenen Gruppen A und B von Gleichgewichtsformen des instabilen Zustandes zuzuordnen sind. Diese Unterscheidung nach zwei Gruppen von Deformationslinien steht im Zusammenhang mit der Möglichkeit, für die sechs Randbedingungsgleichungen (17) zwei verschiedene Lösungstripel

$$\begin{array}{ll} A & C_2 = 0,\ C_4 = C_3,\ C_6 = C_5; \\ B & C_1 = 0,\ C_4 = -C_3,\ C_6 = -C_5; \end{array} \tag{23}$$

festlegen zu können und soll nun dieser Zusammenhang im folgenden dargelegt werden.

Gruppe A:

Mit Zuziehung der Lösungen (23 A) reduzieren sich die Ausdrücke (12), (13) für die infinitesimalen Verzerrungskomponenten zu

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$\left.\begin{aligned} u &= 2\left[C_3 \,.\, \sqrt{\alpha_1} \,.\, \mathfrak{Sin}\, s\sqrt{\alpha_1} + C_5 \,.\, \sqrt{\alpha_2} \,.\, \mathfrak{Sin}\, s\sqrt{\alpha_2}\right] \\ v &= \frac{1}{r}\left[C_1 + 2\,C_3\,\mathfrak{Cos}\, s\sqrt{\alpha_1} + 2\,C_5\,\mathfrak{Cos}\, s\sqrt{\alpha_2}\right] \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

und erhält das System der Randbedingungsgleichungen (17) die Form

$$\left.\begin{aligned} C_3 \,.\, \sqrt{\alpha_1} \,.\, \mathfrak{Sin}\frac{S}{2}\sqrt{\alpha_1} + C_5 \,.\, \sqrt{\alpha_2} \,.\, \mathfrak{Sin}\frac{S}{2}\sqrt{\alpha_2} &= 0 \\ C_3 \,.\, \alpha_1 \,.\, \sqrt{\alpha_1} \,.\, \mathfrak{Sin}\frac{S}{2}\sqrt{\alpha_1} + C_5 \,.\, \alpha_2 \,.\, \sqrt{\alpha_2} \,.\, \mathfrak{Sin}\frac{S}{2}\sqrt{\alpha_2} &= 0 \\ \frac{1}{r}\left[C_1 + 2\,C_3 \,.\, \mathfrak{Cos}\frac{S}{2}\sqrt{\alpha_1} + 2\,C_5 \,.\, \mathfrak{Cos}\frac{S}{2}\sqrt{\alpha_2}\right] &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Soll dieses Gleichungssystem von Null verschiedene Lösungen »C«, also von Null verschiedene Verzerrungen u, v liefern, so muß seine Nennerdeterminante »$\triangle$« verschwinden, somit

$$\triangle = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} 0 & \sqrt{\alpha_1}\;\mathfrak{Sin}\frac{S}{2}\sqrt{\alpha_1} & \sqrt{\alpha_2}\;\mathfrak{Sin}\frac{S}{2}\sqrt{\alpha_2} \\ 0 & \alpha_1\sqrt{\alpha_1}\;\mathfrak{Sin}\frac{S}{2}\sqrt{\alpha_1} & \alpha_2\sqrt{\alpha_2}\;\mathfrak{Sin}\frac{S}{2}\sqrt{\alpha_2} \\ 1 & 2\,\mathfrak{Cos}\frac{S}{2}\sqrt{\alpha_1} & 2\,\mathfrak{Cos}\frac{S}{2}\sqrt{\alpha_2} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{r}\,.\,(\alpha_2 - \alpha_1)\,.\,\sqrt{\alpha_1\alpha_2}\,.\,\mathfrak{Sin}\frac{S}{2}\sqrt{\alpha_1}\;\mathfrak{Sin}\frac{S}{2}\sqrt{\alpha_2} = 0$$

bestehen. Man erkennt die Identität dieser Forderung mit (19 b), also der Knickbedingung (II), und gewinnt damit das Ergebnis, daß den Wurzeln dieser Knickbedingung Gleichgewichtsformen zugehören müssen, deren Abweichungen von der Kreisform durch die Beziehungen (23 A) gekennzeichnet sind. Da einerseits für offene Bögen

$$\mathfrak{Sin}\frac{S}{2}\sqrt{\alpha_1} = \mathfrak{Sin}\frac{i\,S}{2r} \neq 0$$

gilt, anderseits die Knickbedingung

$$\frac{S}{2}\sqrt{\alpha_2} = i\,z\,\pi$$

verlangt, resultiert aus (25)

$$C_3 = 0,\;\; C_5 \neq 0,\;\; C_1 = -\,2\,.\,(-1)^z\,.\,C_5,\;\; z = 1, 2, 3\,.$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

und lauten die Verschiebungskomponenten (24)

$$\left.\begin{aligned} u &= -\frac{4\pi}{S} \cdot C \sin\frac{2z\pi s}{S} \\ v &= \frac{2}{r} \cdot C_5 \cdot \left[\cos^2\frac{\pi s}{S} - (-1)^z\right] \end{aligned}\right\} z = 1, 2, 3, . \tag{26}$$

Die radialen Verzerrungskomponenten verlaufen somit nach einer Sinuslinie gerader Halbwellenzahl »$2z$« und unbestimmter Amplitude, während die tangentialen Verschiebungen, mit den radialen durch die grundlegende Beziehung (2) verknüpft, den Gesetzen

$$v = -\frac{4}{r} C \sin^2\frac{\pi s}{S}, \text{ beziehungsweise } v = \frac{4}{r} C_5 . \cos^2\frac{z\pi s}{S}$$

für gerade, beziehungsweise ungerade gehorchen. Fig. zeigt den Verlauf der beiden Verzerrungskomponenten u, v für die ersten

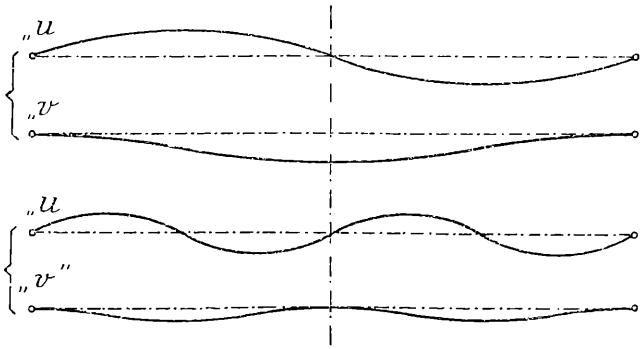

Fig. 3.

beiden Knickwurzeln (entsprechend $z = 1$ und 2) und stellt hiebei die Abszissenachse den Kreisbogen, also die zweite mögliche Gleichgewichtsform, im abgewickelten Zustand vor.

Mit $z = 1$ wird aus (II) der kleinstmögliche kritische Kämpferdruck

$$\text{min. } T_K = \text{min. p. } r = \frac{E' . I}{S^2}\left(4\pi^2 - \frac{S^2}{r^2}\right) \tag{27}$$

erhalten, dessen Größe, wie einleitend vermerkt wurde, erstmalig von Hurlbrink (l. c.) angegeben wurde, und ist die zugeordnete Deformationskurve durch die beiden Komponenten

$$\left.\begin{aligned} u &= K_1 . \sin\frac{2\pi s}{S} \\ v &= K_2 . \cos^2\frac{\pi s}{S} \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

dem Verlaufe nach festgelegt. Die Tangentialverzerrung v besitzt im Bogenscheitel »$s = 0$« ihren größten Wert und bedeutet eine Verhinderung dieser Scheitelverschiebung die Erzwingung der höheren Knickwurzel, die, wie sich zeigen wird, der Formengruppe B angehört.

Gruppe B.

Mit Verwendung des Lösungstripels (23 B) erhalten die Ausdrücke (12), (13) für die Verschiebungskomponenten die Form

$$\left.\begin{aligned} u &= C_2 + 2\,C_3\sqrt{\alpha_1}\,.\,\mathfrak{Cos}\,s\sqrt{\alpha_1} + 2\,C_5\sqrt{\alpha_2}\,.\,\mathfrak{Cos}\,s\sqrt{\alpha_2} \\ v &= \frac{1}{r}\left[C_2\,.\,s + 2\,C_3\,\mathfrak{Sin}\,s\sqrt{\alpha_1} + 2\,C_5\,.\,\mathfrak{Sin}\,s\sqrt{\alpha_2}\right] \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

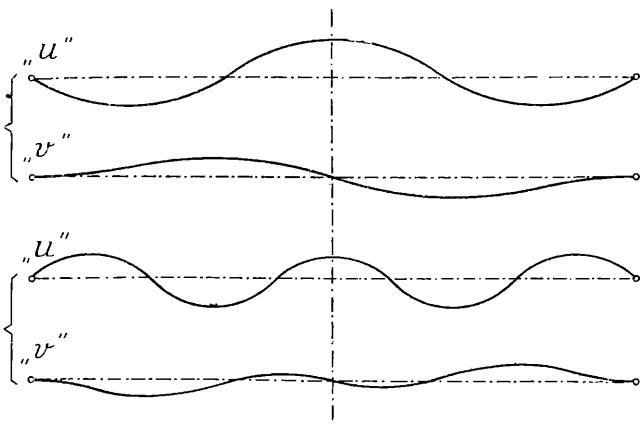

Fig. 4.

und lautet die Gruppe der Randbedingungsgleichungen (17)

$$\left.\begin{aligned} C_2 + 2\,C_3\,.\,\sqrt{\alpha_1}\,.\,\mathfrak{Cos}\frac{S}{2}\sqrt{\alpha_1} + 2\,C\quad\sqrt{\alpha_2}\,.\,\mathfrak{Cos}\frac{S}{2}\sqrt{\alpha_2} &= 0 \\ C_3\,.\,\alpha_1\sqrt{\alpha_1}\,.\,\mathfrak{Cos}\frac{S}{2}\sqrt{\alpha_1} + C_5\,.\,\alpha_2\sqrt{\alpha_2}\,.\,\mathfrak{Cos}\frac{S}{2}\sqrt{\alpha_2} &= 0 \\ \frac{1}{r}\left[C_2\,.\,\frac{S}{2} + 2\,C_3\,.\,\mathfrak{Sin}\frac{S}{2}\sqrt{\alpha_1} + 2\,C_5\,.\,\mathfrak{Sin}\frac{S}{2}\sqrt{\alpha_2}\right] &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Dieses homogene Gleichungssystem verlangt für jede von der Nulllösung verschiedene Lösung »C«, also für jede von der Kreisform abweichende Gleichgewichtsfigur das Verschwinden seiner Nennerdeterminante »$\triangle_1$«, somit die Befriedigung der Gleichung

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$\Delta_1 = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} 1 & 2\sqrt{\alpha_1}\,\mathfrak{Cos}\,\frac{S}{2}\sqrt{\alpha_1} & 2\sqrt{\alpha_2}\,\mathfrak{Cos}\,\frac{S}{2}\sqrt{\alpha_2} \\ 0 & \alpha_1\sqrt{\alpha_1}\,\mathfrak{Cos}\,\frac{S}{2}\sqrt{\alpha_1} & \alpha_2\sqrt{\alpha_2}\,\mathfrak{Cos}\,\frac{S}{2}\sqrt{\alpha_2} \\ \frac{S}{2} & 2\,\mathfrak{Sin}\,\frac{S}{2}\sqrt{\alpha_1} & 2\,\mathfrak{Sin}\,\frac{S}{2}\sqrt{\alpha_2} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{4}{rS}\left[\left(\frac{S}{2}\cdot\sqrt{\alpha_1}\,\mathfrak{Cos}\,\frac{S}{2}\sqrt{\alpha_1} - \mathfrak{Sin}\,\frac{S}{2}\sqrt{\alpha_1}\right)\cdot\alpha_2\cdot\sqrt{\alpha_2}\cdot\mathfrak{Cos}\,\frac{S}{2}\sqrt{\alpha_2} - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{S}{2}\cdot\sqrt{\alpha_2}\cdot\mathfrak{Cos}\,\frac{S}{2}\sqrt{\alpha_2} - \mathfrak{Sin}\,\frac{S}{2}\sqrt{\alpha_2}\right)\alpha_1\sqrt{\alpha_1}\,\mathfrak{Cos}\,\frac{S}{2}\sqrt{\alpha_1}\right] = 0.$$

Wie man erkennt, ist diese Gleichung mit (19 *c*), also der Knickbedingung III identisch, so daß den Wurzeln dieser Knickbedingung Deformationsfiguren zugehören müssen, deren Abweichungen von der Kreisform durch die Beziehungen (23 *B*) charakterisiert werden. Da nun die allgemeine Ableitung zeigte, daß mit den beiden Knickbedingungen II und III das ebene Stabilitätsproblem des offenen Kreisbogens vollständig erfaßt wird, müssen in den beiden Gruppen *A* und *B* sämtliche möglichen Gleichgewichtsformen vertreten sein.

Aus der zweiten Zeile des Gleichungssystems (30) ergibt sich

$$C_3 = -C_5\cdot\frac{\alpha_2\cdot\sqrt{\alpha_2}\cdot\mathfrak{Cos}\,\frac{S}{2}\sqrt{\alpha_2}}{\alpha_1\sqrt{\alpha_1}\cdot\mathfrak{Cos}\,\frac{S}{2}\sqrt{\alpha_1}}$$

und wird damit aus der ersten

$$C_2 = C_5\cdot 2\sqrt{\alpha_2}\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} - 1\right)\mathfrak{Cos}\,\frac{S}{2}\sqrt{\alpha_2},$$

so daß die Verzerrungskomponenten (29) die Form

$$\left.\begin{aligned} u &= 2\sqrt{\alpha_2}\cdot C\left[\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} - 1\right)\cdot\mathfrak{Cos}\,\frac{S}{2}\sqrt{\alpha_2} - \right. \\ &\qquad \left. - \frac{\alpha_2\cdot\mathfrak{Cos}\,\frac{S}{2}\sqrt{\alpha_2}}{\alpha_1\cdot\mathfrak{Cos}\,\frac{S}{2}\sqrt{\alpha_1}}\,\mathfrak{Cos}\,s\sqrt{\alpha_1} + \mathfrak{Cos}\,s\sqrt{\alpha_2}\right] \\ v &= \frac{2}{r}\,C\left[\sqrt{\alpha_2}\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} - 1\right)\cdot s\cdot\mathfrak{Cos}\,\frac{S}{2}\sqrt{\alpha_2} - \right. \\ &\qquad \left. - \frac{\alpha_2\sqrt{\alpha_2}\cdot\mathfrak{Cos}\,\frac{S}{2}\sqrt{\alpha_2}}{\alpha_1\cdot\sqrt{\alpha_1}\cdot\mathfrak{Cos}\,\frac{S}{2}\sqrt{\alpha_1}}\cdot\mathfrak{Sin}\,s\cdot\sqrt{\alpha_1} + \mathfrak{Sin}\,s\cdot\sqrt{\alpha_2}\right] \end{aligned}\right\} \quad (31)$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

annehmen und wieder den nach Größe und Vorzeichen unbestimmten Faktor »C_5« enthalten. Diese Beziehungen setzen noch die Befriedigung der dritten Gleichungszeile der Randbedingungen (30) voraus, die für die beiden Lagerorte $s = \pm \frac{S}{2}$ das Verschwinden der Tangentialverschiebung »v« verlangt und, wie man sich an (31) überzeugen kann, mit der Knickbedingung III identisch, somit nach Voraussetzung erfüllt ist. Eine numerische Auswertung läßt erkennen, daß die radialen Verzerrungskomponenten nach sinusartigen Wellenzügen unterschiedlicher Amplitudengröße und grundsätzlich ungerader Halbwellenzahl verlaufen. Die Radialverformungen sind mit den tangentialen durch die Beziehung (2) verknüpft, die die Eigenschaft der »v«-Linien bedingt, an den Nullstellen der u-Kurve extreme Ordinatenwerte und an den Extremstellen der »u«-Kurve Wendepunkte zu besitzen. Aus der Integration der grundlegenden Beziehung (2) folgt weiters unter der für (2) geltenden Voraussetzung einer ausreichend großen Achsenkrümmung die allgemeine Eigenschaft der Radialverzerrungslinien

$$\int_{-\frac{S}{2}}^{+\frac{S}{2}} u \,.\, ds = 0,$$

so daß alle Knicklinien des Bogens von der ursprünglichen Kreisachse nach gleichen Flächen unterteilt werden; diese Eigenschaft bedingt bei ungeraden Halbwellenzahlen die erwähnte Verschiedenheit der Wellenhöhe. Beim geraden Stab verschwindet das Integral nur im Falle gerader Halbwellenzahlen, welche Tatsache die Möglichkeit, beziehungsweise Unmöglichkeit eines unmittelbaren Grenzüberganges auf $r = \infty$ für die Formengruppe A, beziehungsweise B, also die Knickbedingung II, beziehungsweise III, zu beleuchten vermag. In Fig. 4 ist der Verlauf der beiden Verzerrungskomponenten für die zwei ersten Wurzeln der Knickbedingung III zur Darstellung gebracht und soll die Abszissenachse wieder den Kreisbogen, also die zweite mögliche Gleichgewichtsform, im abgewickelten Zustand vorstellen.

Ein Sonderfall wird erhalten, wenn $S = r\pi$ wird, also der Bogenstab die Form eines Halbkreisbogens besitzt; es gilt dann

$$\frac{S}{2}\sqrt{\alpha_1} = \frac{i\pi}{2},\ \mathfrak{Cos}\frac{S}{2}\sqrt{\alpha_1} = 0,\ \mathfrak{Sin}\frac{S}{2}\sqrt{\alpha_1} = i$$

und wird die Bedingungsgleichung III für das Erreichen von Stabilitätsgrenzen, wie man aus der Forderung $\triangle_1 = 0$ entnehmen kann, zu

$$\mathfrak{Cos}\frac{S}{2}\sqrt{\alpha_2} = 0$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

reduziert, so daß die Knickbedingung in der Form

$$\frac{S}{2}\sqrt{\alpha_2} = \frac{i\,n\,\pi}{2}, \quad n = 1,\ 3,\ 5\ldots$$

oder

$$T_K = \frac{E'I}{S^2}\left(n^2\pi^2 - \frac{S^2}{r^2}\right) = \frac{E'.I}{r^2}(n^2 - 1), \quad n = 3,\ 5,\ 7 \tag{32}$$

erhalten wird. Bemerkenswert ist, daß diese Bedingung, trotzdem sie der grundsätzlich unterschiedenen Formengruppe B von Gleichgewichtsfiguren zugehört, formal mit der Knickbedingung (II) übereinstimmt, welche Übereinstimmung es ermöglicht, in der einfachen Formel

$$T_K = \frac{E'.I}{r^2}(z^2 - 1), \quad z = 2, \quad 4,\ 5. \tag{33}$$

sämtliche Knickwurzeln des radial gleichmäßig gedrückten Halbkreisbogens festzulegen. Die Randbedingungsgleichungen (30) liefern mit

$$\sqrt{\alpha_1} = \frac{i\,\pi}{S} \quad \text{und} \quad \sqrt{\alpha_2} = \frac{i\,n\,\pi}{S}$$

die Beziehungen $C_2 = 0$, $C_3 = C_5$ für $n = 3, 7, 11$ und $C_3 = -C_5$ für $n = 5, 9, 13$. so daß die beiden Verzerrungskomponenten (29) die Form

$$\left.\begin{aligned} u &= K.\left(n.\cos\frac{n\,\pi\,s}{S} \pm \cos\frac{\pi\,s}{S}\right) \\ v &= K.\left(\sin\frac{n\,\pi\,s}{S} \pm \sin\frac{\pi\,s}{S}\right) \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

erhalten, wobei das »+«-Zeichen für $n = 3, 7, 11$ und das »—«-Zeichen für $n = 5, 9, 13$. Geltung besitzt (vgl. dazu die Bemerkungen p. 668). Die Beziehungen (34) ergeben unmittelbar den Verlauf der Verzerrungskomponenten u, v (vgl. Fig. 4); die Knickbedingung, die in allen anderen Fällen der Gruppe B als zusätzliche Bedingung »$s = S/2$, $v = 0$« befriedigt werden muß und wegen ihres verwickelten, transzendenten Aufbaues einer Beleuchtung der Gleichgewichtsformen im Weg steht, ist in ihnen schon berücksichtigt.

Die Gesamtheit der resultierenden Gleichgewichtsformen der Gruppe B bildet das Analogon zur Gruppe der Sinuswellen ungerader Halbwellenzahl im Knickproblem gerader Stäbe; beim ausreichend gekrümmten Bogenstab kommen solche reine Sinuslinien ungerader Halbwellenzahl für den Verlauf der radialen Verzerrung nicht in Betracht, da die entsprechenden Gleichgewichtsformen zufolge der Beziehung (2) die Randbedingungen $s = \pm\frac{S}{2}$, $v = 0$, nicht zu erfüllen vermögen. Die primäre Krümmung bedingt hier einen neuen Typus von Deformationsfiguren, der im Verlauf der radialen Abweichungen »u« durch eine Verschiedenheit der Wellenhöhe gekennzeichnet ist; eine derartige »u«-Linie beeinflußt dann gemäß (2) den Verlauf der tangentialen

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Verzerrung »v« und erzielt für ihn eine Symmetrie bezüglich des Bogenscheitelpunktes, womit die Befriedigung der Randbedingung $v = 0$ für beide Stabenden gewährleistet ist (vgl. Fig. 4).

Für einen geraden Stab würde wegen

$$\frac{1}{r} = 0, \quad \sqrt{\alpha_1} = 0, \quad \sqrt{\alpha_2} = \sqrt{\frac{T_K}{E'.I}}$$

das Gleichungssystem (30)

$$\begin{cases} C_2 + C_5 . 2\,i . \sqrt{\dfrac{T_K}{E'.I}} . \cos \dfrac{S}{2} \sqrt{\dfrac{T_K}{E'.I}} = 0 \\ \\ -C_5 . i . \left(\sqrt{\dfrac{T_K}{E'.I}}\right)^3 . \cos \dfrac{S}{2} \sqrt{\dfrac{T_K}{E'.I}} = 0; \end{cases}$$

lauten und aus dem Verschwinden der Nennerdeterminante die Knickbedingung in der Form

$$\cos \frac{S}{2} \sqrt{\frac{T_K}{E'.I}} = 0 \text{ oder } T_K = \frac{n^2 . \pi^2 . E'.I}{S^2}, \quad n = 1,\ 3,\ 5. \tag{35}$$

resultieren, somit die Serie der Knickwurzeln ungerader Ordnungszahl nach Euler-Kármán beinhalten.

Abschließend sei noch eine recht gute Näherungslösung für die Wurzeln der transzendenten Knickbedingung III (somit Formengruppe B) erwähnt. Verzichtet man auf die Erfüllung von (2), beziehungsweise die Befriedigung der Randbedingungsgleichungen $s = \pm \frac{S}{2}$, $v = 0$, gestattet also etwa eine lokale Achsenzerrung, beziehungsweise eine geringfügige Verschiebung der Kämpfergelenke, so kann die reine Sinuslinie ungerader Halbwellenzahl (vgl. Fig. 6) an Stelle der radialen Verzerrungsfigur nach (29), (Fig. 4), treten und wird damit für die kritischen Kämpferdrücke die einfache, im Aufbau vollkommen der Formel (II) entsprechende und die Grenzwertbildung $r \to \infty$ unmittelbar zulassende Beziehung

$$T_K' = \frac{E'.I}{S^2} \left[(z'\pi)^2 - \left(\frac{S}{r}\right)^2 \right], \quad z' = 3,\ 5,\ 7 \tag{36}$$

erhalten. Die Annäherung dieser Werte T_K' an die Knickwurzeln der strengen Bedingungsgleichung (III), die sich (vgl. p. 663 und 668) im Falle eines Halbkreisbogens als eine vollständige erwies, ist ausreichend, um diese transzendente Knickbedingung (III) durch (36) vertreten zu lassen. Die Serie der kritischen Kämpferdrücke eines gelenkig gelagerten, radial gleichmäßig belasteten Kreisbogens wird demnach bei hinreichender Genauigkeit durch die Bedingungen (II) und (36) festgelegt und ist in der Beziehung

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$T_K = \frac{E'.I}{S^2}\left[(n\pi)^2 - \left(\frac{S}{r}\right)^2\right], \quad n = 2,\ 3,\ 4,\ 5. \tag{37}$$

vollzählig enthalten.

6. Der radial gedrückte, gelenklose Kreisring.

Nimmt die Bogenlänge den Sonderwert $S = 2r\pi$ an, so fallen die beiden in den Randbedingungsgleichungen (15) vorausgesetzten Kämpfergelenke des offenen Kreisbogens zusammen und es entsteht ein geschlossener Ring mit eingeschaltetem Gelenk. Der Bedingung (I) (p. 657) gemäß, befindet sich ein derartiges Gebilde unabhängig von der Größe des gleichmäßigen, radialen Außendruckes im instabilen Gleichgewicht, da es jede deformationslose Verschiebung zuläßt; die Existenz des Gelenkes ist hiebei belanglos, so daß diese triviale Lösung auch für den gelenklosen Ring Geltung besitzt. Die den infinitesimal verzerrten Gleichgewichtsformen zugeordneten kritischen Belastungswerte eines gelenkig geschlossenen Kreisringes sind mit

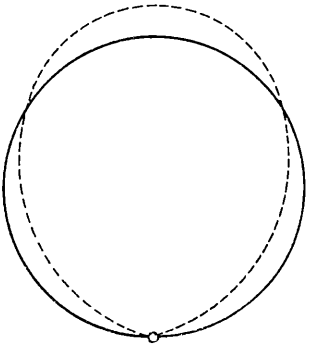

Fig.

$S = 2r\pi$ unmittelbar aus den Knickbedingungen (II) und (III) zu gewinnen. Aus (II) folgt für die Gruppe A von Deformationsfiguren

$$p = \frac{T_K}{r} = \frac{E'I}{r^3}(z^2 - 1), \quad z = 2,\ 3,\ 4,\ 5. \tag{39}$$

und werden die zugehörigen Verzerrungen durch die Komponenten (26) festgelegt; die kleinste Wurzel dieser Knickbedingung (entsprechend $= 2$) wird jedoch unterboten durch den kleinsten kritischen Außendruck

$$p = \frac{T_K}{r} = \frac{(2\cdot 361\,\pi)^2.E'.I}{r.S^2} = \frac{1\cdot 394.E'.I}{r^3}, \tag{40}$$

der mit $\mu = \pi$ aus der Bedingungsgleichung (III) resultiert und der Formengruppe B zugehört. Ein gelenkig geschlossener, gleichmäßig gedrückter Kreisring knickt somit erstmalig nach drei Halbwellen aus, wobei nach den Darlegungen p. 663 die Höhe der mittleren Welle dieser Gleichgewichtsform größer ist als die der seitlichen (Fig. 5).

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Diese für den gelenkig geschlossenen Kreisbogen gewonnenen Ergebnisse sind nun unmittelbar den Untersuchungen der Stabilitätsverhältnisse eines gelenklosen Kreisringes zugrunde zu legen, wobei jedoch zu berücksichtigen ist, daß die infinitesimalen Verzerrungen wegen des Fehlens eines eingeschalteten Gelenkes der einschränkenden Forderung nach Stetigkeit unterliegen. Die Untersuchungen des fünften Abschnittes ergaben als kennzeichnende Eigenschaft des Verlaufes der Radialverzerrung für die Gruppe A von Gleichgewichtsformen eine gleiche, für die Gruppe B eine entgegengesetzt gleiche Neigung der Endtangenten und weist dementsprechend der gelenkig geschlossene Ring bei Verzerrungen gemäß Gruppe A einen Wendepunkt, gemäß Gruppe B eine Ecke an der Gelenkstelle auf. Die Deformationsfiguren der Formengruppe B können demnach beim gelenklosen Ring nicht zur Ausbildung gelangen und entfallen damit alle der Bedingungsgleichung (III) mit $\mu = \pi$ entspringenden Knickwurzeln. Hingegen gestattet der am Gelenksort auftretende Wendepunkt bei den Verformungen nach Gruppe A eine Entfernung des Gelenkes, so daß die Knickbedingung (II), die mit Einführung von

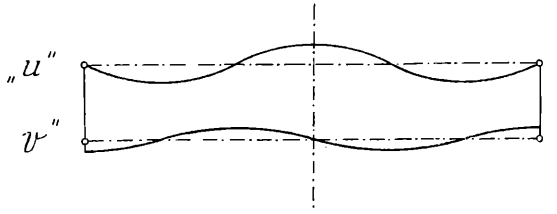

Fig. 6.

$S = 2\,r\,\pi$ die Form der Beziehung (39) annimmt, sämtliche Stabilitätsgrenzen eines gelenklosen, gleichmäßig radialbelasteten Kreisringes umfaßt. Die zugeordneten Gleichgewichtsformen werden durch die aus (26) folgenden Verzerrungskomponenten

$$\left.\begin{aligned} u &= K_3 \cdot \sin \frac{z\,s}{r} \\ v &= K_4 \left[\cos \frac{\quad}{r} - (-1)^z\right] \end{aligned}\right\} = 2,\ 3,\ 4, \tag{41}$$

festgelegt und verläuft die radiale Verzerrung nach reinen Sinuslinien von der geraden Halbwellenzahl »$2\,z$« (Fig. 7).

Es sei hier auf die Übereinstimmung der Serie kritischer Belastungswerte des gelenklosen Ringes [Beziehung (39)] mit der des gelenkig gelagerten Halbkreisbogens [Beziehung (33)] hingewiesen, die ungeachtet der Zugehörigkeit zu den grundsätzlich unterschiedenen Gleichgewichtsformen nach (41), beziehungsweise (34) besteht. Halbiert man einen nach (41) mit $z = 3,\ 5,\ 7 \quad = n$ infinitesimal deformierten Vollring an einer Nullstelle der Radialverzerrung (Wendepunkt), so besteht an den Schnittstellen, die nunmehr die Lagerorte

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

eines Halbkreisbogens vorstellen sollen, eine Tangentialverzerrung »(v_0)« (vgl. Fig. 6 und 7); zählt man »s« vom Bogenscheitel, so gilt

$$(u) = C.\cos\frac{n\pi s}{S}$$

und aus (2)

$$(v) = \frac{1}{r}.C.\frac{S}{n\pi}.\sin\frac{n\pi s}{S} \qquad n = 3,\ 5,\ 7$$

so daß man wegen $\frac{S}{r\pi} = 1$ für die Lagerorte $s = \pm\frac{S}{2}$

$$(v_0) = \pm\frac{1}{n}.C$$

erhält. Da ein von Null verschiedenes (v_0) an den Lagern unmöglich ist, muß die nach (u), (v) verzerrte Achse um den Betrag (v_0)

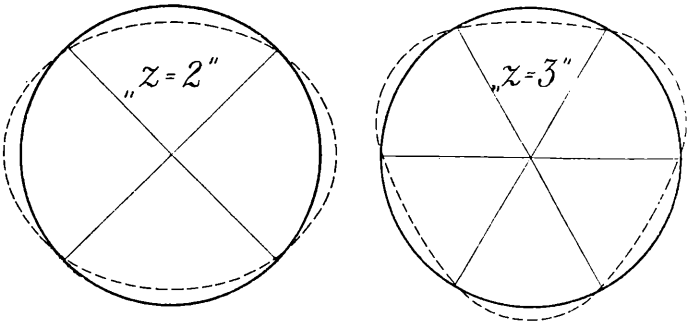

Fig. 7.

vertikal verschoben (und zwar bei $n = 5, 9, 11$. . mit positivem »C« gehoben, bei $n = 3, 7, 13$. mit positivem »C« gesenkt) werden, was sich beim (u), (v)-Verlauf in einer Überlagerung der Kurven

$$(\bar{u}) = \pm(v_0).\cos\frac{\pi s}{S} \qquad (\bar{v}) = \pm(v_0).\sin\frac{\pi s}{S}$$

äußert. Es resultieren demnach die Deformationsfiguren (Gruppe B) des gelenkig gelagerten Halbkreisbogens in der aus dem Vollring hergeleiteten Form

$$\left.\begin{aligned} u &= (u) + (\bar{u}) = \\ &= \frac{1}{n}\ C\left(n.\cos\frac{n\pi s}{S} \pm \cos\frac{\pi s}{S}\right) \\ v &= (v) + (\bar{v}) = \\ &= \frac{1}{n}.C\left(\sin\frac{n\pi s}{S} \pm \sin\frac{\pi s}{S}\right) \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &»+« \text{ für } n = 3,\ 7,\ 11 \\ &»-« \text{ für } n = 5,\ 9,\ 13. \end{aligned}$$

und besteht tatsächlich Übereinstimmung mit den Beziehungen (34).

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Eine Betrachtung der Deformationsfiguren Fig. 7 ließe es naheliegend erscheinen, alle Gleichgewichtsformen und damit alle kritischen Belastungswerte eines offenen, gelenkig gelagerten Kreisbogens aus denen des vollen Ringes abzuleiten [vgl. etwa Mayer's Herleitung der kleinsten Wurzel (l. c.)]. Dabei dürfte jedoch, wie oben für den Sonderfall des Halbkreisbogens dargelegt wurde, auf den Verlauf der tangentialen Verzerrungskomponente nicht vergessen werden, der in Fig. 7 nicht unmittelbar zum Ausdruck kommt und der Randbedingung »$v_0 = 0$« unterliegt; für die gesamte Formengruppe B würde man ansonsten an Stelle eines radialen Verzerrungsverlaufes nach (31) reine Sinuslinien ungerader Halbwellenzahl erhalten, die das »v« an beiden Rändern nicht zum Verschwinden bringen (vgl. Fig. 6) und für die kritischen Belastungen die Formel (36) liefern, die grundsätzlich nur eine Näherungsformel für die strenge Knickbedingung (III) vorstellt.

7. Instabilitätsnachweis mit Hilfe des Energiekriteriums.

Ein offener, in unverschieblichen Gelenken gelagerter Bogenstab möge unter der Einwirkung eines radialen, gleichmäßig verteilten Außendruckes stehen, dessen Intensität mit einem der im vierten Abschnitt gefundenen kritischen Werte übereinstimmt. Die Achse des Bogens, die nach Voraussetzung in einem derartigen Gleichgewichtsfall die Kreisform besitzt, erfahre eine aufgezwungene infinitesimale Verzerrung, die durch die radiale und tangentiale Verschiebungskomponente $\bar{u}$, $\bar{v}$ aller Achspunkte eindeutig festzulegen ist und den Lagerungsbedingungen

$$s = \pm \frac{S}{2}, \; \bar{u} = \bar{u}'' = \bar{v} = 0$$

Genüge leisten soll. Eine solche Verformung der Achse des belasteten Bogenstabes bedingt Energieänderungen zufolge der von der tangentialen Kämpferkraft »T_K« und der radialen Außenlast »$p \, . \, S$ geleisteten Verzerrungsarbeit sowie der im elastischen Stab aufgespeicherten Deformationsenergie. Die von zweiter Ordnung kleinen und daher das Gleichgewicht nicht tangierenden Beträge dieser Energieänderungen seien mit $\delta^2 A_T$, $\delta^2 A_p$ und $\delta^2 A_B$ bezeichnet und ergeben in der Summe

$$\delta^2 \mathfrak{A} = \delta^2 A_T + \delta^2 A_p - \delta^2 A_B \tag{42}$$

jenen Rest an Arbeitsvermögen des Systems nach der Verzerrung, der kennzeichnend für die Art des Gleichgewichtes bezüglich der Verzerrung $\bar{u}$, $\bar{v}$ ist. Nimmt »$\delta^2 \mathfrak{A}$« den Sonderwert Null an, dann verbleibt kein Energierest, um die aufgezwungene infinitesimale Verzerrung rückgängig zu machen oder zu vergrößern (Stabilität, beziehungsweise Labilität), so daß der Gleichgewichtszustand als indifferent gegenüber der Verformung u, v zu bezeichnen ist und

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

der verzerrte Zustand auch vom energetischen Standpunkt dem unverzerrten gleichwertig erscheint.

Die folgenden Untersuchungen, die den Indifferentismus des Gleichgewichtes an den ermittelten Stabilitätsgrenzen bezeugen sollen, haben demnach den Nachweis zum Ziel, daß für die den Knickbedingungen (II) und (III) entspringenden kritischen Belastungswerte bei achsialen Verzerrungen $\bar{u}$, $\bar{v}$, deren Verlauf durch die Beziehungen (26), beziehungsweise (31) festgelegt wird, die Gleichung $\delta^2 \mathfrak{A} = 0$ tatsächlich erfüllt ist.

Wie im ersten Abschnitt dargelegt wurde, erfährt die kreisförmige Bogenachse bei einer Verformung $\bar{u}$, $\bar{v}$ eine spezifische Dehnung, die p. 649 ermittelt wurde und mit Rücksicht auf (2) die

$$\varepsilon = \frac{1}{2\,r^2}\left(\bar{v} + \frac{d\,\bar{u}}{d\,\varphi}\right)^2 = \frac{1}{2\,r^2}\cdot\left(\bar{v} + r^2\,\frac{d^2\,\bar{v}}{d\,s^2}\right)^2$$

Form annimmt, so daß sich die Arbeitsleistung der konstanten Tangentialkraft $T_K = p\,.\,r$ mit

$$\delta\,A_T + \delta^2\,A_T = \int_{-s/2}^{+s/2} T_K\,.\,\varepsilon\,.\,d\,s = \frac{p}{2\,r}\int_{-s/2}^{+s/2}\left(\bar{v} + r^2\,\frac{d^2\,\bar{v}}{d\,s^2}\right)^2 d\,s \tag{43}$$

ergibt. Um weiters die von der Radiallast »p« geleistete Verzerrungsarbeit zu berechnen, sei die Belastung $p\,.\,d\,s$ eines Bogenelements $d\,s$ nach dem Koordinatenkreuz der Fig. 1 in die beiden Komponenten $p\,.\,d\,x$ und $p\,.\,d\,y$ zerlegt; nach der Verformung besitzen die Projektionen des Elements die Größen $d\,\bar{x}$ und $d\,\bar{y}$ und befindet sich der Angriffspunkt der Kraft $p\,.\,d\,s$ an einer Stelle $\bar{x}$, $\bar{y}$, so daß die Arbeit der beiden Kraftkomponenten

$${}_x\delta\,A_p = -p\,.\,\frac{d\,\bar{y} + d\,y}{2}\,.\,(x - \bar{x})$$

$${}_y\delta\,A_p = +p\,.\,\frac{d\,\bar{x} + d\,x}{2}\,.\,(y - \bar{y})$$

beträgt. Diese Beziehungen resultieren nach Einführung der p. 648 ermittelten Werte für $d\,\bar{x}$, $d\,\bar{y}$ und $\bar{x}$, $\bar{y}$ bei Berücksichtigung der Bedingung (2) in der Form

$${}_x\delta\,A_p = p\,.\,d\,\varphi\,.\,(\bar{u}\,.\,\sin\varphi - \bar{v}\cos\varphi)\,.\left[r\,.\,\sin\varphi + \frac{1}{2}\left(\bar{v} + \frac{d^2\,\bar{v}}{d\,\varphi^2}\right).\cos\varphi\right]$$

$${}_y\delta\,A_p = p\,.\,d\,\varphi\,.\,(\bar{u}\,.\,\cos\varphi + \bar{v}\sin\varphi)\,.\left[r\,.\,\cos\varphi - \frac{1}{2}\left(\bar{v} + \frac{d^2\,\bar{v}}{d\,\varphi^2}\right).\sin\varphi\right]$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

und liefern in ihrer Summe die gesuchte Arbeit

$$\delta A_p + \delta^2 A_p = \int_{-s/2}^{+s/2} ({}_x\delta A_p + {}_y\delta A_p) =$$

$$= \frac{p}{r} \int_{-s/2}^{+s/2} \left[r . \bar{u} - \frac{1}{2} . \bar{v} . \left(\bar{v} + r^2 \frac{d^2 \bar{v}}{d s^2} \right) \right] d s \quad (44)$$

der radialen Außenlast. Die der Verzerrung entspringende, im Bogenstab aufgespeicherte Deformationsenergie

$$\delta A_B = \frac{1}{2} \int_{-s/2}^{+s/2} \frac{B^2}{E' . I} . d s$$

wird mit Verwendung von (2), (3) und (5) durch die Gleichung

$$\delta A_B + \delta^2 A_B = \frac{E' . I}{2} \int_{-s/2}^{+s/2} \left(\frac{d \psi}{d s} \right)^2 d s = \frac{E' I}{2 r^4} \int_{-s/2}^{+s/2} \left(\bar{u} + r^2 . \frac{d^2 \bar{u}}{d s^2} \right)^2 d s \quad (45)$$

festgelegt. Die einzige von erster Ordnung kleine Arbeitsleistung δA_p verschwindet, da das bestimmte Integral über $\bar{u}$ gemäß der Beziehung (2) die Differenz der Werte $\bar{v}$ an den beiden Lagerorten vorstellt. Eine Zusammenfassung aller Glieder zweiter Größenordnung in (43), (44) und (45) im Sinne der Gleichung (42) ergibt dann mit

$$\delta^2 \mathfrak{A} = \frac{p}{2 r} \int_{-s/2}^{+s/2} \left(\bar{v} + r^2 \frac{d^2 \bar{v}}{d s^2} \right)^2 d s - \frac{p}{2 r} \int_{-s/2}^{+s/2} \bar{v} . \left(\bar{v} + r^2 \frac{d^2 \bar{v}}{d s^2} \right) d s -$$

$$- \frac{E' . I}{2 r^4} \int_{-s/2}^{+s/2} \left(\bar{u} + r^2 \frac{d^2 \bar{u}}{d s^2} \right)^2 d s = \frac{T_K}{2} \int_{-s/2}^{+s/2} \frac{d^2 \bar{v}}{d s^2} . \left(\bar{v} + r^2 \frac{d^2 \bar{v}}{d s^2} \right) d s -$$

$$- \frac{E' . I}{2 r^4} \int_{-s/2}^{+s/2} \left(\bar{u} + r^2 . \frac{d^2 \bar{u}}{d s^2} \right)^2 d s \quad (46)$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

jenen von zweiter Ordnung kleinen Rest an Arbeitfähigkeit des Systems nach erfolgter Verzerrung, der als Kriterium des Gleichgewichtscharakters zu dienen hat.

Gruppe A der Deformationsfiguren:

Die Einführung der aus den Verzerrungskomponenten (26) zu berechnenden Ausdrücke

$$\bar{v} + r^2 \frac{d^2 \bar{v}}{d s^2} = \frac{2}{r} \; C_5 . \left[\left(1 - \frac{4 z^2 \pi^2 r^2}{S^2} \right) . \cos \frac{2 z \pi s}{S} - (-1)^z \right]$$

$$\bar{u} + r^2 \frac{d^2 \bar{u}}{d s^2} = - \frac{4 z \pi}{S} . C_5 . \left(1 - \frac{4 z^2 \pi^2 r^2}{S^2} \right) . \sin \frac{2 z \pi s}{S}$$

sowie der, der zugeordneten Knickbedingung (II) entspringenden kritischen Kämpferdrücke

$$T_K = \frac{E' . I}{S^2} . \left(4 z^2 \pi^2 - \frac{S^2}{r^2} \right) = - \frac{E' . I}{r^2} \left(1 - \frac{4 z^2 \pi^2 r^2}{S^2} \right)$$

liefert für die Gleichung (46)

$$\delta^2 \mathfrak{A} = \frac{E' . I}{r^4} \; C_5^2 . \frac{8 z^2 \pi^2}{S^2} . \left(1 - \frac{4 z^2 \pi^2 r^2}{S^2} \right) .$$

$$\left[\left(1 - \frac{4 z^2 \pi^2 r^2}{S^2} \right) . \int_{-S/2}^{+S/2} \cos \frac{4 z \pi s}{S} \, d s - (-1)^z \int_{-S/2}^{+S/2} \cos \frac{2 z \pi s}{S} \, d s \right];$$

da nun beide Integrale innerhalb der vorgegebenen Grenzen verschwinden, besteht $\delta^2 \mathfrak{A} = 0$ und erscheint damit der Indifferentismus des Gleichgewichtes unter den kritischen Belastungswerten der Knickbedingung (II) nachgewiesen.

Gruppe B der Deformationsfiguren:

Führt man die Hilfsgröße $K = \frac{T_K . r^2}{E' . I}$ ein, so erhält man für die Verzerrungskomponenten (31) nach einigen Umformungen und Verwendung der Beziehungen (11)

$$\bar{u} = 2 \sqrt{\alpha_2} . C_5 \left[K . \cos \frac{S}{2 r} \sqrt{1 + K} - \right.$$

$$\left. - (1 + K) \frac{\cos \frac{S}{2 r} \sqrt{1 + K}}{\cos \frac{S}{2 r}} . \cos \frac{s}{r} + \cos \frac{s}{r} \sqrt{1 + K} \right] \text{ und}$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$\bar{v} = 2\sqrt{\alpha_2}\,.\,C_5\left[\frac{Ks}{r}\,.\cos\frac{S}{2r}\sqrt{1+K} - \right.$$

$$\left. -(1+K)\frac{\cos\frac{S}{2r}\sqrt{1+K}}{\cos\frac{S}{2r}}\,.\sin\frac{s}{r} + \frac{1}{\sqrt{1+K}}\,.\sin\frac{s}{r}\sqrt{1+K}\right].$$

Damit wird

$$\bar{v} + r^2\frac{d^2\bar{v}}{ds^2} = 2\sqrt{\alpha_2}\,.\,K\,.\,C_5\left(\frac{s}{r}\,.\cos\frac{S}{2r}\sqrt{1+K} - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{\sqrt{1+K}}\sin\frac{s}{r}\sqrt{1+K}\right)$$

und resultiert für das erste Integral der Gleichung (46)

$$\int_{-S/2}^{+S/2}\frac{d^2\bar{v}}{ds^2}\,.\left(\bar{v} + r^2\frac{d^2\bar{v}}{ds^2}\right)ds = 2\sqrt{\alpha_2}\,K\,.\,C_5\left\{\frac{1}{r}\,.\cos\frac{S}{2r}\sqrt{1+K}\,.\right.$$

$$.\left(\frac{dv}{ds}\,.\,s - v\right)\Bigg|_{-S}^{+S/2} - 2\,.\sqrt{\alpha_2}\,.\,C_5\,.\frac{K}{\sqrt{1+K}}\int_{S/2}^{+S/2}\frac{1+K}{r^2}$$

$$.\frac{\cos\frac{S}{2r}\sqrt{1+K}}{\cos\frac{S}{2r}}\sin\frac{s}{r}\,.\sin\frac{s}{r}\sqrt{1+K} - \frac{\sqrt{1+K}}{r^2}\,.$$

$$.\sin^2\frac{s}{r}\sqrt{1+K}\Bigg|\,ds = 4\,\frac{\alpha_2 K}{r^2}\,C_5^2\left|\frac{S}{2} - \left(3+\frac{2}{K}\right)\frac{r}{\sqrt{1+K}}\,.\right.$$

$$.\cos\frac{S}{2r}\sqrt{1+K}\,\sin\frac{S}{2r}\sqrt{1+K} + 2r\left(1+\frac{1}{K}\right)\operatorname{tg}\frac{S}{2r}\,.$$

$$\left..\cos^2\frac{S}{2r}\sqrt{1+K}\right].$$

Ferner gilt

$$\bar{u} + r^2\frac{d^2\bar{u}}{ds^2} = 2\sqrt{\alpha_2}\,K\,C_5\left(\cos\frac{S}{2r}\sqrt{1+K} - \cos\frac{s}{r}\sqrt{1+K}\right),$$

so daß für das zweite Integral

$$\int_{-S/2}^{+S/2}\left(\bar{u} + r^2\frac{d^2\bar{u}}{ds^2}\right)^2 ds = 4\,\alpha_2 K^2\,.\,C_5^2\,.\left[S\,.\cos^2\frac{S}{2r}\sqrt{1+K} + \frac{S}{2} - \right.$$

$$\left. -\frac{3r}{\sqrt{1+K}}\cos\frac{S}{2r}\sqrt{1+K}\,.\sin\frac{S}{2r}\sqrt{1+K}\right]$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

gefunden wird. Aus der Definitionsgleichung für »K« folgt ferner

$$\frac{T_K}{2} = \frac{K E' . I}{2 r^2}$$

und erhält dann die kritische Beziehung (46) die Form

$$\delta^2 \mathfrak{A} = \frac{2 \alpha_2 K^2 E' . I}{r^4} . C_5^2 . \cos \frac{S}{2 r} \sqrt{1 + K}$$

$$\left[\frac{2 r}{K} (1 + K) . \cos \frac{S}{2 r} \sqrt{1 + K} . \operatorname{tg} \frac{S}{2 r} - S . \cos \frac{S}{2 r} \sqrt{1 + K} - \right.$$

$$\left. - \frac{2 r}{K} . \frac{1}{\sqrt{1 + K}} . \sin \frac{S}{2 r} \sqrt{1 + K} \right] = - \frac{4 \alpha_2}{r} . C^2 \; T_K .$$

$$. \cos \frac{S}{2 r} \sqrt{1 + K} . \left\{ \left[\frac{S^2 T_K}{4 E' . I} \; \frac{2 r}{S} \left(1 - \frac{2 r}{S} \operatorname{tg} \frac{S}{2 r} \right) - \operatorname{tg} \frac{S}{2 r} \right] . \right.$$

$$\left. . \cos \frac{S}{2 r} \sqrt{1 + K} + \frac{1}{\sqrt{1 + K}} \sin \frac{S}{2 r} \sqrt{1 + K} \right\} .$$

Der in eckige Klammern geschlossene Faktor ist identisch mit dem eingeklammerten Ausdruck der Gleichung (20) und stellt die Knickbedingung (III) vor, die nach Voraussetzung befriedigt ist; $\delta^2 \mathfrak{A}$ nimmt demnach den Sonderwert Null an und beweist damit den Indifferentismus des Gleichgewichts unter den kritischen Belastungswerten der Knickbedingung (III) bezüglich der zugeordneten Deformationsfiguren.

8. Ableitung einer Näherungsformel für die kleinste kritische Vertikalbelastung eines flachen Zweigelenkbogens.

Die im folgenden durchgeführten Untersuchungen haben die Ermittlung der kleinsten kritischen Belastung eines Zweigelenkbogens zum Ziele, der zu den wichtigsten Tragwerkssystemen des Brückenbaues zählt und eine vertikale Belastung erfährt, die mit Ausnahme seines Eigengewichtes durch eine Reihe von Ständern oder Hängestangen von der Fahrbahn auf den Bogen übertragen wird. Die Ableitung, die von dem günstigen Einfluß einer steifen Fahrbahn absieht und sich an die Gedankengänge Usingers (l. c.) anschließt, ist an einige angenähert zutreffende Voraussetzungen gebunden und trägt den Charakter einer guten Näherungsrechnung. Der Bogenpfeil »f« möge gegenüber der Stützweite »l« genügend klein sein, um für die Achse des unter der kleinsten kritischen Vollast

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

stehenden, elastisch oder schon unelastisch verformten Bogens angenähert einen Kreis vom Radius »r« annehmen zu können, der mit der Stützlinie des Bogens zusammenfällt und damit ein Stabilitätsproblem liefert; das Pfeilverhältnis sei weiters auch klein genug, um die im Bogen wirksame achsiale Druckkraft »P« als konstant und gleich dem Kämpferdruck ansehen zu können. Ferner mögen die Ständer oder Hängestangen in ausreichender Anzahl vorhanden sein, so daß die gesamte Bogenbelastung durch eine gleichmäßig verteilte Vertikallast »p« zu ersetzen ist.

Der Horizontalschub eines vollbelasteten Zweigelenkbogens kann mit Rücksicht auf die vorausgesetzte Kleinheit der Pfeilhöhe mit $H = \frac{p\,l^2}{8f}$ in Rechnung gestellt werden, so daß die Kämpferreaktion und mit ihr die im Bogen wirksame, angenähert konstante Achsialkraft

$$P = \sqrt{H^2 + \left(\frac{p\,l}{2}\right)^2} \doteq \frac{p\,l^2}{8f}\left(1 + 8\frac{f^2}{l^2}\right)$$

beträgt und nach Einführung des Bogenradius $r \doteq \frac{l^2}{8f}$ die Form

$$P = p\,.\,r\,.\left(1 + \frac{1}{8}\,.\,\frac{l^2}{r^2}\right) \tag{47}$$

annimmt. Die der gesuchten ersten Stabilitätsgrenze zugeordnete Deformationsfigur wird durch die radiale und tangentiale Verzerrungskomponente u, beziehungsweise v festgelegt und seien in Analogie zu den p. 660 resultierenden Formen die Ansätze

$$\begin{aligned} u &= C\,.\sin\frac{\pi\varphi}{\gamma} \\ v &= -\frac{\alpha}{\pi}\,.\,C\,.\cos^2\frac{\pi\varphi}{\gamma} \end{aligned} \tag{48}$$

gewählt, wobei sich u, v, φ und γ auf die Fig. 1 beziehen und »C« als sehr klein anzusehen ist. Diese Ansätze genügen sowohl der im ersten Abschnitt begründeten Beziehung $u - \frac{dv}{d\varphi} = 0$ als auch den, der Lagerung des Bogens in unverschieblichen Gelenken entspringenden Randbedingungen

$$\varphi = \pm\gamma,\ u = v = B = 0$$

(vgl. den dritten Abschnitt). Durch eine derartige Verformung erfährt die Bogenachse eine spezifische Längenänderung, für die mit Zuhilfenahme der p. 670 ermittelten Gleichung die Größe

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$\varepsilon = \frac{1}{2r^2}\left(v + \frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \frac{C^2}{2r^2}\left(\frac{2\gamma}{\pi}\,.\cos^2\frac{\pi\varphi}{\gamma} - \frac{\pi}{\gamma}.\sin\frac{\pi\varphi}{\gamma}\right)^2$$

gefunden wird, so daß die von der Achsialkraft »P« geleistete Verzerrungsarbeit

$$\delta A_P + \delta^2 A_P = P\int^{+\gamma}\varepsilon\, r\, d\varphi = +P\,\frac{\gamma^3}{2r\pi^2}.C^2\left[2+\left(\frac{\pi^2}{\gamma^2}-1\right)^2\right] \quad (49)$$

beträgt. Die Horizontalprojektion »dx« eines Bogenelements »ds« ändert sich bei der Verformung, wie im ersten Abschnitt berechnet wurde, mit Rücksicht auf die grundlegende Beziehung (2) zu

$$d\bar{x} = \left[r\cos\varphi - \left(v + \frac{du}{d\varphi}\right).\sin\varphi\right] d\varphi$$

und beschreibt dabei der Angriffspunkt der auf das Element wirkenden Außenkraft »$p.dx$« einen Verschiebungsweg, dessen Projektion auf die vertikale Kraftrichtung mit

$$y - \bar{y} = u.\cos\varphi + v.\sin\varphi$$

erhalten wird; die Arbeit der Außenlast »p« bei der Verzerrung ergibt sich demnach mit

$$\delta A_p + \delta^2 A_p = \int_{-\gamma}^{+\gamma} p.\,\frac{dx + d\bar{x}}{2}\,.(y - \bar{y}) =$$

$$= p\,r\int^{+\gamma}(u\cos^2\varphi + v\sin\varphi\cos\varphi)\,d\varphi - \frac{1}{2}\,.p\int_{-}^{\gamma}\left(v + \frac{du}{d\varphi}\right).$$

$$.(u\sin\varphi\cos\varphi + v.\sin^2\varphi)\,d\varphi.$$

Nach Einführung des gewählten Verformungsansatzes (48) erhält man für das erste Integral, das die Größe »C« linear enthält und damit den von erster Ordnung kleinen Arbeitsanteil δA_p vorstellt, den Wert Null, während für das zweite Glied, das wegen des Faktors »C^2« den von zweiter Ordnung kleinen Energierest $\delta^2 A_p$ bedeutet, nach einigen Umformungen

$$\delta^2 A_p = +\frac{p\gamma^3}{4\pi^2}.C^2.\left(\frac{\pi^2}{\gamma^2} - 3\right) \quad (50)$$

resultiert. Für die im Bogen aufgespeicherte Formänderungsarbeit wurde die Beziehung (45) abgeleitet und es gilt für eine Verzerrung gemäß (48) mit Zuziehung des »resultierenden« Moduls E' (vgl. p. 647)

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$\delta A_B + \delta^2 A_B = \frac{E'.I}{2\,r^3}\int_{-\gamma}^{+\gamma}\left(u + \frac{d^2 u}{d\varphi^2}\right)^2 d\varphi =$$

$$= \frac{E'.I.\gamma}{2\,r^3}.C^2.\left(\frac{\pi^2}{\gamma^2} - 1\right)^2 \qquad (51)$$

Da weder die Verzerrungsarbeit der Achsialkraft »P« noch die Formänderungsarbeit ein von erster Ordnung kleines Glied aufweist und δA_p, wie sich zeigte, verschwindet, wird $\delta \mathfrak{A} = 0$ erfüllt und damit das Gleichgewicht bestätigt. Soll nun dieses Gleichgewicht insbesonders ein indifferentes sein, also die Belastung »p« einen kritischen Wert vorstellen, so muß im Sinne der Darlegungen p. 669 $\delta^2 \mathfrak{A} = 0$ bestehen und man erhält mit Rücksicht auf (47)

$$\delta^2 \mathfrak{A} = \delta^2 A_P + \delta^2 A_p - \delta^2 A_B = C^2.\left\{p.\frac{\gamma^3}{2\,\pi^2}.\left(1 + \frac{1}{8}\,\frac{l^2}{r^2}\right).\right.$$

$$\left..\left[2 + \left(\frac{\pi^2}{\gamma^2} - 1\right)^2\right] + p.\frac{\gamma^3}{4\,\pi^2}\left(\frac{\pi^2}{\gamma^2} - 3\right) - \frac{E'.I.\gamma}{2\,r^3}\left(\frac{\pi^2}{\gamma^2} - 1\right)^2\right\} = 0.$$

Aus dieser Bedingung ergibt sich nach Einführung der Bogenlänge $S = 2\,r\,\gamma$ die kritische Intensität der vertikalen Vollbelastung mit

$$p = \frac{4\,\pi^2\,E'.I}{r.S^2}.\omega,$$

$$\omega = \frac{\left(\frac{4\,\pi^2}{S^2} - \frac{1}{r^2}\right)^2}{\frac{16\,\pi^4}{S^4} + \frac{2\,\pi^2}{r^2\,S^2}\left(\frac{l^2\,\pi^2}{S^2} - 3\right) + \frac{1}{r^4}.\left(\frac{3}{2} - \frac{l^2\,\pi^2}{S^2}\right)} \qquad \text{(IV)}$$

und wird für die im Bogen bestehende kleinste kritische Achsialkraft (beziehungsweise Kämpferreaktion) aus (47) die Beziehung

$$P_K = \frac{4\,\pi^2.E'.I}{S^2}.\omega.\left(1 + \frac{l^2}{8\,r^2}\right) \qquad \text{(V)}$$

gewonnen. Für unbeschränkt anwachsende Bogenradien gilt

$$\frac{l}{r} \to 0,\ \omega \to 1,\ P_K \to \frac{4\,\pi^2\,E'\,I}{S^2},$$

welcher Grenzwert die zweite Knickwurzel nach Euler-Kármán vorstellt, wie sie dem aus Gründen der Randbedingung $v = 0$ und der grundlegenden Forderung (2) gewählten Ansatz (48) für die Radialverzerrung entspricht. Eine numerische Auswertung zeigt, daß für die vorausgesetzten kleinen Pfeilverhältnisse die kritischen Kämpferdrücke nach Bedingung (V) weitgehend übereinstimmen mit denen nach Formel (27) des Falles der Radialbelastung.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

R. Mayer hat, wie einleitend vermerkt wurde, im Werke Gustavsburg Knickversuche mit Zweigelenkbögen unternommen (vgl. R. Mayer, Die Knickfestigkeit, 1921, p. 146) und gelten für den Versuchsstab folgende Werte:

$$l = 180\ cm,\ f = 24 \cdot 1\ cm,\ S = 188 \cdot 6\ cm,\ r = 180 \cdot 05\ cm,$$

$$E' = E = 2{,}000.000\ kg/cm^2,\ I = 0 \cdot 1343\ cm^4.$$

Aus (IV) berechnet sich

$$\omega = \frac{\frac{1}{r^4}.34 \cdot 965^2}{\frac{1}{r^4}\left[35 \cdot 965^2 + 17 \cdot 98.(8 \cdot 99 - 3) + (1 \cdot 5 - 8 \cdot 99)\right]} = 0 \cdot 877$$

und damit aus (V)

$$P_K = \frac{39 \cdot 478.2{,}000.000.0 \cdot 1343}{188 \cdot 6^2}.0 \cdot 877.1 \cdot 125 = 294 \cdot 2\ kg;$$

der Versuch ergab $P_K = 294 \cdot 0\ kg$. Mayer hat mit elementaren Mitteln eine Näherungsformel abgeleitet, die bei Vernachlässigung der Bogenverkürzung mit der maßgebenden Knickbedingung (27) des Falles einer radialen Außenlast identisch ist und für den kritischen Kämpferdruck

$$P_K = \frac{2{,}000.000.0 \cdot 1343}{188 \cdot 6^2} \cdot \left[4\,\pi^2 - \left(\frac{188 \cdot 6}{180 \cdot 05}\right)^2\right] = 290 \cdot 2\ kg$$

liefert.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1927

Band/Volume: 136_2a

Autor(en)/Author(s): Chwalla Ernst

Artikel/Article: Das ebene Stabilitätsproblem des Kreisbogens. 645-678