Gedruckt mit Unterstützung aus dem Jerome und Margaret Stonborough-Fonds

Über teilerfremde Zahlen und deren Potenzsummen

Von

Dr. O. Gruder

(Vorgelegt in der Sitzung am 18. Mai 1928)

Die Frage nach der Summe der n-ten Potenzen derjenigen Zahlen der natürlichen Zahlenreihe, die kleiner als eine ganze, positive Zahl x und zu derselben teilerfremd sind, hat zuerst Thaker (1850) und kurz hierauf Binet (1851) aufgeworfen; später haben sich mit derselben Frage Lucas (1877) und Nielsen (1923) befaßt. Wir schicken eine kurze Zusammenstellung der von den angeführten Autoren erhaltenen Resultate voraus, um im Anschluß hieran ein allgemeineres Problem aufzustellen, dessen Lösung die vorliegende Arbeit bezweckt.

Thaker[1] hat als erster eine Formel für die Summe der n-ten Potenzen der $\varphi(x)$ Zahlen, die zu x teilerfremd und kleiner als x sind, aufgestellt, und zwar auf einem Wege, ähnlich demjenigen, der gewöhnlich bei der Ableitung des Ausdruckes für die Euler-sche Funktion $\varphi(x)$ benützt wird. Thaker beschränkt sich bei seiner Beweisführung auf den Fall, daß x aus höchstens drei Primzahlen besteht und bemerkt schließlich: «Das Gesetz dieses Ausdruckes fällt in die Augen und kann ohne Schwierigkeit verallgemeinert werden.«

Binet[2] hat auf einem Wege, der von demjenigen Thaker's ganz verschieden ist, und zwar unter Benützung unendlicher Reihen einen Ausdruck aufgestellt, der für jede beliebige Anzahl von Primzahlen gültig ist.

Lucas[3] hat die Formel Binet's unter Anwendung des Gedankenganges von Thaker in eine der symbolischen Theorie Bernoulli'scher Zahlen besser angepaßte und elegantere Form gebracht.

---

[1] A. Thaker, Ein Beitrag zur Zahlentheorie. Crelle's Journal für reine und angew. Mathematik, Bd. 40, 1850, p. 89—92.

A. Thaker, Solution d'un problème sur la sommation d'une somme de puissances. Nouvelles Annales de Mathématiques, Tome X, 1851, p. 324—330.

[2] J. Binet, Mémoire sur l'application de la théorie des suites à la serie des nombres premiers à un nombre composé. Comptes Rendus de l'Acad. de sciences, Paris, Tome 32, 1851, p. 918—921.

[3] E. Lucas, Sur les théorèmes de Binet et de Staudt. Nouvelles Annales de Mathémat., 2e Serie, Tome XVI, 1877, p. 157—160.

Nielsen[1] hat auf einem Wege, der von demjenigen Thaker's und Binet's verschieden ist, die Formel erhalten:

$$S_n = \frac{x^n \varphi(x)}{n+1} + (-1)^k \sum_{i=1}^{\leqq \frac{n}{2}} \frac{(-1)^{i+1}}{n+1} \binom{n+1}{2i} \overline{B}_i P_{2i-1} x^{n-2i+1}.$$

Hierbei ist k die Anzahl der Primfaktoren $p, q, \ldots, r$ von x, ferner

$$P_i = (p^i - 1)(q^i - 1)\ldots(r^i - 1)$$

und die $\overline{B}_i$ sind Bernoulli'sche Zahlen in der nicht symbolischen Bezeichnungsweise.

Die Problemstellung der angeführten Autoren läßt sich, wie folgt, verallgemeinern: Die Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_s$ seien irgendwelche (von 1 verschiedene) Teiler einer ganzen, positiven Zahl x. In der Zahlenreihe 0, 1, 2, 3, . ., $(x-1)$ streiche man alle Zahlen, die durch mindestens einen der gewählten Teiler $a_1, a_2, \ldots, a_s$ teilbar sind. Die Summe der n-ten Potenzen der übriggebliebenen Zahlen ist zu suchen.

Im folgenden wird gezeigt, daß auch bei dieser allgemeineren Problemstellung der bekannten Formel

$$0^n + 1^n + 2^n + \quad + (x-1)^n = \frac{(B+x)^{n+1} - B_{n+1}}{n+1}$$

die folgende, analog gebaute Formel für die Potenzsummen S_n derjenigen Zahlen entspricht, die kleiner als x und durch keinen der gegebenen Teiler $a_1, a_2, \ldots, a_s$ teilbar sind:

$$S_n = \frac{(AB+x)^{n+1} - A_{n+1} B_{n+1}}{n+1}.$$

Die hierbei auftretenden Zahlen $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ hängen in einfacher Weise von den Teilern $a_1, a_2, \ldots, a_s$ ab. Bezeichnet v ein Symbol für das kleinste gemeinsame Vielfache, dessen Bedeutung im Text des näheren umschrieben wird, so ist:

$$A_i = v(1 - a_1^{i-1})(1 - a_2^{i-1})\ldots(1 - a_s^{i-1}).$$

Unter der Bedingung, daß die $a_1, a_2, \ldots, a_s$ zu je zweien teilerfremd sind, gilt die einfachere Formel:

$$A_i = (1 - a_1^{i-1})(1 - a_2^{i-1})\ldots(1 - a_s^{i-1}).$$

Wählt man insbesondere als die Teiler $a_1, a_2, \ldots, a_s$ einfach alle Primzahlen von x, so ist obige Bedingung jedenfalls erfüllt und

---

[1] N. Nielsen, Traité élémentaire des nombres de Bernoulli, Paris, 1923, p. 321.

man erhält den Spezialfall, den Thaker, Binet, Lucas und Nielsen behandelt haben.

Obige Formel für S_n läßt sich leicht dann beweisen, wenn die gewählten Teiler a_i zu je zweien teilerfremd sind. Zur Behandlung des allgemeineren Falles, bei welchem die Teiler a_i der Bedingung, zu je zweien teilerfremd zu sein, nicht unterworfen werden, schien es zweckmäßig, den Begriff der »Zahlengesamtheit« einzuführen, um einen algebraischen Ausdruck für gewisse Gruppen teilerfremder Zahlen zu erhalten. Die hierbei aufgestellten Definitionen und Regeln für die Rechnung mit »Zahlengesamtheiten« liefern einen einfachen Beweis obiger Formel für S_n und gestatten auch einige anderweitige Beziehungen zwischen Gruppen teilerfremder Zahlen aufzustellen. Von den erhaltenen Resultaten sei angeführt:

Analog zur Euler'schen Funktion $\varphi(x)$ (Anzahl der ganzen, positiven Zahlen, die $< x$ und zu x teilerfremd sind) gibt es eine Funktion $\varphi(x, k)$, welche die Anzahl der Zahlen angibt, die $< x$ sind und durch genau k Primzahlen von x teilbar sind. Bezeichnet man mit H_k die Gesamtheit der Zahlen, die kleiner als x sind und durch k, aber nicht mehr als durch k, der beliebig gegebenen Teiler $a_1, a_2, \ldots, a_s$ der Zahl x teilbar sind, so bestehen zwischen den so definierten »Hauptgesamtheiten« $H_0, H_1, \ldots, H_s$ einfache Beziehungen, für die wir (im Sinne der aufgestellten Definition für die Operationen mit Gesamtheiten) die folgende Form erhalten:

$$H_k = \sum_{i=k}^{s} (-1)^{i-k} \binom{i}{k} \times G_i, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, s.$$

Hierbei bedeuten die G_i solche Zahlengesamtheiten, die immer unmittelbar angeschrieben werden können, also als bekannt anzusehen sind. Bezeichnet h_k die Anzahl der Zahlen der Gesamtheit H_k und g_k dasselbe für G_k, so bestehen auch zwischen den Zahlen h_k und den leicht zu berechnenden Zahlen g_k die entsprechenden $s+1$ Gleichungen:

$$h_k = \sum_{i=k} (-1)^{i-k} \binom{i}{k} g_i, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, s.$$

Wählt man als Teiler $a_1, a_2, \ldots, a_s$ von x einfach alle Primzahlen $p, q, \ldots$ der Zahl x, so geht h_k in $\varphi(x, k)$ über und man erhält für die Anzahl aller ganzen, positiven Zahlen, die $< x$ und mit x genau k Primzahlen gemeinsam haben, den Ausdruck

$$\varphi(x, k) = (-1)^k \sum_{d : x} \mu(d) \binom{i}{k} \frac{x}{d}$$

Hierbei ist die Summe über alle Teiler d von x zu erstrecken, i bezeichnet die Anzahl der Primzahlen von d und für $d = 1$ ist $i = 0$ zu nehmen; $\mu(d)$ bezeichnet die bekannte zahlentheoretische Funktion. Für $k = 0$ geht $\varphi(x, k)$ in $\varphi(x)$ über.

Unter Zuhilfenahme der zwischen den Gesamtheiten H_k bestehenden Beziehungen nehmen wir eine weitere Verallgemeinerung des die Potenzsummen betreffenden Problems vor: Es ist die Summe der n-ten Potenzen derjenigen ganzen, positiven Zahlen zu suchen, die kleiner als x und durch k, aber nicht mehr als durch k, der beliebig gegebenen s Teiler $a_1, a_2, \ldots, a_s$ von x teilbar sind. Wählt man insbesondere als diese Teiler alle Primzahlen von x, so erhält man als Spezialfall die Summe der n-ten Potenzen der $\varphi(x, k)$ Zahlen, die genau k Primzahlen mit x gemeinsam haben. Auch bei dieser zweiten Verallgemeinerung der Problemstellung ergibt sich für die gesuchte Summe wieder die Formel

$$S_n = \frac{(AB + x)^{n+1} - A_{n+1} B_{n+1}}{n+1}$$

wobei die A_i nur von den gewählten s Teilern $a_1, a_2, \ldots, a_s$ und von k abhängig sind.

Herr Prof. Dr. Ph. Furtwängler hatte die Freundlichkeit, bei Durchsicht des Manuskriptes Vereinfachungen der Beweise und Verbesserungen der angewendeten symbolischen Bezeichnungen, insbesondere die Einführung der Variablen τ, anzuregen. Es sei mir gestattet, Herrn Prof. Furtwängler auch an dieser Stelle meinen wärmsten Dank zum Ausdruck zu bringen.

1.

Es sei x eine natürliche Zahl und $a_1, a_2, \ldots, a_s$ seien irgendwelche Teiler von x. Die Summe den n-ten Potenzen aller ganzen, positiven Zahlen, die kleiner als x und durch keine der Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_s$ teilbar sind, möge mit $S_n(x, a_1, a_2, \ldots, a_s)$ bezeichnet werden. Zwischen

$$S_n(x) = 0^n + 1^n + 2^n + \ldots + (x-1)^n \tag{1}$$

und $S_n(x, a_1)$ besteht die einfache Beziehung

$$S_n(x, a_1) = S_n(x) - a_1^n S_n\left(\frac{x}{a_1}\right). \tag{2}$$

Unter der Annahme, daß die Teiler $a_1, a_2, \ldots, a_s$ zu je zweien teilerfremd sind, kann leicht die zu (2) analoge Beziehung zwischen

$$S_n(x, a_1, a_2, \ldots, a_s) \text{ und } S_n(x, a_1, a_2, \ldots, a_{s-1}),$$

wie folgt, erhalten werden: Alle ganzen, positiven Zahlen, die $< x$ und durch keine der Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_{s-1}$ teilbar sind, mögen mit $x_1, x_2, \ldots, x_r$ bezeichnet werden. Die x_i seien so geordnet, daß

$x_1, x_2, \ldots, x_k$ durch a_s teilbar und $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_r$ durch a_s nicht teilbar sind. Man darf daher $x_i = a_s y_i$ für $i = 1, 2, \ldots, k$ setzen. Ist nun $x = a_s u$ und bezeichnet man noch alle ganzen, positiven Zahlen, die $< u$ und durch keine der Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_{s-1}$ teilbar sind, mit $u_1, u_2, \ldots, u_p$, so ist leicht zu zeigen, daß die Gesamtheit der Zahlen $u_1, u_2, \ldots, u_p$ mit der Gesamtheit der $y_1, y_2, \ldots, y_k$ übereinstimmt. (Jedes der u_i muß wegen $u_i a_s < x$ unter den y_i vorkommen, aber auch jedes der y_i wegen $y_i < u$ unter den u_i.) Es ist also:

$$\sum_{i=k+1} x_i^n = \sum_{i=1} x_i^n - a_s^n \sum_{i=1}^{p} u_i^n,$$

wodurch der folgende Hilfssatz bewiesen ist:

Sind $a_1, a_2, \ldots, a_s$ zu je zweien teilerfremde und ansonsten beliebige Teiler von x, so gilt für die Summe der n-ten Potenzen aller ganzen, positiven Zahlen, die $< x$ und durch keine der Zahlen $a_1, a_2, \ldots a_s$ teilbar sind, die Rekursionsformel

$$S_n(x, a_1, a_2, \ldots, a_s) =$$
$$= S_n(x, a_1, a_2, \ldots, a_{s-1}) - a_s^n S_n\left(\frac{x}{a_s}, a_1 a_2, \ldots, a_{s-1}\right) \tag{3}$$

für $s > 1$ und die Formel (2) *für $s = 1$.*

Für die Summe (1) besteht die bekannte Formel:

$$S_n(x) = \frac{(B+x)^{n+1} - B_{n+1}}{n+1} \tag{4}$$

Hierbei sind die Bernoulli'schen Zahlen B_k mit den aus der Rekursionsformel

$$B_0 = 1, \ (B+1)^k = B_k \text{ für } k > 1 \tag{5}$$

sich ergebenden Werten $B_1 = -\frac{1}{2}$ $B_2 = \frac{1}{6}$ $B_4 = -\frac{1}{30}$,

und in der symbolischen Schreibweise $B_k = B^k$ zu verwenden.

Führt man (4) in (2) ein und setzt dann zur Abkürzung $1 - a_1^{i-1} = C_i$, so erhält man, wenn C^i statt C_i (auch C^0 statt C_0) geschrieben wird:

$$S_n(x, a_1) = \frac{(CB+x)^{n+1} - C_{n+1} B_{n+1}}{n+1}$$

Es sind also $S_n(x)$ und $S_n(x, a_1)$ Polynome $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades in x, die an der Stelle $x = 0$ verschwinden. Durch vollständige Induktion folgt aus (3), daß auch $S_n(x, a_1, a_2, \ldots, a_s)$ ein Polynom in x ist, das diese beiden Eigenschaften hat. Man darf daher den Ansatz machen:

$$S_n(x, a_1, a_2, \ldots, a_s) = \frac{(AB+x)^{n+1} - A_{n+1}B_{n+1}}{n+1} \tag{6}$$

Für $s = 1$ ist nach obigem $A_i = 1 - a_1^{i-1}$. Nimmt man, um die A_i für ein allgemeines s zu berechnen, in der Formel

$$S_n(x, a_1, a_2, \ldots, a_{s-1}) = \frac{(\bar{A}B+x)^{n+1} - \bar{A}_{n+1}B_{n+1}}{n+1} \tag{7}$$

die Werte

$$\bar{A}_i = (1-a_1^{i-1})(1-a_2^{i-1}) \ldots (1-a_{s-1}^{i-1}) \tag{8}$$

als richtig an und führt (6), (7) in (3) ein, so ergibt sich durch Vergleich beiderseitiger Koeffizienten von x^{n+1-i}:

$$A_i = \bar{A}_i - a_s^{i-1}\bar{A}_i,$$

also nach (8)

$$A_i = (1-a_1^{i-1})(1-a_2^{i-1}) \ldots (1-a_s^{i-1}), \tag{9}$$

womit (9) durch vollständige Induktion für alle $s \geqq 1$ erwiesen ist, da es für $s = 1$, wie oben gezeigt, richtig ist.

Setzt man

$$S_n(x, a_1, a_2, \ldots, a_s) = \sum_{i=0} b_{i,s}\, x^{n+1-i}, \quad S_n(x) = \sum_{i=0} b_{i,0}\, x^{n+1-i},$$

so ergibt sich aus (6), (9) und (4):

$$b_{i,s} = (1-a_1^{i-1})(1-a_2^{i-1}) \ldots (1-a_s^{i-1})\, b_{i,0},$$

wodurch die Abhängigkeit der $b_{i,s}$ von den $b_{i,0}$ in Evidenz gesetzt ist. Wir erhalten den

Satz: *Sind $a_1, a_2, \ldots, a_s$ irgendwelche Teiler einer ganzen, positiven Zahl x, die der Bedingung genügen, daß je zwei von ihnen teilerfremd sind, und ist*

$$A_i = (1-a_1^{i-1})(1-a_2^{i-1}) \ldots (1-a_s^{i-1}), \tag{9}$$

so gilt für die Summe der n-ten Potenzen aller ganzen, positiven Zahlen, die kleiner als x und durch keine der Zahlen $a_1, a_2, \ldots a_s$ teilbar sind, die Formel

$$S_n(x, a_1, a_2, \ldots, a_s) = \frac{(AB+x)^{n+1} - A_{n+1}B_{n+1}}{n+1}. \tag{10}$$

Wählt man in (10) als Teiler a_i einfach alle Primteiler der Zahl x, so erhält man den (in der Einleitung erwähnten) von

Thaker, Binet, Lucas und Nielsen behandelten Spezialfall, und zwar insbesondere die Formel von Lucas.

Die Formel (10) gilt auch für $n=0$; dies folgt aus der Erwägung, daß die Formel (4) für $n=0$ gültig ist, wenn vereinbart wird, daß in

$$S_n(x) = 0^n + 1^n + 2^n + \ldots + (x-1)^n$$

für $n=0$ der Wert $0^0 = 1$ gelten soll. Aus (10) folgt für $n=0$:

$$S_0(x, a_1, a_2, \ldots, a_s) = A_1 B_1 + A_0 B_0 x - A_1 B_1 = A_0 x.$$

Setzt man hier den Wert von A_0 aus (9) ein, so erhält man die folgende naheliegende Verallgemeinerung der Euler'schen Funktion $\varphi(x)$, die leicht auch direkt bewiesen werden kann:

Sind $a_1, a_2, \ldots, a_s$ irgendwelche Teiler von x, die in allen Kombinationen zu je zwei teilerfremd sind, und bedeutet

$$\varphi(x, a_1, a_2, \ldots, a_s)$$

die Anzahl der ganzen, positiven Zahlen, die kleiner als x und durch keine der Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_s$ teilbar sind, so ist

$$\varphi(x, a_1, a_2, \ldots, a_s) = x\left(1 - \frac{1}{a_1}\right)\left(1 - \frac{1}{a_2}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{a_s}\right). \tag{11}$$

Eine gleiche Verallgemeinerung der Euler'schen Funktion $\varphi(x)$ hat Zsigmondy[1] im Anschluß an eine Formel von Kronecker gegeben. Wir werden im folgenden die Voraussetzung, daß die $a_1, a_2, \ldots a_s$ zu je zweien teilerfremd sind, fallenlassen und auch für diesen Fall sowie für andere, allgemeinere Fälle, die der Formel (10) entsprechenden Beziehungen und gleichzeitig weitere Verallgemeinerungen der Funktion $\varphi(x)$ erhalten.

2.

Die Frage nach der Summe der n-ten Potenzen der Zahlen $e_1, e_2, \ldots, e_k$, die nach irgendeiner Vorschrift gegeben sind, läßt sich offenbar immer dann beantworten, wenn es gelingt, die Gesamtheit dieser k Zahlen in andere Zahlengesamtheiten zu zerlegen, für welche diese Frage bereits beantwortet ist. Um eine Zahlengesamtheit aus anderen Zahlengesamtheiten aufbauen zu können, benötigt man gewisser Festsetzungen für das Rechnen mit Zahlengesamtheiten, die wir zunächst vereinbaren wollen, Festsetzungen, die vielleicht auch anderweitige Anwendungen gestatten.

Gesamtheit. Jede wohldefinierte Gesamtheit von k Elementen $e_1, e_2, \ldots, e_k$ bilde die Gesamtheit K. Wir schreiben

$$K = (e_1, e_2, \ldots, e_k).$$

---

[1] K. Zsigmondy, Zur Verallgemeinerung der Funktion $\varphi(x)$ in der Zahlentheorie. Crelle's Journal für reine und angew. Mathematik, Bd. 111, 1893, p. 344—346.

Als Elemente der Gesamtheit mögen Zahlen angenommen werden, die gleich oder verschieden sein können; die Anzahl k der Elemente soll immer endlich sein.

Gesamtheit $G(x)$. Die Gesamtheit der x Zahlen $0, 1, 2, .$ $(x-1)$ wollen wir immer mit $G(x)$ bezeichnen:

$$G(x) = (0, 1, 2, \ldots, x-1). \tag{12}$$

Hierdurch ist $G(x)$ für ganzzahlige $x \geqq 1$ definiert; $G(0)$ wird unter (15) eingeführt.

Gleichheit. Zwei Gesamtheiten K_1 und K_2 mögen gleich heißen, wenn sich die Elemente von K_1 und K_2 so anordnen lassen, daß die beiden Zahlenreihen identisch sind. Zahlen, die etwa in K_1 mehrmals vorkommen, müssen daher auch in K_2 gleich oft auftreten.

Addition. Unter der Summe zweier Gesamtheiten K_1 und K_2 verstehe man die Gesamtheit K_3, die aus allen Elementen von K_1 und K_2 besteht.

Wir schreiben:

$$K_3 = K_1 \overset{\circ}{+} K_2 \text{ oder einfacher } K_3 = K_1 + K_2, \tag{13}$$

da im allgemeinen durch Anwendung des Zeichens $+$ anstatt $\overset{\circ}{+}$ ein Mißverständnis nicht zu befürchten ist.

Teilgesamtheit. Die Gesamtheit K_2 heiße eine Teilgesamtheit von K_1, wenn jedes Element der Gesamtheit K_2 unter den Elementen von K_1 vorkommt, und zwar in K_1 mindestens so oft, als in K_2. Ist K_2 eine Teilgesamtheit von K_1 und K_1 eine Teilgesamtheit von K_2, so ist offenbar $K_1 = K_2$.

Größer und kleiner. Ist K_2 eine Teilgesamtheit von K_1 und besteht nicht die Gleichung $K_1 = K_2$, so wollen wir sagen, daß K_1 größer als K_2 und K_2 kleiner als K_1 ist.

Subtraktion. Die Subtraktion zweier Gesamtheiten: $K_1 \overset{\circ}{-} K_2$ sei nur für den Fall definiert, daß K_2 eine Teilgesamtheit von K_1 ist. Die Gleichung

$$K_3 = K_1 \overset{\circ}{-} K_2 \text{ oder einfacher } K_3 = K_1 - K_2 \tag{14}$$

bedeute: die Gesamtheit K_3 ist in der Weise zu bilden, daß man alle Elemente von K_1 wegläßt, welche in der Teilgesamtheit K_2 vorkommen. Zahlen, die in K_2 mehrmals vorkommen, sind entsprechend oft in K_1 zu streichen.

Die Nullgesamtheit $G(0)$. Die Operation $K_1 \quad K_2$ ist nach obigem auch für den Fall $K_1 = K_2$ definiert, da auch in diesem Falle K_2 eine Teilgesamtheit von K_1 bildet. Das Resultat der Operation $K_1 - K_2$ für den Fall $K_1 = K_2$ wollen wir die Nullgesamtheit (Gesamtheit ohne Elemente) nennen und mit $G(0)$ bezeichnen.

$$G(0) = K - K. \tag{15}$$

Mehrere Additionen und Subtraktionen. Nach obigem ist für zwei beliebige Gesamtheiten die Subtraktion nicht immer ausführbar. Ist aus mehreren Gesamtheiten $K_1, K_2, K_3, .$ durch Additionen und Subtraktionen eine neue Gesamtheit zu bilden, so sei immer stillschweigend vorausgesetzt, daß, ohne Rücksicht auf die Reihenfolge der vorgeschriebenen Operationen, immer zuerst alle Additionen oder wenigstens so viele durchzuführen sind, daß die vorgeschriebenen Subtraktionen, wenn solche überhaupt ausführbar sind, möglich werden.

Multiplikation erster und zweiter Art. Ist die Gesamtheit $K = (e_1, e_2, . \; ., e_k)$ und eine Zahl m gegeben, so sei unter der »Multiplikation erster Art« der Zahl m und der Gesamtheit K die Bildung der Gesamtheit

$$(me_1, \; me_2, . \; ., me_k) \tag{16}$$

verstanden und das Resultat werde mit mK bezeichnet.

Hingegen werde die Addition von m gleichen Gesamtheiten

$$K+K+. \; .+K \text{ mit } m \times K \tag{17}$$

bezeichnet und als »Multiplikation zweiter Art« definiert. Für $K = (e_1, e_2, e_3)$ sei also

$$2 \times K = (e_1, e_1, e_2, e_2, e_3, e_3).$$

Wir vermerken zwecks späterer Anwendung: Ist k die Anzahl der Elemente der Gesamtheit K, so ist die Anzahl der Elemente von mK ebenfalls gleich k und die von $m \times K$ ist gleich mk.

3.

Die vorstehenden Vereinbarungen gestatten algebraische Ausdrücke für gewisse Gesamtheiten teilerfremder Zahlen aufzustellen. Den allgemeinen Betrachtungen schicken wir einige einfache Beispiele für das Rechnen mit Gesamtheiten voraus.

Für die Gesamtheit der ganzen, positiven Zahlen, die kleiner als x und durch einen Teiler a von x nicht teilbar sind, ergibt sich durch Anwendung der Bezeichnung (12) sowie der Operationen (14) und (16) der Ausdruck:

$$G(x) - a\, G\left(\frac{x}{a}\right).$$

Bezeichnet $H(x, a, b)$ die Gesamtheit derjenigen Zahlen von $G(x)$, die durch die Teiler a, b von x nicht teilbar sind und $v(a\,b)$ das kleinste gemeinsame Vielfache von a und b, so ist offenbar:

$$H(x, a, b) = G(x) - a\, G\left(\frac{x}{a}\right) - b\, G\left(\frac{x}{b}\right) + v(a\,b)\, G\left(\frac{x}{v(a\,b)}\right).$$

Sind $p_1, p_2, \ldots, p_s$ alle Primteiler von x, so erhält man für die Gesamtheit aller ganzen, positiven Zahlen, die $< x$ und zu x teilerfremd sind, den Ausdruck

$$G(x) - \sum p_i\, G\left(\frac{x}{p_i}\right) + \sum_{i,k} p_i p_k\, G\left(\frac{x}{p_i p_k}\right) - \ldots + (-1)^s p_1 p_2 \ldots p_s\, G\left(\frac{x}{p_1 p_2 \ldots p_s}\right). \tag{18}$$

Derselbe Gedankengang, der gewöhnlich beim Beweis der bekannten Formel für die Euler'sche Funktion $\varphi(x)$ benützt wird, liefert auch den Beweis von (18).

Die Anzahl der Zahlen von $G(y)$ ist nach (12) gleich y. Hat man also für irgendeine Gesamtheit K eine Darstellung von der Form

$$K = \sum \pm a_i\, G(b_i x) \tag{19}$$

erhalten, so kann die Anzahl der Zahlen von K unmittelbar abgelesen werden und ist offenbar gleich

$$x \sum \pm b_i.$$

Dieses und die früheren Beispiele zeigen, daß es in solchen einfachen Fällen möglich ist, mit den gleichen Hilfsmitteln, die sonst nur zur Bestimmung der Anzahl gewisser Zahlen führen, durch Hinzunahme des Begriffes der Zahlengesamtheit nicht nur die Anzahl dieser Zahlen zu bestimmen, sondern auch einen Ausdruck für den Aufbau der betreffenden Gesamtheit zu erhalten. Ein Ausdruck von der Form (19) gestattet (wie später gezeigt wird) in einfacher Weise eine Formel für die Summe der n-ten Potenzen aller Zahlen der Gesamtheit K abzuleiten. Auf diesem Wege werden wir im 7. Abschnitt eine Formel für die Summe der n-ten Potenzen aller Zahlen erhalten, die $< x$ sind und mit x genau k Primzahlen oder allgemeiner genau k Teiler von s beliebigen Teilern gemeinsam haben.

4.

Schon bei einfachsten zahlentheoretischen Fragen treten gewisse Typen von Gesamtheiten auf. Man kann zwei Formen solcher oft vorkommender, typischer Gesamtheiten unterscheiden, die wir nachstehend definieren wollen.

Elementare Gesamtheiten. Die Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_s$ seien irgendwelche Teiler der natürlichen Zahl x. Das kleinste gemeinsame Vielfache von $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}$ möge mit $v(a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_k})$ bezeichnet werden. Wir bilden aus Gesamtheiten von der Form (12) durch

Multiplikationen erster Art (16) und Additionen (13) Gesamtheiten $G_0, G_1, \ldots, G_s$ nach folgender Vorschrift:

$$G_0 = G(x)$$

$$G_1 = a_1\, G\left(\frac{x}{a_1}\right) + a_2\, G\left(\frac{x}{a_2}\right) + \ldots + a_s\, G\left(\frac{x}{a_s}\right)$$

$$G_2 = v(a_1 a_2)\, G\left(\frac{x}{v(a_1 a_2)}\right) + v(a_1 a_3)\, G\left(\frac{x}{v(a_1 a_3)}\right) + \ldots + v(a_{s-1} a_s)\, G\left(\frac{x}{v(a_{s-1} a_s)}\right)$$

$$G_k = \sum v(a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_k})\, G\left(\frac{x}{v(a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_k})}\right) \qquad (20)$$

$$k = 1, 2, 3, \ldots, s.$$

In G_k ist die Summe über alle Kombinationen k^{ter} Klasse $i_1, i_2, \ldots i_k$ der s Indices $1, 2, 3, \ldots, s$ zu erstrecken. Die so definierten $s+1$ Gesamtheiten G_k mögen elementare Gesamtheiten genannt werden.

Aus (20) folgt, daß die G_k in bezug auf die Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_s$ symmetrisch sind. Weiters ergibt sich aus (20), daß eine elementare Gesamtheit nie mit der Nullgesamtheit (15) zusammenfallen kann, da in (20) x durch v teilbar also $\frac{x}{v} \geqq 1$ ist.

Hauptgesamtheiten. Sind irgendwelche s Teiler $a_1, a_2, \ldots, a_s$ der Zahl x gegeben, so kann die Gesamtheit $G(x) = (0, 1, 2, \ldots, x-1)$ eindeutig in $s+1$ Teilgesamtheiten $H_0, H_1, H_2, \ldots, H_s$, wie folgt, zerlegt werden:

H_0 umfasse die Gesamtheit aller Zahlen von $G(x)$, die durch keinen der Teiler $a_1, a_2, \ldots, a_s$ teilbar sind; H_1 umfasse alle Zahlen von $G(x)$, die durch irgendeinen, aber nicht mehr als einen, der gewählten Teiler $a_1, a_2, \ldots, a_s$ teilbar sind; allgemein sei H_k als die Gesamtheit aller ganzen, nichtnegativen Zahlen definiert, die kleiner als x und durch k, aber nicht mehr als durch k, der Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_s$ teilbar sind. Die so definierten $s+1$ Gesamtheiten H_k mögen als Hauptgesamtheiten von $G(x)$ bezeichnet werden.

Die Hauptgesamtheiten H_k sind (ebenso wie die elementaren Gesamtheiten G_k) in bezug auf die $a_1, a_2, \ldots, a_s$ symmetrisch, denn die Zahlen in H_k bleiben offenbar ungeändert, wenn die Teiler $a_1, a_2, \ldots, a_s$ einer Permutation unterzogen werden.

Die Hauptgesamtheit H_s ist immer von der Nullgesamtheit $G(0)$ verschieden, da in H_s mindestens ein Element, die Zahl Null, vorkommen muß. Die Hauptgesamtheit H_0 ist — wenn von dem trivialen Fall $a_i = 1$ abgesehen wird — ebenfalls immer von $G(0)$ verschieden. Diesbezüglich verhalten sich also H_0 und H_s so, wie die elementaren Gesamtheiten G_k, deren keine mit $G(0)$ zusammenfallen kann. Hingegen kann jede von H_0 und H_s verschiedene Hauptgesamtheit H_k mit der Nullgesamtheit zusammenfallen, wie das folgende Beispiel zeigt: Ist $s=3$, $a_1=ab$, $a_2=bc$, $a_3=ca$ und sind die a, b, c zu je zweien teilerfremd, so gibt es in $G(x)$ keine Zahl für die Hauptgesamtheit H_2 und es ist $H_2=G(0)$ zu setzen.

Im Sinne der für die Gleichheit zweier Gesamtheiten aufgestellten Definition erfüllen die Hauptgesamtheiten die Gleichung

$$H_0+H_1+H_2+\ldots+H_s=G(x) \tag{21}$$

Dies ergibt sich, wie folgt: Jede Zahl von $G(x)$ ist entweder durch keine oder genau durch eine, oder genau durch zwei, usw., oder schließlich durch alle s der Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_s$ teilbar. Alle Zahlen von $G(x)$ kommen also unter den Zahlen der Hauptgesamtheiten H_k vor. Anderseits ist jede Zahl, die in einer Hauptgesamtheit H_k vorkommt, der Gesamtheit $G(x)$ entnommen worden, kommt also auch in $G(x)$ vor. Zahlen, die etwa in H_i und H_k gleichzeitig vorkommen, gibt es nicht, da dies der Definition der Hauptgesamtheit widersprechen würde. Die Gleichung (21) ist daher bewiesen.

Es ist die Frage naheliegend, ob sich für jede der $s+1$ Hauptgesamtheiten H_k ein Bildungsgesetz aufstellen läßt, nach welchem man die Hauptgesamtheiten H_k aus Gesamtheiten von der Form $G(y)$ durch Operationen der Addition, Subtraktion und Multiplikation aufbauen kann. Wir zeigen im nächsten Abschnitt, daß außer der Gleichung (21) noch weitere s Gleichungen zwischen den H_k bestehen und werden auf Grund dieser Gleichungen solche Aufbauformeln für jede der $s+1$ Hauptgesamtheiten erhalten.

5.

Eine Gesamtheit ist offenbar dann als bekannt anzusehen, wenn man auf Grund der Definition dieser Gesamtheit die Elemente derselben unmittelbar anschreiben kann. In diesem Sinne ist die Gesamtheit $G(x)$ nach (12) eine bekannte Gesamtheit. Die elementaren Gesamtheiten G_k sind ebenfalls als bekannt anzusehen, da die Definitionsgleichungen (20) unmittelbar die Elemente von G_k liefern. Hingegen können die Hauptgesamtheiten H_k zunächst noch nicht als bekannt gelten, da die Elemente der H_k für den allgemeinen Fall nicht angeschrieben werden können. Wir zeigen nun, in welcher Weise man die unbekannten Hauptgesamtheiten H_k aus den bekannten elementaren Gesamtheiten G_k aufbauen kann.

Zwischen den elementaren Gesamtheiten G_k und den Hauptgesamtheiten H_k bestehen die folgenden $s+1$ Gleichungen:

$$\sum_{i=k}^{s}\binom{i}{k}\times H_i=G_k \tag{22}$$

$$\text{für } k=0, 1, 2, \ldots, s.$$

Beweis: In (22) ist durch das Zeichen $\times$ die »Multiplikation zweiter Art« (17) vorgeschrieben. Demgemäß enthält der Summand

$$\binom{i}{k} \times H_i = H_i + H_i + \ldots + H_i$$

jedes Element von H_i genau $\binom{i}{k}$ mal; die Hauptgesamtheit H_i umfaßt definitionsmäßig alle Zahlen von $G(x)$, die durch i, aber nicht mehr als durch i, der Teiler $a_1, a_2, \ldots, a_s$ teilbar sind. Da in (22) die Summe über alle Werte $i = k$ bis $i = s$ erstreckt wird, so stellt die linke Seite von (22) die Gesamtheit aller derjenigen und nur derjenigen Zahlen von $G(x)$ dar, die durch k oder durch mehr als k Teiler (beliebig gewählt unter den Teilern $a_1, a_2 \ldots, a_s$) teilbar sind, und zwar kommt hiebei jede Zahl von $G(x)$, die durch i, aber nicht mehr als durch i Teiler teilbar ist, genau $\binom{i}{k}$ mal vor. Es bleibt zu zeigen, daß auch die rechte Seite von (22), die elementare Gesamtheit G_k, alle diese Zahlen, nur diese Zahlen und in der gleichen Weise jeweils $\binom{i}{k}$ mal als Element enthält. Beachtet man, daß definitionsmäßig nach (20):

$$G_k = \sum_{h=1}^{m} v_h\, G\left(\frac{x}{v_h}\right), \qquad m = \binom{s}{k}, \tag{23}$$

$$v_h = v\,(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k})$$

ist, so sieht man, daß die Summanden von (23), das ist die Gesamtheiten

$$T_h = v_h\, G\left(\frac{x}{v_h}\right) = \left(0\, v_h, 1\, v_h, 2\, v_h, \ldots \left(\frac{x}{v_h} - 1\right) v_h\right) \tag{24}$$

aus lauter Zahlen bestehen, die $< x$ und durch v_h teilbar sind. Eine durch v_h teilbare Zahl ist jedenfalls durch k Teiler teilbar und da in der Summe (23) alle möglichen Kombinationen von k Teilern (gewählt aus den a_1 bis a_s) vertreten sind, so kommen in G_k alle Zahlen von $G(x)$ vor, die durch irgendwelche k der gegebenen Teiler $a_1, a_2, \ldots, a_s$ teilbar sind; es kommen aber in G_k auch alle Zahlen von $G(x)$, die durch mehr als k Teiler teilbar sind, vor, da jede solche Zahl auf mehrfache Art durch k Teiler teilbar ist. Es bleibt zu zeigen, daß die in G_k vorkommenden Zahlen, die durch i, aber nicht mehr als durch i Teiler teilbar sind, genau $\binom{i}{k}$ mal vorkommen.

Beachtet man, daß nach (24) die in T_h vorkommenden Zahlen voneinander verschieden sind, so ergibt sich, daß eine Zahl in G_k

nur so mehrmals vorkommen kann, daß sie in verschiedenen T_h vorkommt. Ist eine Zahl durch i, aber nicht mehr als durch i Teiler teilbar (für Zahlen in G_k ist das nur für $i \geqq k$ möglich) so kann man aus diesen i Teilern $\binom{i}{k}$ Kombinationen von je k Teilern bilden. Bildet man zu jeder dieser Kombinationen die entsprechenden Werte der v_h, also etwa

$$v_1, v_2, \ldots, v_n, \qquad n = \binom{i}{k},$$

so muß eine Zahl, die durch i Teiler teilbar ist, auch durch jedes dieser v_1 bis v_n teilbar sein und daher in jeder der entsprechenden Gesamtheiten (24), in

$$T_1, T_2, \ldots T_n$$

je einmal vorkommen. Eine Zahl, die durch i Teiler teilbar ist, kommt also in G_k sicher mindestens $\binom{i}{k}$ mal vor. Sie kann aber auch nicht mehr als $\binom{i}{k}$ mal vorkommen, denn wenn sie in einem weiteren T_{n+1} vorkommen würde, so wäre sie durch mehr als i Teiler teilbar, was gegen die Voraussetzung ist. Gibt es also überhaupt in $G(x)$ Zahlen, die durch i, aber nicht mehr als durch i Teiler teilbar sind, so kommt jede solche Zahl in G_k genau $\binom{i}{k}$ mal vor. Gibt es aber für ein i solche Zahlen in $G(x)$ nicht, so ist dann immer für dieses i die entsprechende Hauptgesamtheit H_i mit der Nullgesamtheit identisch und solche Zahlen können daher weder auf der linken Seite von (22), noch auf der rechten Seite von (23) vorkommen. Die elementare Gesamtheit G_k umfaßt also alle diejenigen und nur diejenigen Zahlen von $G(x)$, die durch k oder mehr als k Teiler von x — beliebig gewählt unter den vorgegebenen Teilern $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — teilbar sind, und es kommt hiebei jede Zahl von $G(x)$, die durch i, aber nicht mehr als durch i Teiler teilbar ist, in G_k genau $\binom{i}{k}$ mal vor. Da das gleiche für die linke Seite von (22) bereits gezeigt wurde, so ist hiedurch (22) für alle k bewiesen.

Die Gleichungen (22) gestatten die Hauptgesamtheiten H_k durch die elementaren Gesamtheiten G_k auszudrücken. Man bemerke, daß Gleichungen zwischen Gesamtheiten von der Form (22) in der gleichen Weise behandelt werden können, wie gewöhnliche lineare Gleichungen, sofern die im 2. Abschnitt definierten Operationen in Betracht kommen: Aus der Gleichheit zweier Gesamtheiten $K_1 = K_2$ folgt $m K_1 = m K_2$, wenn nach der ersten und $m \times K_1 = m \times K_2$, wenn nach der zweiten Art multipliziert wird. Ebenso folgt aus

$K_1 = K_2$ und $K_3 = K_4$ auch die Richtigkeit von $K_1 \pm K_3 = K_2 \pm K_4$ (wenn die Substraktion durchführbar ist oder — was widerspruchsfrei möglich, für unsere Zwecke jedoch nicht notwendig — der Begriff der negativen Gesamtheit eingeführt wird).

Es ist daher erlaubt, aus der Gleichung (22) zu schließen:

$$\sum_{k=n}^{s}(-1)^{k-n}\binom{k}{n}\times G_k = \sum_{k=n}^{s}(-1)^{k-n}\binom{k}{n}\times\sum_{i=k}^{s}\binom{i}{k}\times H_i. \tag{25}$$

Nach (17) ist $a\times(b\times K)=(a\,b)\times K$. Man darf also die Doppelsumme nach den H_i ordnen und erhält als Koeffizienten, mit dem H_i nach der zweiten Art zu multiplizieren ist, den Ausdruck

$$\binom{n}{n}\binom{i}{n}-\binom{n+1}{n}\binom{i}{n+1}+\binom{n+2}{n}\binom{i}{n+2}-\cdot \quad +(-1)^{i-n}\binom{i}{n}\binom{i}{i}. \tag{26}$$

Dieser Ausdruck[1] hat den Wert 0 für $i>n$ und den Wert 1 für $i=n$. Es verschwinden daher in der Doppelsumme auf der rechten Seite von (25) alle H_i bis auf H_n und man erhält:

$$H_n = G_n - \binom{n+1}{1}\times G_{n+1} + \binom{n+2}{2}\times G_{n+2} - \cdot$$
$$\cdot + (-1)^{s-n}\binom{s}{s-n}\times G_s.$$

Wir lassen eine Zusammenstellung der Bezeichnungen und Resultate des 4. und 5. Abschnittes folgen.

Es bezeichnen: $a_1, a_2, \ldots, a_s$ beliebig gewählte s Teiler der natürlichen Zahl x; $G(x)$ die Gesamtheit der Zahlen $0, 1, 2, .\;., (x-1)$; H_0 die Gesamtheit aller ganzen positiven Zahlen, die $<x$ und durch keinen der s Teiler teilbar sind; H_k die Gesamtheit derjenigen Zahlen von $G(x)$, die genau durch k Teiler von x teilbar sind, wobei diese k Teiler unter den gegebenen s Teilern zu wählen sind; G_k Gesamtheiten, die wie folgt definiert sind:

$$G_k = \sum v(a_{i_1}, a_{i_2}, .\;., a_{i_k})\, G\left(\frac{x}{v(a_{i_1}, a_{i_2}, \quad ., a_{i_k})}\right) \tag{27}$$
$$k = 1, 2, .\;., s;\; G_0 = G(x),$$

wobei die Summe über alle Kombinationen k-ter Klasse $i_1, i_2, .\;., i_k$ der Indices $1, 2, .\;., s$ zu erstrecken ist und

[1] Wegen $\binom{m}{n}\binom{i}{m}=\binom{i}{n}\binom{i-n}{m-n}$ ist dieser Ausdruck für $i>n$ identisch mit

$$\binom{i}{n}(1-1)^{i-n}$$

$v(a_{i_1}, a_{i_2}, . . , a_{i_k})$ das kleinste gemeinsame Vielfache von $a_{i_1}, . . , a_{i_k}$ bedeutet.

Zwischen den elementaren Gesamtheiten $G_0, G_1, . . , G_s$ und den Hauptgesamtheiten $H_0, H_1, . . , H_s$ bestehen die folgenden $s+1$ Gleichungen:

$$\sum_{i=k}^{s} \binom{i}{k} \times H_i = G_k, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, s. \tag{28}$$

Die Auflösung dieser Gleichungen nach den H_i ergibt die äquivalenten $s+1$ Gleichungen:

$$\sum_{i=k}^{s} (-1)^{i-k} \binom{i}{k} \times G_i = H_k, \quad k = 0, 1, 2, . . , s. \tag{29}$$

Wie sich aus den unter (16) und (17) eingeführten Bezeichnungen ergibt, ist in (27) die Multiplikation mit $v\,(a_{i_1} . \; . a_{i_k})$ nach der ersten Art, in (28) und (29) die Multiplikation mit $\binom{i}{k}$ nach der zweiten Art durchzuführen.

Da alle Zahlen in G_k nach (27) bekannt sind, so stellen die Gleichungen (29) für jede der Gesamtheiten H_k Aufbauformeln dar, welchen man alle Zahlen in H_k entnehmen kann.

6.

Es sei bemerkt, daß die für $|z| < 1$ konvergente Entwicklung

$$\frac{z^k}{(1-z)^{k+1}} = z^k + \binom{k+1}{1} z^{k+1} + \binom{k+2}{2} z^{k+2} + .$$

die Gleichungen (28) und (29) in der folgenden symbolischen Form zu schreiben gestattet:

$$G_k = \frac{H^k}{(1-H)^{k+1}}, \; H^k = H_k, \; H_k = G(0) \text{ für } k > s, \tag{30}$$

$$H_k = \frac{G^k}{(1+G)^{k+1}}, \; G^k = G_k, \; G_k = G(0) \text{ für } k > s. \tag{31}$$

Man hat hiebei die rechten Seiten dieser Gleichungen nach Potenzen von H, beziehungsweise G zu entwickeln, hierauf die Potenzexponenten als Indices zu setzen und beim Glied H_s, beziehungsweise G_s abzubrechen, da bei s Teilern die G_k und H_k nur für $k \leqq s$ definiert wurden, also für $k > s$ als mit der Nullgesamtheit zusammenfallend definiert werden können. Dies ergibt z. B. für $k = 0$:

$$H_0 = G^0 (1 - G^1 + G^2 - \cdot \quad + (-1)^s G^s) =$$
$$= G^0 - G^1 + G^2 - \cdot \quad \cdot + (-1)^s G^s = G_0 - G_1 + G_2 - \cdot \quad \cdot + (-1)^s G_s$$

in Übereinstimmung mit (29).

7.

Es ist nunmehr möglich, die Problemstellung des ersten Abschnittes weitgehend zu verallgemeinern:

Es seien irgendwelche Teiler $a_1, a_2, \cdot \quad \cdot, a_s$ der ganzen, positiven Zahl x gegeben. Die Summe der n-ten Potenzen aller ganzen, positiven Zahlen, die $< x$ und durch k, aber nicht mehr als durch k, der gegebenen s Zahlen teilbar sind, ist zu suchen.

Die Zahlen, deren n-te Potenzen hier zu summieren sind, bilden die Hauptgesamtheit H_k und die Lösung obigen Problems kann daher der Formel (29), wie folgt, entnommen werden:

Bezeichnet $S_n(K)$ die Summe der n-ten Potenzen aller Zahlen der Gesamtheit K, so folgt für die unter (13), (14), (16), (17) definierten Operationen:

$$\begin{aligned} &S_n(K_1 \pm K_2) = S_n(K_1) \pm S_n(K_2) \\ &S_n(a\,K) = a^n S_n(K) \\ &S_n(a \times K) = a\, S_n(K). \end{aligned} \tag{32}$$

Wendet man diese Gleichungen auf (29) und (27) an, so ergibt sich

$$S_n(H_k) = \sum_{r=k}^{s} (-1)^{r-k} \binom{r}{k} S_n(G_r), \quad k \geqq 0 \tag{33}$$

$$S_n(G_r) = \sum_v v^n S_n\left(G(\tfrac{x}{v})\right), \quad S_n(G_0) = \sum_{i=0}^{x-1} i^n \tag{34}$$

$$v = v(a_{i_1}, a_{i_2}, \cdot \quad \cdot, a_{i_r}), \quad r \geqq 1.$$

Für die Gesamtheit $G(\frac{x}{v}) = \left(0, 1, 2, \cdot \quad \frac{x}{v} - 1\right)$ ist nach (4):

$$S_n\left(G(\tfrac{x}{v})\right) = \frac{\left(B + \frac{x}{v}\right)^{n+1} - B_{n+1}}{n+1} \tag{35}$$

wodurch der Weg für die Berechnung von $S_n(H_k)$ vorgezeichnet ist.

Um die hier folgenden Formeln einfacher zu gestalten, sei bemerkt, daß die Beziehung

$$v(a^m_{i_1}, a^m_{i_2}, \cdot \quad \cdot, a^m_{i_r}) = \left(v(a_{i_1}, a_{i_2}, \cdot \quad \cdot, a_{i_r})\right)^m$$

die für ganzzahlige $m \geqq 0$ offenbar richtig ist, auch für $m = -1$ verwendet werden darf, wenn das Symbol $v(a^{-1}_{i_1}, a^{-1}_{i_2}, \cdot \quad \cdot, a^{-1}_{i_r})$ durch

$$v\,(a_{i_1}^{-1},\ a_{i_2}^{-1}, . \quad ., a_{i_r}^{-1}) = (v\,(a_{i_1}, a_{i_2}, . \quad ., a_{i_r}))^{-1} \tag{36}$$

definiert wird. Führt man nun (35) in (34) ein, so folgt:

$$S_n\,(G_r) = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\binom{n+1}{i} B_i\, t_r\,(i)\, x^{n+1-i} \tag{37}$$

$$t_r\,(i) = \sum_v v\,(a_{i_1}^{i-1},\ a_{i_2}^{i-1}, \ldots, a_{i_r}^{i-1}),\ r \geqq 1,\ t_0\,(i) = 1 \tag{38}$$

In (38) ist die Summe über $\binom{s}{r}$ Werte von $v\ (a_{i_1}^{i-1}, \quad ., a_{i_r}^{i-1})$ zu erstrecken, die den Kombinationen $i_1, \ldots, i_r$ der Indices $1, 2, . \quad ., s$ entsprechen. Führt man schließlich (37) in (33) ein und setzt noch

$$\sum_{r=k}^{s} (-1)^{r-k}\binom{r}{k} t_r\,(i) = A_i\,(k) = A^i\,(k),\ k \geqq 0, \tag{39}$$

so ergibt sich die für $k = 0, 1, 2, . \quad ., s$ gültige Formel

$$S_n\,(H_k) = \frac{(A\,(k)\,B + x)^{n+1} - A_{n+1}\,(k)\,B_{n+1}}{n}. \tag{40}$$

Die Formeln (38) und (39) kann man in eine übersichtlichere Form bringen. Aus (38) folgt für alle Werte der Variabeln τ (wir schreiben $-\tau$ anstatt τ um Konformität mit späteren Formeln zu erhalten):

$$\sum_{r=0}^{s} t_r\,(i)\,(-\tau)^r = v\,(1 - \tau\, a_1^{i-1})\,(1 - \tau a_2^{i-1}). \quad .\,(1 - \tau a_s^{i-1}) \tag{41}$$

Hierbei möge ausdrücklich vereinbart werden, daß mit v wie mit einer Variabeln zu multiplizieren und dann

$$v\,.\,1 = v\,(1) = 1,\ v\,.\,a_1^{i-1} = v\,(a_1^{i-1}) = a_1^{i-1},\ v\,.\,a_1^{i-1}\,.\,a_2^{i-1} = \\ = v\,(a_1^{i-1}, a_2^{i-1}), . \tag{42}$$

zu setzen ist. (Für $i = 0$ ist nach (36) unter $v\,(a_1^{-1}, a_2^{-1}. \quad .)$ die Zahl $\dfrac{1}{v\,(a_1, a_2, . \quad .)}$ zu verstehen.)

Setzt man symbolisch

$$t^r\,(i) = t_r\,(i) \text{ für } r \geqq 0,\ t_r\,(i) = 0 \text{ für } r > s \tag{43}$$

(das letztere ist eine sinngemäße Ergänzung von (38), da es für $r > s$ keine Kombinationen r ter Klasse aus s Elementen gibt), so kann (41) auch in der Form geschrieben werden:

$$v\,(1-\tau a_1^{i-1})\,(1-\tau a_2^{i-1}).\ .(1-\tau a_s^{i-1}) = \frac{1}{1+\tau\, t(i)} \tag{44}$$

und für (39) ergibt sich im Sinne des 6. Abschnittes die folgende symbolische Schreibweise:

$$A_i(k) = \frac{t^k(i)}{(1+t(i))^{k+1}},\ t^r(i) = t_r(i),\ t^0(i) = 1. \tag{45}$$

Man hat in (45) die rechte Seite nach Potenzen von $t(i)$ zu entwickeln, hierauf die Potenzexponenten als Indices zu setzen und wegen (43) beim Gliede $t_s(i)$ abzubrechen.

Für $k = 0$ folgt aus (45) in Verbindung mit (44) (auch aus (39) und (41));

$$A_i(0) = v\,(1-a_1^{i-1})\,(1-a_2^{i-1}).\ .(1-a_s^{i-1}). \tag{46}$$

Für $i = 1$ folgt aus (44) oder (38): $t_r(1) = \binom{s}{r}$. Es ist daher nach (39):

$$A_1(k) = \sum_{r=k} (-1)^{r-k} \binom{r}{k}\binom{s}{r}$$

und hieraus folgt:

$$A_1(k) = 0 \text{ für } k < s,\ A_1(k) = 1 \text{ für } k = s \tag{47}$$

was zwecks späterer Verwendung vermerkt sei.

Die Summe der n-ten Potenzen irgendwelcher Zahlen ergibt für $n = 0$ die Anzahl dieser Zahlen, wenn (um auch die Zahl 0 zählen zu können) $0^0 = 1$ gesetzt wird. Aus (40) ergibt sich für $n = 0$ als Anzahl der Zahlen in H_k der Ausdruck

$$A_0(k)\,B_0\,x + A_1(k)\,B_1 - A_1(k)\,B_1 = A_0(k)\,x, \tag{48}$$

eine Formel, die im nächsten Abschnitt weitere Schlüsse ermöglichen wird.

Sind die $a_1, a_2, .\ ., a_s$ zu je zweien teilerfremd, so kann in allen Formeln dieses Abschnittes das Symbol v weggelassen werden; dann geht die Formel (46) in (9) über und die Formel (40) liefert als Spezialfall für $k = 0$ die Formel (10).

Als Lösung des zu Beginn dieses Abschnittes gestellten Problems ergibt sich der Satz:

*Bezeichnet $f_k(x)$ die Summe der n-*ten *Potenzen aller ganzen, nichtnegativen*[1] *Zahlen, die kleiner als eine natürliche Zahl x und*

[1] Wir schreiben hier »nichtnegativen« anstatt »positiven«, da für $n = 0$ in $f_s(x)$ die Zahl 0^0 inbegriffen ist. Die Formel (4), welche die Grundlage von (35) und (40) bildet, ergibt für $n = 0$ einen richtigen Wert, wenn $0^0 = 1$ gesetzt wird.

genau durch k der beliebigen Teiler $a_1 a_2, .\ ., a_s$ von x teilbar sind, so gilt für $k = 0, 1, 2, .\ ., s$ die Formel:

$$f_k(x) = \frac{(A(k)B + x)^{n+1} - A_{n+1}(k) B_{n+1}}{n+1} \tag{49}$$

Hierbei ist

$$A_i(k) = \sum_{r=k}^{s} (-1)^{r-k} \binom{r}{k} t_r(i) = \frac{t^k(i)}{(1+t(i))^{k+1}} \qquad \begin{cases}(39)\\(45)\end{cases}$$

und die $t_r(i)$ erhält man durch Vergleich der Koeffizienten von τ^r auf beiden Seiten der Gleichung

$$v(1-\tau a_1^{i-1})(1-\tau a_2^{i-1}).\ .(1-\tau a_s^{i-1}) = \frac{1}{1+\tau t(i)}, \qquad \begin{cases}(38)\\(44)\end{cases}$$

wenn $t^r(i) = t_r(i)$ für $r \geqq 0$, $t^r(i) = 0$ für $r > s$, gesetzt wird. Für $k = 0$ ist $t_0(i) = 1$ und insbesondere ist

$$A_i(0) = v(1-a_1^{i-1})(1-a_2^{i-1}).\ .(1-a_s^{i-1}). \tag{46}$$

8.

Wird in (49) x als eine Variable aufgefaßt, so ist $f_k(x)$ entweder ein Polynom vom Grade $n+1$ oder es verschwindet identisch.

Beweis: Es seien $a_1, a_2, \ldots, a_s$ irgendwelche ganze, positive Zahlen und $v(a_1, a_2, \ldots, a_s) = v$. Für jede durch v teilbare natürliche Zahl x ist $f_k(x)$ die Summe der n-ten Potenzen aller Zahlen der Hauptgesamtheit H_k. Der Deutlichkeit wegen möge hier $H_k(x)$ anstatt H_k geschrieben werden. Die Anzahl der Zahlen in $H_k(x)$ ist nach (48) gleich $A_0(k)x$ und der Koeffizient von x^{n+1} in $f_k(x)$ ist nach (49) gleich $\frac{1}{n+1} A_0(k)$. Hieraus ergibt sich, daß $f_k(x)$ nur dann ein Polynom vom Grade $m < n+1$ sein kann, wenn $H_k(x)$ mit der unter (15) definierten Nullgesamtheit zusammenfällt. Aus $H_k(x) = G(0)$ folgt aber $f_k(x) = 0$. Ist also $A_0(k) = 0$, so ist jede durch v teilbare natürliche Zahl x eine Wurzel von $f_k(x) = 0$, das heißt $f_k(x) \equiv 0$, w. z. b. w.

Wie im 4. Abschnitt bemerkt wurde, ist $H_s(x)$ immer und $H_0(x)$ immer dann von $G(0)$ verschieden, wenn unter den $a_1, a_2, .\ ., a_s$ die Zahl 1 nicht vorkommt. Wir erhalten das folgende Korrolar zu dem im 7. Abschnitt angeführten Satz:

Sind $a_1, a_2, .\ ., a_s$ irgendwelche von 1 verschiedene, ganze, positive Zahlen und v ihr kleinstes gemeinsames Vielfache, so existieren $s+1$ Polynome $f_0(x), f_1(x), .\ ., f_s(x)$, welche die folgenden Eigenschaften haben:

1. *Für jede positive Zahl x des Moduls v ist $f_k(x)$ gleich der Summe der n-ten Potenzen aller Zahlen der Hauptgesamtheit $H_k(x)$.*

2. *Die Polynome* $f_0(x)$ *und* $f_s(x)$ *sind vom Grade* $n+1$.
3. *Für* $0 < k < s$ *ist* $f_k(x)$ *entweder ein Polynom vom Grade* $n+1$ *oder es verschwindet identisch. Das letztere ist dann und nur dann der Fall, wenn es unter den Zahlen* $0, 1, 2, \ldots, v-1$ *keine solchen gibt, die genau durch* k *der gegebenen* s *Zahlen* $a_1, a_2, \ldots, a_s$ *teilbar sind.*

Zwischen der Bernoulli'schen Funktion

$$B(x) = \frac{(B+x)^{n+1} - B_{n+1}}{n+1}$$

und den Funktionen $f_k(x)$ besteht sonach eine gewisse Analogie: $B(x)$ hat für alle ganzen, positiven x und $f_k(x)$ für alle ganzen, positiven und durch v teilbaren x die Eigenschaft, die Summe der n-ten Potenzen gewisser Zahlen zu ergeben. In diesem Sinne kann gesagt werden, daß die Polynome $f_k(x)$ für die positiven Zahlen des Moduls v die gleiche Rolle spielen, wie die Bernoulli'sche Funktion $B(x)$ für die natürlichen Zahlen.

Aus (21) kann die folgende einfache Beziehung zwischen den $f_k(x)$ und der Bernoulli'schen Funktion $B(x)$ abgelesen werden:

$$B(x) = f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_s(x) \tag{50}$$

Nach (47) und (49) verschwindet der Koeffizient von x in den Polynomen $f_0(x), f_1(x), \ldots, f_{s-1}(x)$. Hieraus ergibt sich die bemerkenswerte Tatsache, daß in der Gleichung (50) die Bernoullische Zahl $B_1 = -\frac{1}{2}$ nur in $B(x)$ und in $f_s(x)$ vorkommt.

9.

Es bezeichne g_k und h_k die Anzahl der Zahlen der Gesamtheiten G_k und H_k. In diesem Abschnitt sollen, ohne Benützung der für die Potenzsummen erhaltenen Formeln, Ausdrücke für g_k und h_k abgeleitet werden.

Bezeichnet $A(K)$ die Anzahl der Zahlen einer Gesamtheit K so ist offenbar:

$$A(K_1 \pm K_2) = A(K_1) \pm A(K_2)$$
$$A(aK) = A(K),\ A(a \times K) = a\,A(K),\ A(G(x)) = x.$$

Wendet man diese Gleichungen auf (27) und (29) an, so ergibt sich

$$g_k = \sum_v \frac{x}{v(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k})},\ 1 \leqq k \leqq s,\ g_0 = x \tag{51}$$

$$h_k = \sum_{i=k}^{s} (-1)^{i-k} \binom{i}{k} g_i,\ 0 \leqq k \leqq s. \tag{52}$$

In (51) ist die Summe über $\binom{s}{k}$ Werte von $v(a_{i_1}, .\ ., a_{i_k})$ zu erstrecken. Es ist also g_k der Koeffizient von $(-\tau)^k$ im Polynom

$$xv\left(1-\frac{\tau}{a_1}\right)\left(1-\frac{\tau}{a_2}\right).\quad\left(1-\frac{\tau}{a_s}\right)=\sum_{k=0} g_k(-\tau)^k, \tag{53}$$

wenn, wie bei (41), vereinbart wird, daß mit v wie mit einer Variabeln zu multiplizieren und dann

$$v.1=1,\ v\frac{1}{a_i}=\frac{1}{a_i},\ v\frac{1}{a_{i_1}a_{i_2}.\ .a_{i_k}}=\frac{1}{v(a_{i_1}, a_{i_2}, .\ .\ .a_{i_k})}$$

zu setzen ist. Schreibt man symbolisch g^i anstatt g_i, ferner $g_i=0$ für $i>s$ (das letztere ist eine Konsequenz der im 6. Abschnitt aufgestellten Definition $G_i=G(0)$ für $i>s$), so ergibt sich der Satz:

Bezeichnet h_k die Anzahl aller ganzen, nichtnegativen Zahlen, die kleiner als eine natürliche Zahl x und genau durch k der beliebig gegebenen Teiler $a_1, a_2, .\ ., a_s$ von x teilbar sind, so gilt für $k=0, 1, 2, .\ ., s$ die Formel

$$h_k=\sum_{i=k}^{s}(-1)^{i-k}\binom{i}{k}g_i=\frac{g^k}{(1+g)^{k+1}} \tag{54}$$

und die g_i (symbolisch g^i) ergeben sich als Koeffizienten des Polynoms

$$xv\left(1-\frac{\tau}{a_1}\right)\left(1-\frac{\tau}{a_2}\right)\quad\left(1-\frac{\tau}{a_s}\right)=\sum_{i=0} g_i(-\tau)^i=\frac{g^0}{1+\tau g}. \tag{55}$$

Insbesondere ist:

$$h_0=xv\left(1-\frac{1}{a_1}\right)\left(1-\frac{1}{a_2}\right)\quad\left(1-\frac{1}{a_s}\right). \tag{56}$$

Bei Verwendung der symbolischen Schreibweise in (54) und (55) ist nach Potenzen von g so zu entwickeln, wie wenn g^i wirkliche Potenzen wären, und dann $g^i=g_i$, auch $g^0=g_0$, ($g_i=0$ für $i>s$) zu setzen.

Sind die Teiler $a_1, a_2, .\ ., a_s$ zu je zweien teilerfremd, so kann das Symbol v in (55) und (56) weggelassen werden und man erhält als Spezialfall den weiteren Satz:

Bezeichnet $\varphi(x,k)$ die Anzahl aller ganzen, nichtnegativen Zahlen die $<x$ und genau durch k der beliebigen Primteiler $p_1, p_2, .\ ., p_s$ von x teilbar sind, so gilt für $k=0, 1, 2, .\ ., s$:

$$\varphi(x, k) = \sum_{i=k}^{s} (-1)^{i-k} \binom{i}{k} g_i = \frac{g^k}{(1+g)^{k+1}} \tag{57}$$

und die g_i ergeben sich als Koeffizienten des Polynoms

$$x\left(1 - \frac{\tau}{p_1}\right)\left(1 - \frac{\tau}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{\tau}{p_s}\right) = \sum_{i=0} g_i (-\tau)^i. \tag{58}$$

Ist s die Anzahl aller Primteiler von x, also $\varphi(x, k)$ die Anzahl der ganzen, nichtnegativen Zahlen, die $< x$ und mit x genau k Primteiler gemeinsam haben, so kann $\varphi(x, k)$ auch in der Form geschrieben werden:

$$\varphi(x, k) = (-1)^k \sum_{d:x} \mu(d) \binom{i}{k} \frac{x}{d}. \tag{59}$$

In (59) ist die Summe über alle Teiler d von x zu erstrecken: $\mu(d)$ ist die bekannte zahlentheoretische Funktion und i bezeichnet die Anzahl der Primteiler von d; für $d = 1$ ist $i = 0$ zu setzen. Für $k = 0$ geht (59) in die bekannte Formel für $\varphi(x)$ über. Für $k = s$ wird auch die Zahl 0 gezählt.

10.

Wir haben im zweiten Abschnitt zwei Operationen, durch welche eine Zahl mit einer Gesamtheit verknüpft wird, definiert: die Multiplikation erster (16) und zweiter Art (17). Für die spezielle Gesamtheit $G(x) = (0, 1, 2, \ldots, x-1)$ soll nunmehr noch eine Verknüpfung dritter Art eingeführt werden.

Multiplikation dritter Art. Wir bezeichnen dieselbe durch die linke und definieren durch die rechte Seite der Gleichung:

$$a\, G(x) \frac{1}{a} = a\, G\left(\frac{x}{a}\right) \tag{60}$$

oder explizite

$$a\, G(x) \frac{1}{a} = \left(0\,a,\ 1\,a,\ 2\,a, \ldots, \left(\frac{x}{a} - 1\right) a\right),$$

wobei naturgemäß a als Teiler von x vorausgesetzt wird. Die Multiplikation dritter Art der Gesamtheit $G(x)$ mit einem Teiler a von x besteht sonach aus zwei Operationen: Es ist zuerst das x in $G(x)$ mit $\frac{1}{a}$ zu multiplizieren (rechtsseitige Operation), und dann ist die so entstandene Gesamtheit $G\left(\frac{x}{a}\right)$ mit a nach der ersten Art zu multiplizieren (linksseitige Operation).

Hat man $G(x)$ mit mehreren Teilern $a_1, a_2,$ nach der dritten Art zu multiplizieren und die so entstandenen Gesamtheiten zu addieren oder zu subtrahieren, so ist es naheliegend, die folgende Schreibweise zu vereinbaren.

$$
\begin{aligned}
(a_1+a_2)\, G(x)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}\right) &= a_1\, G(x)\,\frac{1}{a_1}+a_2\, G(x)\,\frac{1}{a_2} \\
(a_1-a_2)\, G(x)\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right) &= a_1\, G(x)\,\frac{1}{a_1}-a_2\, G(x)\,\frac{1}{a_2}.
\end{aligned}
\tag{61}
$$

Die linken Seiten der Gleichungen (61) seien durch die rechten Seiten derselben definiert; diese Schreibweise ist eindeutig, wenn beachtet wird, daß auf beiden Seiten obiger Gleichungen die Zeichen $+$ und $-$ die Operationen der Addition, beziehungsweise der Subtraktion der Gesamtheiten

$$a_1\, G(x)\,\frac{1}{a_1}, \qquad a_2\, G(x)\,\frac{1}{a_2}$$

anzeigen und nicht etwa zu den Zahlen $a_2, \frac{1}{a_2}$ gehören.[1]

Als Beispiel für die Multiplikation dritter Art sei bemerkt, daß man den Ausdruck (18) für die Gesamtheit aller ganzen, positiven Zahlen, die $< x$ und zu x teilerfremd sind, nach (60) und (61) in der folgenden Form schreiben kann:[2]

---

[1] Ein Mißverständnis ist jedenfalls ausgeschlossen, wenn man unter Benützung der in (13) und (14) für die Addition und Subtraktion von Gesamtheiten eingeführten Zeichen $\overset{\circ}{+}$, $\overset{\circ}{-}$, die Gleichungen (61) in der Form schreibt:

$$
\begin{aligned}
(a_1 \overset{\circ}{+} a_2)\, G(x)\left(\frac{1}{a_1} \overset{\circ}{+} \frac{1}{a_2}\right) &= a_1\, G(x)\,\frac{1}{a_1} \overset{\circ}{+} a_2\, G(x)\,\frac{1}{a_2} \\
(a_1 \overset{\circ}{-} a_2)\, G(x)\left(\frac{1}{a_1} \overset{\circ}{-} \frac{1}{a_2}\right) &= a_1\, G(x)\,\frac{1}{a_1} \overset{\circ}{-} a_2\, G(x)\,\frac{1}{a_2}.
\end{aligned}
$$

[2] Hier ist $G(x)$ mit den einzelnen Gliedern des Polynoms

$$(1-p_1)(1-p_2) \qquad (1-p_s) = 1-p_1-p_2-\ldots+p_1p_2- \\ \ldots+(-1)^s\, p_1p_2\ldots p_s$$

nach der dritten Art zu multiplizieren und die so erhaltenen Gesamtheiten (Produkte dritter Art) sind je nach dem Vorzeichen der Multiplikatoren: $1, -p_1, -p_2, \ldots$ zu addieren oder zu subtrahieren:

$$G(x)-p_1\, G(x)\,\frac{1}{p_1}- \qquad +p_1p_2\, G(x)\,\frac{1}{p_1p_2}+$$

$$(1-p_1)(1-p_2) \quad (1-p_s)\, G(x)\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\cdot$$

$$\left(1-\frac{1}{p_2}\right) \quad \left(1-\frac{1}{p_s}\right).$$

Die Multiplikation dritter Art gestattet einige der erhaltenen Resultate in eine übersichtlichere Form zu bringen. Nach (27) und (60) ist:

$$G_k = \sum v(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k})\, G(x) \frac{1}{v(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k})} \tag{62}$$

$$1 \leqq k \leqq s,\ G_0 = G(x).$$

Die $s+1$ Gleichungen (62) kann man, wie folgt, zusammenfassen:

$$\sum_{k=0}^{s} G_k(-\tau)^k =$$

$$= v(1-\tau a_1). \quad (1-\tau a_s)\, G(x)\, v\left(1-\frac{\tau}{a_1}\right) \quad \left(1-\frac{\tau}{a_s}\right).$$

Hier ist mit v wie bei (42) zu multiplizieren und

$$v\,\frac{1}{a_{i_1} a_i} = \frac{1}{v(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots)}$$

zu setzen. Wird ferner (wie im sechsten Abschnitt) symbolisch G^k statt G_k und $G^k = G(0)$ für $k > s$ geschrieben, so ergibt sich die folgende Darstellung für die elementaren Gesamtheiten G_k:

$$\frac{G^0}{1+\tau G} =$$

$$= v(1-\tau a_1). \quad (1-\tau a_s)\, G(x)\, v\left(1-\frac{\tau}{a_3}\right) \quad \left(1-\frac{\tau}{a_s}\right). \tag{63}$$

Auch für die Hauptgesamtheiten H_k kann eine ähnliche Aufbauformel aufgestellt werden. Aus (28) und (29) folgt:

$$\sum_{k=0}^{s}(-1)^k \tau^k G_k = \sum_{k=0}^{s}(-1)^k(\tau-1)^k H_k \tag{28 a}$$

$$\sum_{k=0}^{s}(-1)^k \tau^k H_k = \sum_{k=0}^{s}(-1)^k(\tau+1)^k G_k \tag{29 a}$$

oder in anderer Schreibweise:

$$\left.\begin{aligned} \frac{G^0}{1+\tau G} &= \frac{H^0}{1+(\tau-1)H} && (64) \\ \frac{G^0}{1+(\tau+1)G} &= \frac{H^0}{1+\tau H} && (65) \end{aligned}\right. \qquad \left.\begin{matrix} G_k \\ H_k \end{matrix}\right\} = G(0) \text{ für } k > s.$$

Wird in (64) τ durch $\tau+1$ ersetzt, so ergibt sich (65); hiedurch ist in Evidenz gesetzt, daß die Gleichungssysteme (28) und (29) äquivalent sind.

Wird in (63) τ durch $\tau+1$ ersetzt, so folgt durch Vergleich mit (65):

$$\begin{aligned} \frac{H^0}{1+\tau H} &= v\,(1-(\tau+1)\,a_1) \\ &\quad (1-(\tau+1)\,a_s)\; G(x)\, v\left(1-\frac{\tau+1}{a_1}\right) \qquad \left(1-\frac{\tau+1}{a_s}\right). \end{aligned} \tag{66}$$

Diese Identität in τ liefert durch Vergleich der beiderseitigen Koeffizienten von $(-\tau)^k$ Aufbauformeln für die Hauptgesamtheiten H_k. Insbesondere ergibt sich für die Hauptgesamtheit H_0 die Darstellung:

$$\begin{aligned} H_0 &= v\,(1-a_1)\,(1-a_2) \\ &\quad (1-a_s)\; G(x)\, v\left(1-\frac{1}{a_1}\right)\left(1-\frac{1}{a_2}\right) \qquad \left(1-\frac{1}{a_s}\right). \end{aligned}$$

11.

Nach (66) besteht H_k aus Gesamtheiten von der Form $b\,G(x)\frac{1}{b}$. Die Anzahl der Zahlen der Gesamtheit $b\,G(x)\frac{1}{b}$ ist nach (60) gleich $\frac{x}{b}$. Bezeichnet also wieder h_k die Anzahl der Zahlen in H_k, so ergibt sich aus (66) die folgende Identität in τ zur Bestimmung der h_k:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{s}(-1)^k h_k \tau^k &= \\ &= x\, v\left(1-\frac{1+\tau}{a_1}\right)\left(1-\frac{1+\tau}{a_2}\right) \qquad \left(1-\frac{1+\tau}{a_s}\right). \end{aligned} \tag{67}$$

Der letzte Satz des 9. Abschnittes kann daher in der folgenden Fassung ausgesprochen werden:

Bezeichnet $\varphi(x, k)$ die Anzahl aller ganzen, nichtnegativen Zahlen, die $< x$ und genau durch k der beliebigen Primteiler $p_1, p_2, \ldots, p_s$ von x teilbar sind, so ist $\varphi(x, k)$ der Koeffizient von $(-\tau)^k$ im Polynom

$$x\left(1-\frac{1+\tau}{p_1}\right)\left(1-\frac{1+\tau}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1+\tau}{p_s}\right). \tag{68}$$

Ist s die Anzahl aller Primteiler von x, so ergibt der Koeffizient von $(-\tau)^k$ die Anzahl der ganzen, nichtnegativen Zahlen, die $< x$ sind und mit x genau k Primzahlen gemeinsam haben ($k = 0, 1, 2, \ldots s$).

Für $\tau = -1$ ergibt sich aus (68) als Summe aller Koeffizienten von $(-\tau)^k$ naturgemäß die Zahl x, das ist die Anzahl der Zahlen von $G(x) = (0, 1, 2, \ldots, x-1)$.

Für $\tau = 0$ fällt (68) mit der bekannten Formel für $\varphi(x)$ zusammen, wenn als s die Anzahl der Primzahlen von x gewählt wird.

Inhaltsübersicht.