Gedruckt mit Unterstützung aus dem Jerome und Margaret Stonborough-Fonds

Über die Quaternionenfunktionen log $\mathfrak{x}$ und arctang $\mathfrak{x}$

Von

Erich Göllnitz (Chemnitz)

(Vorgelegt in der Sitzung am 18. Mai 1928)

Einleitung.

In meiner Arbeit »Beiträge zur Quaternionentheorie« (Sitzungsber. d. Akad. d. Wiss. in Wien, math.-naturw. Kl. vom 26. Februar 1928) habe ich die Funktionen $\log \mathfrak{x}$ und $\operatorname{arctang} \mathfrak{x}$, wo $\mathfrak{x}$ eine variable Quaternion ist, definiert, ohne ihren Zusammenhang mit den Funktionen $e^{\mathfrak{x}}$ und $\operatorname{tang} \mathfrak{x}$, beziehungsweise $\operatorname{Tang} \mathfrak{x}$ zu untersuchen. Diese Untersuchung soll in dieser Abhandlung nachgeholt werden.

Ich bezeichne die Quaternionen wieder mit kleinen deutschen Buchstaben, ihre reellen[1] Komponenten mit den entsprechenden kleinen lateinischen Buchstaben. Ferner seien i_1, i_2, i_3 die drei Hamilton'schen imaginären Einheiten und $i_0 = 1$. Alle weiter vorkommenden Bezeichnungen benutze ich wie in meiner zitierten Arbeit.

Es sei

$$\mathfrak{x} = \sum_{\sigma=0}^{3} x_\sigma i_\sigma$$

eine variable Quaternion. $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ seien die geraden Verbindungsstrecken der Punkte 1 und $\mathfrak{x}$, beziehungsweise 0 und $\mathfrak{x}$, die durch die Parameterdarstellungen

$$\left.\begin{aligned} z_0 &= 1+(x_0-1)\,t; \\ z_\sigma &= x_\sigma t;\ \sigma = 1;2;3 \end{aligned}\right\}\ 0 \leqq t \leqq 1,$$

beziehungsweise

$$z_\sigma = x_\sigma t;\ 0 \leqq t \leqq 1;\ \sigma = 0;1;2;3$$

bestimmt sind. Dann habe ich die Quaternionenfunktionen $\log \mathfrak{x}$ und $\operatorname{arctang} \mathfrak{x}$ durch die Gleichungen[2]

$$\log \mathfrak{x} = \int_{\substack{1\\ \mathfrak{C}_1}}^{\mathfrak{x}} \frac{1}{\mathfrak{z}}\, d\mathfrak{z} = \log \sqrt{C} + \mathfrak{j}_{\mathfrak{x}} \operatorname{arctang} \frac{B}{x_0} \tag{1}$$

---

[1] Biquaternionen sollen auch diesmal von der Betrachtung ausgeschlossen sein.

[2] Siehe die Formeln (26) und (37) meiner oben genannten Arbeit (weiterhin kurz als »Beiträge« zitiert).

und

$$\operatorname{arctang} \mathfrak{x} = \int_{0 \atop \mathfrak{C}_2}^{\mathfrak{x}} \frac{1}{1+\mathfrak{z}^2}\, d\mathfrak{z} = \frac{1}{2} \operatorname{arctang} \Phi + \frac{1}{4} \mathfrak{j}_{\mathfrak{x}} \log \Psi \tag{2}$$

definiert, wo zur Abkürzung[1]

$$B = \sqrt{\sum_{\sigma=1}^{3} x_\sigma^2}\,;$$

$$\Phi = \frac{2\,x_0}{1 - N(\mathfrak{x})}\,;$$

$$N(\mathfrak{x}) = C;$$

$$\Psi = \frac{C+2\,B+1}{C-2\,B+1}$$

gesetzt ist.

§ 1. Über den Zusammenhang der Quaternionenfunktionen $e^{\mathfrak{x}}$ und $\log \mathfrak{x}$.

Die Funktion $e^{\mathfrak{x}}$ ist in § 3 meiner »Beiträge« durch die beständig konvergente Reihe

$$e^{\mathfrak{x}} = \sum_{\sigma=0}^{\infty} \frac{\mathfrak{x}^\sigma}{\sigma!}$$

definiert. Mein Ziel ist, zu beweisen, daß die Funktion $e^{\mathfrak{x}}$ und $\log \mathfrak{x}$ Umkehrungen voneinander sind. Setzt man zur Abkürzung

$$u = \operatorname{arctang} \frac{B}{x_0}\,,$$

so folgt

$$\sin u = \frac{\operatorname{tang} u}{\sqrt{1+\operatorname{tang}^2 u}} = \frac{B}{x_0} : \sqrt{1+\frac{B^2}{x_0^2}}\,;$$

$$\sin u = \sqrt{1 - \frac{x_0^2}{C}} \tag{3}$$

und

$$\cos u = \frac{x_0}{\sqrt{C}}\,. \tag{4}$$

Nun ist $\mathfrak{j}_{\mathfrak{x}}$ nach Definition eine rein imaginäre Quaternion und $|\mathfrak{j}_{\mathfrak{x}}| = 1$. Also gilt nach der Formel (15) meiner »Beiträge«

$$e^{\mathfrak{j}_{\mathfrak{x}}} = \cos 1 + \mathfrak{j}_{\mathfrak{x}} \sin 1.$$

---

[1] Alle vorkommenden Quadratwurzeln sollen stets den positiven Wert dieser Wurzeln bedeuten.

Da u reell ist, folgt hieraus wegen (3) und (4)

$$e^{\mathfrak{j}_{\mathfrak{x}} u} = \cos u + \mathfrak{j}_{\mathfrak{x}} \sin u$$

oder

$$e^{\mathfrak{j}_{\mathfrak{x}} u} = \frac{x_0}{\sqrt{C}} + \mathfrak{j}_{\mathfrak{x}} \sqrt{1 - \frac{x_0^2}{C}}. \tag{5}$$

Da für zwei vertauschbare Quaternionen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$

$$e^{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}} = e^{\mathfrak{a}} . e^{\mathfrak{b}}$$

ist und da $\log \sqrt{C}$ als reelle Quaternion mit der Quaternion $\mathfrak{j}_{\mathfrak{x}} u$ vertauschbar ist, gilt wegen (5)

$$\begin{aligned} e^{\log \mathfrak{x}} &= e^{\log \sqrt{C} + \mathfrak{j}_{\mathfrak{x}} u} \\ &= e^{\log \sqrt{C}} . e^{\mathfrak{j}_{\mathfrak{x}} u} \\ &= \left(\frac{x_0}{\sqrt{C}} + \mathfrak{j}_{\mathfrak{x}} \sqrt{1 - \frac{x_0^2}{C}}\right) \sqrt{C} \\ &= x_0 + \mathfrak{j}_{\mathfrak{x}} B \end{aligned}$$

oder

$$e^{\log \mathfrak{x}} = \mathfrak{x}. \tag{6}$$

Ist ferner $\mathfrak{y} = e^{\mathfrak{x}}$, so ist wegen $B \geqq 0$ nach der Formel (15) meiner »Beiträge«

$$\mathfrak{y} = e^{x_0 + \mathfrak{j}_{\mathfrak{x}} B} = e^{x_0} (\cos B + \mathfrak{j}_{\mathfrak{x}} \sin B).$$

Also gilt dann

$$N(\mathfrak{y}) = e^{2x_0}\left(\cos^2 B + \sum_{\sigma=1}^{3} \frac{x_\sigma^2 \sin^2 B}{B^2}\right);$$

$$N(\mathfrak{y}) = e^{2x_0} \tag{7}$$

und

$$\mathfrak{j}_{\mathfrak{y}} = \frac{e^{x_0} . \mathfrak{j}_{\mathfrak{x}} \sin B}{\sqrt{\sum_{\sigma=1}^{3} \frac{e^{2x_0} x_\sigma^2 \sin^2 B}{B^2}}} = \mathfrak{j}_{\mathfrak{x}} \tag{8}$$

und

$$\frac{\sqrt{\sum_{\sigma=1}^{3} y_\sigma^2}}{y_0} = \frac{1}{e^{x_0} \cos B} \sqrt{e^{2x_0} \sum_{\sigma=1}^{3} \frac{x_\sigma^2 \sin^2 B}{B^2}};$$

$$\frac{\sqrt{\sum_{\sigma=1}^{3} y_\sigma^2}}{y_0} = \operatorname{tang} B. \tag{9}$$

Ist

$$\mathfrak{y} = \sum_{\sigma=0}^{3} y_\sigma i_\sigma,$$

so folgt aus (1) wegen (7), (8) und (9)

$$\begin{aligned}\log \mathfrak{y} &= \log \sqrt{N(\mathfrak{y})} + \mathfrak{j}_\mathfrak{y} \operatorname{arctang} \frac{\sqrt{\sum\limits_{\sigma=1}^{3} y_\sigma^2}}{y_0} \\ &= \log \sqrt{e^{2x_0}} + \mathfrak{j}_\mathfrak{x} \operatorname{arctang} (\operatorname{tang} B) \\ &= x_0 + \mathfrak{j}_\mathfrak{x} B \\ &= \mathfrak{x}.\end{aligned}$$

Es ist also

$$\log (e^\mathfrak{x}) = \mathfrak{x}. \tag{10}$$

Aus (6) und (10) folgt aber, daß die Funktionen $e^\mathfrak{x}$ und $\log \mathfrak{x}$ Umkehrungen voneinander sind.

§ 2. Berechnung der Integrale

$$\int_{0\atop \mathfrak{C}_2}^{\mathfrak{x}} \frac{1}{1+\mathfrak{j}_\mathfrak{z}\mathfrak{z}}\, d\mathfrak{z} \quad \text{und} \quad \int_{0\atop \mathfrak{C}_2}^{\mathfrak{x}} \frac{1}{1-\mathfrak{j}_\mathfrak{z}\mathfrak{z}}\, d\mathfrak{z}.$$

Längs $\mathfrak{C}_2$ ist, wenn wieder

$$\sqrt{\sum_{\sigma=1}^{3} x_\sigma^2} = B; \; N(\mathfrak{x}) = C$$

gesetzt wird,

$$\mathfrak{j}_\mathfrak{z} = \frac{t \sum\limits_{\sigma=1}^{3} x_\sigma i_\sigma}{\sqrt{\sum\limits_{\sigma=1}^{3} (x_\sigma t)^2}} = \mathfrak{j}_\mathfrak{x}; \tag{11}$$

$$\mathfrak{j}_\mathfrak{z}\mathfrak{z} = t\, \frac{-\sum\limits_{\sigma=1}^{3} x_\sigma^2 + x_0 \sum\limits_{\sigma=1}^{3} x_\sigma i_\sigma}{B}$$

$$\mathfrak{j}_\mathfrak{z}\mathfrak{z} = -Bt + x_0 t \mathfrak{j}_\mathfrak{x}; \tag{12}$$

$$1 \pm \mathfrak{j}_\mathfrak{z}\mathfrak{z} = 1 \mp Bt \mp x_0 t \mathfrak{j}_\mathfrak{x}; \tag{13}$$ [1]

[1] Hier und in den betreffenden folgenden Formeln gehören stets die oberen Vorzeichen zusammen und ebenso die unteren.

$$N(1 \pm \mathfrak{j}_{\mathfrak{z}}\mathfrak{z}) = (1 \mp tB)^2 + x_0^2 t^2 = Ct^2 \mp 2\,Bt + 1. \tag{14}$$

Wegen (11) bis (14) ist also längs $\mathfrak{C}_2$

$$\frac{1}{1 \pm \mathfrak{j}_{\mathfrak{z}}\mathfrak{z}} = \frac{1 \mp Bt \mp x_0 t \mathfrak{j}_{\mathfrak{x}}}{Ct^2 \mp 2\,Bt + 1}. \tag{15}$$

Die in Formel (20) meiner »Beiträge« auftretenden Funktionen $\psi_0; \psi_1; \psi_2; \psi_3$ sind also durch

$$\psi_0 = \frac{1 \mp Bt}{Ct^2 \mp 2\,Bt + 1};$$

$$\psi_\sigma = \frac{\mp t x_0 x_\sigma}{B\,(Ct^2 \mp 2\,Bt + 1)}; \quad \sigma = 1;\,2;\,3$$

bestimmt. Zur Berechnung der Integrale

$$\int_{\substack{0\\ \mathfrak{C}_2}}^{\mathfrak{x}} \frac{1}{1 \pm \mathfrak{j}_{\mathfrak{z}}\mathfrak{z}}\, d\mathfrak{z}$$

müssen die beiden Integrale

$$\mathfrak{J}_1 = \int_0^1 \frac{dt}{Ct^2 \mp 2\,Bt + 1}$$

und

$$\mathfrak{J}_2 = \int_0^1 \frac{t\,dt}{Ct^2 \mp 2\,Bt + 1}$$

bestimmt werden.

Durch die Substitution

$$t \mp \frac{B}{C} = \frac{u x_0}{C} \qquad \frac{dt}{du} = \frac{x_0}{C}$$

folgt

$$\mathfrak{J}_1 = \frac{1}{C}\int_0^1 \frac{dt}{\left(t \mp \frac{B}{C}\right)^2 + \frac{1}{C} - \frac{B^2}{C^2}} = \frac{1}{C}\int_{\frac{\mp B}{x_0}}^{\frac{C \mp B}{x_0}} \frac{\frac{x_0}{C}\,du}{\frac{x_0^2 u^2}{C^2} + \frac{x_0^2}{C^2}}$$

$$= \frac{1}{x_0}\left(\operatorname{arctang}\frac{C \mp B}{x_0} - \operatorname{arctang}\frac{\mp B}{x_0}\right)$$

$$= \frac{1}{x_0}\operatorname{arctang}\frac{\frac{C \mp B}{x_0} - \frac{\mp B}{x_0}}{1 + \frac{(C \mp B)(\mp B)}{x_0^2}}$$

$$= \frac{1}{x_0}\operatorname{arctang}\frac{x_0\,(C \mp B \pm B)}{x_0^2 \mp CB + B^2}$$

oder

$$\mathfrak{J}_1 = \frac{1}{x_0} \operatorname{arctang} \frac{x_0}{1 \pm B}. \tag{16}$$

Durch dieselbe Substitution folgt weiter

$$\mathfrak{J}_2 = \frac{1}{C} \int_{\frac{\mp B}{x_0}}^{\frac{C \mp B}{x_0}} \frac{\frac{x_0 u \pm B}{C} \cdot \frac{x_0}{C} \, du}{\frac{x_0^2 u^2 + x_0^2}{C^2}}$$

$$= \frac{1}{C} \int_{\frac{\mp B}{x_0}}^{\frac{C \mp B}{x_0}} \frac{u \, du}{u^2+1} + \frac{B}{C x_0} \int_{\frac{\mp B}{x_0}}^{\frac{C \mp B}{x_0}} \frac{du}{u^2+1}$$

$$= \frac{1}{2C} \log \frac{1 + \left(\frac{C \pm B}{x_0}\right)^2}{1 + \left(\frac{\mp B}{x_0}\right)^2} \pm \frac{B}{C} \cdot \mathfrak{J}_1$$

$$= \frac{1}{2C} \log \frac{x_0^2 + C^2 \mp 2 B C + B^2}{x_0^2 + B^2} \pm \frac{B}{C} \cdot \mathfrak{J}_1.$$

Wegen $x_0^2 + B^2 = C$ ist also

$$\mathfrak{J}_2 = \pm \frac{B}{C} \cdot \mathfrak{J}_1 + \frac{1}{2C} \log (C \mp 2B + 1). \tag{17}$$

Wegen (16) und (17) ist also nach der Formel (20) meiner »Beiträge«, da sich die letzten sechs Integrale wegheben,

$$\int_{\mathfrak{C}_2}^{\mathfrak{x}} \frac{1}{1 \pm \mathfrak{j}_3 \mathfrak{z}} \, d\mathfrak{z} = \int_0^1 \frac{(1 \mp B t) x_0 \, dt}{C t^2 \mp 2 B t + 1} \pm$$

$$\pm \sum_{\sigma=1}^{3} \int_0^1 \frac{x_0 t \cdot \frac{x_\sigma}{B} \cdot x_\sigma \, dt}{C t^2 \mp 2 B t + 1} + \sum_{\sigma=1}^{3} \left\{ i_\sigma \int_0^1 \frac{(1 \mp B t) x_\sigma \, dt}{C t^2 \mp 2 B t + 1} \right\} +$$

$$+ \sum_{\sigma=1}^{3} \left\{ i_\sigma \int_0^1 \frac{\mp t x_0 \cdot \frac{x_\sigma}{B} \cdot x_0 \, dt}{C t^2 \mp 2 B t + 1} \right\} =$$

$$=\int_0^1 \frac{(1\mp Bt)x_0 \pm Btx_0}{Ct^2\mp 2Bt+1}\,dt+\sum_{\sigma=1}^{3}\left\{i_\sigma\int_0^1\frac{(1\mp Bt)x_\sigma \mp t\cdot\frac{x_0^2 x_\sigma}{B}}{Ct^2\mp 2Bt+1}\,dt\right\}=$$

$$=x_0\cdot\mathfrak{J}_1+\mathfrak{j}_{\mathfrak{x}}\int_0^1\frac{(B\mp B^2t\mp t\,x_0^2)\,dt}{Ct^2\mp 2Bt+1}$$

$$=x_0\cdot\mathfrak{J}_1+\mathfrak{j}_{\mathfrak{x}}\int_0^1\frac{(B\mp Ct)\,dt}{Ct^2\mp 2Bt+1}$$

$$=x_0\cdot\mathfrak{J}_1+B\,\mathfrak{j}_{\mathfrak{x}}\mathfrak{J}_1\mp C\,\mathfrak{j}_{\mathfrak{x}}\left(\pm\frac{B}{C}\,\mathfrak{J}_1+\frac{1}{2C}\log\,(C\mp 2B+1)\right)$$

$$=x_0\cdot\mathfrak{J}_1\mp\frac{1}{2}\,\mathfrak{j}_{\mathfrak{x}}\log\,(C\pm 2B+1).$$

Also ist

$$\int_{0_{\mathfrak{C}_2}}^{\mathfrak{x}}\frac{1}{1+\mathfrak{j}_{\mathfrak{z}}\mathfrak{z}}\,d\mathfrak{z}=\text{arctang}\,\frac{x_0}{1-B}-\frac{1}{2}\,\mathfrak{j}_{\mathfrak{x}}\log\,(C-2B+1)\quad(18)$$

und

$$\int_{0_{\mathfrak{C}_2}}^{\mathfrak{x}}\frac{1}{1-\mathfrak{j}_{\mathfrak{z}}\mathfrak{z}}\,d\mathfrak{z}=\text{arctang}\,\frac{x_0}{1+B}+\frac{1}{2}\,\mathfrak{j}_{\mathfrak{x}}\log\,(C+2B+1).\quad(19)$$

§ 3. Über eine Beziehung zwischen den Funktionen log $\mathfrak{x}$ und arctang $\mathfrak{x}$.

Zunächst ist

$$\mathfrak{j}_{1\pm\mathfrak{j}_{\mathfrak{x}}\mathfrak{x}}=\frac{\pm\frac{x_0}{B}\sum_{\sigma=1}^{3}x_\sigma i_\sigma}{\sqrt{\sum_{\sigma=1}^{3}\left(\frac{x_0 x_\sigma}{B}\right)^2}}=\pm\,\mathfrak{j}_{\mathfrak{x}}.\quad(20)$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\mathfrak{u}=1\pm\mathfrak{j}_{\mathfrak{x}}\mathfrak{x},$$

so gilt nach (1) wegen (20), wenn

$$\mathfrak{u}=\sum_{\sigma=0}^{3}u_\sigma i_\sigma$$

ist,

$$\log \mathfrak{u} = \log \sqrt{N(\mathfrak{u})} \pm \mathfrak{j}_{\mathfrak{x}} \operatorname{arctang} \frac{\sqrt{\sum_{\sigma=1}^{3} u_\sigma^2}}{u_0}. \tag{21}$$

Dabei ist nach der Definition von $\mathfrak{u}$

$$N(\mathfrak{u}) = (1 \mp B)^2 + \sum_{\sigma=1}^{3} \frac{x_0^2\, x_\sigma^2}{B^2} = C \mp 2B + 1$$

und

$$\frac{\sqrt{\sum_{\sigma=1}^{3} u_\sigma^2}}{u_0} = \frac{\sqrt{\sum_{\sigma=1}^{3}\left(\frac{x_0\, x_\sigma}{B}\right)^2}}{1 \mp B} = \frac{x_0}{1 \mp B}.$$

Also geht (21) über in

$$\log (1 \pm \mathfrak{j}_{\mathfrak{x}}\, \mathfrak{x}) = \frac{1}{2} \log (C \mp 2B + 1) \pm \mathfrak{j}_{\mathfrak{x}} \operatorname{arctang} \frac{x_0}{1 \mp B}.$$

Nach (18) und (19) ist also

$$\int_{0_{\mathfrak{C}_2}}^{\mathfrak{x}} \frac{1}{1 + \mathfrak{j}_{\mathfrak{z}}\, \mathfrak{z}}\, d\,\mathfrak{z} = - \mathfrak{j}_{\mathfrak{x}} \log (1 + \mathfrak{j}_{\mathfrak{x}}\, \mathfrak{x}) \tag{22}$$

und

$$\int_{0_{\mathfrak{C}_2}}^{\mathfrak{x}} \frac{1}{1 - \mathfrak{j}_{\mathfrak{z}}\, \mathfrak{z}}\, d\,\mathfrak{z} = \mathfrak{j}_{\mathfrak{x}} \log (1 - \mathfrak{j}_{\mathfrak{x}}\, \mathfrak{x}). \tag{23}$$

Unter den Voraussetzungen des § 4 meiner »Beiträge« lassen sich leicht, wenn $\mathfrak{f}(\mathfrak{z})$, $\mathfrak{f}_1(\mathfrak{z})$, $\mathfrak{f}_2(\mathfrak{z})$, ... $\mathfrak{f}_n(\mathfrak{z})$ integrierbare Quaternionenfunktionen sind und wenn $n \geqq 1$ ganz und $\mathfrak{a}$ eine konstante Quaternion ist, die folgenden Relationen beweisen, wobei die Bezeichnungen des genannten § 4 benutzt sind:

$$\overrightarrow{\int_{\mathfrak{z}_0 C}^{\mathfrak{Z}}} \sum_{\sigma=1}^{n} \mathfrak{f}_\sigma(\mathfrak{z})\, d\,\mathfrak{z} = \sum_{\sigma=1}^{n} \overrightarrow{\int_{\mathfrak{z}_0 C}^{\mathfrak{Z}}} \mathfrak{f}_\sigma(\mathfrak{z})\, d\,\mathfrak{z}; \tag{24}$$

$$\overleftarrow{\int_{\mathfrak{z}_0 C}^{\mathfrak{Z}}} \sum_{\sigma=1}^{n} \mathfrak{f}_\sigma(\mathfrak{z})\, d\,\mathfrak{z} = \sum_{\sigma=1}^{n} \overleftarrow{\int_{\mathfrak{z}_0 C}^{\mathfrak{Z}}} \mathfrak{f}_\sigma(\mathfrak{z})\, d\,\mathfrak{z}; \tag{25}$$

$$\overrightarrow{\int_{\mathfrak{z}_0 C}^{\mathfrak{Z}}} \mathfrak{a}\, \mathfrak{f}(\mathfrak{z})\, d\,\mathfrak{z} = \mathfrak{a} \overrightarrow{\int_{\mathfrak{z}_0 C}^{\mathfrak{Z}}} \mathfrak{f}(\mathfrak{z})\, d\,\mathfrak{z}; \tag{26}$$

$$\overleftarrow{\int}_{\mathfrak{z}_0 C}^{\mathfrak{Z}} \mathfrak{a}\,\mathfrak{f}(\mathfrak{z})\,d\,\mathfrak{z} = \mathfrak{a} \overleftarrow{\int}_{\mathfrak{z}_0 C}^{\mathfrak{Z}} \mathfrak{f}(\mathfrak{z})\,d\,\mathfrak{z}; \tag{27}$$

$$\overrightarrow{\int}_{\mathfrak{z}_0 C}^{\mathfrak{Z}} \mathfrak{f}(\mathfrak{z})\,\mathfrak{a}\,d\,\mathfrak{z} = \left\{\overrightarrow{\int}_{\mathfrak{z}_0 C}^{\mathfrak{Z}} \mathfrak{f}(\mathfrak{z})\,d\,\mathfrak{z}\right\}\mathfrak{a}; \tag{28}$$

$$\overleftarrow{\int}_{\mathfrak{z}_0 C}^{\mathfrak{Z}} \mathfrak{f}(\mathfrak{z})\,\mathfrak{a}\,d\,\mathfrak{z} = \left\{\overleftarrow{\int}_{\mathfrak{z}_0 C}^{\mathfrak{Z}} \mathfrak{f}(\mathfrak{z})\,d\,\mathfrak{z}\right\}\mathfrak{a}. \tag{29}$$

Sind nun $\mathfrak{a} \neq 0$ und $\mathfrak{b} \neq 0$ irgend zwei Quaternionen, so ist

$$\mathfrak{a}^{-1}(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})\,\mathfrak{b}^{-1} = \mathfrak{b}^{-1} + \mathfrak{a}^{-1}.$$

Wendet man diese Formel auf

$$\mathfrak{a} = 1 + \mathfrak{j}_{\mathfrak{z}}\,\mathfrak{z}; \quad \mathfrak{b} = 1 - \mathfrak{j}_{\mathfrak{z}}\,\mathfrak{z}$$

an, so folgt

$$(1+\mathfrak{j}_{\mathfrak{z}}\,\mathfrak{z})^{-1}.2.(1-\mathfrak{j}_{\mathfrak{z}}\,\mathfrak{z})^{-1} = (1+\mathfrak{j}_{\mathfrak{z}}\,\mathfrak{z})^{-1} + (1-\mathfrak{j}_{\mathfrak{z}}\,\mathfrak{z})^{-1};$$

$$(1+\mathfrak{j}_{\mathfrak{z}}\,\mathfrak{z})^{-1} + (1-\mathfrak{j}_{\mathfrak{z}}\,\mathfrak{z})^{-1} = 2\{(1-\mathfrak{j}_{\mathfrak{z}}\,\mathfrak{z})\,(1+\mathfrak{j}_{\mathfrak{z}}\,\mathfrak{z})\}^{-1};$$

$$\frac{1}{1+\mathfrak{j}_{\mathfrak{z}}\,\mathfrak{z}} + \frac{1}{1-\mathfrak{j}_{\mathfrak{z}}\,\mathfrak{z}} = \frac{2}{1+\mathfrak{z}^2}.$$

Also ist nach (22), (23), (24) und nach der Definition von arctang $\mathfrak{x}$

$$2 \operatorname{arctang} \mathfrak{x} = -\mathfrak{j}_{\mathfrak{x}} \log(1+\mathfrak{j}_{\mathfrak{x}}\,\mathfrak{x}) + \mathfrak{j}_{\mathfrak{x}} \log(1-\mathfrak{j}_{\mathfrak{x}}\,\mathfrak{x})$$

oder, da $1+\mathfrak{j}_{\mathfrak{x}}\,\mathfrak{x}$ und $1-\mathfrak{j}_{\mathfrak{x}}\,\mathfrak{x}$ vertauschbare Quaternionen sind,

$$2 \operatorname{arctang} \mathfrak{x} = \mathfrak{j}_{\mathfrak{x}} \log \frac{1-\mathfrak{j}_{\mathfrak{x}}\,\mathfrak{x}}{1+\mathfrak{j}_{\mathfrak{x}}\,\mathfrak{x}}. \tag{30}$$

Ersetzt man in (30) $\mathfrak{x}$ durch $\mathfrak{j}_{\mathfrak{x}}\,\mathfrak{x}$, so folgt wegen $\mathfrak{j}_{\mathfrak{j}_{\mathfrak{x}}\mathfrak{x}} = \mathfrak{j}_{\mathfrak{x}}$

$$2 \operatorname{arctang}(\mathfrak{j}_{\mathfrak{x}}\,\mathfrak{x}) = \mathfrak{j}_{\mathfrak{x}} \log \frac{1+\mathfrak{x}}{1-\mathfrak{x}}. \tag{31}$$

Schließlich folgt noch aus (30) durch Anwendungen von (18) und (19)

$$2 \operatorname{arctang} \mathfrak{x} = \operatorname{arctang} \frac{x_0}{1-B} - \frac{1}{2}\mathfrak{j}_{\mathfrak{x}} \log(C - 2B + 1) +$$

$$+ \operatorname{arctang} \frac{x_0}{1+B} + \frac{1}{2}\mathfrak{j}_{\mathfrak{x}} \log(C + 2B + 1) =$$

$$= \operatorname{arctang} \frac{\dfrac{x_0}{1-B} + \dfrac{x_0}{1+B}}{1 - \dfrac{x_0^2}{1-B^2}} + \frac{1}{2}\, j_{\mathfrak{x}} \log \Psi =$$

$$= \operatorname{arctang} \Phi + \frac{1}{2}\, j_{\mathfrak{x}} \log \Psi$$

Damit ist aber die Formel (37) meiner »Beiträge« auf einem neuen Weg bewiesen.

§ 4. Über den Zusammenhang der Arcustangensfunktion mit der Tangensfunktion.

Da nach dem Schluß des § 6 meiner »Beiträge«

$$\mathfrak{artang}\, \mathfrak{x} = - j_{\mathfrak{x}} \operatorname{arctang} (j_{\mathfrak{x}} \mathfrak{x})$$

ist, gilt nach (31)

$$2\, \mathfrak{artang}\, \mathfrak{x} = \log (1+\mathfrak{x}) - \log (1-\mathfrak{x}). \tag{32}$$

Nun ist nach Definition (siehe § 3 meiner »Beiträge«)

$$\mathfrak{tang}\, \mathfrak{x} = \frac{\mathfrak{sin}\, \mathfrak{x}}{\mathfrak{cos}\, \mathfrak{x}} = (\mathfrak{cos}\, \mathfrak{x})^{-1} . \mathfrak{sin}\, \mathfrak{x}.$$

Hieraus folgt aber

$$\mathfrak{tang} \frac{\mathfrak{y}}{2} = \left(\mathfrak{cos} \frac{\mathfrak{y}}{2}\right)^{-1} \mathfrak{sin} \frac{\mathfrak{y}}{2}$$

$$= \left(e^{\frac{\mathfrak{y}}{2}} + e^{-\frac{\mathfrak{y}}{2}}\right)^{-1} \left(e^{\frac{\mathfrak{y}}{2}} - e^{-\frac{\mathfrak{y}}{2}}\right)$$

$$= \left(e^{\frac{\mathfrak{y}}{2}} + e^{-\frac{\mathfrak{y}}{2}}\right)^{-1} . e^{-\frac{\mathfrak{y}}{2}} . e^{\frac{\mathfrak{y}}{2}} . \left(e^{\frac{\mathfrak{y}}{2}} - e^{-\frac{\mathfrak{y}}{2}}\right)$$

$$= (e^{\mathfrak{y}} + 1)^{-1} (e^{\mathfrak{y}} - 1).$$

Für $\mathfrak{y} = 2\, \mathfrak{artang}\, \mathfrak{x}$ ist also wegen (32)[1]

$$\mathfrak{tang}\ (\mathfrak{artang})\ \mathfrak{x}) = \left(\frac{1+\mathfrak{x}}{1-\mathfrak{x}} + 1\right)^{-1} \left(\frac{1+\mathfrak{x}}{1-\mathfrak{x}} - 1\right)$$

$$= 2^{-1} . 2\, \mathfrak{x}.$$

Daher ist

$$\mathfrak{tang}\ (\mathfrak{artang}\ \mathfrak{x}) = \mathfrak{x}, \tag{33}$$

---

[1] Das folgende gilt, da $1+\mathfrak{x}$ und $1-\mathfrak{x}$ vertauschbare Quaternionen sind.

Da $e^{\mathfrak{y}}+1$ und $e^{\mathfrak{y}}-1$ vertauschbare Quaternionen sind, ist

$$1+\frac{e^{\mathfrak{y}}-1}{e^{\mathfrak{y}}+1}=\frac{2\,e^{\mathfrak{y}}}{e^{\mathfrak{y}}+1}$$

und

$$1-\frac{e^{\mathfrak{y}}-1}{e^{\mathfrak{y}}+1}=\frac{2}{e^{\mathfrak{y}}+1},$$

denn auch $e^{\mathfrak{y}}$ ist mit $e^{\mathfrak{y}}+1$ vertauschbar. Also folgt nach (32) für

$$\mathfrak{x}=\mathfrak{tang}\,\frac{\mathfrak{y}}{2}$$

die Relation

$$2\,\mathfrak{artang}\left(\mathfrak{tang}\,\frac{\mathfrak{y}}{2}\right)=\log\frac{2\,e^{\mathfrak{y}}}{e^{\mathfrak{y}}+1}-\log\frac{2}{e^{\mathfrak{y}}+1}$$

$$=\log 2+\log(e^{\mathfrak{y}})-\log(e^{\mathfrak{y}}+1)-\log 2+\log(e^{\mathfrak{y}}+1)$$

$$=\mathfrak{y}.$$

Da folglich auch

$$\mathfrak{artang}\,(\mathfrak{tang}\,\mathfrak{x})=\mathfrak{x} \tag{34}$$

ist, so sind wegen (33) und (34) die Funktionen $\mathfrak{tang}\,\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{artang}\,\mathfrak{x}$ Umkehrungen voneinander. Nach § 3 und § 6 meiner »Beiträge« gelten weiter die Formeln

$$\mathfrak{artang}\,\mathfrak{x}=-\mathfrak{j}_{\mathfrak{x}}\,\mathrm{arctang}\,(\mathfrak{j}_{\mathfrak{x}}\,\mathfrak{x}) \tag{35}$$

und

$$\mathrm{tang}\,\mathfrak{x}=-\mathfrak{j}_{\mathfrak{x}}\,\mathfrak{tang}\,(\mathfrak{j}_{\mathfrak{x}}\,\mathfrak{x}). \tag{36}$$

Ferner ist nach der Definition[1] von arctang $\mathfrak{x}$

$$\mathfrak{j}_{\mathrm{arctang}\,\mathfrak{x}}=\frac{\dfrac{\log\Psi}{4B}\cdot\sum_{\sigma=1}^{3}x_\sigma\,i_\sigma}{\sqrt{\sum_{\sigma=1}^{3}\left(\dfrac{x_\sigma\log\Psi}{4B}\right)^2}}=\mathfrak{j}_{\mathfrak{x}}.$$

Es folgt also aus (33), da alle auftretenden Funktionen ungerade sind,

$$\mathfrak{tang}\,(-\mathfrak{j}_{\mathfrak{x}}\,\mathrm{arctang}\,(\mathfrak{j}_{\mathfrak{x}}\,\mathfrak{x}))=\mathfrak{x},$$

oder, wenn man $\mathfrak{x}$ durch $\mathfrak{j}_{\mathfrak{x}}\,\mathfrak{x}$ ersetzt, wegen $\mathfrak{j}_{\mathfrak{j}_{\mathfrak{x}}\mathfrak{x}}=\mathfrak{j}_{\mathfrak{x}}$

$$\mathfrak{tang}\,(\mathfrak{j}_{\mathfrak{x}}\,\mathrm{arctang}\,(-\mathfrak{x}))=-\mathfrak{j}_{\mathfrak{x}}\,\mathfrak{x}$$

---

[1] Siehe Formel (38) meiner »Beiträge«.

oder

$$\operatorname{tang}(j_{\mathfrak{x}} \operatorname{arctang} \mathfrak{x}) = j_{\mathfrak{x}} \mathfrak{x}$$

oder

$$-j_{\mathfrak{x}} \operatorname{tang}(j_{\operatorname{arctang} \mathfrak{x}} \operatorname{arctang} \mathfrak{x}) = \mathfrak{x}$$

oder schließlich

$$\operatorname{tang}(\operatorname{arctang} \mathfrak{x}) = \mathfrak{x}. \tag{37}$$

Entsprechend läßt sich auch

$$\operatorname{arctang}(\operatorname{tang} \mathfrak{x}) = \mathfrak{x} \tag{38}$$

beweisen. Wegen (37) und (38) sind also auch die Funktionen tang $\mathfrak{x}$ und arctang $\mathfrak{x}$ Umkehrungen voneinander.