Gedruckt mit Unterstützung aus dem Jerome und Margaret Stonborough-Fonds

Beiträge zur Quaternionentheorie

Von

Erich Göllnitz (Chemnitz)

(Vorgelegt in der Sitzung am 23. Februar 1928)

Einleitung.

Die Quaternionen werden meistens benutzt, um geometrische oder physikalische Untersuchungen auszuführen. Aus diesem Grunde hat sie auch Hamilton in die Wissenschaft eingeführt. In verhältnismäßig wenigen Arbeiten wird auf sie als höhere komplexe Zahlen eine Algebra, Zahlentheorie oder Funktionentheorie aufgebaut. Lineare Quaternionengleichungen hat Herr Lothar Schrutka Edler von Rechtenstamm in seiner Arbeit »Über die Auflösung linearer Quaternionengleichungen« (Sitzungsber. der Akad. der Wissensch. in Wien, mathem.-naturw. Klasse, Bd. CXV, Abt. IIa, Mai 1906) behandelt. Eine Zahlentheorie hat Herr Hurwitz in seiner Arbeit »Vorlesungen über die Zahlentheorie der Quaternionen« (Berlin, 1919) ausgebaut. Im folgenden sollen einige funktionentheoretische Untersuchungen mitgeteilt werden. Dabei sollen die Quaternionen als Punkte eines vierdimensionalen Raumes R_4 gedeutet werden, wie die gewöhnlichen komplexen Zahlen als Punkte der Gauß'schen Zahlenebene. Ich bezeichne die drei Hamilton'schen, linear unabhängigen, imaginären Einheiten mit i_1, i_2, i_3 und um Summenzeichen zur Abkürzung anwenden zu können, setze ich stets $i_0 = 1$. Nach Hamilton ist dann

$$\left.\begin{aligned} i_1^2 = i_2^2 = i_3^2 = -1; \\ i_1 i_2 = -i_2 i_1 = i_3;\; i_2 i_3 = -i_3 i_2 = i_1;\; i_3 i_1 = -i_1 i_3 = i_2. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Die Quaternionen bezeichne ich stets mit kleinen deutschen Buchstaben, ihre reellen[1] »Komponenten« mit denselben kleinen lateinischen Buchstaben, wie das Beispiel

$$\mathfrak{a} = \sum_{\sigma=0}^{3} a_\sigma i_\sigma$$

zeigt. Von den Hamilton'schen Bezeichnungen benutze ich nur die folgenden: Der absolute Betrag der Quaternion $\mathfrak{a}$ soll mit

$$|\mathfrak{a}| = \sqrt{\sum_{\sigma=0}^{3} a_\sigma^2}\,[2]$$

bezeichnet werden.

---

[1] Sogenannte Biquaternionen sollen also von der Betrachtung ausgeschlossen werden.

[2] Soweit nichts anderes bemerkt ist, verstehe ich unter der Quadratwurzel reellen Zahl stets den positiven Wert dieser Wurzel.

Unter der Norm der Quaternion $\mathfrak{a}$ verstehe ich

$$N(\mathfrak{a}) = |\mathfrak{a}|^2 = \sum_{\sigma=0}^{3} a_\sigma^2.$$

Es ist also dann und nur dann $N(\mathfrak{a}) = 0$, wenn $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$ ist. Die Quaternion

$$\bar{\mathfrak{a}} = a_0 - a_1 i_1 - a_2 i_2 - a_3 i_3$$

soll die zu $\mathfrak{a}$ konjugierte Quaternion heißen. Dann folgen ohne weiteres die Gleichungen

$$\overline{(\bar{\mathfrak{a}})} = \mathfrak{a};\ |\bar{\mathfrak{a}}| = |\mathfrak{a}|;\ N(\mathfrak{a}) = N(\bar{\mathfrak{a}});$$
$$|\mathfrak{a}+\mathfrak{b}| \leqq |\mathfrak{a}| + |\mathfrak{b}|;\ N(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}) = N(\mathfrak{a})\,N(\mathfrak{b}).$$

Bevor ich nun zu den eigentlichen Untersuchungen übergehe, entwickle ich erst einige (zum Teil schon bekannte) Hilfsbetrachtungen.

§ 1.

Es seien

$$\mathfrak{a} = \sum_{\sigma=0}^{3} a_\sigma i_\sigma \text{ und } \mathfrak{b} = \sum_{\sigma=0}^{3} b_\sigma i_\sigma \tag{2}$$

zwei beliebige Quaternionen. Dann ist die Summe $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ definiert durch

$$\mathfrak{a}+\mathfrak{b} = \sum_{\sigma=0}^{3} (a_\sigma + b_\sigma)\, i_\sigma$$

und ihre Differenz durch

$$\mathfrak{a}-\mathfrak{b} = \sum_{\sigma=0}^{3} (a_\sigma - b_\sigma)\, i_\sigma.$$

Das Produkt $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$ ist erklärt durch

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}\,\mathfrak{b} = {} & a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3 + \\ & + (a_0 b_1 + a_1 b_0 + a_2 b_3 - a_3 b_2)\, i_1 + \\ & + (a_0 b_2 + a_2 b_0 + a_3 b_1 - a_1 b_3)\, i_2 + \\ & + (a_0 b_3 + a_3 b_0 + a_1 b_2 - a_2 b_1)\, i_3. \end{aligned} \tag{3}$$

Hieraus folgt

$$\mathfrak{a}\,\mathfrak{b} + \mathfrak{b}\,\mathfrak{a} = 2\,(a_0 b_0 - \sum_{\sigma=1}^{3} a_\sigma b_\sigma) + 2 \sum_{\sigma=1}^{3} (a_0 b_\sigma + a_\sigma b_0)\, i_\sigma \tag{4}$$

und

$$\mathfrak{a}\,\mathfrak{b} - \mathfrak{b}\,\mathfrak{a} = 2\,(a_2 b_3 - a_3 b_2)\, i_1 + 2\,(a_3 b_1 - a_1 b_3)\, i_2 + 2\,(a_1 b_2 - a_2 b_1)\, i_3 \tag{5}$$

oder in Determinantenform

$$\mathfrak{a}\,\mathfrak{b} - \mathfrak{b}\,\mathfrak{a} = 2 \cdot \begin{vmatrix} i_1 & i_2 & i_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix},$$

wobei die Determinante nach den Elementen der ersten Zeile zu entwickeln ist. Wenn $\mathfrak{c}$ eine weitere beliebige Quaternion ist, gelten für Quaternionen die in folgenden Gleichungen ausgedrückten Rechengesetze

$$\mathfrak{a}+\mathfrak{b} = \mathfrak{b}+\mathfrak{a};\ (\mathfrak{a}+\mathfrak{b})+\mathfrak{c} = \mathfrak{a}+(\mathfrak{b}+\mathfrak{c});\ (\mathfrak{a}\,\mathfrak{b})\,\mathfrak{c} = \mathfrak{a}\,(\mathfrak{b}\,\mathfrak{c});$$
$$(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})\,\mathfrak{c} = \mathfrak{a}\,\mathfrak{c}+\mathfrak{b}\,\mathfrak{c};\ \mathfrak{c}\,(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) = \mathfrak{c}\,\mathfrak{a}+\mathfrak{c}\,\mathfrak{b}.$$

Unten werden die aus (3) leicht abzuleitenden Formeln

$$\mathfrak{a}^2 = a_0^2 - \sum_{\sigma=1}^{3} a_\sigma^2 + 2\,a_0 \sum_{\sigma=1}^{3} a_\sigma\, i_\sigma; \tag{6}$$

$$\mathfrak{a}^3 = a_0^3 - 3\,a_0 \sum_{\sigma=1}^{3} a_\sigma^2 + \left(3\,a_0^2 - \sum_{\sigma=1}^{3} a_\sigma^2\right) \cdot \sum_{\sigma=1}^{3} a_\sigma\, i_\sigma; \tag{7}$$

$$\mathfrak{a}^4 = \sum_{\sigma=0}^{3} a_\sigma^4 - 6\,a_0^2 \sum_{\sigma=1}^{3} a_\sigma^2 + 2\,(a_1^2\,a_2^2 + a_1^2\,a_3^2 + a_2^2\,a_3^2) +$$
$$+ 4\,a_0 \left(a_0^2 - \sum_{\sigma=1}^{3} a_\sigma^2\right) \cdot \sum_{\sigma=1}^{3} a_\sigma\, i_\sigma \tag{8}$$

benutzt. Aus (3) folgt noch für $\mathfrak{b} = \bar{\mathfrak{a}}$

$$N(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}\,\bar{\mathfrak{a}} = \bar{\mathfrak{a}}\,\mathfrak{a}.$$

Definition: Zwei Quaternionen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ sollen vertauschbar heißen, wenn $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b} = \mathfrak{b}\,\mathfrak{a}$ ist.

Vertauschbare Quaternionen gibt es, denn jede Quaternion ist z. B. mit ihrer konjugierten Quaternion vertauschbar. Die mit einer festen Quaternion $\mathfrak{c}$ vertauschbaren Quaternionen bilden eine Gruppe, sowohl wenn als Gruppenoperation die Quaternionenaddition als auch wenn als Gruppenoperation die Quaternionenmultiplikation definiert wird; denn sind etwa $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zwei mit $\mathfrak{c}$ vertauschbare Quaternionen, so sind auch die Quaternionen $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$ wegen

$$\begin{aligned}(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})\,\mathfrak{c} &= \mathfrak{a}\,\mathfrak{c}+\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\\ &= \mathfrak{c}\,\mathfrak{a}+\mathfrak{c}\,\mathfrak{b}\\ &= \mathfrak{c}\,(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b})\,\mathfrak{c} &= \mathfrak{a}\,(\mathfrak{b}\,\mathfrak{c})\\ &= \mathfrak{a}\,(\mathfrak{c}\,\mathfrak{b})\\ &= (\mathfrak{a}\,\mathfrak{c})\,\mathfrak{b}\\ &= (\mathfrak{c}\,\mathfrak{a})\,\mathfrak{b}\\ &= \mathfrak{c}\,(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b})\end{aligned}$$

mit $\mathfrak{c}$ vertauschbare Quaternionen. Die Quaternionen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ sind dann und nur dann vertauschbar, wenn

$$a_1 : a_2 \quad a_3 = b_1 \quad b_2 \quad b_3 \tag{9}$$

ist, wie sofort aus (5) folgt. Weiter gilt für vertauschbare Quaternionen der Satz: Die mit einer festen Quaternion $\mathfrak{a}$ vertauschbaren Quaternionen $\mathfrak{b}$ bilden eine überall dichte Punktmenge in R_4.

Beweis: $\mathfrak{M}$ sei die Menge der mit $\mathfrak{a}$ vertauschbaren Quaternionen $\mathfrak{b}$. $\mathfrak{b}$ sei ein beliebiges, aber fest gewähltes Element von $\mathfrak{M}$. $\varepsilon > 0$ sei beliebig gegeben. Dann sei

$$\mathfrak{c} = \sum_{\sigma = 0}^{3} c_\sigma i_\sigma,$$

wobei

$$c_\sigma = b_\sigma - \frac{a_\sigma \varepsilon}{10 |\mathfrak{a}|}; \; \sigma = 0; \; 1; \; 2; \; 3$$

sei. Wegen

$$\mathfrak{b} - \mathfrak{c} = \sum_{\sigma = 0}^{3} \frac{a_\sigma \varepsilon i_\sigma}{10 |\mathfrak{a}|} = \frac{\varepsilon}{10 |\mathfrak{a}|} \cdot \mathfrak{a}$$

ist dann

$$|\mathfrak{b} - \mathfrak{c}| = \frac{\varepsilon}{10 |\mathfrak{a}|} \cdot |\mathfrak{a}| = \frac{\varepsilon}{10} < \varepsilon.$$

Also gibt es in jeder Umgebung jeder Quaternion $\mathfrak{b}$ von $\mathfrak{M}$ eine so definierte Quaternion $\mathfrak{c}$. $\mathfrak{c}$ gehört aber auch zu $\mathfrak{M}$, denn aus (9) folgt, daß es eine reelle Zahl λ gibt, so daß

$$b_\sigma = a_\sigma \lambda; \; \sigma = 1; \; 2; \; 3$$

ist, woraus sich sofort

$$c_\sigma = a_\sigma \left(\lambda - \frac{\varepsilon}{10 |\mathfrak{a}|}\right); \; \sigma = 1; \; 2; \; 3$$

oder

$$c_1 \quad c_2 : c_3 = a_1 \quad a_2 : a_3$$

ergibt.
Also gehört $\mathfrak{c}$ zu $\mathfrak{M}$, womit der Satz bewiesen ist.

§ 2. Über lineare Quaternionengleichungen und linear unabhängige Quaternionen.

Aus der Gleichung

$$\mathfrak{a} \mathfrak{x} = 1$$

folgt für $\mathfrak{a} \neq 0$

$$\bar{\mathfrak{a}} \mathfrak{a} \mathfrak{x} = \bar{\mathfrak{a}}; \; \mathfrak{x} = \frac{\bar{\mathfrak{a}}}{N(\mathfrak{a})}.$$

Dieselbe Lösung hat die Gleichung

$$\mathfrak{x}\,\mathfrak{a} = 1,$$

wenn $\mathfrak{a} \neq 0$ ist.

Definition: Es sei

$$\mathfrak{a}^{-1} = \frac{\bar{\mathfrak{a}}}{N(\mathfrak{a})}.$$

$\mathfrak{a}^{-1}$ soll die zu $\mathfrak{a}$ reziproke Quaternion heißen.
$\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}^{-1}$ sind nach dieser Definition vertauschbare Quaternionen. Es ergeben sich ohne weiteres die Gleichungen

$$(\mathfrak{a}^{-1})^{-1} = \mathfrak{a};\ (\mathfrak{a}\,\mathfrak{b})^{-1} = \mathfrak{b}^{-1}\,\mathfrak{a}^{-1};\ \mathfrak{a}^{-n}\,\mathfrak{a}^{n} = \mathfrak{a}^{n}\,\mathfrak{a}^{-n} = 1;$$
$$(\mathfrak{a}^{n})^{-1} = (\mathfrak{a}^{-1})^{n} = \mathfrak{a}^{-n};\ (\mathfrak{a}^{-n})^{-1} = (\mathfrak{a}^{-1})^{-n} = \mathfrak{a}^{n},$$

wobei $n \geqq 0$ ganz ist, wenn man für alle $\mathfrak{a}$

$$\mathfrak{a}^{0} = 1$$

und für $\mathfrak{a} \neq 0$

$$\mathfrak{a}^{-n} = \frac{\overline{\mathfrak{a}^{n}}}{\{N(\mathfrak{a})\}^{n}}$$

setzt.

Wie ohne weiteres ersichtlich ist, haben die linearen Gleichungen

$$\mathfrak{a}\,\mathfrak{x} = \mathfrak{b}$$

und

$$\mathfrak{x}\,\mathfrak{a} = \mathfrak{b},$$

wenn $\mathfrak{a} \neq 0$ und $\mathfrak{b}$ beliebig gegebene Quaternionen sind, die eindeutig bestimmten Lösungen

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{a}^{-1}\,\mathfrak{b},$$

beziehungsweise

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{b}\,\mathfrak{a}^{-1}.$$

Definition: Es sei für $\mathfrak{b} \neq 0$

$$\left|\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}\right. = \mathfrak{a}\,\mathfrak{b}^{-1};\ \left.\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}\right| = \mathfrak{b}^{-1}\,\mathfrak{a}.$$

Für diese Quotienten ergeben sich leicht die folgenden Relationen

$$N\left(\left.\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}\right|\right) = N\left(\left|\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}\right.\right) = \frac{N(\mathfrak{a})}{N(\mathfrak{b})};\ \left|\left.\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}\right|\right| = \left|\left|\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}\right.\right| = \frac{|\mathfrak{a}|}{|\mathfrak{b}|}.$$

Für $\mathfrak{c} \neq 0$ ist

$$\left.\frac{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}{\mathfrak{c}}\right| = \left.\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{c}}\right| + \left.\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{c}}\right|;\ \left|\frac{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}{\mathfrak{c}}\right. = \left|\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{c}}\right. + \left|\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{c}}\right.;$$
$$\left.\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{c}}\right| \cdot \mathfrak{b} = \left.\frac{\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}}{\mathfrak{c}}\right|;\ \mathfrak{b} \cdot \left|\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{c}}\right. = \left|\frac{\mathfrak{b}\,\mathfrak{a}}{\mathfrak{c}}\right..$$

Für $\mathfrak{b} \neq 0$; $\mathfrak{c} \neq 0$ ist

$$\left|\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}\right. \cdot \left|\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{c}}\right. = \left|\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{c}}\right. \qquad \left.\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{c}}\right| \cdot \left.\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}\right| = \left.\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{c}}\right|.$$

Für $\mathfrak{a} \neq 0$; $\mathfrak{b} \neq 0$ und alle ganzen $n \geqq 0$ ist

$$\left(\left.\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}\right|\right)^{-1} = \left.\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}\right|; \quad \left(\left|\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}\right.\right)^{-1} = \left|\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}\right.; \quad \left(\left.\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}\right|\right)^{-n} = \left(\left.\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}\right|\right)^{n} \quad \left(\left|\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}\right.\right)^{-n} = \left(\left|\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}\right.\right)^{n}$$

Herr Schrutka von Rechtenstamm beweist in seiner oben zitierten Arbeit einige Sätze über linear unabhängige Quaternionen. Er benutzte dabei bestimmte, von ihm zur Abkürzung der Rechnungen eingeführte Symbole. In meine Bezeichnungen übertragen heißen sie $(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b})$, $(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c})$, $(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d})$. Für diese Symbole beweist er eine ganze Reihe von Relationen. Diese Symbole lassen sich durch Determinanten ersetzen, die ich folgendermaßen definiere: Sind die $\mathfrak{a}_{\rho\sigma}$ beliebige Quaternionen, so sei

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{a}_{11} & \mathfrak{a}_{12} \\ \mathfrak{a}_{21} & \mathfrak{a}_{22} \end{vmatrix} = \mathfrak{a}_{11}\,\mathfrak{a}_{22} - \mathfrak{a}_{12}\,\mathfrak{a}_{21};$$

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{a}_{11} & \mathfrak{a}_{12} & \mathfrak{a}_{13} \\ \mathfrak{a}_{21} & \mathfrak{a}_{22} & \mathfrak{a}_{23} \\ \mathfrak{a}_{31} & \mathfrak{a}_{32} & \mathfrak{a}_{33} \end{vmatrix} = \mathfrak{a}_{11} \begin{vmatrix} \mathfrak{a}_{22} & \mathfrak{a}_{23} \\ \mathfrak{a}_{32} & \mathfrak{a}_{33} \end{vmatrix} - \mathfrak{a}_{12} \begin{vmatrix} \mathfrak{a}_{21} & \mathfrak{a}_{23} \\ \mathfrak{a}_{31} & \mathfrak{a}_{33} \end{vmatrix} + \mathfrak{a}_{13} \begin{vmatrix} \mathfrak{a}_{21} & \mathfrak{a}_{22} \\ \mathfrak{a}_{31} & \mathfrak{a}_{32} \end{vmatrix}$$

u. s. w. und allgemein für alle ganzen $n > 1$

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{a}_{11} & \mathfrak{a}_{12} \cdot & \cdot\, \mathfrak{a}_{1n} \\ \mathfrak{a}_{21} & \mathfrak{a}_{22} \cdot & \cdot\, \mathfrak{a}_{2n} \\ & & \\ \mathfrak{a}_{n1} & \mathfrak{a}_{n2} \cdot & \cdot\, \mathfrak{a}_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma=1}^{n} (-1)^{\sigma+1}\, \mathfrak{a}_{1\sigma} \begin{vmatrix} \mathfrak{a}_{21} & \cdot\, \mathfrak{a}_{2,\sigma-1} & \mathfrak{a}_{2,\sigma+1} & \cdot\, \mathfrak{a}_{2n} \\ \mathfrak{a}_{31} \cdot & \cdot\, \mathfrak{a}_{3,\sigma-1} & \mathfrak{a}_{3,\sigma+1} & \cdot\, \mathfrak{a}_{3n} \\ & & & \\ \mathfrak{a}_{n1} \cdot & \cdot\, \mathfrak{a}_{n,\sigma-1} & \mathfrak{a}_{n,\sigma+1} & \cdot\, \mathfrak{a}_{nn} \end{vmatrix}$$

Dann läßt sich der von Herrn Schrutka von Rechtenstamm, l. c., Abschnitt 10, ausgesprochene Satz über linear unabhängige Quaternionen folgendermaßen ausdrücken: Die beiden Quaternionen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ sind dann und nur dann linear unabhängig, wenn

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{a} & \mathfrak{b} \\ \bar{\mathfrak{a}} & \bar{\mathfrak{b}} \end{vmatrix} \neq 0$$

ist. Die drei Quaternionen $\mathfrak{a}$; $\mathfrak{b}$; $\mathfrak{c}$ sind dann und nur dann linear unabhängig, wenn

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{a} & \mathfrak{b} & \mathfrak{c} \\ \bar{\mathfrak{a}} & \bar{\mathfrak{b}} & \bar{\mathfrak{c}} \\ \mathfrak{a} & \mathfrak{b} & \mathfrak{c} \end{vmatrix} \neq 0$$

ist. Die vier Quaternionen $\mathfrak{a}$; $\mathfrak{b}$; $\mathfrak{c}$; $\mathfrak{d}$ sind dann und nur dann linear unabhängig, wenn

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{a} & \mathfrak{b} & \mathfrak{c} & \mathfrak{d} \\ \bar{\mathfrak{a}} & \bar{\mathfrak{b}} & \bar{\mathfrak{c}} & \bar{\mathfrak{d}} \\ \mathfrak{a} & \mathfrak{b} & \mathfrak{c} & \mathfrak{d} \\ \bar{\mathfrak{a}} & \bar{\mathfrak{b}} & \bar{\mathfrak{c}} & \bar{\mathfrak{d}} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{10}$$

ist.

Die oben definierten Quaternionendeterminanten lassen sich für die Theorie des Quaternionenkörpers benutzen. Wie oben definiert, ergeben, wenn $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ irgend welche Quaternionen sind, die Ausdrücke $\mathfrak{a} \pm \mathfrak{b}$; $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ und wenn $\mathfrak{b} \neq 0$ ist, auch $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}|}$ und $\frac{\mathfrak{a}}{|\mathfrak{b}}$ wieder Quaternionen. Also bilden alle Quaternionen einen Körper, den ich mit Q bezeichne. Ich definiere nun: Vier linear unabhängige Quaternionen sollen eine Basis von Q heißen. Eine Basis von Q bilden z. B. die Quaternionen 1; i_1; i_2; i_3. Nach einem von Herrn Schrutka von Rechtenstamm, l. c., Abschnitt 13, bewiesenen Satz lassen sich dann alle Quaternionen linear und eindeutig mit reellen Koeffizienten durch eine Basis $\mathfrak{a}$; $\mathfrak{b}$; $\mathfrak{c}$; $\mathfrak{d}$ von Q darstellen, wobei

$$\triangle(\mathfrak{a};\ \mathfrak{b};\ \mathfrak{c};\ \mathfrak{d}) \neq 0$$

sein muß, wenn man unter $\triangle(\mathfrak{a};\ \mathfrak{b};\ \mathfrak{c};\ \mathfrak{d})$ die auf der linken Seite von (10) stehende Determinante versteht. Insbesondere ergibt eine leichte Rechnung

$$\triangle(1;\ i_1;\ i_2;\ i_3) = -24. \tag{11}$$

Ähnlich wie Herr Schrutka von Rechtenstamm von seinem Symbol $(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d})$ beweist, daß es eine reelle Größe darstellt, läßt sich dies auch von $\triangle(\mathfrak{a};\ \mathrm{b};\ \mathfrak{c};\ \mathfrak{d})$ beweisen. Nennt man also $\triangle(\mathfrak{a};\ \mathfrak{b};\ \mathfrak{c};\ \mathfrak{d})$ die Diskriminante der Basis $\mathfrak{a}$; $\mathfrak{b}$; $\mathfrak{c}$; $\mathfrak{d}$ von Q, so ergibt sich, daß jede Basis von Q eine reelle Diskriminante hat. $\triangle(\mathfrak{a};\ \mathfrak{b};\ \mathfrak{c};\ \mathfrak{d})$ läßt sich auch durch die Komponenten der Quaternionen $\mathfrak{a}$; $\mathfrak{b}$; $\mathfrak{c}$; $\mathfrak{d}$ ausdrücken, und zwar ergibt sich durch eine Rechnung, die wegen ihrer Langwierigkeit hier nicht mitgeteilt werden soll, das Resultat

$$\triangle(\mathfrak{a};\ \mathfrak{b};\ \mathfrak{c};\ \mathfrak{d}) = -24 \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}, \tag{12}$$

woraus sofort ersichtlich ist, daß $\triangle(\mathfrak{a};\ \mathfrak{b};\ \mathfrak{c};\ \mathfrak{d})$ reell ist. Für $\mathfrak{a} = 1$; $\mathfrak{b} = i_1$; $\mathfrak{c} = i_2$; $\mathfrak{d} = i_3$ geht (12) in (11) über. Nach (12) ist, wenn die Komponenten von $\mathfrak{a}$; $\mathfrak{b}$; $\mathfrak{c}$; $\mathfrak{d}$ ganze Zahlen sind, $\triangle(\mathfrak{a};\ \mathfrak{b};\ \mathfrak{c};\ \mathfrak{d})$ eine reelle ganze, durch 24 teilbare Zahl. Es sei nun definiert: Ist für eine Basis von Q mit ganzzahligen Komponenten $\triangle(\mathfrak{a};\ \mathfrak{b};\ \mathfrak{c};\ \mathfrak{d}) = \pm 24$, so soll $\mathfrak{a}$; $\mathfrak{b}$; $\mathfrak{c}$; $\mathfrak{d}$ eine Minimalbasis von Q heißen, und zwar eine eigentliche Minimalbasis, wenn $\triangle(\mathfrak{a};\mathfrak{b};\mathfrak{c};\mathfrak{d}) = -24$ ist, und eine uneigentliche Minimalbasis, wenn $\triangle(\mathfrak{a};\mathfrak{b};\mathfrak{c};\mathfrak{d}) = +24$ ist. Demnach bildet jedes der folgenden acht Systeme

$$\begin{array}{rrrr}
1, & i_1, & i_2, & i_3; \\
1, & -i_1, & i_2, & -i_3; \\
-1, & i_1, & i_2, & -i_3; \\
1, & -i_1, & -i_2, & i_3; \\
-1, & -i_1, & i_2, & i_3; \\
-1, & i_1, & -i_2, & i_3; \\
-1, & -i_1, & -i_2, & -i_3
\end{array}$$

eine eigentliche Minimalbasis und jedes der acht Systeme

$$\begin{array}{rrrr}
-1, & i_1, & i_2, & i_3; \\
1, & -i_1, & i_2, & i_3; \\
1, & i_1, & -i_2, & i_3; \\
1, & i_1, & i_2, & -i_3; \\
-1, & -i_1, & -i_2, & i_3; \\
-1, & -i_1, & i_2, & -i_3; \\
-1, & i_1, & -i_2, & -i_3; \\
1, & -i_1, & -i_2, & -i_3
\end{array}$$

eine uneigentliche Minimalbasis von Q.

Ist $\mathfrak{a}$ eine beliebige Quaternion und $n \geqq 1$ ganz, so sind wegen

$$\triangle(\mathfrak{a}^n;\mathfrak{a}^{n+1};\mathfrak{a}^{n+2};\mathfrak{a}^{n+3}) = 6\,(\mathfrak{a}^n\,\overline{\mathfrak{a}^{n+1}}\,\mathfrak{a}^{n+2}\,\overline{\mathfrak{a}^{n+3}} + $$
$$+ \mathfrak{a}^{n+3}\,\overline{\mathfrak{a}^{n+2}}\,\mathfrak{a}^{n+1}\,\overline{\mathfrak{a}^{n}} - \mathfrak{a}^{n+2}\,\overline{\mathfrak{a}^{n+1}}\,\mathfrak{a}^{n}\,\overline{\mathfrak{a}^{n+3}} - \mathfrak{a}^{n+3}\,\overline{\mathfrak{a}^{n}}\,\mathfrak{a}^{n+1}\,\overline{\mathfrak{a}^{n+2}}) = 0$$

die Quaternionen $\mathfrak{a}^n$; $\mathfrak{a}^{n+1}$; $\mathfrak{a}^{n+2}$; $\mathfrak{a}^{n+3}$ linear abhängig. Insbesondere können als die Quaternionen $\mathfrak{a}$; $\mathfrak{a}^2$; $\mathfrak{a}^3$; $\mathfrak{a}^4$ für keinen Wert von $\mathfrak{a}$ eine Basis von Q bilden. Wegen

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{a} & \mathfrak{a}^2 \\ \bar{\mathfrak{a}} & \overline{\mathfrak{a}^2} \end{vmatrix} = \mathfrak{a}\,\overline{\mathfrak{a}^2} - \mathfrak{a}^2\,\bar{\mathfrak{a}} = (\bar{\mathfrak{a}} - \mathfrak{a})\,N(\mathfrak{a})$$

sind die Quaternionen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}^2$ dann und nur dann linear abhängig, wenn $\mathfrak{a} = 0$ oder wenn $\mathfrak{a} = \bar{\mathfrak{a}}$, d. h. wenn $\mathfrak{a}$ eine reelle Quaternion ist.[1]

[1] Nach Enzykl. der math. Wiss., Ia, 4, Nr. 10, oder nach Hurwitz, Vorlesungen über die Zahlentheorie der Quaternionen, Vorlesung I, Formel 23 (Berlin 1923), lautet die charakteristische Gleichung der Quaternionen

$$\mathfrak{a}^2 - 2\,a_0\,\mathfrak{a} + N(\mathfrak{a}) = 0$$

oder

$$\mathfrak{a}^2 - (2\,a_0 - \bar{\mathfrak{a}})\,\mathfrak{a} = 0.$$

Sie gilt für alle Quaternionen $\mathfrak{a}$. Also sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}^2$ dann und nur dann linear abhängig, wenn die Quaternion $2\,a_0 - \bar{\mathfrak{a}}$ reell, d. h. $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ ist. Also muß dann auch $\mathfrak{a}$ reell sein.

Aus $\triangle(\mathfrak{a};\ \mathfrak{a}^2;\ \mathfrak{a}^3;\ 0)$ folgt, daß auch die drei Quaternionen $\mathfrak{a};\ \mathfrak{a}^2;\ \mathfrak{a}^3$ stets linear abhängig sind.[1]

§ 3. Definition und elementare Eigenschaften der Quaternionenfunktionen.

$\mathfrak{M}$ sei eine beliebige Menge von Quaternionen

$$\mathfrak{z} = \sum_{\sigma=0}^{3} z_\sigma i_\sigma.$$

Ist jeder Quaternion $\mathfrak{z}$ von $\mathfrak{M}$ eine Quaternion

$$\mathfrak{w} = \sum_{\sigma=0}^{3} w_\sigma i_\sigma$$

zugeordnet, so soll $\mathfrak{w}$ eine Funktion von $\mathfrak{z}$ heißen und mit $\mathfrak{w} = \mathfrak{f}(\mathfrak{z})$ bezeichnet werden. Der Stetigkeitsbegriff läßt sich wie bei Funktionen komplexen Arguments einführen. Die Funktion $\mathfrak{f}(\mathfrak{z})$ soll in $\mathfrak{z}_0$ stetig heißen, wenn $\mathfrak{z}_0$ zu $\mathfrak{M}$ gehört und zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\mathfrak{z}_0;\ \varepsilon) > 0$ existiert, so daß

$$|\mathfrak{f}(\mathfrak{z}) - \mathfrak{f}(\mathfrak{z}_0)| < \varepsilon$$

ist, sobald

$$|\mathfrak{z} - \mathfrak{z}_0| < \delta$$

ist. Ist δ von $\mathfrak{z}_0$ unabhängig, so soll $\mathfrak{f}(\mathfrak{z})$ in $\mathfrak{M}$ gleichmäßig stetig heißen. Ebenso wie in der komplexen Funktionentheorie lassen sich dann die folgenden Sätze beweisen: Sind $\mathfrak{f}_1(\mathfrak{z})$ und $\mathfrak{f}_2(\mathfrak{z})$ in $\mathfrak{M}$ stetig (gleichmäßig stetig), so sind in $\mathfrak{M}$ auch die Funktionen $\mathfrak{f}_1(\mathfrak{z}) \pm \mathfrak{f}_2(\mathfrak{z})$ und $\mathfrak{f}_1(\mathfrak{z}) \cdot \mathfrak{f}_2(\mathfrak{z})$ und sofern in $\mathfrak{M}$ $\mathfrak{f}_2(\mathfrak{z}) \neq 0$ ist, auch die Funktionen $\frac{\mathfrak{f}_1(\mathfrak{z})}{\mathfrak{f}_2(\mathfrak{z})}|$ und $|\frac{\mathfrak{f}_1(\mathfrak{z})}{\mathfrak{f}_2(\mathfrak{z})}$ stetig (gleichmäßig stetig). Ist die Funktion $\mathfrak{f}(\mathfrak{z})$ in der abgeschlossenen Punktmenge $\mathfrak{M}$ in R_4 stetig, so ist hier $\mathfrak{f}(\mathfrak{z})$ beschränkt. Man nennt $\mathfrak{f}(\mathfrak{z})$ eine ganze rationale Funktion, wenn sie eine Summe von endlich vielen Gliedern der Form

$$\mathfrak{a}_1 \mathfrak{z}^{n_1} \mathfrak{a}_2 \mathfrak{z}^{n_2} \ldots \mathfrak{a}_k \mathfrak{z}^{n_k} \mathfrak{a}_{k+1}$$

ist, wobei $n_1;\ n_2;\ \ldots\ n_k$ ganze Zahlen, $k \geqq 0$ ganz und $\mathfrak{a}_1;\ \mathfrak{a}_2;\ \ldots\ \mathfrak{a}_{k+1}$ konstante Quaternionen sind. Dann folgt sofort, daß jede ganze rationale Funktion $\mathfrak{f}(\mathfrak{z})$ in jedem in R_4 gelegenen endlichen Bereich $\mathfrak{M}$ stetig ist.

---

[1] Sind $\mathfrak{a};\ \mathfrak{b};\ \mathfrak{c};\ \mathfrak{d}$ vertauschbar, so findet man $\triangle(\mathfrak{a};\ \mathfrak{b};\ \mathfrak{c};\ \mathfrak{d}) = 0$ etwa aus Formel (28) der oben zitierten Arbeit von Herrn v. Schrutka oder aus der ihr entsprechenden Formel

$$\frac{1}{6} \triangle(\mathfrak{a};\ \mathfrak{b};\ \mathfrak{c};\ \mathfrak{d}) = (\mathfrak{a}\,\bar{\mathfrak{b}}\,\mathfrak{c}\,\bar{\mathfrak{d}} + \mathfrak{d}\,\bar{\mathfrak{c}}\,\mathfrak{b}\,\bar{\mathfrak{a}}) - (\mathfrak{c}\,\bar{\mathfrak{b}}\,\mathfrak{a}\,\bar{\mathfrak{d}} + \mathfrak{d}\,\bar{\mathfrak{a}}\,\mathfrak{b}\,\bar{\mathfrak{c}}).$$

Also bilden vier vertauschbare Quaternionen nie eine Basis des Quaternionenkörpers.

Die gebrochene Funktion $\mathfrak{w} = \frac{1}{\mathfrak{z}}$ führt die Kugeln des $\mathfrak{z}$-Raumes in die Kugeln des $\mathfrak{w}$-Raumes über, und zwar gehen die Kugeln des $\mathfrak{z}$-Raumes, die durch den Nullpunkt gehen und nur diese in Ebenen des $\mathfrak{w}$-Raumes über.

Im folgenden soll der Begriff der Konvergenz einer Quaternionenreihe aufgestellt und einige spezielle Reihen untersucht werden. Es sei die unendliche Folge von Quaternionen

$$\mathfrak{z}^{(n)} = \sum_{\sigma=0}^{3} z_\sigma^{(n)} i_\sigma; \quad n = 1;\ 2;\ 3; \qquad \text{in inf.}$$

vorgelegt. Diese Folge soll konvergent heißen, wenn die vier Folgen reeller Zahlen

$$z_\sigma^{(1)};\ z_\sigma^{(2)};\ z_\sigma^{(3)}; \qquad \sigma = 0;\ 1;\ 2;\ 3$$

konvergent sind. Die Quaternionenfolge $\mathfrak{z}^{(n)}$ ist also dann und nur dann konvergent, wenn es eine Quaternion $\mathfrak{z}$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N = N(\varepsilon) > 0$ gibt, so daß für alle $n > N$

$$|\mathfrak{z}^{(n)} - \mathfrak{z}| < \varepsilon$$

ist. Man schreibt dann

$$\mathfrak{z} = \lim_{n \to \infty} \mathfrak{z}^{(n)}.$$

Es sei nun für alle ganzen $n \geqq 1$

$$\mathfrak{s}_n = \sum_{\sigma=1}^{n} \mathfrak{z}^{(\sigma)}.$$

Existiert dann

$$\lim_{n \to \infty} \mathfrak{s}_n = \mathfrak{s},$$

so heißt die Reihe

$$\sum_{\sigma=1}^{\infty} \mathfrak{z}^{(\sigma)} \tag{13}$$

konvergent und $\mathfrak{s}$ ihr Wert. Die Reihe (13) ist also dann und nur dann konvergent, wenn es eine Zahl $\mathfrak{s}$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N = N(\varepsilon) > 0$ derart gibt, daß für alle ganzen $n > N$

$$|\mathfrak{s}_n - \mathfrak{s}| < \varepsilon$$

ist. Die Reihe (13) soll absolut konvergent heißen, wenn

$$\sum_{\sigma=1}^{\infty} |\mathfrak{z}^{(\sigma)}| \tag{14}$$

konvergiert. Aus der Konvergenz von (14) folgt die Konvergenz von (13). Ebenso wie in der Reihentheorie mit komplexen Gliedern läßt sich zeigen, daß (13) absolut konvergiert, wenn entweder

$$\lim_{\sigma \to \infty} \frac{|\mathfrak{z}^{(\sigma+1)}|}{|\mathfrak{z}^{(\sigma)}|} = k < 1$$

oder

$$\lim_{\sigma \to \infty} \sqrt[\sigma]{|\mathfrak{z}^{(\sigma)}|} = q < 1$$

ist. Konvergiert die Reihe

$$\sum_{\sigma=0}^{\infty} \mathfrak{a}_\sigma \mathfrak{z}^\sigma$$

absolut, so tut dies auch die Reihe

$$\sum_{\sigma=0}^{\infty} \mathfrak{z}^\sigma \mathfrak{a}_\sigma$$

und ebenso die Reihe

$$\sum_{\sigma=0}^{\infty} \mathfrak{a}_1^{(\sigma)} \mathfrak{z}^{n_1^{(\sigma)}} \mathfrak{a}_2^{(\sigma)} \mathfrak{z}^{n_2^{(\sigma)}} \cdots \mathfrak{a}_{k_\sigma}^{(\sigma)} \mathfrak{z}^{n_{k_\sigma}^{(\sigma)}} \mathfrak{a}_{k_\sigma+1}^{(\sigma)},$$

wenn für alle $\sigma > \vartheta$, wo $\vartheta > 0$ ist,

$$|\mathfrak{a}_1^{(\sigma)} \mathfrak{a}_2^{(\sigma)} \cdots \mathfrak{a}_{k_\sigma+1}^{(\sigma)}| \leqq |\mathfrak{a}_\sigma|; \quad \sum_{\tau=1}^{k_\sigma} n_\tau^{(\sigma)} = \sigma$$

ist. Ohne weiteres ergibt sich, daß die drei Potenzreihen mit reellen Koeffizienten

$$\sum_{\sigma=0}^{\infty} \frac{\mathfrak{z}^\sigma}{\sigma\,!}; \quad \sum_{\sigma=0}^{\infty} (-1)^\sigma \frac{\mathfrak{z}^{2\sigma}}{(2\sigma)\,!}; \quad \sum_{\sigma=0}^{\infty} (-1)^\sigma \frac{\mathfrak{z}^{2\sigma+1}}{(2\sigma+1)\,!}$$

für alle $\mathfrak{z}$ des Raumes R_4 konvergieren. Ihre Werte seien beziehungsweise mit $e^{\mathfrak{z}}$, $\cos \mathfrak{z}$, $\sin \mathfrak{z}$ bezeichnet. Dasselbe gilt von den Reihen

$$\sum_{\sigma=0}^{\infty} \frac{\mathfrak{z}^{2\sigma}}{(2\sigma)\,!} \text{ und } \sum_{\sigma=0}^{\infty} \frac{\mathfrak{z}^{2\sigma+1}}{(2\sigma+1)\,!},$$

deren Werte beziehungsweise mit $\mathfrak{cos}\,\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{sin}\,\mathfrak{z}$ bezeichnet seien. Für $z_2 = z_3 = 0$ gehen die so definierten trigonometrischen und hyperbolischen Funktionen in die entsprechenden Funktionen komplexen Arguments über. Da in absolut konvergenten Reihen auch hier die Glieder in beliebiger Reihenfolge angeordnet werden dürfen, gilt

$$e^{\mathfrak{z}} = \mathfrak{cos}\,\mathfrak{z} + \mathfrak{sin}\,\mathfrak{z}.$$

Es sei nun $z_0 = 0$, d. h. $\mathfrak{z}$ eine »rein imaginäre« Quaternion (nach Hamilton ein Vektor). Dann ist nach (6)

$$\mathfrak{z}^2 = -N(\mathfrak{z});\ \mathfrak{z}^3 = -\mathfrak{z}\,N(\mathfrak{z});\ \mathfrak{z}^4 = \{N(\mathfrak{z})\}^2$$

und allgemein für alle ganzen $n \geqq 0$

$$\mathfrak{z}^{4n} = |\mathfrak{z}|^{4n};\ \mathfrak{z}^{4n+1} = \mathfrak{z}\,|\mathfrak{z}|^{4n};\ \mathfrak{z}^{4n+2} = -|\mathfrak{z}|^{4n+2};\ \mathfrak{z}^{4n+3} = -\mathfrak{z}\,|\mathfrak{z}|^{4n+2}.$$

Also folgt für rein imaginäre $\mathfrak{z}$

$$e^{\mathfrak{z}} = \sum_{\sigma=0}^{\infty} (-1)^{\sigma} \frac{|\mathfrak{z}|^{2\sigma}}{(2\sigma)!} + \frac{\mathfrak{z}}{|\mathfrak{z}|} \sum_{\sigma=0}^{\infty} (-1)^{\sigma} \frac{|\mathfrak{z}|^{2\sigma+1}}{(2\sigma+1)!};$$

$$e^{\mathfrak{z}} = \cos|\mathfrak{z}| + \frac{\mathfrak{z}}{|\mathfrak{z}|} \sin|\mathfrak{z}| \tag{15}$$

und ebenso

$$e^{\bar{\mathfrak{z}}} = \cos|\mathfrak{z}| - \frac{\mathfrak{z}}{|\mathfrak{z}|} \sin|\mathfrak{z}|.$$

Hieraus folgt weiter

$$e^{\mathfrak{z}}\, e^{\bar{\mathfrak{z}}} = 1,$$

d. h. für rein imaginäre Quaternionen $\mathfrak{z}$ ist $e^{\mathfrak{z}}$ zu $e^{-\mathfrak{z}}$ reziprok. Nach (15) läßt sich eine Reihe von Werten der Exponentialfunktion berechnen. Für $\sigma = 1;\ 2;\ 3$ ergibt sich sofort

$$e^{2\pi i_\sigma} = 1;\ e^{\pi i_\sigma} = -1;\ e \quad = i_\sigma;\ e^{\frac{\pi i_\sigma}{3}} = \frac{1}{2} + \frac{i_\sigma}{2}\sqrt{3}$$

$$e^{\frac{\pi i_\sigma}{4}} = \frac{1+i_\sigma}{\sqrt{2}};\ e^{\frac{\pi i_\sigma}{6}} = \frac{\sqrt{3}+i_\sigma}{2}\quad e^{\pi(i_\sigma+i_\tau)\sqrt{2}} = 1;\ \sigma;\ \tau = 1;\ 2;\ 3;$$

$$e^{\sum\limits_{1}^{3}{}_{\sigma} \pi i_\sigma \sqrt{3}} = -1.$$

In diesen Formeln läßt sich auch i_σ durch $-i_\sigma$ ersetzen. Weitere trigonometrische und hyperbolische Funktionen seien für alle $\mathfrak{z}$, in denen die auftretenden Nenner nicht verschwinden, definiert durch

$$\operatorname{tang}\mathfrak{z} = \frac{\sin\mathfrak{z}}{\cos\mathfrak{z}};\ \operatorname{Tang}\mathfrak{z} = \frac{\sin\mathfrak{z}}{\cos\mathfrak{z}};\ \operatorname{cotg}\mathfrak{z} = \frac{\cos\mathfrak{z}}{\sin\mathfrak{z}}\quad \operatorname{Cotg}\mathfrak{z} = \frac{\cos\mathfrak{z}}{\sin\mathfrak{z}}$$

$$\mathfrak{tang}\,\mathfrak{z} = \frac{\mathfrak{sin}\,\mathfrak{z}}{\mathfrak{cos}\,\mathfrak{z}};\ \mathfrak{Tang}\,\mathfrak{z} = \frac{\mathfrak{sin}\,\mathfrak{z}}{\mathfrak{cos}\,\mathfrak{z}};\ \mathfrak{cotg}\,\mathfrak{z} = \frac{\mathfrak{cos}\,\mathfrak{z}}{\mathfrak{sin}\,\mathfrak{z}};\ \mathfrak{Cotg}\,\mathfrak{z} = \frac{\mathfrak{cos}\,\mathfrak{z}}{\mathfrak{sin}\,\mathfrak{z}}$$

Hieraus folgen ohne weiteres die vier Relationen

$$\operatorname{tang}\mathfrak{z}\operatorname{cotg}\mathfrak{z}=1;\ \operatorname{Tang}\mathfrak{z}\operatorname{Cotg}\mathfrak{z}=1;$$
$$\mathfrak{tang}\,\mathfrak{z}\,\mathfrak{cotg}\,\mathfrak{z}=1;\ \mathfrak{Tang}\,\mathfrak{z}\,\mathfrak{Cotg}\,\mathfrak{z}=1.$$

Die Gleichung (15) stellt ein Analogon zur Euler'schen Gleichung $e^{ix}=\cos x+i\sin x$ dar, gilt aber nur für rein imaginäre $\mathfrak{z}$. Es soll nun eine allgemein gültige, der Euler'schen Gleichung entsprechende Relation aufgestellt werden. $\mathfrak{a}$ sei eine beliebige Quaternion, für die

$$\sum_{\sigma=1}^{3} a_\sigma^2 \neq 0$$

ist. Einer jeden solchen Quaternion $\mathfrak{a}$ läßt sich eine durch

$$\mathfrak{j}_\mathfrak{a}=\frac{\sum\limits_{\sigma=1}^{3} a_\sigma i_\sigma}{\sqrt{\sum\limits_{\sigma=1}^{3} a_\sigma^2}}$$

definierte Quaternion $\mathfrak{j}_\mathfrak{a}$ (nach Hamilton's Bezeichnung die Achse von $\mathfrak{a}$) zuordnen, für die $\mathfrak{j}_\mathfrak{a}^2=-1$ ist. Im Intervall $0\leqq\varphi_\mathfrak{a}\leqq\pi$ ist ferner ein Winkel $\varphi_\mathfrak{a}$ durch

$$\cos\varphi_\mathfrak{a}=\frac{a_0}{|\mathfrak{a}|};\ \sin\varphi_\mathfrak{a}=\frac{1}{|\mathfrak{a}|}\sqrt{\sum_{\sigma=1}^{3} a_\sigma^2}$$

bestimmt. Dann läßt sich $\mathfrak{a}$ in der Form

$$\mathfrak{a}=|\mathfrak{a}|\,(\cos\varphi_\mathfrak{a}+\mathfrak{j}_\mathfrak{a}\sin\varphi_\mathfrak{a}) \tag{16}$$

darstellen, und es ist

$$\bar{\mathfrak{a}}=|\mathfrak{a}|\,(\cos\varphi_\mathfrak{a}-\mathfrak{j}_\mathfrak{a}\sin\varphi_\mathfrak{a}).$$

Alle Quaternionen der Form $\cos\varphi_\mathfrak{a}+\mathfrak{j}_\mathfrak{a}\sin\varphi_\mathfrak{a}$ liegen also auf der Einheitskugel $N(\mathfrak{z})=1$ um den Nullpunkt von R_4. Mit Hilfe dieser Darstellüng solcher Quaternionen $\mathfrak{a}$ läßt sich das Analogon zur Moivre'schen Formel ableiten. Es ist nämlich für alle ganzen $n\geqq 1$, und wenn

$$\sum_{\sigma=1}^{3} a_\sigma^2 \neq 0$$

ist (diese Voraussetzung soll stets gemacht werden, wenn die Darstellung (16) für eine Quaternion benutzt wird),

$$\mathfrak{a}^n = |\mathfrak{a}|^n(\cos(n\varphi_\mathfrak{a}) + \mathfrak{j}_\mathfrak{a}\sin(n\varphi_\mathfrak{a})) \tag{17}$$

und wenn $\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{b}$ vertauschbar ist,

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} = |\mathfrak{a}\mathfrak{b}|\,(\cos(\varphi_\mathfrak{a} + \varphi_\mathfrak{b}) + \mathfrak{j}_\mathfrak{a}\sin(\varphi_\mathfrak{a}+\varphi_\mathfrak{b})), \tag{18}$$

da dann $\mathfrak{j}_\mathfrak{a} = \mathfrak{j}_\mathfrak{b}$ ist.

Nun ist für alle ganzen $n \geqq 0$, wenn $n \equiv 0 \pmod 2$ ist,

$$(\mathfrak{j}_\mathfrak{x}\mathfrak{x})^n = (\mathfrak{j}_\mathfrak{x}^2)^{\frac{n}{2}}\mathfrak{x}^n = (-1)^{\frac{n}{2}}\mathfrak{x}^n$$

und wenn $n \equiv 1 \pmod 2$ ist,

$$(\mathfrak{j}_\mathfrak{x}\mathfrak{x})^n = (\mathfrak{j}_\mathfrak{x}^2)^{\frac{n-1}{2}}\mathfrak{j}_\mathfrak{x}\mathfrak{x}^n = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\mathfrak{j}_\mathfrak{x}\mathfrak{x}^n.$$

Also ist für alle Quaternionen $\mathfrak{x}$, für die $\sum_{\sigma=1}^{3} x_\sigma^2 \neq 0$ ist,

$$e^{\mathfrak{j}_\mathfrak{x}\mathfrak{x}} = \sum_{\sigma=0}^{\infty}\left(\frac{(\mathfrak{j}_\mathfrak{x}\mathfrak{x})^{2\sigma}}{(2\sigma)!} + \frac{(\mathfrak{j}_\mathfrak{x}\mathfrak{x})^{2\sigma+1}}{(2\sigma+1)!}\right) =$$

$$= \sum_{\sigma=0}^{\infty}(-1)^\sigma\frac{\mathfrak{x}^{2\sigma}}{(2\sigma)!} + \mathfrak{j}_\mathfrak{x}\sum_{\sigma=0}^{\infty}(-1)^\sigma\frac{\mathfrak{x}^{2\sigma+1}}{(2\sigma+1)!};$$

$$e^{\mathfrak{j}_\mathfrak{x}\mathfrak{x}} = \cos\mathfrak{x} + \mathfrak{j}_\mathfrak{x}\sin\mathfrak{x}. \tag{19}$$

Wegen

$$e^{-\mathfrak{j}_\mathfrak{x}\mathfrak{x}} = \cos\mathfrak{x} - \mathfrak{j}_\mathfrak{x}\sin\mathfrak{x}$$

folgt dann

$$\cos\mathfrak{x} = \frac{e^{\mathfrak{j}_\mathfrak{x}\mathfrak{x}} + e^{-\mathfrak{j}_\mathfrak{x}\mathfrak{x}}}{2};$$

$$\sin\mathfrak{x} = \frac{e^{\mathfrak{j}_\mathfrak{x}\mathfrak{x}} - e^{-\mathfrak{j}_\mathfrak{x}\mathfrak{x}}}{2\mathfrak{j}_\mathfrak{x}} = \frac{e^{\mathfrak{j}_\mathfrak{x}\mathfrak{x}} - e^{-\mathfrak{j}_\mathfrak{x}\mathfrak{x}}}{2\mathfrak{j}_\mathfrak{x}}$$

Da $\mathfrak{j}_{\mathfrak{j}_\mathfrak{x}\mathfrak{x}} = \mathfrak{j}_\mathfrak{x}$ ist, lassen sich noch leicht die folgenden Beziehungen aufstellen:

$$\mathfrak{sin}\,\mathfrak{x} = -\mathfrak{j}_\mathfrak{x}\sin(\mathfrak{j}_\mathfrak{x}\mathfrak{x});\quad \sin\mathfrak{x} = -\mathfrak{j}_\mathfrak{x}\,\mathfrak{sin}(\mathfrak{j}_\mathfrak{x}\mathfrak{x});$$
$$\mathfrak{cos}\,\mathfrak{x} = \cos(\mathfrak{j}_\mathfrak{x}\mathfrak{x});\quad \cos\mathfrak{x} = \mathfrak{cos}(\mathfrak{j}_\mathfrak{x}\mathfrak{x}),$$

und da $\mathfrak{j}_\mathfrak{x}$ eine mit jeder ganzzahligen Potenz von $\mathfrak{x}$ vertauschbare Quaternion ist,

$$\mathfrak{tang}\,\mathfrak{x} = -\mathfrak{j}_\mathfrak{x}\,\mathrm{tang}(\mathfrak{j}_\mathfrak{x}\mathfrak{x});\quad \mathrm{tang}\,\mathfrak{x} = -\mathfrak{j}_\mathfrak{x}\,\mathfrak{tang}(\mathfrak{j}_\mathfrak{x}\mathfrak{x});$$
$$\mathfrak{Tang}\,\mathfrak{x} = -\mathfrak{j}_\mathfrak{x}\,\mathrm{Tang}(\mathfrak{j}_\mathfrak{x}\mathfrak{x});\quad \mathrm{Tang}\,\mathfrak{x} = -\mathfrak{j}_\mathfrak{x}\,\mathfrak{Tang}(\mathfrak{j}_\mathfrak{x}\mathfrak{x});$$
$$\mathfrak{cotg}\,\mathfrak{x} = \mathfrak{j}_\mathfrak{x}\,\mathrm{cotg}(\mathfrak{j}_\mathfrak{x}\mathfrak{x});\quad \mathrm{cotg}\,\mathfrak{x} = \mathfrak{j}_\mathfrak{x}\,\mathfrak{cotg}(\mathfrak{j}_\mathfrak{x}\mathfrak{x});$$
$$\mathfrak{Cotg}\,\mathfrak{x} = \mathfrak{j}_\mathfrak{x}\,\mathrm{Cotg}(\mathfrak{j}_\mathfrak{x}\mathfrak{x});\quad \mathrm{Cotg}\,\mathfrak{x} = \mathfrak{j}_\mathfrak{x}\,\mathfrak{Cotg}(\mathfrak{j}_\mathfrak{x}\mathfrak{x}).$$

Für alle ganzen $n \geqq 1$ ist $\mathfrak{j}_{n\mathfrak{x}} = \mathfrak{j}_{\mathfrak{x}}$. Damit lassen sich leicht die Formeln

$$e^{n\mathfrak{x}} = \mathfrak{Cos}\,(n\mathfrak{x}) + \mathfrak{Sin}\,(n\mathfrak{x}); \quad e^{n\mathfrak{j}_{\mathfrak{x}}\mathfrak{x}} = \cos\,(n\mathfrak{x}) + \mathfrak{j}_{\mathfrak{x}} \sin\,(n\mathfrak{x})$$

ableiten. Wegen der leicht zu beweisenden Formel $(e^{\mathfrak{x}})^n = e^{n\mathfrak{x}}$ folgt also

$$(\cos \mathfrak{x} + \mathfrak{j}_{\mathfrak{x}} \sin \mathfrak{x})^n = \cos\,(n\mathfrak{x}) + \mathfrak{j}_{\mathfrak{x}} \sin\,(n\mathfrak{x})$$

und

$$(\mathfrak{Cos}\,\mathfrak{x} + \mathfrak{Sin}\,\mathfrak{x})^n = \mathfrak{Cos}\,(n\mathfrak{x}) + \mathfrak{j}_{\mathfrak{x}}\,\mathfrak{Sin}\,(n\mathfrak{x}).$$

Ist $\mathfrak{x}$ mit $\mathfrak{y}$ vertauschbar, so folgt wegen $\mathfrak{j}_{\mathfrak{x}+\mathfrak{y}} = \mathfrak{j}_{\mathfrak{x}} = \mathfrak{j}_{\mathfrak{y}}$ noch

$$e^{\mathfrak{x}+\mathfrak{y}} = \cos\,(\mathfrak{x} + \mathfrak{y}) + \mathfrak{j}_{\mathfrak{x}} \sin\,(\mathfrak{x} + \mathfrak{y}).$$

§ 4. Definition und Untersuchungen über Integrale im Quaternionenraum R_4.

In der Punktmenge $\mathfrak{M}$ in R_4 sei die stetige Funktion $\mathfrak{f}\,(\mathfrak{z})$ definiert. C sei eine in $\mathfrak{M}$ gelegene Kurve. Ihre Parameterdarstellung sei

$$z_\sigma = \varphi_\sigma(t); \quad t_0 \leqq t \leqq T; \quad \sigma = 0;\ 1;\ 2;\ 3.$$

Diese Kurve verbinde die in $\mathfrak{M}$ gelegenen Punkte P_0 und P miteinander. Dann hat also P_0 die Koordinaten

$$z_\sigma^{(0)} = \varphi_\sigma(t_0); \quad \sigma = 0;\ 1;\ 2;\ 3$$

und P die Koordinaten

$$Z_\sigma = \varphi_\sigma(T); \quad \sigma = 0;\ 1;\ 2;\ 3.$$

Den Punkten P_0 und P sind beziehungsweise die Quaternionen

$$\mathfrak{z}_0 = \sum_{\sigma=0}^{3} z_\sigma^{(0)}\, i_\sigma$$

und

$$\mathfrak{Z} = \sum_{\sigma=0}^{3} Z_\sigma\, i_\sigma$$

zugeordnet. Die Funktionen $\varphi_\sigma(t)$ seien im Intervall $t_0 \leqq t \leqq T$ stetig und eindeutig. Längs C ist dann

$$\mathfrak{f}\,(\mathfrak{z}) = \psi\,(z_0; z_1; z_2; z_3) = \psi\,(\varphi_0(t); \varphi_1(t); \varphi_2(t); \varphi_3(t)) =$$
$$= F(t) = \sum_{\sigma=0}^{3} i_\sigma F_\sigma(t).$$

Dann folgt sofort, daß die $F_\sigma(t)$ im Intervall $t_0 \leqq t \leqq T$ stetige, reelle Funktionen der reellen Variablen t sind. Es seien nun für $n > 0$

$$\mathfrak{z}_0; \mathfrak{z}_1; \mathfrak{z}_2; \ldots \mathfrak{z}_n = \mathfrak{Z};\ \mathfrak{z}_\sigma = \sum_{\tau=0}^{3} z_\tau^{(\sigma)} i_\tau;\ \sigma = 0; 1; \ldots n$$

beliebige Punkte auf C, die durch die Parameterwerte $t_0; t_1; t_2; \ldots t_n = T$ bestimmt sind. Weiter sei

$$\widehat{\mathfrak{z}}_\sigma = \sum_{\tau=0}^{3} \widehat{z}_\tau^{(\sigma)} i_\tau;\ \sigma = 1; 2; \ldots n$$

ein beliebiger Punkt auf C zwischen $\mathfrak{z}_\sigma$ und $\mathfrak{z}_{\sigma+1}$, d. h. es soll $\widehat{\mathfrak{z}}_\sigma$ zu einem Parameterwert gehören, der zwischen den zu $\mathfrak{z}_\sigma$ und $\mathfrak{z}_{\sigma+1}$ gehörigen Parameterwerten gehört. Dann sei

$$\overrightarrow{F}_n = \sum_{\sigma=1}^{n} \mathfrak{f}(\widehat{\mathfrak{z}}_\sigma)(\mathfrak{z}_\sigma - \mathfrak{z}_{\sigma-1})$$

und

$$\overleftarrow{F}_n = \sum_{\sigma=1}^{n} (\mathfrak{z}_\sigma - \mathfrak{z}_{\sigma-1})\, \mathfrak{f}(\widehat{\mathfrak{z}}_\sigma).$$

Es sei nun zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, ein $N = N(\varepsilon) > 0$, ein $\overrightarrow{F}$ und ein $\overleftarrow{F}$ vorhanden, so daß für alle ganzen $n > N$, sofern für alle ganzen σ der Strecke $0 < \sigma \leqq n$

$$|\mathfrak{z}_\sigma - \mathfrak{z}_{\sigma-1}| < \delta$$

ist

$$|\overrightarrow{F}_n - \overrightarrow{F}| < \varepsilon$$

und

$$|\overleftarrow{F}_n - \overleftarrow{F}| < \varepsilon$$

ist. Dann sollen $\overrightarrow{F}$ und $\overleftarrow{F}$ die beiden bestimmten Integrale von $\mathfrak{f}(\mathfrak{z})$ längs der Kurve C heißen und mit

$$\overrightarrow{F} = \overrightarrow{\int_{\mathfrak{z}_0 C}^{\mathfrak{Z}}} \mathfrak{f}(\mathfrak{z})\, d\mathfrak{z}$$

beziehungsweise mit

$$\overleftarrow{F} = \overleftarrow{\int_{\mathfrak{z}_0 C}^{\mathfrak{Z}}} \mathfrak{f}(\mathfrak{z})\, d\mathfrak{z}$$

bezeichnet werden. Der Kürze halber führe ich nun die nächsten Rechnungen nur für die Größen $\overrightarrow{F}_n$ und $\overrightarrow{F}$ durch. Wenn man

$$\mathfrak{f}(\mathfrak{z}) = \psi(z_0; z_1; z_2; z_3) = \sum_{\sigma=0}^{3} i_\sigma \psi_\sigma(z_0; z_1; z_2; z_3)$$

setzt, so folgt nach der Definition von $\mathfrak{F}_n$ und nach (3)

$$\mathfrak{F}_n = \sum_{\sigma=1}^{n}\left(\psi_0(\widehat{z_0^{(\sigma)}};\widehat{z_1^{(\sigma)}};\widehat{z_2^{(\sigma)}};\widehat{z_3^{(\sigma)}})(z_0^{(\sigma)}-z_0^{(\sigma-1)})\right)$$

$$-\sum_{\tau=1}^{3}\sum_{\sigma=1}^{n}\left(\psi_\tau(\widehat{z_0^{(\sigma)}};\widehat{z_1^{(\sigma)}};\widehat{z_2^{(\sigma)}};\widehat{z_3^{(\sigma)}})(z_\tau^{(\sigma)}-z_\tau^{(\sigma-1)})\right)$$

$$+\sum_{\tau=1}^{3}\sum_{\sigma=1}^{n}\left(i_\tau\,\psi_0(\widehat{z_0^{(\sigma)}};\widehat{z_1^{(\sigma)}};\widehat{z_2^{(\sigma)}};\widehat{z_3^{(\sigma)}})(z_\tau^{(\sigma)}-z_\tau^{(\sigma-1)})\right)$$

$$+\sum_{\tau=1}^{3}\sum_{\sigma=1}^{n}\left(i_\tau\,\psi_\tau(\widehat{z_0^{(\sigma)}};\widehat{z_1^{(\sigma)}};\widehat{z_2^{(\sigma)}};\widehat{z_3^{(\sigma)}})(z_0^{(\sigma)}-z_0^{(\sigma-1)})\right)$$

$$+\,i_1\sum_{\sigma=1}^{n}\left(\psi_2(\widehat{z_0^{(\sigma)}};\widehat{z_1^{(\sigma)}};\widehat{z_2^{(\sigma)}};\widehat{z_3^{(\sigma)}})(z_3^{(\sigma)}-z_3^{(\sigma-1)})\right)$$

$$+\,i_2\sum_{\sigma=1}^{n}\left(\psi_3(\widehat{z_0^{(\sigma)}};\widehat{z_1^{(\sigma)}};\widehat{z_2^{(\sigma)}};\widehat{z_3^{(\sigma)}})(z_1^{(\sigma)}-z_1^{(\sigma-1)})\right)$$

$$+\,i_3\sum_{\sigma=1}^{n}\left(\psi_1(\widehat{z_0^{(\sigma)}};\widehat{z_1^{(\sigma)}};\widehat{z_2^{(\sigma)}};\widehat{z_3^{(\sigma)}})(z_2^{(\sigma)}-z_2^{(\sigma-1)})\right)$$

$$-\,i_1\sum_{\sigma=1}^{n}\left(\psi_3(\widehat{z_0^{(\sigma)}};\widehat{z_1^{(\sigma)}};\widehat{z_2^{(\sigma)}};\widehat{z_3^{(\sigma)}})(z_2^{(\sigma)}-z_2^{(\sigma-1)})\right)$$

$$-\,i_2\sum_{\sigma=1}^{n}\left(\psi_1(\widehat{z_0^{(\sigma)}};\widehat{z_1^{(\sigma)}};\widehat{z_2^{(\sigma)}};\widehat{z_3^{(\sigma)}})(z_3^{(\sigma)}-z_3^{(\sigma-1)})\right)$$

$$-\,i_3\sum_{\sigma=1}^{n}\left(\psi_2(\widehat{z_0^{(\sigma)}};\widehat{z_1^{(\sigma)}};\widehat{z_2^{(\sigma)}};\widehat{z_3^{(\sigma)}})(z_1^{(\sigma)}-z_1^{(\sigma-1)})\right).$$

Geht man nun in dem oben angegebenen Sinn, daß nämlich $|\mathfrak{z}_\sigma-\mathfrak{z}_{\sigma-1}|<\delta$ sein soll, für $n\rightarrow\infty$ zur Grenze über, so folgt nach der Definition des reellen Kurvenintegrals

$$\mathfrak{F}=\int_{\mathfrak{z}_0\,C}^{\mathfrak{z}}\mathfrak{f}(\mathfrak{z})\,d\mathfrak{z}=\int_C\psi_0\,dz_0-\sum_{\sigma=1}^{3}\int_C\psi_\sigma\,dz_\sigma+\sum_{\sigma=1}^{3}i_\sigma\int_C\psi_0\,dz_\sigma$$

$$+\sum_{\sigma=1}^{3}i_\sigma\int_C\psi_\sigma\,dz_0+i_1\int_C\psi_2\,dz_3+i_2\int_C\psi_3\,dz_1+i_3\int_C\psi_1\,dz_2-$$

$$-i_1\int_C \psi_3\, dz_2 - i_2\int_C \psi_1\, dz_3 - i_3\int_C \psi_2\, dz_1. \tag{20}$$

Ebenso würde sich ergeben

$$\mathfrak{F} = \int_{{}^{3}_{0}C} \mathfrak{f}(\mathfrak{z})\, d\mathfrak{z} = \int_C \psi_0\, dz_0 - \sum_{\sigma=1}^{3}\int_C \psi_\sigma\, dz_0 + \sum_{\sigma=1}^{3} i_\sigma \int_C \psi_0\, dz_\sigma$$

$$+ \sum_{\sigma=1}^{3} i_\sigma \int_C \psi_\sigma\, dz_0 + i_1\int_C \psi_3\, dz_2 + i_2\int_C \psi_1\, dz_3 + i_3\int_C \psi_2\, dz_1$$

$$-i_1\int_C \psi_2\, dz_3 - i_2\int_C \psi_3\, dz_1 - i_3\int_C \psi_1\, dz_2. \tag{21}$$

In (20) und (21) ist zur Abkürzung

$$\psi_\sigma = \psi_\sigma(z_0; z_1; z_2; z_3);\ \sigma = 0; 1; 2; 3$$

gesetzt.

Die so definierten Integrale sollen nun an einigen Beispielen berechnet und zur Definition neuer Quaternionenfunktionen benutzt werden.

Beispiel I: C sei die Strecke

$$z_\sigma = \frac{x_\sigma}{x_0} t;\ 0 \leqq t \leqq x_0;\ \sigma = 0; 1; 2; 3,$$

die die Punkte 0 und $\mathfrak{x} = \sum_{\sigma=1}^{3} x_\sigma i_\sigma$ miteinander verbindet. Dann ergibt eine leichte Rechnung wegen (6)

$$\int_{{}^{0}C}^{\mathfrak{x}} \mathfrak{z}\, d\mathfrak{z} = \int_{{}^{0}C}^{\mathfrak{x}} \mathfrak{z}\, d\mathfrak{z} = \frac{x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}{2} + x_0 \sum_{\sigma=1}^{3} x_\sigma i_\sigma = \frac{\mathfrak{x}^2}{2}.$$

Beispiel II: Ist C derselbe Integrationsweg und

$$\mathfrak{f}(\mathfrak{z}) = \mathfrak{z}^2 = z_0^2 - \sum_{\sigma=1}^{3} z_\sigma^2 + 2 z_0 \sum_{\sigma=1}^{3} z_\sigma i_\sigma,$$

so ist

$$\psi_0 = z_0^2 - \sum_{\sigma=1}^{3} z_\sigma^2;\ \psi_\sigma = 2 z_0 z_\sigma;\ \sigma = 1, 2; 3.$$

Eine einfache Rechnung ergibt dann

$$\overrightarrow{\int\limits_{0_C}^{\mathfrak{x}}} \mathfrak{z}^2\, d\mathfrak{z} = \overleftarrow{\int\limits_{0_C}^{\mathfrak{x}}} \mathfrak{z}^2\, d\mathfrak{z} = \frac{\mathfrak{x}^3}{3}$$

Beispiel III: Es seien $\mathfrak{a} = \sum\limits_{\sigma=0}^{3} a_\sigma i_\sigma$ und $\mathfrak{b} = \sum\limits_{\sigma=0}^{3} b_\sigma i_\sigma$ zwei beliebige Quaternionen und c die durch

$$z_\sigma = a_\sigma + \frac{b_\sigma - a_\sigma}{b_0} t;\ 0 \leqq t \leqq b_0;\ \sigma = 0; 1; 2; 3$$

definierte Verbindungsstrecke der Punkte $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$. Dann ergibt sich aus (20) und (21)

$$\overrightarrow{\int\limits_{\mathfrak{a}_C}^{\mathfrak{b}}} \mathfrak{z}\, d\mathfrak{z} = \frac{\mathfrak{b}^2 - \mathfrak{a}^2 + \mathfrak{a}\mathfrak{b} - \mathfrak{b}\mathfrak{a}}{2}$$

und

$$\overleftarrow{\int\limits_{\mathfrak{a}_C}^{\mathfrak{b}}} \mathfrak{z}\, d\mathfrak{z} = \frac{\mathfrak{b}^2 - \mathfrak{a}^2 - \mathfrak{a}\mathfrak{b} + \mathfrak{b}\mathfrak{a}}{2},$$

so daß also dann und nur dann

$$\overrightarrow{\int\limits_{\mathfrak{a}_C}^{\mathfrak{b}}} \mathfrak{z}\, d\mathfrak{z} = \overleftarrow{\int\limits_{\mathfrak{a}_C}^{\mathfrak{b}}} \mathfrak{z}\, d\mathfrak{z} = \frac{\mathfrak{b}^2 - \mathfrak{a}^2}{2}$$

ist, wenn $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ vertauschbare Quaternionen sind. Etwas langwieriger ist die Berechnung der Integrale

$$\overrightarrow{\int\limits_{\mathfrak{a}_C}^{\mathfrak{b}}} \mathfrak{z}^2\, d\mathfrak{z} \text{ und } \overleftarrow{\int\limits_{\mathfrak{a}_C}^{\mathfrak{b}}} \mathfrak{z}^2\, d\mathfrak{z}.$$

Man findet, daß diese beiden Integrale dann und nur dann einander gleich und zwar gleich $\frac{\mathfrak{b}^3 - \mathfrak{a}^3}{3}$ sind, wenn $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ vertauschbare Quaternionen sind. Es ist nämlich allgemein

$$\overrightarrow{\int_{\mathfrak{a}_C}^{\mathfrak{b}}} \mathfrak{z}^2\, d\mathfrak{z} = \frac{b_0^3 - a_0^3}{3} + a_0 \sum_{\sigma=1}^{3} a_\sigma^2 - b_0 \sum_{\sigma=1}^{3} b_\sigma^2$$
$$+ \sum_{\sigma=1}^{3} \left\{ i_\sigma \left(-a_0^2 a_\sigma + b_0^2 b_\sigma - \frac{a_0^2 b_\sigma - a_\sigma b_0^2}{3} \right) \right\}$$
$$+ (a_0 + b_0)(a_2 b_3 - a_3 b_2)\, i_1$$
$$+ (a_0 + b_0)(a_3 b_1 - a_1 b_3)\, i_2$$
$$+ (a_0 + b_0)(a_1 b_2 - a_2 b_1)\, i_3$$
$$+ \sum_{\tau=1}^{3} \left\{ \frac{i_\tau (a_\tau - b_\tau)}{3} \sum_{\sigma=1}^{3} \left(a_\sigma^2 + a_\sigma b_\sigma + b_\sigma^2 \right) \right\}$$

und

$$\overleftarrow{\int_{\mathfrak{a}_C}^{\mathfrak{b}}} \mathfrak{z}^2\, d\mathfrak{z} = \frac{b_0^3 - a_0^3}{3} + a_0 \sum_{\sigma=1}^{3} a_\sigma^2 - b_0 \sum_{\sigma=1}^{3} b_\sigma^2$$
$$+ \sum_{\sigma=1}^{3} \left\{ i_\sigma \left(-a_0\, a_\sigma^2 + b_0\, b_\sigma^2 + \frac{a_\sigma\, b_0^2 - a_0^2\, b_\sigma}{3} \right) \right\}$$
$$+ (a_0 + b_0)(a_3 b_2 - a_2 b_3)\, i_1$$
$$+ (a_0 + b_0)(a_1 b_3 - a_3 b_1)\, i_2$$
$$+ (a_0 + b_0)(a_2 b_1 - a_1 b_2)\, i_3$$
$$+ \sum_{\tau=1}^{3} \left\{ \frac{i_\tau (a_\tau - b_\tau)}{3} \sum_{\sigma=1}^{3} (a_\sigma^2 + a_\sigma b_\sigma + b_\sigma^2) \right\}.$$

Es ist also

$$\overrightarrow{\int_{\mathfrak{a}_C}^{\mathfrak{b}}} \mathfrak{z}^2\, d\mathfrak{z} - \overleftarrow{\int_{\mathfrak{a}_C}^{\mathfrak{b}}} \mathfrak{z}^2\, d\mathfrak{z} = 2(a_0 + b_0) \begin{vmatrix} i_1 & i_2 & i_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} =$$
$$= \frac{1}{2} (\mathfrak{a} + \bar{\mathfrak{a}} + \mathfrak{b} + \bar{\mathfrak{b}})(\mathfrak{a}\mathfrak{b} - \mathfrak{b}\mathfrak{a}).$$

§ 5. Über das Integral $\overrightarrow{\int_{1_{\mathfrak{S}}}^{\mathfrak{x}}} \frac{1}{\mathfrak{z}}\, d\mathfrak{z}$.

$\mathfrak{S}$ sei die gerade Verbindungsstrecke der Quaternionen 1 und $\mathfrak{x} = \sum_{\sigma=1}^{3} x_\sigma i_\sigma$. Dann ist $\mathfrak{S}$ bestimmt durch die Parameterdarstellung

$$\left.\begin{array}{l} z_0 = 1+(x_0-1)\,t; \\ z_\sigma = x_\sigma t;\ \sigma = 1;2;3 \end{array}\right\}\ 0 \leqq t \leqq 1.$$

Hieraus folgt

$$N(\mathfrak{z}) = \{1+(x_0-1)\,t\}^2 + t^2 \sum_{\sigma=1}^{3} x_\sigma^2 = t^2 p + tq + 1,$$

wenn man zur Abkürzung

$$p = N(\mathfrak{x}) - 2\,x_0 + 1;\ q = 2\,(x_0-1)$$

setzt. Setzt man weiter

$$A = \frac{x_0-1}{N(\mathfrak{x})-2\,x_0+1};\ B = \frac{N(\mathfrak{x})-x_0^2}{\{N(\mathfrak{x})-2\,x_0+1\}^2},$$

so ist

$$N(\mathfrak{z}) = p\,\{(t+A)^2+B\}. \tag{22}$$

Hierbei ist wegen $B = \dfrac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{p^2}$ stets $B \geqq 0$. Also ist $\sqrt{B}$ reell. Unter $\sqrt{B}$ soll der positive Wert der Quadratwurzel verstanden werden.

Definiert man nun

$$\log \mathfrak{x} = \int_{1_{\mathfrak{E}}}^{\mathfrak{x}} \frac{1}{\mathfrak{z}}\,d\,\mathfrak{z}, \tag{23}$$

so ergibt eine einfache Umrechnung

$$p \log \mathfrak{x} = (x_0-1)\int_0^1 \frac{dt}{(t+A)^2+B} + (x_0-1)^2 \int_0^1 \frac{t\,dt}{(t+A)^2+B} +$$

$$+ \sum_{\sigma=1}^{3}\left(x_\sigma^2 \int_0^1 \frac{t\,dt}{(t+A)^2+B}\right) + \sum_{\sigma=1}^{3}\left(x_\sigma i_\sigma \int_0^1 \frac{dt}{(t+A)^2+B}\right). \tag{24}$$

Durch die Substitution

$$t+A = u\sqrt{B} \qquad \frac{dt}{du} = \sqrt{B}$$

folgt

$$\int_0^1 \frac{dt}{(t+A)^2+B} = \frac{1}{\sqrt{B}}\left(\operatorname{arctang}\frac{1+A}{\sqrt{B}} - \operatorname{arctang}\frac{A}{\sqrt{B}}\right)$$

und

$$\int_0^1 \frac{t\,dt}{(t+A)^2+B} = \frac{1}{2}\log\frac{(1+A)^2+B}{A^2+B} - \frac{A}{\sqrt{B}}\left(\operatorname{arctang}\frac{1+A}{\sqrt{B}} - \operatorname{arctang}\frac{A}{\sqrt{B}}\right)$$

Wegen (24) ist also der reelle Teil von $p \log \mathfrak{x}$ bestimmt durch

$$\left(\frac{x_0-1}{\sqrt{B}} - \frac{A(x_0-1)^2}{\sqrt{B}}\right)\left(\operatorname{arctang}\frac{1+A}{\sqrt{B}} - \operatorname{arctang}\frac{A}{\sqrt{B}}\right) + \\ + \frac{(x_0-1)^2}{2}\log\frac{(1+A)^2+B}{A^2+B} + \sum_{\sigma=1}^{3}\left\{\frac{x_\sigma^2}{2}\log\frac{(1+A)^2+B}{A^2+B} - \right. \\ \left. - \frac{Ax_\sigma^2}{\sqrt{B}}\left(\operatorname{arctang}\frac{1+A}{\sqrt{B}} - \operatorname{arctang}\frac{A}{\sqrt{B}}\right)\right\} = \\ = \frac{p}{2}\log\frac{1+2A+A^2+B}{A^2+B}$$

Wegen $A^2+B=\frac{1}{p}$ und $1+2A+A^2+B=\frac{N(\mathfrak{x})}{p}$ ist also der reelle Teil von $\log \mathfrak{x}$ gleich $\frac{1}{2}\log N(\mathfrak{x})$ oder gleich $\log \sqrt{N(\mathfrak{x})}$, unter $\sqrt{N(\mathfrak{x})}$ den positiven Wert dieser Quadratwurzel verstanden. Also folgt aus (24)

$$\log \mathfrak{x} = \log\sqrt{N(\mathfrak{x})} + \frac{1}{\sqrt{N(\mathfrak{x})-x_0^2}}\sum_{\sigma=1}^{3}\left\{i_\sigma x_\sigma\left(\operatorname{arctang}\frac{N(\mathfrak{x})-x_0}{\sqrt{N(\mathfrak{x})-x_0^2}} - \operatorname{arctang}\frac{x_0-1}{\sqrt{N(\mathfrak{x})-x_0^2}}\right)\right\}.$$

Wegen

$$\operatorname{arctang} y_1 - \operatorname{arctang} y_2 = \operatorname{arctang}\frac{y_1-y_2}{1+y_1 y_2}$$

läßt sich die letzte Gleichung, wenn man

$$y_1 = \frac{N(\mathfrak{x})-x_0}{\sqrt{N(\mathfrak{x})-x_0^2}};\quad y_2 = \frac{x_0-1}{\sqrt{N(\mathfrak{x})-x_0^2}}$$

setzt, auch in der Form schreiben:

$$\log \mathfrak{x} = \log\sqrt{N(\mathfrak{x})} + \frac{1}{\sqrt{N(\mathfrak{x})-x_0^2}}\sum_{\sigma=1}^{3}\left\{i_\sigma x_\sigma \operatorname{arctang}\frac{\sqrt{N(\mathfrak{x})-x_0^2}}{x_0}\right\} =$$

$$= \log \sqrt{N(\mathfrak{x})} + \frac{\operatorname{arctang} \dfrac{\sqrt{N(\mathfrak{x})-x_0^2}}{x_0}}{\sqrt{N(\mathfrak{x})-x_0^2}} \sum_{\sigma=1}^{3} x_\sigma i_\sigma \tag{25}$$

oder

$$\log \mathfrak{x} = \log \sqrt{N(\mathfrak{x})} + \frac{(\mathfrak{x}-x_0) \operatorname{arctang} \dfrac{\sqrt{N(\mathfrak{x})-x_0^2}}{x_0}}{\sqrt{N(\mathfrak{x})-x_0^2}} \tag{26}$$

Der Logarithmus einer Quaternion läßt sich also durch (25) oder (26) darstellen. Damit ist aber noch nichts bewiesen über den Zusammenhang der Funktionen $e^{\mathfrak{x}}$ und $\log \mathfrak{x}$. Die Funktion $\log \mathfrak{x}$ hat die in folgenden Sätzen ausgedrückten Eigenschaften:

Satz 1: Es sei $n \geqq 0$ eine beliebige ganze Zahl und $\mathfrak{x} \neq 0$ eine beliebige Quaternion. Dann ist

$$\log (\mathfrak{x}^n) = n \log \mathfrak{x}. \tag{27}$$

Beweis: Für $n = 0$ und $n = 1$ ist (27) richtig. Es sei also $n \geqq 2$. Ist (27) richtig, so ist (27) wegen

$$\begin{aligned} \log (\mathfrak{x}^{n+1}) &= \log (\mathfrak{x}^n \mathfrak{x}) \\ &= \log (\mathfrak{x}^n) + \log \mathfrak{x} \\ &= n \log \mathfrak{x} + \log \mathfrak{x} \\ &= (n+1) \log \mathfrak{x} \end{aligned}$$

auch richtig, wenn man n durch $n+1$ ersetzt, wobei nur noch

$$\log (\mathfrak{x}^n \mathfrak{x}) = \log (\mathfrak{x}^n) + \log \mathfrak{x}$$

zu beweisen ist. (Siehe Satz 2.) Um also (27) vollständig zu beweisen, ist noch

$$\log (\mathfrak{x}^2) = 2 \log \mathfrak{x} \tag{28}$$

zu zeigen. Nach (6) und (26) ist aber

$$\log (\mathfrak{x}^2) = \log \sqrt{N(\mathfrak{x}^2)} +$$

$$+ \frac{(\mathfrak{x}^2 - x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \operatorname{arctang} \dfrac{\sqrt{N(\mathfrak{x}^2) - \left(x_0^2 - \sum\limits_{\sigma=1}^{3} x_\sigma^2\right)^2}}{x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}}{\sqrt{N(\mathfrak{x}^2) - \left(x_0^2 - \sum\limits_{\sigma=1}^{3} x_\sigma^2\right)^2}}$$

Hierbei ist aber weiter

$$N(\mathfrak{x}^2) = \{N(\mathfrak{x})\}^2;\ \mathfrak{x}^2 - x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 2\,x_0 \sum_{\sigma=1}^{3} x_\sigma i_\sigma$$

und

$$N(\mathfrak{x}^2) - \left(x_0^2 - \sum_{\sigma=1}^{3} x_\sigma^2\right)^2 = \left(\sum_{\sigma=0}^{3} x_\sigma^2 - x_0^2 + \sum_{\sigma=1}^{3} x_\sigma^2\right)\left(\sum_{\sigma=0}^{3} x_\sigma^2 + x_0^2 - \sum_{\sigma=1}^{3} x_\sigma^2\right) =$$
$$= 4\,x_0^2 \sum_{\sigma=1}^{3} x_\sigma^2.$$

Also geht die letzte Gleichung, wenn man noch die Formel

$$2 \operatorname{arctang} y = \operatorname{arctang} \frac{2\,y}{1-y^2}$$

auf $y = \dfrac{\sqrt{N(\mathfrak{x}) - x_0^2}}{x_0}$ anwendet, über in

$$\log(\mathfrak{x}^2) = 2 \log \sqrt{N(\mathfrak{x})} + \frac{2 \operatorname{arctang} \dfrac{\sqrt{N(\mathfrak{x}) - x_0^2}}{x_0}}{\sqrt{N(\mathfrak{x}) - x_0^2}} \sum_{\sigma=1}^{3} x_\sigma i_\sigma.$$

Wegen (25) ergibt sich hieraus (28), womit Satz 1 vollständig bewiesen ist.

Satz 2: Es seien

$$\mathfrak{x} = \sum_{\sigma=0}^{3} x_\sigma i_\sigma \text{ und } \mathfrak{y} = \sum_{\sigma=0}^{3} y_\sigma i_\sigma;\ \mathfrak{x} \neq 0;\ \mathfrak{y} \neq 0$$

zwei vertauschbare Quaternionen. Dann ist

$$\log(\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}) = \log \mathfrak{x} + \log \mathfrak{y}.$$

Beweis: Es existiert nach Voraussetzung eine reelle Zahl λ, so daß $y_\sigma = \lambda\, x_\sigma$ für $\sigma = 1; 2; 3$ ist. Danach ist wegen (3)

$$\sqrt{N(\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}) - \left(x_0 y_0 - \sum_{\sigma=1}^{3} x_\sigma y_\sigma\right)^2} = (\lambda\, x_0 + y_0) \sqrt{\sum_{\sigma=1}^{3} x_\sigma^2}$$

und

$$\mathfrak{x}\,\mathfrak{y} - x_0 y_0 + \sum_{\sigma=1}^{3} x_\sigma y_\sigma = (\lambda\, x_0 + y_0) \sum_{\sigma=1}^{3} x_\sigma i_\sigma.$$

Also gilt

$$\log(\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}) = \log\sqrt{N(\mathfrak{x})} + \log\sqrt{N(\mathfrak{y})}$$

$$+ \frac{\sum_{\sigma=1}^{3} x_\sigma\, i_\sigma}{\sqrt{\sum_{\sigma=1}^{3} x_\sigma^2}} \operatorname{arctang} \frac{\sqrt{N(\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}) - \left(x_0 y_0 - \lambda \sum_{\sigma=1}^{3} x_\sigma^2\right)^2}}{x_0 y_0 - \lambda \sum_{\sigma=1}^{3} x_\sigma^2}.$$

Diese Gleichung geht, wenn man

$$\operatorname{arctang} \widehat{y}_1 + \operatorname{arctang} \widehat{y}_2 = \operatorname{arctang} \frac{\widehat{y}_1 + \widehat{y}_2}{1 - \widehat{y}_1 \widehat{y}_2} \tag{29}$$

auf

$$\widehat{y}_1 = \frac{\sqrt{N(\mathfrak{x}) - x_0^2}}{x_0}\,;\ \widehat{y}_2 = \frac{\sqrt{N(\mathfrak{y}) - y_0^2}}{y_0}$$

anwendet, über in, da für vertauschbare Quaternionen $\mathfrak{j}_{\mathfrak{x}} = \mathfrak{j}_{\mathfrak{y}}$ ist,

$$\log(\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}) = \log\sqrt{N(\mathfrak{x})} + \log\sqrt{N(\mathfrak{y})}$$

$$+ \mathfrak{j}_{\mathfrak{x}} \operatorname{arctang} \frac{\sqrt{N(\mathfrak{x}) - x_0^2}}{x_0} + \mathfrak{j}_{\mathfrak{y}} \operatorname{arctang} \frac{\sqrt{N(\mathfrak{y}) - y_0^2}}{y_0}$$

$$= \log\mathfrak{x} + \log\mathfrak{y},$$

womit Satz 2 bewiesen ist.
Für jede Quaternion $\mathfrak{x}$ folgt sofort

$$\log(\mathfrak{x}^{-1}) = \log\frac{\bar{\mathfrak{x}}}{N(\mathfrak{x})} = \log\bar{\mathfrak{x}} + \log\frac{1}{N(\mathfrak{x})},$$

das heißt

$$\log(\mathfrak{x}^{-1}) = -\log\mathfrak{x}.$$

Ferner ist für alle ganzen $n \geqq 1$

$$\log(\mathfrak{x}^{-n}) = \log((\mathfrak{x}^n)^{-1}) = -\log(\mathfrak{x}^n) = -n\log\mathfrak{x}.$$

Also gilt Satz 1 für alle ganzen $n \gtreqless 0$.

Sind schließlich $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ wieder vertauschbare Quaternionen, so ist

$$\log\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}} = \log\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}} = \log\mathfrak{x} - \log\mathfrak{y}.$$

§ 6. Über die Integrale

$$\int\limits_{0_\mathfrak{c}}^{\mathfrak{x}} \frac{1}{1 \pm \mathfrak{z}^2}\, d\mathfrak{z} \quad \text{und} \quad \int\limits_{0_\mathfrak{c}}^{\mathfrak{x}} \frac{1}{1 \pm \mathfrak{z}^2}\, d\mathfrak{z}.$$

$\mathfrak{c}$ sei die durch

$$z_\sigma = x_\sigma t;\ 0 \leqq t \leqq 1;\ \sigma = 0; 1; 2; 3$$

definierte gerade Verbindungsstrecke der Punkte 0 und $\mathfrak{x}$ in R_4. Dann ist

$$\overline{1+\mathfrak{z}^2} = 1 + At^2 - 2\,t\,x_0 \sum_{\sigma=1}^{3} x_\sigma i_\sigma$$

und

$$N(1+\mathfrak{z}^2) = 1 + 2\,z_0^2 - 2\sum_{\sigma=1}^{3} z_\sigma^2 + D,$$

wenn zur Abkürzung $x_0^2 - \sum\limits_{\sigma=1}^{3} x_\sigma^2 = A$ und $\{N(\mathfrak{z})\}^2 = D$ gesetzt ist.

Setzt man noch

$$B = \{N(\mathfrak{x})\}^2,$$

so folgt weiter

$$N(1+\mathfrak{z}^2) = 1 + 2\,A\,t^2 + B\,t^4.$$

Zur Bestimmung der beiden reellen Integrale

$$J_1 = \int\limits_0^1 \frac{dt}{1+2\,A\,t^2+B\,t^4} \quad \text{und} \quad J_2 = \int\limits_0^1 \frac{t^2\,dt}{1+2\,A\,t^2+B\,t^4}$$

setze man

$$M = \frac{A}{B};\ N = \frac{1}{B},$$

so daß also ($\sqrt{N}$ ist reell)

$$\sqrt{N} - M = \frac{2}{\{N(\mathfrak{x})\}^2} \sum_{\sigma=1}^{3} x_\sigma^2$$

ist. Für alle $\mathfrak{x}$ ungleich 0 ist also $\sqrt{N} - M > 0$. Ist $\mathfrak{x}$ keine reelle Quaternion, so bestätigt man leicht, daß

$$\frac{1}{t^4 + 2\,Mt^2 + N} = \frac{E + Ft}{t^2 + t\,W + \sqrt{N}} + \frac{G + Ht}{t^2 - t\,W + \sqrt{N}}$$

ist, wobei $W = \sqrt{2(\sqrt{N} - M)}$ $E = G = \frac{1}{2\sqrt{N}}$; $F = -H = \frac{1}{2W\sqrt{N}}$ ist.

Dann ist aber

$$BJ_1 = \frac{1}{2\sqrt{N}}\int_0^1 \frac{dt}{t^2+tW+\sqrt{N}} + \frac{1}{2W\sqrt{N}}\int_0^1 \frac{t\,dt}{t^2+tW+\sqrt{N}} +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{N}}\int_0^1 \frac{dt}{t^2-tW+\sqrt{N}} - \frac{1}{2W\sqrt{N}}\int_0^1 \frac{t\,dt}{t^2-tW+\sqrt{N}}. \tag{30}$$

Durch die Substitution

$$t \pm \frac{W}{2} = \xi\sqrt{\sqrt{N} - \frac{W^2}{4}},$$

aus der

$$\frac{dt}{d\xi} = \sqrt{\sqrt{N} - \frac{W^2}{4}} = \sqrt{\frac{\sqrt{N}+M}{2}} = \frac{x_0}{N(\mathfrak{x})}$$

folgt, ergibt sich hierbei

$$\int_0^1 \frac{dt}{t^2 \pm tW + \sqrt{N}} = \frac{x_0}{N(\mathfrak{x})}\int_{\frac{\pm W}{2\sqrt{\sqrt{N}-\frac{W^2}{4}}}}^{\frac{\pm W+2}{2\sqrt{\sqrt{N}-\frac{W^2}{4}}}} \frac{d\xi}{(\xi^2+1)\left(\sqrt{N} - \frac{W^2}{4}\right)};$$

$$\int_0^1 \frac{dt}{t^2+tW+\sqrt{N}} = \frac{N(\mathfrak{x})}{x_0}\left(\operatorname{arctang}\frac{N(\mathfrak{x}) + \sqrt{\sum_{\sigma=1}^{3} x_\sigma^2}}{x^0} - \right.$$

$$\left. - \operatorname{arctang}\frac{\sqrt{\sum_{\sigma=1}^{3} x_\sigma^2}}{x_0}\right) = \frac{N(\mathfrak{x})}{x_0}\operatorname{arctang}\frac{x_0}{1+\sqrt{\sum_{\sigma=1}^{3} x_\sigma^2}} \tag{31}$$

und ebenso

$$\int_0^1 \frac{dt}{t^2-tW+\sqrt{N}} = \frac{N(\mathfrak{x})}{x_0}\operatorname{arctang}\frac{x_0}{1-\sqrt{\sum_{\sigma=1}^{3} x_\sigma^2}}. \tag{32}$$

Weiter ist

$$\int_0^1 \frac{dt}{t^2 \pm t W + \sqrt{N}} = \int_0^1 \frac{\frac{1}{2}(2t \pm W) \mp \frac{W}{2}}{t^2 \pm t W + \sqrt{N}} =$$

$$= \frac{1}{2} \log\left(N(\mathfrak{x}) \pm 2\sqrt{\sum_{\sigma=1}^{3} x_\sigma^2} + 1\right) \mp \frac{\sqrt{\sum_{\sigma=1}^{3} x_\sigma^2}}{x_0} \operatorname{arctang} \frac{x_0}{1 \pm \sqrt{\sum_{\sigma=1}^{3} x_\sigma^2}}. \tag{33}$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\Phi = \frac{2 x_0}{1 - N(\mathfrak{x})}$$

und

$$\Psi = \frac{N(\mathfrak{x}) + 2\sqrt{\sum_{\sigma=1}^{3} x_\sigma^2} + 1}{N(\mathfrak{x}) - 2\sqrt{\sum_{\sigma=1}^{3} x_\sigma^2} + 1},$$

so folgt wegen (31) bis (33) nach einer kurzen Umrechnung aus (30)

$$J_1 = \frac{1}{4 x_0} \operatorname{arctang} \Phi + \frac{1}{8\sqrt{\sum_{\sigma=1}^{3} x_\sigma^2}} \log \Psi \tag{34}$$

Wegen

$$\frac{t^2}{t^4 + 2 M t^2 + N} = \frac{F' t}{t^2 + t W + \sqrt{N}} + \frac{H' t}{t^2 - t W + \sqrt{N}},$$

wo $F' = -H' = \frac{1}{2W}$; $W = \sqrt{2(\sqrt{N} - M)} = \frac{2}{N(\mathfrak{x})} \sqrt{\sum_{\sigma=1}^{3} x_\sigma^2}$

ist, folgt weiter

$$B J_2 = -\frac{N(\mathfrak{x})}{8\sqrt{\sum_{\sigma=1}^{3} x_\sigma^2}} \log \Psi + \frac{N(\mathfrak{x})}{4 x_0} \operatorname{arctang} \Phi;$$

$$J_2 = -\frac{1}{8 N(\mathfrak{x}) \sqrt{\sum_{\sigma=1}^{3} x_\sigma^2}} \log \Psi + \frac{1}{4 x_0 N(\mathfrak{x})} \operatorname{arctang} \Phi. \tag{35}$$

Nach (34) und (35) ergibt sich, wenn $\mathfrak{x}$ nicht reell ist,

$$x_0 \int_0^1 \frac{(1+At^2)\,dt}{1+2At^2+Bt^4} = x_0 J_1 + x_0 J_2 A =$$

$$= \frac{x_0^2}{2N(\mathfrak{x})} \operatorname{arctang} \Phi + \frac{x_0 \sqrt{\sum_{\sigma=1}^{3} x_\sigma^2}}{4N(\mathfrak{x})} \log \Psi. \tag{36}$$

Nach (20) ist also wegen (36), wenn man für nicht reelle Quaternionen $\mathfrak{x}$

$$\operatorname{arctang} \mathfrak{x} = \int_{0_c}^{\mathfrak{x}} \frac{1}{1+\mathfrak{z}^2}\, d\mathfrak{z}$$

und

$$\operatorname{Arctang} \mathfrak{x} = \int_{0_c}^{\mathfrak{x}} \frac{1}{1+\mathfrak{z}^2}\, d\mathfrak{z}$$

setzt[1],

$$\operatorname{arctang} \mathfrak{x} = \frac{1}{2} \operatorname{arctang} \Phi + \frac{\log \Psi}{4\sqrt{\sum_{\sigma=1}^{3} x_\sigma^2}} \cdot \sum_{\sigma=1}^{3} x_\sigma i_\sigma, \tag{37}$$

oder

$$\operatorname{arctang} \mathfrak{x} = \frac{1}{2} \operatorname{arctang} \Phi + \frac{(\mathfrak{x}-x_0) \log \Psi}{4\sqrt{N(\mathfrak{x})-x_0^2}} \tag{38}$$

und

$$\operatorname{Arctang} \mathfrak{x} = \frac{1}{2} \operatorname{arctang} \Phi - \frac{\log \Psi}{4\sqrt{\sum_{\sigma=1}^{3} x_\sigma^2}} \sum_{\sigma=1}^{3} x_\sigma i_\sigma \tag{39}$$

oder

$$\operatorname{Arctang} \mathfrak{x} = \frac{1}{2} \operatorname{arctang} \Phi - \frac{(\mathfrak{x}-x_0) \log \Psi}{4\sqrt{N(\mathfrak{x})-x_0^2}} \tag{40}$$

Hieraus folgt

$$\operatorname{arctang}(-\mathfrak{x}) = -\operatorname{arctang} \mathfrak{x};$$
$$\operatorname{Arctang}(-\mathfrak{x}) = -\operatorname{Arctang} \mathfrak{x}.$$

[1] Durch die Bezeichnungen soll nichts über den Zusammenhang von $\operatorname{arctang} \mathfrak{x}$ und $\operatorname{Arctang} \mathfrak{x}$ mit $\operatorname{tang} \mathfrak{x}$ und $\operatorname{Tang} \mathfrak{x}$ angedeutet werden. Dasselbe gilt von den später zu definierenden Funktionen $\mathfrak{artang}\ \mathfrak{x}$ und $\mathfrak{Artang}\ \mathfrak{x}$.

Also sind die beiden Funktionen arctang $\mathfrak{x}$ und Arctang $\mathfrak{x}$ ungerade Funktionen. Ferner ist

$$\text{Arctang } \mathfrak{x} = \overline{\text{arctang } \mathfrak{x}}.$$

Da für rein imaginäre ($x_0 = 0$) Quaternionen $\mathfrak{x}$

$$\Phi = 0$$

ist, sind arctang $\mathfrak{x}$ und Arctang $\mathfrak{x}$ für rein imaginäre Werte des Argumentes $\mathfrak{x}$ selbst rein imaginär.
Es sei nun

$$\text{artang } \mathfrak{x} = \int\limits_{0\mathfrak{C}}^{\mathfrak{x}} \frac{1}{1-\mathfrak{z}^2}\, d\,\mathfrak{z}. \tag{41}$$

Hierbei ist, wenn alle Abkürzungen dieselben Bedeutungen wie oben haben,

$$N(1-\mathfrak{z}^2) = 1-2\,A\,t^2+B\,t^4;$$

und

$$1-\mathfrak{z}^2 = 1-A\,t^2+2\,x_0\,t^2\sum_{\sigma=1}^{3} x_\sigma\, i_\sigma.$$

Also ist nach (20) und (41)

$$\text{artang } \mathfrak{x} = x_0\,\frac{1}{B}\int\limits_0^1 \frac{1-t^2\,N(\mathfrak{x})}{t^4-2\,M t^2+N}\,d\,t + \frac{1}{B}\sum_{\sigma=1}^{3}\left\{i_\sigma\,x_\sigma\int\limits_0^1 \frac{1+t^2\,N(\mathfrak{x})}{t^4-2\,M t^2+N}\,d\,t\right\}. \tag{42}$$

Führt man zur Abkürzung

$$\frac{2\sqrt{\sum\limits_{\sigma=1}^{3} x_\sigma^2}}{1-N(\mathfrak{x})} = \Theta$$

und

$$\frac{N(\mathfrak{x})+2\,x_0+1}{N(\mathfrak{x})-2\,x_0+1} = \Lambda$$

ein, so ergibt eine analoge Rechnung wie oben

$$\int\limits_0^1 \frac{d\,t}{t^4-2\;M\,t^2+N} = \frac{\{N(\mathfrak{x})\}^2}{4\sqrt{\sum\limits_{\sigma=1}^{3} x_\sigma^2}}\ \text{arctang } \Theta + \frac{\{N(\mathfrak{x})\}^2}{8\,x_0}\log \Lambda$$

und

$$\int_0^1 \frac{t^2\,dt}{t^4-2\,Mt^2+N} = \frac{N(\mathfrak{x})}{4\sqrt{\sum\limits_{s=1}^{3} x_s^2}}\ \operatorname{arctang}\Theta - \frac{N(\mathfrak{x})}{8\,x_0}\log\Lambda.$$

Also geht (42) über in

$$\mathfrak{artang}\,\mathfrak{x} = \frac{1}{4}\log\Lambda + \frac{1}{2}\,\mathrm{j}_{\mathfrak{x}}\operatorname{arctang}\Theta. \tag{43}$$

Ersetzt man hier $\mathfrak{x}$ durch $-\mathfrak{x}$, so geht Λ in seinen reziproken Wert über, während Θ ungeändert bleibt. Also ist auch $\mathfrak{artang}\,\mathfrak{x}$ eine ungerade Funktion, d. h. es ist

$$\mathfrak{artang}\,(-\mathfrak{x}) = -\mathfrak{artang}\,\mathfrak{x}.$$

Aus der Berechnung des Integrales

$$\int_{0_c}^{\mathfrak{x}} \frac{1}{1-\mathfrak{z}^2}\,d\mathfrak{z} \tag{44}$$

folgt ohne weiteres, daß

$$\int_{0_c}^{\mathfrak{x}} \frac{1}{1-\mathfrak{z}^2}\,d\mathfrak{z} = \int_{0_c}^{\mathfrak{x}} \frac{1}{1-\mathfrak{z}^2}\,d\mathfrak{z}$$

ist, da sich, wenn man (44) nach (20) entwickelt, die letzten sechs Integrale wegheben. Setzt man also

$$\mathfrak{Artang}\,\mathfrak{x} = \int_{0_c}^{\mathfrak{x}} \frac{1}{1-\mathfrak{z}^2}\,d\mathfrak{z},$$

so ist stets

$$\mathfrak{artang}\,\mathfrak{x} = \mathfrak{Artang}\,\mathfrak{x}.$$

Wegen $N(\mathrm{j}_{\mathfrak{x}}\mathfrak{x}) = N(\mathfrak{x})$; $\mathrm{j}_{\mathfrak{x}}^2 = -1$ und da die arctang-Funktion reeller Argumente ungerade ist, ergeben sich leicht die Beziehungen

$$\begin{aligned}
\mathfrak{artang}\,\mathfrak{x} &= -\mathrm{j}_{\mathfrak{x}}\operatorname{arctang}(\mathrm{j}_{\mathfrak{x}}\mathfrak{x});\\
\mathfrak{artang}\,(\mathrm{j}_{\mathfrak{x}}\mathfrak{x}) &= \underline{\mathrm{j}_{\mathfrak{x}}\operatorname{arctang}}\,\mathfrak{x};\\
\mathrm{j}_{\mathfrak{x}}\operatorname{Arctang}(\mathrm{j}_{\mathfrak{x}}\mathfrak{x}) &= \mathfrak{artang}\,\mathfrak{x}.
\end{aligned}$$

Schlußbemerkung.

Man kann auch die Differentiation von Quaternionenfunktionen einführen. Dabei muß man zwei Differentialquotienten unterscheiden, die man analog den obigen Quotientenbezeichnungen etwa mit $\frac{d\,\mathfrak{f}(\mathfrak{z})}{d\mathfrak{z}}$ und $\frac{d\,\mathfrak{f}(\mathfrak{z})}{|\,d\mathfrak{z}}$ bezeichnen kann. Ihre Untersuchung behalte ich mir einer späteren Gelegenheit vor.