Gedruckt mit Unterstützung aus dem Jerome und Margaret Stonborough-Fonds

Über die Perioden der Sonnenflecken

Von

S. Oppenheim in Wien

K. M. der Akad.

(Mit 1 Karte)

(Vorgelegt in der Sitzung am 9. Februar 1928)

1. Mit der Frage nach den Periodizitäten in den Häufigkeitszahlen der Sonnenflecken hat man sich vielfach befaßt. Im wesentlichen wurde aber bisher nur ein wenig befriedigender Erfolg erzielt. Wohl hat R. Wolf[1] in den von ihm berechneten Relativzahlen ein Maß angegeben, das sich, da es in gleicher Weise die Anzahl der Flecken, wie ihre Ausdehnung auf der Sonnenscheibe berücksichtigt, allgemeiner Anerkennung erfreut und zur Bestimmung der in ihnen vorhandenen Periodizitäten sehr geeignet ist. Doch zeigte es sich, daß die aus ihnen in erster Annäherung bestimmte Periode von 11 Jahren, die der Erscheinung ihr charakteristisches Gepräge gibt, nur ein sehr roher Mittelwert ist, daß die wahre Periode vielmehr ganz unregelmäßig zwischen den immerhin weiten Grenzen von 8 bis fast 17 Jahren schwankt und so in aller Strenge kaum an eine einheitliche Periode der Erscheinung und daher auch nicht an eine analytische Darstellung der Relativzahlen durch eine reine, bloß nach Vielfachen des dieser einzigen Periode von 11 Jahren entsprechenden Winkels fortschreitende Fourier'sche Reihe gedacht werden könne. Im Gegenteil, es mußte angenommen werden, daß die Erscheinung noch von vielen anderen Perioden abhängig sei. Die vielen Versuche ihrer Berechnung waren, wie bekannt, die Hauptveranlassung dazu, verschiedene Methoden zur Bestimmung der in einer periodischen Erscheinung versteckten Perioden aufzustellen und auch ein Prüfstein für ihre Brauchbarkeit. Sie führten sonderbarerweise zu dem Ergebnis, daß neben der Hauptperiode von 11 Jahren und einigen anderen von längerer Dauer, wie 35, 80 und 150 Jahren, zumeist noch eine größerer Reihe solcher auftrat, die nach 8, 9, 10, 12 und 13 Jahren zählen und sich damit nur wenig von der elfjährigen Periode unterscheiden, ein Umstand, der eine neue Schwierigkeit in das Problem hineintrug, da, wie bekannt, wenn eine periodische Erscheinung sich als von zwei oder gar mehreren nahe zusammenfallenden Perioden abhängig erweist, deren Trennung und genauere Fixierung nicht leicht durchführbar ist.

So findet R. Wolf[2] neben der elfjährigen Periode, die er zu $11^1/_3$ Jahren annimmt, noch die neuen von 10, $8^1/_3$ und 81 Jahren,

---

[1] R. Wolf gibt eine ausführliche Geschichte der Entdeckung der Periodizitäten in den Sonnenflecken in seinem Handbuch der Geschichte und Literatur der Astronomie. Zürich 1892, Bd. II, p. 407 ff.

[2] R. Wolf, Astr. Nachr., Bd. 107 (1883), p. 302.

T. N. Thiele[1] neben 11 195 noch die Perioden von 9·805, 5·950 und 3·76 Jahren, ferner A. Schuster,[2] der auf die Wolf'schen Relativzahlen seine Periodogrammanalyse anwandte, neben der Hauptperiode von $11^1/_8$ Jahren, die weiteren 13·5, 8·36, 5·56, 4·79 und 3·71, ohne jedoch mit ihnen eine befriedigende Darstellung der Wolf'schen Zahlen zu erlangen. S. Hirayama[3] erhält die Perioden 11·13, 8·35, 13·36, 5·57 und 16·70 Jahren. Am weitesten ging in diesen Entwicklungen H. Kimura.[4] Er stellt für die Relativzahlen, sie seien im folgenden mit r bezeichnet, eine Reihe auf, die aus 29 einzelnen Sinusgliedern bestehend die Form

$$r = \Sigma a_n \sin(\varphi_n t + A_n) \ldots \quad n = 1, 2, \quad .29$$

hat. Die Darstellung der Zahlen r durch sie ist keine schlechte. Der mittlere Fehler beträgt für die älteren Epochen, d. i. den Zeitraum von 1750 bis 1800

$$\pm 10 \cdot 0 \text{ mit einem Maximalfehler} = 28 \cdot 0$$

und für die neuere Zeit von 1800 bis 1916

$$\pm 6 \cdot 0 \text{ mit einem Maximalfehler} = 13 \cdot 6.$$

Aber mit ihren 3.29 scheinbar voneinander unabhängigen Konstanten, den 29 Amplituden, a_n, den 29 Perioden, $2\pi/\varphi_n$ und den 29 Phasenwinkeln, A_n, kann sie keineswegs als eine den Forderungen einer analytischen Darstellung genügende angesehen werden, besonders wenn man in Erwägung zieht, daß die einzelnen in ihr vorkommenden Periodenwerte, wie etwa

14·97, 13·53, 12·49, 12·05, 11 114,
10·48, 9·99, 9·24, 9·02, 8·55..

sich nur sehr wenig voneinander, wie auch von der Hauptperiode von 11 114 Jahren unterscheiden. Es fällt schwer, sie alle als reell anzusehen, so als ob ihnen tatsächlich eine physische Ursache, d. h. eine wirkliche Schwankung in der Fleckentätigkeit der Sonne zugrunde liege.

In der Unmöglichkeit, die auftretenden Schwierigkeiten zu überwinden, kam man zu der Anschauung, daß die Reihe der Relativzahlen überhaupt eine unstetige sei. In dieser Auffassung teilt A. A. Michelson[5] das ganze Wolf'sche Beobachtungsmaterial in drei Gruppen, die einzeln die Zeiträume 1750—1850, 1800—1900 und 1750—1900 umfassen und findet tatsächlich für jede Gruppe

[1] T. N. Thiele, Astr. Nachr., Bd. 50 (1859), p. 259.
[2] A. Schuster, Astroph. Journal, Tome 23 (1906), p. 101.
[3] S. Hirayama, Proceed. of the Tokyo math. soc., III, 1906.
[4] H. Kimura, Proceed. of the Tokyo math. soc., VII (1913), p. 71, sowie Month. Not. of the royal astr. soc. 73 (1914), p. 543; vgl. auch die Kritik dieser Untersuchung durch H. Turner, ebenda, p. 549 und 716.
[5] A. A. Michelson, Astroph. Journal, *38* (1913), p. 268.

andere Periodenwerte. A. E. Douglas[1] kommt durch eine Periodogrammanalyse zu dem Resultat, daß die elfjährige Periode der Sonnenflecken seit 1750 mindestens zweimal sprungweise ihre Länge geändert haben müsse. H. Turner[2] bestätigt dieses Resultat durch eine ausführliche Rechnung und setzt diese Unstetigkeit, da sie sich innerhalb 30 bis 35 Jahren abspielen soll, mit dem Einsturz von Meteoren des Leonidenschwarmes in die Sonne in Verbindung.

2. Aber die Annahme einer solchen Unstetigkeit kann nur als ein schwacher Ausweg zur Lösung der in dem Problem auftretenden Schwierigkeiten angesehen werden und man muß immerhin die Frage stellen, ob nicht doch diese 29gliederige Reihe von Kimura mit ihrer großen Zahl nahe zusammenfallender Perioden durch eine andere konvergentere und daher zur Darstellung der r-Zahlen eine weit geringere Zahl von voneinander unabhängigen Konstanten erfordernde Form ersetzt werden könne.

In der Tat ist dies der Fall und die Durchführung wird ermöglicht durch folgende zwei Überlegungen:

a) Man gehe von der Hauptperiode aus, die man zu 11·25 Jahren annehme, so daß der ihr entsprechende Winkelwert der jährlichen Geschwindigkeit

$$\varphi = 360°/11 \cdot 25 = 32°$$

betrage, füge eine zweite, gewissermaßen säkulare Periode von rund 180 Jahren mit der jährlichen Änderung

$$\psi = 360°/180 = 2°$$

hinzu und bilde nun aus beiden nach Art der akustischen Kombinationstöne die Summations- und Differentiationsgeschwindigkeiten

$$\varphi \pm n\psi \ldots \quad n = 1, 2, 3.$$

sowie die aus ihnen abzuleitenden Perioden

$$360°/\varphi \pm n\psi.$$

Es ergeben sich damit die folgenden Werte, denen die aus der Kimura'schen Reihe entnommenen gegenübergestellt werden mögen:

			Periode	Kimura-Perioden
$\varphi = 32°$	$\psi = 0°$		11·25	11·114 Jahre
	$\psi = 2$	$\varphi + \psi = 34°$	10·59	10·48
	$2\psi = 4$	$\varphi + 2\psi = 36$	10·00	9·99
	$3\psi = 6$	$\varphi + 3\psi = 38$	9·48	9·24
	$4\psi = 8$	$\varphi + 4\psi = 40$	9·00	9·02
	$5\psi = 10$	$\varphi + 5\psi = 42$	8·57	8·55
	$6\psi = 12$	$\varphi + 6\psi = 44$	8·18	8·25
	$7\psi = 14$	$\varphi + 7\psi = 46$	7·83	7·53
	$8\psi = 16$	$\varphi + 8\psi = 48$	7·50	7·02

---

1 A. E. Douglas, Astroph. Journal, *40* (1914), p. 326.

2 H. Turner, Month. Not., *74* (1915), p. 82.

$\varphi = 32°$	$\psi = 2$	$\varphi - \psi = 30°$	Periode	12·00	Kimura-Perioden	12·05 Jahre
	$2\psi = 4$	$\varphi - 2\psi = 28$		12·86		12·49 »
	$3\psi = 6$	$\varphi - 3\psi = 26$		13·85		13·53
	$4\psi = 8$	$\varphi - 4\psi = 24$		15·00		14·97
	$5\psi = 10$	$\varphi - 5\psi = 22$		16·36		16·59
	$6\psi = 12$	$\varphi - 6\psi = 20$		18·00		19·18
	$7\psi = 14$	$\varphi - 7\psi = 18$		20·00		20·03
	$8\psi = 16$	$\varphi - 8\psi = 16$		22·50		25·63

Die Übersicht läßt eine fast vollkommene Übereinstimmung zwischen den nach der Relation $\varphi \pm n\psi$ berechneten und den in der Kimura'schen Reihe enthaltenen und von ihm gefundenen Periodenwerten erkennen und diese Übereinstimmung ließe sich allenfalls noch verbessern, wenn man an Stelle der angenommenen runden Zahlen $\varphi = 32°$, $\psi = 2°$ andere genauere setzen würde.

Aus ihr folgt das Ergebnis, daß die Kimura'sche 29gliederige Reihe (1) im wesentlichen nichts anderes ist als eine Entwicklung von der Form

$$r = \Sigma a_n \sin [(\varphi \pm n\,\psi)\,t - A_n]. \qquad n = 1,\ 2,\ 3, \qquad 15 \tag{2}$$

in der der Winkel φ der elfjährigen Hauptperiode, der Winkei ψ einer säkularen Periode von mindestens 180 Jahren entspricht und a_n und A_n die zugehörigen Amplituden und Phasenwinkel bedeuten. Schon durch diese neue Form wird die Zahl der in ihr enthaltenen $3.29 = 87$ voneinander unabhängigen Konstanten auf $2.29 = 58$ herabgedrückt, sind doch die verschiedenen Perioden φ_n der ursprünglichen Reihe von Kimura nur mehr Kombinationen der zwei Winkel φ und ψ in der Form

$$\varphi_n = \varphi \pm n\,\psi.$$

Und nur eine Frage tritt noch auf, die nämlich, ob tatsächlich alle die verschiedenen 29 φ_n-Perioden auf diesem Weg zu erreichen sind. Doch ist ihre Beantwortung für die weitere Untersuchung von keiner Bedeutung.

b) Aber auch diese für die Kimura'sche Reihe neu gewonnene Form ist noch nicht die endgültige. Sie läßt sich auf Grund der aus der Theorie der Bessel'schen Funktionen bekannten Relationen

$$\cos (x \sin \psi\, t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} I_n(x) \cos \psi\, t$$

$$\sin (x \sin \psi\, t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} I_n(x) \sin \psi\, t$$

noch weiter umwandeln. Multipliziert man sie mit $\cos \varphi\, t$, beziehungsweise $\sin \varphi\, t$ und addiert und subtrahiert die Produkte, so findet man die neuen Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}\cos(\varphi t \pm x \sin\psi t) &= \sum_{-\infty}^{+\infty} I_n(x) \cos(\varphi + n\psi) t\\ \sin(\varphi t \pm x \sin\psi t) &= \sum_{-\infty}^{+\infty} I_n(x) \sin(\varphi + n\psi) t.\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Sie zeigen, daß Ausdrücke von der Form der rechten Seite der Gleichung (2) nichts anderes sind als Entwicklungsreihen der Funktionen

$$\cos(\varphi t \pm x \sin\psi t), \text{ beziehungsweise } \sin(\varphi t \pm x \sin\psi t),$$

die nicht mehr als rein periodisch bezeichnet werden können, sondern eine besondere Art periodischer Funktionen charakterisieren.

Die rechten Seiten der zwei Gleichungen (2) und (3) sind zwar formal einander ähnlich, sie lauten beide

$$\Sigma\, a_m \cos(\varphi \pm m\psi) t,$$

aber diese Ähnlichkeit zwischen ihnen ist keine vollständige. In der Gleichung (2) sind die Amplitudenkoeffizienten a_n voneinander ganz unabhängig, in der Gleichung (3) dagegen Bessel'sche Funktionen $I_n(x)$ des Argumentes x, das in dem Ausdruck

$$\cos(\varphi t + x \sin\psi t)$$

unter dem Cosinuszeichen steht. Doch kann man die Ähnlichkeit durch eine Verallgemeinerung der Gleichungen (3) vervollständigen. Man setze auf ihre linke Seite an Stelle der in ihr vorkommenden einfachen Sinusfunktion $x \sin\psi t$ eine mehrgliederige Fourier'sche Reihe

$$\Sigma\, x_m \cos(m\psi t - \alpha_m). \qquad m = 1,\ 2,\ 3,.$$

mit verschiedenen Koeffizienten x_m und ebenso verschiedenen Phasenwinkeln α_m und dürfte so zu der allgemeineren Entwicklung

$$A \cos[\varphi t + \Sigma\, x_m \cos(m\psi t - \alpha_m)] = \Sigma\, a_n \cos[(\varphi \pm n\psi) t -- A_n] \tag{4}$$

gelangen, in der zwar die einzelnen a_n und A_n auch nicht ganz unabhängig voneinander sind, aber immerhin als Funktionen der x_m und α_m als von einer größeren Zahl von Argumenten abhängig erscheinen.

Durch die Gleichung (4) ist die Schlußform gegeben, auf die sich die folgende Darstellung der Wolf'schen Relativzahlen gründet. Sie ist nach Hinzufügung von A_0 als deren konstantem Mittelwert gegeben durch

$$r = A_0 + A \cos T. \tag{5}$$

In ihr ist die Größe T bestimmt durch

$$T = \varphi t + \Sigma\, x_m \cos(m\psi t - \alpha_m), \tag{6}$$

wo Winkel φ sich stets auf die elfjährige Hauptperiode der Sonnenflecken, der Winkel ψ dagegen auf eine noch unbekannte säkulare Periode bezieht, die nach mindestens 180 Jahren zählt. Durch sie ist, wie schon erwähnt, eine neue Art periodischer Funktionen charakterisiert, solcher, die nicht eine konstante Hauptperiode haben, sie wäre gegeben durch

$$2\pi/\varphi,$$

sondern deren Periode selbst wieder periodisch zwischen bestimmten Grenzen schwankt. Die Grenzen dieser Schwankung sind:

$$2\pi/\varphi - \Sigma x_m \quad \text{und} \quad 2\pi/\varphi + \Sigma x_m$$

und gerade diese charakteristische Eigenschaft, die gewissermaßen einen großen Teil der vielen scheinbar in den Sonnenfleckenzahlen steckenden Perioden in die Größe T einbezieht, dürfte zur Folge haben, daß sie gegenüber der ursprünglichen Kimura'schen Reihe mit ihren 29 Einzelgliedern eine bessere Konvergenz aufweisen und zur Darstellung der r daher weit weniger Konstanten ausreichend sein werden. Wie die nachfolgenden Rechnungen zeigen, ist dies auch tatsächlich der Fall.

Eine zweite charakteristische Eigenschaft der durch die Gleichung (5) definierten Größe r, sie als Funktion der Zeit auffassend, ist die folgende: Man schreibe sie abgesehen von dem konstanten Gliede A_0 in der komplexen Form

$$r(t) = + Ae^{i(\varphi t + \Sigma x_m \cos(m\psi t - \alpha_m))}$$

auf und setze statt der Zeit t ein $t+\tau$, wo τ die dem Winkel ψ entsprechende Periode bedeutet, dann ergibt sich, da für diese Substitution der periodische Teil $\Sigma x_m \cos(m\psi t - \alpha_m)$ seinen Wert nicht ändert

$$r(t+\tau) = + Ae^{i(\varphi t + \varphi\tau + \Sigma x_m \cos(m\psi t - \alpha_m))} = + Ae^{i\varphi\tau} . r(t)$$

oder wenn man

$$e^{i\varphi\tau} = k$$

annimmt,

$$r(t+\tau) = k\, r(t)$$

eine bekannte Funktionalgleichung, die in vielen Problemen der theoretischen Astronomie eine Rolle spielt und da ausführlich behandelt wird.[1]

Man weiß, daß Funktionen dieser Art aus der Integration linearer Differentialgleichungen hervorgehen, deren Koeffizienten periodische Funktionen von einerlei Periode sind und aus dieser Kenntnis schon kann man einen interessanten Schluß ziehen auf die Art der Kräfte, die die Erscheinung der Sonnenflecken bestimmen.

---

[1] Vgl. unter anderen F. G. W. Hill, Acta Math., VIII (1868), p. 1 bis 36; ferner H. Poincaré, Méthodes nouvelles de la méc. céleste, I (1892), p. 63, und C. V. L. Charlier, Mechanik des Himmels, I (1902), p. 22, der Funktionen mit dieser charakteristischen Eigenschaft periodische Funktionen zweiter Gattung nennt.

Man kennt diese Kräfte nicht, man weiß auch nicht, woher die Sonnenflecken entstehen und nach kurzer Dauer der Sichtbarkeit wieder vergehen, warum sie periodisch bald in größerer, bald in kleinerer Zahl und Ausdehnung auftreten. Aber man kann sich eine Lösung dieser Fragen etwa so denken, daß man annimmt, daß im Inneren der Sonne die da vorhandenen feurigen Massen irgendeine schwingende oder wirbelnde Bewegung ausführen, die sich nach außen hin an ihrer Oberfläche als dunkle Flecken zeigen. Ist die Kraft, die diese Schwingungen hervorruft, konstant, dann würde sie einen rein periodischen Verlauf der Erscheinung der Sonenflecken bedingen, deren Periode, es wäre dies die Hauptperiode von 11 Jahren, nur von der Größe dieser konstanten Kraft abhängt. Da jedoch die Erscheinung nicht rein periodisch verläuft, sondern, wie die weiteren Entwicklungen zeigen, nach dem Schema einer periodischen Funktion mit periodisch schwankender Periode, so genügt zur Erklärung nur mehr die weitere Annahme, daß die wirksame Kraft innerhalb der säkularen Periode von mindestens 180 Jahren periodisch veränderlich ist. Alle anderen Perioden, die in den Relativzahlen in den bisherigen Rechnungen aufgefunden wurden, namentlich auf Grund der Methode der Periodogrammanalyse, sind nicht reell, sondern werden nur durch die große Schwankung von 180 Jahren in der Hauptperiode von 11 Jahren vorgetäuscht.

3. Das Beobachtungsmaterial, auf das sich die folgenden Rechnungen stützen, sind die Relativzahlen von Wolf. Sie sind von ihm berechnet worden, um, wie er sagt, für die wechselnde Tätigkeit auf der Sonne zum Zweck leichterer Vergleichungen ein sicheres Maß zu besitzen, nach dem Schema

$$r = k(10g+f)$$

in dem k ein mit dem Beobachter und seinem Instrument wechselnder und aus korrespondierenden Beobachtungen zu bestimmender Faktor ist, den er für sich und das von ihm benutzte Fernrohr, einen Frauenhofer'schen Vierfüßer mit der Vergrößerung 64 als der Einheit gleich annahm, ferner g die Anzahl der auf der Sonne gleichzeitig vorhandenen Gruppen von Flecken und f deren in Teilen der Sonnenoberfläche ausgedrückte Flächensumme bedeuten. Seit dem Jahre 1850 werden sie von ihm und seinem Nachfolger Wolfer regelmäßig veröffentlicht. Doch glückte es ihm auch noch durch Untersuchung älterer Notizen und Beobachtungen, soweit sie ihm zugänglich waren, die Relativzahlen rückwärts bis zum Jahre 1750 mit genügender Sicherheit zu bestimmen, selbst noch in die weitere Vergangenheit bis zum Jahre 1610, dem der Entdeckung der Sonnenflecken überhaupt, mindestens Näherungswerte für die Epochen ihrer Maxima und Minima festzustellen.

Das Resultat dieser Bemühungen ist eine lückenlose, homogene Reihe der Relativzahlen, ihrer Monats- und Jahresmittel, ihrer ausgeglichenen und nicht ausgeglichenen Werte, die mit dem Jahre 1750 beginnt und bis in die Gegenwart reicht. Eine Zusammenstellung derselben findet man im Handbuch der Astronomie, Bd. I, Zürich 1890, p. 675, ferner in der meteorologischen Zeitschrift, *19* (1902), p. 197 und *39* (1922), p. 327.

Seit dem Jahre 1886 werden auch auf der Greenwicher Sternwarte regelmäßig Fleckenbeobachtungen angestellt und aus ihnen eine neue Art von Zahlengruppen abgeleitet, nach dem Schema der von den Flecken bedeckten Flächen im Verhältnis zur Gesamtfläche der Sonnenscheibe. Eine von 1886 bis 1916 reichende Zusammenstellung ist in den Monthly Notices of the royal astronomical society, *80* (1920), p. 728, veröffentlicht.

Ein Vergleich zwischen ihnen und den Wolf'schen Zahlen dürfte das geeignetste Mittel sein, ein Bild des Genauigkeitsgrades beider zu gewinnen. Die nachstehende Tafel gibt einen Überblick darüber. Hiebei sind die Greenwicher Zahlen durch Division durch die genähert angenommene Zahl 15 auf die Einheit der Wolf'schen reduziert.

Jahr	Relativzahlen			Differenz *W—Gr*	Jahr	Relativzahlen			Differenz *W—Gr*
	Wolf.	Green.	reduz.			Wolf.	Green.	reduz.	
1886·5	25·4	381	25·4	0·0	1902·5	5·0	63	4·2	+ 0·8
87	13·1	179	11·9	+ 1·2	03	24·4	340	22·7	+ 1·7
88	6·9	89	6·0	+ 0·9	04	42·0	488	32·5	+ 9·5
89	6·3	78	5·2	+ 1·1	05	63·5	1191	79·4	— 15·9
90	7·1	99	6·1	+ 1·0	06	53·8	778	51·9	+ 1·9
91	35·6	569	37·9	— 2·3	07	62·0	1082	72·1	— 10·1
92	73·0	1214	80·9	— 7·9	08	48·5	697	46·5	+ 2·0
93	84·9	1458	97·2	— 12·3	09	43·9	692	46·1	— 2·2
94	78·0	1282	85·5	— 7·5	10	18·6	264	19·6	— 1·0
95	64·0	974	60·5	+ 3·5	11	5·7	64	4·3	+ 1·4
96	41·8	543	36·2	+ 5·6	12	3·6	37	2·5	+ 1·1
97	26·5	514	32·3	— 6·1	13	1·4	7	0·5	+ 0·9
98	26·7	375	25·0	+ 1·7	14	9·6	152	10·1	— 0·5
99	12·1	111	6·7	+ 5·4	15	47·4	697	46·5	+ 0·9
1900	9·5	75	5·0	+ 4·5	16	57·1	723	48·2	+ 8·8
01	2·7	29	1·9	+ 0·8					
					Mittel ..	32·9	492	32·6	

Aus den Differenzen *W—Gr* folgt als mittlerer Fehler

$$\pm 5 \cdot 28$$

im absoluten und gegenüber dem Mittelwert aller (32·9) in relativem Maße

$$\pm 16\%$$

eine Zahl, die wohl als Grenze gelten kann, innerhalb der sowohl den Wolf'schen wie den Relativzahlen der Greenwicher Sternwarte als Maß für die Fleckentätigkeit der Sonne Vertrauen zu schenken ist.

4. Die ganze Reihe der Relativzahlen mit ihren 177 von 1750 bis 1926 laufenden einzelnen Jahreswerten nach der Formel

$$r = A_0 + A \cos T$$

auszugleichen, dürfte wohl als unmöglich zu bezeichnen sein. Der durchgeführte Arbeitsplan ging auch nicht dahin, vielmehr war er der folgende: Es wurden an Stelle der Jahresmittel r, die aus ihnen leicht ableitbaren Daten über die Eintrittszeiten der Maxima und Minima der Sonnenflecken M und M' einerseits und die Maxima der Fleckenzahlen R anderseits benützt, ihre Minima wurden stets als verschwindend angenommen, so daß im wesentlichen die Aufgabe vorlag, aus den Extremwerten der Funktion r ihre so komplizierte Form herzustellen. Die Verbindung zwischen beiden wurde derart festgelegt, daß angenommen wurde, daß die Größe T als Funktion der Zeit betrachtet, schon für sich allein die Epochen der Maxima und Minima bestimme, so etwa, daß

1. $T = 2m\pi$, d. h. einem geraden Viefachen von π,

den Eintrittszeiten der Maxima,

$T = (2m+1)\pi$, d. h. einem ungeraden Vielfachen von π,

denen der Minima entspreche,

2. daß ferner für das Maximum der Relativzahlen, R, für das $\cos T = 1$ ist,

$$R = A_0 + A$$

dagegen für das zu Null anzunehmende Minimum, für das $\cos T = -1$,

$$0 = A_0 - A$$

wird, womit für die Größe r sich der Schlußausdruck

$$r = \frac{1}{2} R (1 + \cos T) \tag{7}$$

ergibt, der der weiteren Ausgleichung zugrunde gelegt wurde.

Die Angaben über die Maxima und Minima selbst sind:

	Maximum			Minimum	
	Epoche: M		Relativzahl: R	Epoche: M'	
Jahr	1750·30		92·6	1455·20	
		11·16			11·18
	1761·46		86·5	1766·38	
		8·25			9·08
	1769·71		115·8	1775·46	
		8·67			9·25
	1778·38		158·5	1784·71	
		9·75			13·59
	1788·13		141·2	1798·30	
		17·00			12·30
	1805·13		49·2	1810·60	
		11·25			12·70
	1816·38		48·7	1823·30	
		13·50			10·59
	1829·88		71·7	1833·89	
		7·33			9·65
	1837·21		146·9	1843·54	
		10·92			12·42
	1848·13		131·6	1855·96	
		12·00			11·25
	1860·13		97·9	1867·21	
		10·50			11·75
	1870·63		140·5	1878·96	
		13·33			11·21
	1883·96		74·6	1890·17	
		10·08			11·54
	1894·04		87·9	1901·71	
		12·49			11·89
	1906·53		64·2	1913·60	
		11·10			9·30
	1917·63		105·4	1922·90	
Mittel d. Perioden. .		11·16			11·18

Dazu kommen noch die Daten über die vor das Jahr 1750 fallenden Epochen, denen jedoch eine weit geringere Genauigkeit zuzuschreiben ist:

Maxima: 1615·5, 1626·0, 1639·5, 1649·0, 1660·0, 1675·0, 1685·0, 1693·0, 1705·5, 1718·2, 1727·5, 1738·7, 1750·3;

Minima: 1610·8, 1619·0, 1634·0, 1645·0, 1655·0, 1666·0, 1679·5, 1689·5, 1698·0, 1712·0, 1723·5, 1734·0, 1745·0, 1755·2.

Zur Ausgleichung wurden nur die 16 Werte, M, der Maximumepochen herangezogen. Es wurde angenommen

$$T = 2\,m\,\pi = \varphi\, t + x_1 \cos(\psi\, t - \alpha_1) + x_2 \cos(2\,\psi\, t - \alpha_2) + \qquad (8)$$

und nach der Methode der kleinsten Quadrate die Berechnung der Amplitüden x und der Phasenwinkel α durchgeführt. Als Anfangspunkt der Zählung der Zeit, t, wurde die Epoche 1848·13 gewählt, so daß die Zahl m in dem Ausdruck für die Größe T die Anzahl der seit 1848·13 verstrichenen elfjährigen Perioden bedeutet.

In gleicher Art wurden auch die Größen R, die Maximalwerte der Relativzahlen für die gegebenen Epochen nach dem Ansatz

$$R = R_0 + R_1 \cos(\psi\, t - \rho_1) + R_2 \cos(2\,\psi\, t - \rho_2) + \qquad (9)$$

behandelt und die Koeffizienten R_m sowie die Phasenwinkel ρ_m nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt.

Mit den aus beiden gefundenen Werten wurden nunmehr die Epochen der Minima M', ebenso auch die vor das Jahr 1750 fallenden Eintrittszeiten der Extremwerte und endlich auch die einzelnen Jahreswerte r der Relativzahlen selbst berechnet und mit den beobachteten verglichen. Der Grad der Übereinstimmung, d. h. die Kleinheit der Differenzen, Beobachtung minus Rechnung, gibt dann ein Bild nicht nur für die Richtigkeit der Rechnung, mehr noch für die Anpassung der angenommenen Form

$$r = \frac{1}{2} R\,(1 + \cos T)$$

an die Beobachtungen.

Es lag nicht in der Absicht der vorliegenden Untersuchung, eine volle Übereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung herzustellen, vielmehr war ihr Ziel dahin gerichtet, die Zahl der einzuführenden Konstanten möglichst herabzudrücken und trotzdem eine Genauigkeit zu erzielen, die an die durch die Kimura'sche Reihe erlangte heranreicht. So wurden in dem Ausdruck für M alle Amplituden x, die unter 10° liegen, und in dem Ausdruck für R alle R, die sich kleiner als 2 ergaben, vernachlässigt. Im ganzen blieb je eine sechsgliedrige Reihe für beide Größen M und R übrig, die mit ihren 24 Konstanten, den 12 Amplituden und den 12 Phasenwinkeln immerhin eine bedeutend kleinere Zahl von Konstanten enthält als die 29gliedrige Reihe von Kimura.

5. Die Ausgleichung selbst wurde doppelt durchgeführt, mit dem Winkel

$$\varphi = 32° \quad .\text{Periode} = 11 \cdot 25 \text{ Jahre}$$

und den zwei Annahmen über den Winkel ψ

$$\text{I. } \psi = 1°125. \quad .\text{Periode} = 320 \text{ Jahre.}$$
$$\text{II. } \psi = 1 \cdot 000. \quad .\text{Periode} = 360 \text{ Jahre.}$$

Sie führte zu dem folgenden Ergebnis:

I.

$$\varphi = 32°0553. \quad .\text{Periode } 11 \cdot 231 \text{ Jahre.}$$

$$\begin{aligned}
T = 32°0553\, t & + 1 \cdot 4682 \cos (\ 2\psi t - 230°46) - 43°43 \\
& + 1 \cdot 6873 \cos (\ 4\psi t - \ \ 75 \cdot 52) \\
& + 1 \cdot 5448 \cos (\ 6\psi t - 323 \cdot 14) \\
& + 1 \cdot 0303 \cos (\ 8\psi t - 125 \cdot 26) \\
& + 1 \cdot 1697 \cos (10\psi t - 316 \cdot 39) \\
& + 1 \cdot 3007 \cos (12\psi t - 275 \cdot 16)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R = 100°9 & + 0 \cdot 4638 \cos (\ 2\psi t - 101°29) \\
& + 1 \cdot 6105 \cos (\ 4\psi t - \ \ 35 \cdot 64) \\
& + 1 \cdot 3155 \cos (\ 6\psi t - 289 \cdot 78) \\
& + 1 \cdot 0469 \cos (\ 8\psi t - 214 \cdot 52) \\
& + 1 \cdot 3364 \cos (10\psi t - 287 \cdot 07) \\
& + 1 \cdot 3109 \cos (12\psi t - 246 \cdot 26)
\end{aligned}$$

II.

$$\varphi = 31°8854. \quad .\text{Periode} = 11 \cdot 290 \text{ Jahre.}$$

$$\begin{aligned}
T = 31°8854\, t & + 1 \cdot 2672 \cos (\ 2\psi t - 273°18) - 36°53 \\
& + 1 \cdot 6297 \cos (\ 4\psi t - 103 \cdot 61) \\
& + 1 \cdot 6317 \cos (\ 6\psi t - 353 \cdot 17) \\
& + 1 \cdot 1819 \cos (\ 8\psi t - 215 \ 62) \\
& + 1 \cdot 0364 \cos (10\psi t - \ \ 37 \cdot 73) \\
& + 1 \cdot 2284 \cos (12\psi t - 291 \cdot 77)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R = 100°9 & + 0 \cdot 3499 \cos (\ 2\psi t - 316°82) \\
& + 1 \cdot 5020 \cos (\ 4\psi t - \ \ 47 \cdot 93) \\
& + 1 \cdot 3181 \cos (\ 6\psi t - 341 \cdot 39) \\
& + 1 \cdot 3243 \cos (\ 8\psi t - 225 \cdot 55) \\
& + 0 \cdot 9190 \cos (10\psi t - 321 \cdot 43) \\
& + 1 \cdot 2012 \cos (12\psi t - 262 \cdot 78)
\end{aligned}$$

(Koeffizienten logarithmisch, die Zeit t von 1848·13 an zu zählen).

Merkwürdigerweise lassen diese zwei Doppelreihen noch eine bedeutsame Reduktion der in ihnen enthaltenen Konstanten zu. Man braucht hiezu nur die einzelnen Entwicklungsglieder, die in der Form

$$a_m \cos (m\psi t - \alpha_m)$$

auftreten, in die neue

$$a_m \cos m\psi (t - \beta_m)$$

umzuwandeln. Man erhält so

I.

$$
\begin{aligned}
T = 32^\circ 0553\, t &+ 1\cdot 4682 \cos\ 2\psi\,(t - 102\cdot 43) - 43^\circ 43 \\
&+ 1\cdot 6873 \cos\ 4\psi\,(t - 96\cdot 78) \\
&+ 1\cdot 5448 \cos\ 6\psi\,(t - 101\cdot 21) \\
&+ 1\cdot 0303 \cos\ 8\psi\,(t - 93\cdot 92) \\
&+ 1\cdot 1697 \cos 10\psi\,(t - 92\cdot 13) \\
&+ 1\cdot 3007 \cos 12\psi\,(t - 100\cdot 38)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R = 100\cdot 9 &+ 0\cdot 4638 \cos\ 2\psi\,(t - 45\cdot 02) \\
&+ 1\cdot 6105 \cos\ 4\psi\,(t - 87\cdot 92) \\
&+ 1\cdot 3155 \cos\ 6\psi\,(t - 96\cdot 23) \\
&+ 1\cdot 0469 \cos\ 8\psi\,(t - 103\cdot 84) \\
&+ 1\cdot 3362 \cos 10\psi\,(t - 89\cdot 52) \\
&+ 1\cdot 3109 \cos 12\psi\,(t - 98\cdot 25)
\end{aligned}
$$

II.

$$
\begin{aligned}
T = 31^\circ 8851\, t &+ 1\cdot 2672 \cos\ 2\psi\,(t - 136\cdot 59) - 36^\circ 53 \\
&+ 1\cdot 6297 \cos\ 4\psi\,(t - 115\cdot 90) \\
&+ 1\cdot 6317 \cos\ 6\psi\,(t - 118\cdot 86) \\
&+ 1\cdot 1819 \cos\ 8\psi\,(t - 116\cdot 95) \\
&+ 1\cdot 0364 \cos 10\psi\,(t - 111\cdot 77) \\
&+ 1\cdot 2284 \cos 12\psi\,(t - 114\cdot 33)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R = 100\cdot 9 &+ 0\cdot 3499 \cos\ 2\psi\,(t - 158\cdot 45) \\
&+ 1\cdot 5020 \cos\ 4\psi\,(t - 101\cdot 98) \\
&+ 1\cdot 3181 \cos\ 6\psi\,(t - 116\cdot 90) \\
&+ 1\cdot 3243 \cos\ 8\psi\,(t - 118\cdot 19) \\
&+ 0\cdot 9190 \cos 10\psi\,(t - 102\cdot 14) \\
&+ 1\cdot 2020 \cos 12\psi\,(t - 111\cdot 90)
\end{aligned}
$$

und sieht nunmehr, daß die Größen β_m, die jetzt nicht mehr Winkelgrößen, sondern nach Division durch ψ im Zeitmaß gegeben sind, nur wenig, selbst in den beiden Ausdrücken für T und R voneinander differieren, so daß sie wohl zu einem Mittelwert vereinigt werden können. Als solcher wurde angenommen für:

I. 95·37 Jahre, II. 110·37 Jahre.

Durch seine Annahme reduziert sich die Zahl der eingeführten Konstanten fast auf die Hälfte. Es bleiben nur die 12 Amplitudenkoeffizienten in T und R, die 2 Periodenwinkel φ und ψ sowie endlich 2 als Anfangskonstante zu bezeichnenden Werte R_0 und T_0 und die allen Einzelgliedern gemeinschaftliche Phasenzeit, die den Anfangspunkt der Zählung der Zeit von 1848·13 verschiebt bei

I auf 1943·50, für II auf 1958·50.

Mit diesem angenommenen Mittelwert wurde eine neue Ausgleichung vorgenommen, mit der gleichen Beschränkung wie bei der ersten, in dem Ausdruck für T Amplituden kleiner als 10°, in R solche, die kleiner als 2 sind, zu vernachlässigen. Es ergab sich:

I.

$$
\begin{aligned}
T = 32^\circ 20\, t &+ 1\cdot 4417 \cos\ 2\psi t - 212^\circ 25 \\
&+ 1\cdot 8046 \cos\ 4\psi t \\
&+ 1\cdot 4850 \cos\ 6\psi t \\
&+ 1\cdot 1068 \cos\ 8\psi t \\
&+ 1\cdot 2040 \cos 10\psi t \\
&+ 0\cdot 9829 \cos 12\psi t
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R = 103{\cdot}5 &+ 0{\cdot}8239 \cos 3\psi t \\
&+ 1{\cdot}3948 \cos 4\psi t \\
&- 1{\cdot}1666 \cos 5\psi t \\
&+ 0{\cdot}9751 \cos 6\psi t \\
&- 1{\cdot}0487 \cos 7\psi t
\end{aligned}
$$

II.

$$
\begin{aligned}
T = 32^\circ 125\, t &+ 0{\cdot}8650 \cos 2\psi t - 105^\circ 03 \\
&+ 1{\cdot}7023 \cos 4\psi t \\
&+ 1{\cdot}4953 \cos 6\varphi t \\
&+ 1{\cdot}2315 \cos 8\psi t \\
&+ 1{\cdot}3188 \cos 10\psi t \\
&+ 1{\cdot}3085 \cos 12\psi t
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R = 99{\cdot}1 &+ 0{\cdot}8153 \cos 3\psi t \\
&+ 1{\cdot}2767 \cos 4\psi t \\
&- 1{\cdot}3700 \cos 5\psi t \\
&+ 0{\cdot}9081 \cos 6\psi t \\
&- 0{\cdot}9597 \cos 7\psi t \\
&+ 1{\cdot}2254 \cos 12\psi t
\end{aligned}
$$

Ausdrücke, in denen die Koeffizienten logarithmisch angesetzt sind und die Zeit t von 1943·50, respektive 1958·50 zu zählen ist.

Die Darstellung der Beoabachtungswerte durch sie ist eine ziemlich befriedigende. Sie hält sich mit ihren mittleren Fehlern innerhalb der erwarteten Grenzen.

Es folgt zunächst die Mitteilung der Differenzen $B-R$, für die Maxima der Epochen und Relativzahlen, die zur Ausgleichung benutzt wurden, sodann für die der Minima der Epochen, die bei der Ausgleichung nicht verwendet wurden und daher schon ein Maß für die Genauigkeit geben, mit der die angenommene Formel für T auch diese darzustellen vermag.

Epochen der Maxima				Maxima der Relativzahlen			
I.	II.	($B-R$) I.	($B-R$) II.	I.	II.	($B-R$) I.	($B-R$) II.
1750·09	1749·92	+0·21	+0·38	63·1	72·0	+29·5	+20·6
60·81	61·15	+0·65	+0·31	71·1	82·5	+15·4	+ 4·0
70·15	69·32	−0·44	+0·39	109·2	132·3	+ 6·6	−16·5
78·12	77·91	+0·26	+0·47	147·9	168·9	+10·6	−10·4
89·51	91·83	−1·38	−3·70	149·3	124·4	− 8·1	+16·8
1805·49	1806·03	−0·36	−0·90	72·6	72·6	−23·4	−23·4
17·18	17·30	−0·80	−0·92	62·6	54·4	−13·9	− 5·7
28·57	28·70	+1·31	+1·18	103·3	92·8	−31·6	−21·1
38·48	38·39	−1·27	−1·18	120·0	134·0	+26·9	+12·9
49·05	49·36	−0·92	−1·23	123·3	122·5	+ 8·3	+ 9·1
60·06	60·40	+0·07	−0·27	119·2	117·3	−21·3	−19·4
71·32	71·29	−0·69	−0·66	116·3	122·5	+24·2	+18·0
82·69	83·07	+1·27	+0·91	95·2	72·8	−20·6	+ 1·8
95·29	94·08	−1·25	−0·04	75·7	87·6	+12·2	+ 0·3
1906·85	1906·97	−0·34	−0·44	80·1	75·1	−15·9	−10·9
17·46	18·30	+0·17	−0·66	104·4	81·9	+ 1·8	+24·6
mittlerer Fehler..		±0·87	±1·22			±19·5	±15·9

Epochen der Minima			
I.	II.	(*B*—*R*) I.	(*B*—*R*) II.
1755·39	1755·96	—0·19	—0·76
65·81	65·43	+0·57	+0·95
74·13	73·37	+1·37	+2·09
82·78	84·93	+1·93	+0·22
98·73	1800·80	—0·43	—2·50
1811·28	11·35	—0·68	—0·75
23·13	23·36	+0·17	—0·06
33·55	33·55	+0·36	+0·34
43·60	43·64	—0·06	—0·10
54·57	55·05	+1·39	+0·91
65·63	65·69	+1·58	+1·52
77·00	77·26	+1·96	+1·70
88·80	88·55	+1·37	+1·62
1901·39	1900·26	—0·22	+1·45
12·07	13·01	+1·53	+0·59
22·78	23·47	+0·12	—0·57
mittlerer Fehler..		±1·13	±1·51

Ebenso ist die Übereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung für die Eintrittszeiten der Maxima und Minima, die vor das Jahr 1750 fallen, entsprechend dem geringeren Genauigkeitsgrad, der ihnen zukommt, eine durchwegs befriedigende. Es ist:

Epochen der Maxima				Epochen der Minima			
I.	II.	(*B*—*R*) I.	(*B*—*R*) II.	I.	II.	(*B*—*R*) I.	(*B*—*R*) II.
1612·7	1615·4	+2·8	+0·1	1608·6	—	+2·2	—
21·0	26·7	+5·0	—0·7	16·6	1621·5	+2·4	—2·5
35·4	38·1	+4·1	+1·4	26·7	32·1	+7·3	+1·9
49·1	49·3	—0·1	—0·3	43·1	44·1	+1·9	+0·9
60·9	59·0	—0·9	+1·0	54·9	54·2	+0·1	+0·8
71·7	70·1	+3·3	+5·0	66·8	64·3	—0·6	+1·7
81·6	81·1	+3.4	+3·9	76·6	75·7	+2·9	+3·8
92·5	92·0	+1·0	+1·5	87·0	86·4	+2·5	+3·1
1703·5	1703·8	+2·0	+1·7	98·0	98·0	0·0	0·0
14·9	14·8	+3·3	—3·4	1709·1	1709·2	+2·9	+2·8
26·4	27·8	+1·1	—0·3	20·5	21·1	+3·0	+2·4
39·2	38·9	—0·5	—0·2	32·8	33·7	+1·2	+0·3
50·1	49·9	+0·2	+0·4	44·8	44·1	+0·2	+0·9
mittlerer Fehler..		±2·74	±2·23			±2·91	±2·12

Endlich möge noch eine Übersicht über die Abweichungen (*B*—*R*) der einzelnen Jahreswerte der Relativzahlen selbst folgen, die sich aber nicht über den ganzen Zeitraum von 1750 bis in die Gegenwart erstreckt, sondern erst mit dem Jahre 1840 beginnt, in dem die direkten Beobachtungen von W o l f anheben.

Jahr	Beob.	Rechn. I.	Rechn. II.	$(B-R)$ I.	$(B-R)$ II.
1840·5	61·9	88·7	83·4	— 26·8	— 21·5
1·5	38·9	52·5	47·0	— 13·6	— 8·1
2·5	23·0	18·5	14·3	+ 4·2	+ 8·7
3·5	13·2	1·2	0·3	+ 10·0	+ 12·9
4·5	17·7	7·5	7·7	+ 10·2	+ 10·0
5·5	38·4	27·2	32·4	+ 11·2	+ 6·0
6·5	59·7	61·0	65·0	— 1·3	— 5·3
7·5	97·3	94·5	90·5	+ 2·8	+ 6·8
8·5	125·0	117·1	114·6	+ 7·9	+ 10·4
9·5	95·4	122·1	117·6	— 26·7	— 22·2
1850·5	69·8	108·7	104·5	— 38·9	— 34·7
1·5	63·2	80·3	78·8	— 17·1	— 15·6
2·5	52·8	46·3	47·8	+ 6·5	+ 5·0
3·5	38·4	9·8	19·8	+ 28·6	+ 18·6
4·5	21·0	0·5	2·7	+ 20·5	+ 18·3
5·5	7·7	4.5	1·8	+ 3·2	+ 5·9
6·5	5·2	25·9	18·2	— 20·7	— 13·0
7·5	23·0	58·6	47·5	— 34·6	— 24·5
8·5	56·3	90·6	81·2	— 36·3	— 24·9
9·5	90·3	107·8	107·8	— 17·5	— 17·5
1860·5	94·8	118·9	118·2	— 24·1	— 23·4
1·5	77·7	105·8	108·1	— 28·1	— 30·4
2·5	61·1	78·2	80·4	— 17·1	— 19·3
3·5	45·4	45·1	45·4	+ 0·3	0·0
4·5	45·2	16·1	14·8	+ 29·1	+ 30·4
5·5	31·2	1·1	0·4	+ 30·1	+ 30·8
6·5	14·7	3·1	6·9	+ 11·6	+ 7·8
7·5	8·8	22·1	22·5	— 13·3	— 13·7
8·5	36·9	51·6	65·6	— 14·7	— 28·7
9·5	78·6	83·5	97·2	— 5·9	— 18·6
1870·5	131·8	106·5	117·0	+ 25·3	+ 14·8
1·5	113·8	115·5	119·2	— 1·7	— 5·4
2·5	99·7	107·5	104·3	— 7·8	— 4·6
3·5	67·9	83·8	77·6	— 15·9	— 9·7
4·5	43·1	44·0	46·9	— 0·9	— 3·8
5·5	18·9	21·1	20·5	— 2·2	— 1·6
6·5	11·7	3·9	3·9	+ 7·8	+ 7·8
7·5	11·0	0·5	0·4	+ 10·5	+ 10·6
8·5	3·9	19·2	9·0	— 15·3	— 5·1
9·5	7·7	36·0	25·9	— 28·3	— 18·2
1880·5	31·6	63·6	45·9	— 32·0	— 14·3
1·5	54·4	86·2	63·7	— 31·8	— 9·3
2·5	58·1	97·3	73·1	— 39·2	— 15·0
3·5	65·4	94·2	72·3	— 28·8	— 6·9
4·5	63·3	79·5	61·3	— 16·2	+ 2·0
5·5	51·3	56·8	43·1	— 5·5	+ 8·2
6·5	25·1	32·5	22·8	— 7·4	+ 2·3
7·5	12·6	12·8	6·6	— 0·2	+ 6·0
8·5	7·0	1·8	0·4	+ 5·2	+ 6·6
9·5	6·3	0·8	3·2	+ 5·5	+ 3·1
1890·5	8·4	9·1	22·7	— 0·7	— 14·3
1·5	37·7	23·9	46·3	+ 13·8	— 8·6
2·5	70·0	41·4	63·9	+ 28·6	+ 6·1
3·5	83·7	57·8	84·0	+ 25·9	— 0·3
4·5	79·1	69·3	86·9	+ 9·8	— 7·8

Jahr	Beob.	Rechn. I.	Rechn. II.	$(B-R)$ I.	$(B-R)$ II.
1895·5	61·5	73·6	77·5	— 12·1	— 16·0
6·5	43·1	69 8	58·6	— 26·7	— 15·5
7·5	28·1	57·8	35·8	— 29·7	— 7·7
8·5	24·6	41·1	15·0	— 16·5	+ 9·6
9·5	13·8	22·1	3·0	— 8·3	+ 10·8
1900·5	8·8	6·9	0·3	+ 1·9	+ 8·5
1·5	6·0	0·1	7·4	+ 5·9	— 1·4
2·5	5·7	4·2	21·0	+ 1·5	— 15·3
3·5	23·0	18·5	39·3	+ 4·5	— 16·3
4·5	44·1	39·9	56·1	+ 4·2	— 12·0
5·5	58·7	61·3	68·5	— 2·6	— 9·8
6·5	60·3	76·5	73·9	— 16·2	— 13·6
7·5	56·0	79·5	71·4	— 23·5	— 15·4
8·5	51·2	68·7	61·0	— 17·5	— 9·8
9·5	40·6	47·2	45·1	— 6·6	— 4·5
1910·5	21·0	23·0	27·4	— 2·0	— 6·4
1·5	6·5	5·0	11·1	+ 1·5	— 4·6
2·5	3·4	0·3	1·5	+ 3·1	+ 1·9
3·5	2·2	11·4	1·3	— 9·2	+ 0·9
4·5	11·8	35·8	12·2	— 24·0	— 0·4
5·5	46·4	64·7	32·4	— 18·3	+ 14·0
6·5	59·1	90·3	50·0	— 31·2	+ 9·1
7·5	96·2	98·8	77·1	— 2·6	+ 19·1
8·5	83·1	99 9	85·5	— 16·8	— 2·4
9·5	65·5	86·4	79·1	— 20·9	— 13·6
1920·5	37·6	51·4	58·4	— 13·8	— 20·8
1·5	26·1	21·8	31·2	+ 4·3	— 5·1
2·5	14·2	2·7	8·6	+ 11·5	+ 5·6
3·5	5·8	2·7	0·0	+ 3·1	+ 5·8
4·5	6·7	24·0	5·1	— 7·3	+ 1·6
5·5	44·6	60·3	36·5	— 15·7	+ 8·1
6·5	62·4	96·9	70·9	— 34·5	— 8·5
7·5		112·0	102·8		
8·5		110·0	123·0		
9·5		75·4	126·1		
1930·5		31·1	112·1		

Schon ein kurzer Blick auf dieses Fehlertableau läßt erkennen, daß die Fehler nicht das Gauß'sche Verteilungsgesetz befolgen. Die Zahl der Zeichenfolgen überwiegt weitaus die der Zeichenwechsel und es hat den Anschein, als ob die gleichen Vorzeichen periodenweise auftreten und innerhalb dieser Periode fast regelmäßig ansteigen und bis zum Zeichenwechsel abnehmen, d. h. selbst periodisch verlaufen. Man wird daraus schließen, daß die durchgeführte Ausgleichung nicht vollständig ist, sondern verbessert werden müßte, vielleicht eben so sehr durch eine geänderte Wahl der zwei Hauptperioden φ und ψ, wie innerhalb der Perioden durch Hinzufügung weiterer Glieder in den Entwicklungsreihen für die Größen T und R.

Was ferner den Vergleich zwischen den beiden Annahmen für den Winkel ψ anlangt, entsprechend den Perioden von 320 und 360 Jahren, so entscheidet die Rechnung zugunsten der zweiten. Sie gibt

für den Zeitraum 1840—1890 als mittleren Fehler für I $\pm 20 \cdot 85$, für II $\pm 16 \cdot 48$,
» 1890—1925 I $\pm 16 \cdot 61$, » II $\pm 10 \cdot 70$,
Gesamtbereich I $\pm 19 \cdot 00$, II $\pm 14 \cdot 08$,

d. h. eine weit bessere Darstellung durch die Annahme II als durch I, wiewohl auch sie nicht an die durch die Kimura'sche Rechnung erzielte heranreicht, deren mittlerer Fehler für den Zeitraum 1800—1916 $\pm 6 \cdot 0$ beträgt.

Eine weitere Verbesserung der Darstellung, die noch versucht wurde, war die Annahme $\psi = 0 \cdot 8°$, der die Periode von 450 Jahren entspricht. Die Resultate der Ausgleichsrechnung sind:

$$\begin{aligned} T = 32° t &- 1 \cdot 4183 \cos 3 \psi t - 103°32 \\ &+ 1 \cdot 2513 \cos 4 \psi t \\ &- 1 \cdot 7153 \cos 5 \psi t \\ &+ 1 \cdot 3096 \cos 7 \psi t \\ &- 1 \cdot 5607 \cos 8 \psi t \\ &- 1 \cdot 4535 \cos 9 \psi t \end{aligned} \qquad \begin{aligned} R = 100 \cdot 0 &+ 1 \cdot 3126 \cos 5 \psi t \\ &- 1 \cdot 4045 \cos 6 \psi t \\ &- 1 \cdot 1030 \cos 7 \psi t \\ &+ 0 \cdot 6999 \cos 8 \psi t \\ &- 1 \cdot 3111 \cos 9 \psi t \end{aligned}$$

(Koeffizienten logarithmisch angesetzt und die Zeit t von 1958·5 an zu zählen).

Epochen				Epochen				Relativzahlen	
Maxima	(B—R) III.	Minima	(B—R) III.	Maxima	(B—R) III.	Minima	(B—R) III.	Maxima	(B—R) III.
1612·5	+ 3·0	1618·0	+ 1·0	1750·42	— 0·12	1756·39	— 1·19	57·0	+ 17·6
23·8	+ 2·2	30·1	+ 3·9	61·49	— 0·03	66·01	+ 0·37	89·8	— 3·3
36·8	+ 2·7	43·3	+ 1·7	70·21	— 0·50	74·32	+ 1·14	125·9	— 10·6
49·2	— 0·2	54·2	+ 0·8	78·53	— 0·15	83·09	+ 1·62	155·0	+ 3·5
58·7	+ 1·3	63·0	+ 3·0	88·39	— 0·26	95·06	+ 3·24	148·9	— 7·7
67·1	+ 7·9	71·4	+ 8·1	1803·40	+ 1·73	1811·46	— 0·86	61.7	— 12·5
76·1	+ 8·9	82·3	+ 7·2	17·94	— 1·56	23·41	— 0·11	42·6	+ 6·1
88·6	+ 4·4	97·2	+ 0·8	28·37	+ 1·51	33·18	+ 0·81	91·8	— 20·1
1705·1	+ 0·4	1711·4	+ 0·6	38·05	— 0·84	43·16	+ 0·38	118·5	+ 28·4
16·6	+ 1·6	21·5	+ 2·0	48·61	— 0·48	54·37	+ 1·59	130·1	+ 1·5
26·3	+ 1·2	31·5	+ 2·5	60·24	— 0·11	65·99	+ 1·22	119·0	— 22·0
36·9	+ 1·8	43·7	+ 1·3	71·54	— 0·88	77·11	+ 1·85	111·1	+ 29·4
50·4	— 0·1	56·4	— 1·2	82·70	+ 1·26	85·50	+ 1·67	95·8	— 21·2
				94·59	— 0·55	1900·98	+ 0·73	75·1	+ 12·8
				1906·94	— 0·41	12·71	+ 0·89	71·0	— 6·8
				18·12	— 0·49	23·26	— 0·36	103·8	+ 2·4
				28·28	—	33·29	—	—	—
mittlerer Fehler	± 4·0		± 3·7		± 0·90		± 1·39		± 16·1

Abgesehen von einigen größeren unerklärlichen Differenzen, die auffallenderweise für den Zeitraum 1665—1685 auftreten, unterscheidet sich das vorstehende Fehlertableau nur wenig von dem vorher für $\psi = 1 \cdot 00°$ mitgeteilten. Es gibt fast die gleichen Werte für die mittleren Fehler, sowohl der Epochen der Maxima und Minima als auch der Maxima der Relativzahlen wie die Annahme $\psi = 1°$ Ebenso zeigt sich das gleiche in der Darstellung der Jahreswerte der Relativzahlen, so daß von einer Mitteilung dieser Umgang genommen und sie durch das angeschlossene Diagramm ersetzt wurde, das auf graphischem Weg einen Überblick über die durch die

Rechnung erzielte Genauigkeit geben möge. Die Übereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung ist für viele Perioden eine recht gute, für andere, so etwa die Zeit 1790—1805, 1850—1860 und etwa 1880 eine schlechtere. Sie ließe sich wie schon erwähnt, eben so sehr durch eine Korrektur der zwei Perioden φ und ψ, die innerhalb weiter Grenzen fast unbestimmbar bleiben, wie durch Mitnahme neuer Entwicklungsglieder in den Ausdrücken für R und T verbessern. Immerhin ist aus ihr zu ersehen, daß schon der relativ einfache analytische Ausdruck, auf Grund dessen hier die Berechnung der Relativzahlen erfolgt,

$$r = \frac{1}{2} R (1 + \cos T)$$

sich den anscheinend ganz regellos verlaufenden Änderungen in deren Amplituden und Perioden mit ziemlicher Genauigkeit anpaßt.

6. Man kann, wie bekannt, die Sonne auffassen als einen veränderlichen Stern, dessen fast unendlich kleinen Lichtvariationen durch die auf ihrer Oberfläche auftretenden dunklen Flecken verursacht werden. Die Kurve der Relativzahlen, dargestellt durch die angeschlossene Zeichnung, wird damit ihre Lichtkurve und aus der Tatsache, daß diese Lichtkurve analytisch durch den Ausdruck

$$r = \frac{1}{2} R (1 + \cos T)$$

approximiert werden kann, folgt, daß sie ein veränderlicher Stern von einem besonderen Typus ist, dem Typus einer periodischen Veränderlichkeit mit selbst wieder periodisch veränderlicher Periode und Amplitude. Zu ihrer Erklärung genügt, zunächst bloß vom mathematischen Standpunkt aus die Frage behandelt, die Annahme einer innerhalb der Sonne wirksamen elastischen Kraft, die aber nicht von konstanter Größe ist, da sie sonst einen rein periodischen Lichtwechsel von konstanter Periode hervorrufen würde, sondern selbst periodisch veränderlich sein muß.

Diese so neu sich ergebende Periode, die nach 320 oder 360, oder gar 450 Jahren abzuschätzen wäre, führt zu einer neuen Beziehung zwischen den Erscheinungen der Sonnenflecken und des Erdmagnetismus. Schon seit R. Wolf weiß man, daß die mittleren jährlichen Variationen der Deklination des Erdmagnetismus mit der Fleckenhäufigkeit auf der Sonne vollständig parallel laufen, besonders daß sich in ihnen deren elfjährige Periode deutlich abspiegelt. Es geht dieser Parallelismus bekanntlich so weit, daß man, wie dies Wolf nachgewiesen hat, aus den Relativzahlen r nach einer einfachen linearen Gleichung mit den zwei Konstanten a und b, die für die einzelnen Beobachtungsorte auf der Erde verschiedene Werte haben, die mittleren Amplitüden der Variationen v

$$v = a + b\,r$$

für jeden Erdort berechnen kann und die so berechneten Werte mit den beobachteten in bester Übereinstimmung stehen. Nun tritt aber im Erdmagnetismus neben dieser elfjährigen Periode noch eine große säkulare Periode in der Deklination und Inklination selbst auf, deren Dauer nicht genau bekannt ist, aber zu 450 bis 500 Jahren geschätzt wird. Auch diese Periode erscheint damit als solaren Ursprungs.

Schließlich wäre noch die Frage zu stellen, ob es nicht auch andere veränderliche Sterne gibt von gleichem Typus, wie er für für die Sonne eben nachgewiesen wurde. Tatsächlich ist dies der Fall. Bei vielen, besonders langperiodischen Veränderlichen sind vielfach Ungleichheiten gleicher Art in der Periode konstatiert worden. Sie konnten durch Hinzufügung eines oder mehrerer periodischer Glieder zum Teil behoben werden, so daß sie ebenso wie die Sonne als periodisch Veränderliche, aber mit periodisch schwankender Periode angesprochen werden können. Von den zu ihnen zu zählenden Sternen mögen hier zunächst zwei in eine genäherte Diskussion kommen. Es sind dies R. V. Tauri und der berühmte Veränderliche, Mira Ceti.

Die Beobachtungen von Mira Ceti haben eine sachgemäße strenge und erschöpfende Behandlung durch P. Guthnick[1] erfahren. Er gelangt, p. 252 der Abhandlung, zu der folgenden Darstellung der Epochen und Periode:

$$\begin{aligned}\text{Jul. Tag } 2\,415\,574\cdot96 &+ 331\overset{d}{\cdot}6926\,\mathrm{E}\\ &+ 9\cdot5\sin(1\overset{\circ}{.}4\ \mathrm{E}+245\overset{\circ}{.}8)\\ &+ 11\cdot5\sin(3\cdot85\,\mathrm{E}+124\cdot1)\\ &+ 17\cdot5\sin(4\cdot56\,\mathrm{E}+307\cdot2)\\ &+ 12\cdot3\sin(9\cdot12\,\mathrm{E}+71\cdot8)\end{aligned}$$

mit einem mittleren Fehler von $\pm 11\overset{d}{\cdot}59$ oder $3\cdot5\,^0/_0$ der Größe der Hauptperiode von 331 Tagen. Die einzelnen Periodenwerte in den Sinusgliedern, $1\cdot4\,\mathrm{E}$, $3\cdot85\,\mathrm{E}$, $4\cdot56\,\mathrm{E}$ und $9\cdot12\,\mathrm{E}$ wurden hiebei durch eine Periodogrammanalyse gefunden. Es ist nun nicht schwer, diese Zahlen zu $1\cdot52\,\mathrm{E}$, $3\cdot04\,\mathrm{E}$, $4\cdot56\,\mathrm{E}$ und $9\cdot12\,\mathrm{E}$ abzurunden und sie so als Vielfache einer gemeinsamen Periode von $1\ 52\,\mathrm{E}$, d. i. etwa 218 Jahren aufzufassen, um so mehr als durch Reduktion der Phasenwinkel, die so ganz verschiedene Werte zeigen, durch deren Division durch die Periode sich für sie nur wenig voneinander abweichende Werte ergeben, die zu einem gemeinsamen Mittelwert vereinigt werden können. Man erhält nämlich

$$\begin{aligned}9\cdot5\sin[1\cdot52\,(\mathrm{E}+161\cdot7)]\\ 11\cdot5\sin[3\cdot04\,(\mathrm{E}+159\cdot2)]\\ 17\cdot5\sin[4\cdot56\,(\mathrm{E}+146\cdot3)]\\ 12\cdot3\sin[9\cdot12\,(\mathrm{E}+165\cdot8)]\end{aligned}$$

mit dem Mittel 158·3. Damit wäre der Ansatz für die Zeitfunktion

[1] P. Guthnick, Neue Untersuchungen über den veränderlichen Stern *o* (Mira) Ceti. Nova Acta Leop. Carol., Halle, 1901.

einfach

$$T = \varphi \mathrm{E} + \Sigma a_m \sin m \psi (\mathrm{E} + 158\ 3) \quad m = 1, 2, \quad .6$$

wo $\varphi = 331 \cdot 6926$ Tage und $\psi = 1^\circ 52$ anzunehmen ist, ferner wäre, wenn man die Maxima und Minima des Sternes mit M und m bezeichnet, seine Lichtkurve durch den Ausdruck

$$r = \frac{1}{2}(M + m) + \frac{1}{2}(M - m) \cos T$$

darstellbar, wobei nur die Schwierigkeit vorliegen würde, auf die auch schon Guthnick aufmerksam machte, für die Veränderungen von M und m eine ebenfalls nach Vielfachen des Winkels ψ $(\mathrm{E} + 158 \cdot 3)$ fortschreitende Fourier'sche Reihe aufzufinden. Die strengere Rechnung hierüber ist in Vorbereitung und sei einer späteren Mitteilung vorbehalten. Aus ihr würde, vorausgesetzt, daß sie zu einem befriedigenden Ergebnis führt, folgen, daß Mira Ceti gleichwie die Sonne ein periodisch veränderlicher Stern ist, dessen Periode von 332 Tagen eine periodische Ungleichheit von etwa 218 Jahren zeigt.

Ganz ähnlich liegen die Verhältnisse bei R. V Tauri. Die Periodenwerte sind für diesen Stern 39·256 Tage als die Hauptperiode und ihre periodische Unregelmäßigkeit zählt 1285 Tage. Auch für ihn sind die abschließenden Rechnungen in Vorbereitung.