Gedruckt mit Unterstützung aus dem Jerome und Margaret Stonborough-Fonds

Zur Bestimmung des Lebesgue'schen Maßes linearer Punktmengen, deren Elemente durch systematische Entwicklungen gegeben sind

Von

Ludwig Holzer (Graz)

(Vorgelegt in der Sitzung am 21. Juni 1928)

Im folgenden wollen wir eine Anzahl von Lehrsätzen über das Maß linearer Punktmengen geben, deren Elemente durch irgend welche systematische Entwicklungen, also Dezimalbrüche oder allgemeine g-adische Brüche, weiter durch Kettenbrüche und durch sogenannte Lüroth'sche Reihen gegeben sind. (Über die letzteren vgl. O. Perron, Irrationalzahlen [1921], p. 116 f.)

Im § 1 werden die bisherigen Resultate über systematische Brüche kurz aufgezählt. Dies ist notwendig; denn im § 3 werden hievon Anwendungen gemacht, die wieder für die Lehrsätze eben dieses Paragraph 1 Analogien bieten.

§ 2 gibt die Sätze über Kettenbrüche, die die bisherige Theorie liefert. Die Beweise werden nur bei neuen Sätzen oder, wo sich Vereinfachungen ergeben, durchgeführt.

In § 3 wird das Problem der Maßbestimmung von Mengen in Angriff genommen, deren Elemente durch Lüroth'sche Reihen gegeben sind. Die Sätze sind größtenteils denen völlig analog, die sich ergeben, wenn die Elemente als Kettenbrüche vorgelegt sind, *aber meist einfacher zu beweisen.*

Es ergeben sich aber auch Sätze über Mengen Lüroth'scher Entwicklungen — eine Abkürzung, die wir statt Entwicklungen in Lüroth'sche Reihen vielfach gebrauchen werden —, bei denen ein Analogon aus der Theorie des Maßes der Kettenbruchmengen bis jetzt nicht bekannt zu sein scheint. Die Beweisführung hiezu liegt eben in der schon erwähnten Anwendung der bereits bekannten Lehrsätze des § 1.

Wir wollen uns durchwegs auf das Intervall (0, 1) beschränken, weiter soll von rationalen Zahlen durchwegs abgesehen werden.

Die wichtigsten der von uns verwendeten Sätze sind die von den homogenen Mengen (vgl. K. Knopp, Mengentheoretische Behandlung einiger Probleme der diophantischen Approximationen und der transfiniten Wahrscheinlichkeiten, Math. Ann., Bd. 95 [1925], p. 409 bis 426).

Eine homogene Menge ist eine solche von konstanter Dichte. Beschränken wir uns auf meßbare Mengen, die im ganzen Intervall (0, 1) homogen sind, *so hat eine solche homogene Menge entweder*

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

das Maß 1 oder das Maß 0 (Knopp, a. a. O., p. 412). Jede meßbare Menge, deren Dichte in jedem Teilintervalle von $(0, 1) < \delta$ ist, wo $\delta < 1$, ist homogen vom Maße 0. Ist hingegen die Dichte einer meßbaren Menge in jedem Teilintervall von $(0, 1) > \delta$, wo $\delta > 0$, so ist sie homogen vom Maße 1 (Knopp, a. a. O., p. 413). Läßt sich jedes Teilintervall (α, β) von $(0, 1)$, in dem die Menge M nicht leer ausfällt, in abzählbar viele getrennte Unterintervalle i_ν zerlegen, so daß $\Sigma i_\nu = |\beta - \alpha|$ ist und $M.i_\nu$ der Menge geometrisch ähnlich ist, so ist M homogen.

Zwei homogene Mengen M und N sollen von derselben Art heißen, wenn beide das Maß 1 oder beide das Maß 0 haben.

Folgerecht müssen wir eine Menge M auch dann im ganzen Intervalle (0, 1) homogen nennen, und zwar homogen vom Maße 0 nennen, wenn sich im Intervall (0, 1) Teilintervalle angeben lassen, in denen der betreffende Teil der Menge leer ausfällt und das Maß der Menge 0 ist.

Hiedurch erhalten wir vielfach eine bedeutende Vereinfachung der Beweisführung. Man vergleiche die Beweise der Sätze 2, 3 des § 2, der Sätze 2, 3 des § 3 oder den folgenden äußerst einfachen Beweis: Es ist mit Hilfe der Sätze über homogene Mengen ohne weiteres klar, daß die bekannte Cantor'sche Punktmenge N das Maß 0 hat; sie besteht aus allen triadischen Brüchen des Intervalls $(0 \cdot 1)$, in denen die Ziffer 1 nicht vorkommt. Die Menge N ist nämlich homogen; denn sie ist einerseits der Teilmenge iN im Intervall

$$i = (k . 3^{-p}, (k+1) 3^{-p})$$

(p ganz, positiv; k ganzzahlig, $k+1 \leqq 3^p$) ähnlich, sofern iN nicht leer ist, anderseits kann N eben wegen des Vorhandenseins leerer Intervalle nicht das Maß 1 haben.

Intervalle wollen wir im allgemeinen mit kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnen, und zwar soll die Länge des Intervalls dieselbe Bezeichnung haben wie das Intervall selbst. Andere Mengen wollen wir durchwegs durch große Lateinbuchstaben, und zwar durch M, N; R, S, T bezeichnen, vor allem durch die beiden ersten. Diese Buchstaben sollen in anderer Bedeutung nicht verwendet werden. Eventuell wollen wir zur Unterscheidung Indices oder Klammern beifügen, z. B. M_k, $M\left(\frac{a}{c}, k\right)$. Da der Begriff »Ableitung einer Menge« in der ganzen Arbeit nicht vorkommt, so soll M' nicht die Ableitung von M bedeuten, sondern eine von M irgendwie verschiedene Menge. Unter der Summe $M+N$ der Mengen M und N wollen wir die Menge der Elemente verstehen, die in mindestens einer der Mengen vorkommen, und zwar auch dann, wenn die Mengen nicht elementefremd sind. Für die Summe mehrerer oder

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

abzählbar vieler Mengen wollen wir das Summenzeichen $\sum$ gebrauchen. Den Durchschnitt zweier Mengen M und N schreiben wir als Produkt MN. Für den Durchschnitt mehrerer oder abzählbar unendlich vieler Mengen wollen wir das Produktzeichen Π verwenden. Daß die Menge M in der Menge N enthalten ist, werde durch $M < N$ ausgedrückt, wobei die Möglichkeit, daß M und N identisch ist, also M eine uneigentliche Untermenge von N ist, nicht ausgeschlossen sein soll.

Unter Anwendung der Bezeichnungsweise von L. Schlesinger und A. Plessner, Lebesgue'sche Integrale und Fourier'sche Reihen (1925) wollen wir das Maß der Menge M stets als mM schreiben, weiter das äußere Maß mit $m_a M$, das innere mit $m_i M$. Unter »Maß« ist stets das Lebesgue'sche Maß gemeint. Die Komplementärmenge von M in bezug auf das Intervall $(0, 1)$ soll übereinstimmend mit Schlesinger CM heißen. Die Buchstaben C und m werden im anderen Sinne nicht verwendet. »Nullmenge« soll in Übereinstimmung mit den meisten Verfassern mit »Menge vom Maße Null gleichbedeutend sein; hingegen soll die fiktive Menge, die aus keinem Element besteht, »leere Menge« heißen. »Fast alle« x soll heißen: alle x des Intervalls $(0, 1)$ bis auf eine Nullmenge. Hingegen wird das Wort »fast alle« vermieden in dem sonst oft gebrauchten Sinne: alle abzählbar unendlich vielen bis auf endlich viele Ausnahmen. Von den aus der analytischen Zahlentheorie bekannten Symbolen o und O wird vielfach Gebrauch gemacht und vereinzelt auch das Zeichen $\cong$ für »asymptotisch gleich« verwendet.

Nicht aufgenommen wurden die Untersuchungen des Verfassers über das Maß von Mengen, deren Elemente durch Engel-sche Reihen erster Art gegeben sind (vgl. Perron, a. a. O.). Es ist ihm einerseits nicht gelungen, umfangreiche numerische Rechnungen zu vermeiden, anderseits scheint die Untersuchung völlig isoliert zu stehen.

Inhaltsverzeichnis.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

§ 1. Über das Maß von Mengen systematischer Brüche.

Die Maßbestimmung von Mengen dyadischer Entwicklungen von Irrationalzahlen hat in neuerer Zeit die nachfolgenden Sätze ergeben (vgl. Knopp, a. a. O., p. 409 f., daselbst auch weitere Literaturangaben):

Sei x eine Irrationalzahl in $(0, 1)$. Die Anzahl der Stellen 1 in der dyadischen Systembruchentwicklung von x unter den n ersten Ziffern hinter dem Komma sei $E(n, x)$. Dann seien Mengen dadurch definiert, daß für ihre Elemente x der Reihe nach die folgenden Gleichungen gelten:

$$E(n, x) = \frac{n}{2} + o(n), \qquad \text{(Borel).}$$

$$E(n, x) = \frac{n}{2} + O\left(n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right), \qquad \text{(Hausdorff).}$$

$$E(n, x) = \frac{n}{2} + O(\sqrt{n \log n}), \qquad \text{(Hardy-Littlewood).} \qquad \text{(I)}$$

$$E(n, x) = \frac{n}{2} + O(\sqrt{n \log\log n}), \qquad \text{(Khintchine).}$$

Von diesen Mengen ist jede in der vorangehenden enthalten. Alle diese Mengen haben, wie die rechts zitierten Verfasser zuerst bewiesen haben, das Maß 1.

Hingegen hat die Menge der Zahlen x, für die

$$E(n, x) = \frac{n}{2} + O(\sqrt{n}), \qquad \text{(Hardy-Littlewood),} \qquad \text{(II)}$$

richtig ist, nur das Maß 0.

Die diesen Gleichungen genügenden Zahlen bilden durchwegs homogene Mengen. Dies kann sofort eingesehen werden nach einem allgemeinen, von Herrn K. Knopp herrührenden Kriterium (Knopp, a. a. O., Satz 7, p. 416). Daß die Gleichung (I) für fast alle x richtig, die Gleichung (II) hingegen für fast alle x falsch ist, wollen wir kurz als den ersten und zweiten Hardy-Littlewood'schen Satz bezeichnen.

Für die Systembruchentwicklungen mit anderer Grundzahl g gelten, wie sofort einleuchtet, analoge Sätze. Im allgemeinen pflegt die Herleitung dieser zu unterbleiben und nur auf die Analogie hingewiesen zu werden. Da wir aber aus diesen Sätzen (für allgemeines g) weitere ableiten wollen, so sind wir in die Notwendigkeit gesetzt, eine Herleitung des ersten Hardy-Littlewood'schen Satzes für allgemeine Grundzahlen g zu geben, die ich um so weniger unterdrücken möchte, da sie auch, für $g = 2$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

spezialisiert, viel einfacher ist als der Originalbeweis. Wir behaupten den

Satz 1. *Gegeben sei die Grundzahl $g > 1$ und eine ganze nicht negative Zahl $h < g$. Weiter liege x in $(0, 1)$ und sei irrational. Heißt dann $H(n, x)$ die Anzahl derjenigen unter den ersten n-Stellen der g-adischen Entwicklung von x hinter dem Komma, die den Wert h haben, so ist die Menge der x, so daß*

$$H(n, x) = \frac{n}{g} + O(\sqrt{n \log n}),$$

homogen vom Maße 1.

Es ist klar, daß, wenn unter den n-ersten Stellen von x hinter dem Komma sich λ solche befinden, die einen bestimmten Wert h haben, das Maß der Menge der so definierten x sich mit

$$\binom{n}{\lambda} \cdot g^{-\lambda} \cdot \left(1 - \frac{1}{g}\right)^{n-\lambda}$$

ergibt. Schreiben wir kurz

$$1 - \frac{1}{g} = b, \qquad \frac{1}{g} = a,$$

so wird das erwähnte Maß

$$\binom{n}{\lambda} a^{\lambda} b^{n-\lambda}$$

also gleich dem λ-ten Glied in der binomischen Entwicklung von $(a+b)^n$. Der Quotient zweier aufeinanderfolgenden dieser Glieder, des λ-ten und $\lambda + 1$-ten ist $\frac{n-\lambda}{\lambda} \cdot \frac{b}{a}$. Er nimmt daher als Funktion von λ betrachtet monoton ab. Daher nehmen die Glieder mit wachsendem λ zuerst zu, bis zu einem größten, wo der Quotient durch 1 geht, und nehmen dann fortwährend ab. Das Maximum wird, wie man leicht sieht, für $\lambda = [b\,n]$ oder $\lambda = [b\,n] + 1$ erreicht.

Ein Glied mit $\lambda = b\,n \pm l \sqrt{n \log n}$ ist daher bei hinreichend großem n und nach unten beschränktem l im Falle des negativen Vorzeichens größer als alle vorhergehenden, im Falle des positiven Vorzeichens größer als alle folgenden Glieder.

Nach Erledigung dieser äußerst trivialen Bemerkung wollen wir die Menge M unseres Satzes näher ins Auge fassen. Heiße k eine bestimmte ganze positive, festgehaltene Zahl. Die Menge $M(k, n)$, für die

$$|H(n, x) - a\,n| < k \sqrt{n \log n}$$

ist, hat dann das Maß

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$\sum_{\lambda} \binom{n}{\lambda} a^{\lambda} b^{n-\lambda},$$

wo die Summe über die nicht negativen Werte von λ zu erstrecken ist, die kleiner als $an-k\sqrt{n \log n}$ und größer als $an+k\sqrt{n \log n}$ sind. Wir bezeichnen mit l eine irrationale Zahl, so daß

$$l\sqrt{n \log n} = [k\sqrt{n \log n}]+1$$

ist.

Es ist

$$l-k < \frac{1}{\sqrt{n \log n}}$$

Bei ins Unendliche wachsendem n können wir daher

$$l = k + O\left(\frac{1}{\sqrt{n \log n}}\right).$$

schreiben.

In der vorstehenden Summe für $m\,M(k, n)$ ist bei hinreichend großem n daher das Glied

$$U = \binom{n}{bn-l\sqrt{n \log n}} a^{bn-l\sqrt{n \log n}}\, b^{an+l\sqrt{n \log n}}$$

größer als alle vorhergehenden, hingegen das Glied

$$V = \binom{n}{an+l\sqrt{n \log n}} a^{bn+l\sqrt{n \log n}}\, b^{an-l\sqrt{n \log n}}$$

größer als alle folgenden. Es ist offenbar $b \geqq a$; $b = a \left(=\frac{1}{2}\right)$ würde nur im Falle dyadischer Entwicklungen gelten.

Es ist daher $U > V$ In der Summe von weniger als n-Gliedern, die gleich $m\,M\,(k, n)$ ist, ist offenbar U das größte Glied.

Es ist wegen $a+b=1$:

$$U = \frac{n!\; a^{bn-l\sqrt{n \log n}}\; b^{an+l\sqrt{n \log n}}}{(bn-l\sqrt{n \log n})!\,(an+l\sqrt{n \log n})!}.$$

Nach der Stirling'schen Formel ergibt sich sofort für U folgende Abschätzung: Wegen

$$n! = \sqrt{2\pi n}\;\; n^n\, e^{-n} \left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

erhalten wir für U:

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$U = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \frac{\sqrt{n} \,.\, n^n \,.\, a^{bn-l\sqrt{n \log n}}}{(an+l\sqrt{n \log n})^{an+l\sqrt{n \log n}}} \cdot$$

$$\frac{b^{an+l\sqrt{n \log n}} \,.\, \left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{(bn-l\sqrt{n \log n})^{bn-l\sqrt{n \log n}} \sqrt{an+l\sqrt{n \log n}} \sqrt{bn-l\sqrt{n \log n}}} \cdot$$

Wir können

$$U = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \,.\, A.B.E. \left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

setzen, und zwar sehen wir, indem wir statt n. $.n\,(a+b)$ schreiben, daß der Reihe nach

$$A = \sqrt{\frac{1}{abn+l(b-a)\sqrt{n \log n}-l^2 \log n}},$$

$$B = \left(\frac{an}{an+l\sqrt{n \log n}}\right)^{an} \cdot \left(\frac{bn}{bn-l\sqrt{n \log n}}\right)^{bn}$$

$$E = \left(\frac{a}{b} \; \frac{bn-l\sqrt{n \log n}}{an+l\sqrt{n \log n}}\right)^{l\sqrt{n \log n}}$$

gesetzt werden kann. Wir schätzen der Reihe nach A, B, E für unendlich werdendes n ab.

Man sieht sofort, daß

$$A \cong \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{ab}}$$

ist, genauer

$$A = \frac{1}{\sqrt{ab}} \frac{1}{\sqrt{n}} + O\left(\sqrt{\frac{\log n}{n}}\right)$$

für $b > a$ (d. h. $g = 2$) und

$$A = \frac{1}{\sqrt{ab}} \frac{1}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{\log n}{n}\right)$$

für $b = a$ (d. h. im Falle dyadischer Brüche).

Weiter ist

$$\log B = an \log \frac{1}{1+\frac{l}{a}\sqrt{\frac{\log n}{n}}} + bn \log \frac{1}{1-\frac{l}{b}\sqrt{\frac{\log n}{n}}},$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

oder

$$log\, B = a n \left(-\frac{l}{a}\sqrt{\frac{log\, n}{n}} + \frac{l^2}{2a^2}\,\frac{log\, n}{n}\right) +$$

$$+ b n \left(\frac{l}{b}\sqrt{\frac{log\, n}{n}} + \frac{l^2}{2b^2}\,\frac{log\, n}{n}\right) + O\left(\sqrt{\frac{log^3 n}{n}}\right),$$

vereinfacht

$$log\, B = \frac{l^2}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) log\, n + O\left(\sqrt{\frac{log^3 n}{n}}\right),$$

daher wegen

$$l^2 = k^2 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n\, log\, n}}\right)$$

$$log\, B = \frac{k^2}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) log\, n + O\left(\sqrt{\frac{log^3 n}{n}}\right),$$

woraus sich sofort

$$B = n^{\frac{k^2}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}\left(1 + O\left(\sqrt{\frac{log^3 n}{n}}\right)\right)$$

ergibt.

Weiter ist

$$E = \left(\frac{1 - \frac{l}{ab}\sqrt{\frac{log\, n}{n}}}{1 + \frac{l}{ab}\sqrt{\frac{log\, n}{n}}}\right)^{l\sqrt{n\, log\, n}}$$

daher

$$log\, E = l\sqrt{n\, log\, n}\; log\, \frac{1 - \frac{l}{ab}\sqrt{\frac{log\, n}{n}}}{1 + \frac{l}{ab}\sqrt{\frac{log\, n}{n}}}$$

Es ist

$$log\, \frac{1-z}{1+z} \text{ für } z \to 0\colon\; -2z + O(z^3),$$

daher

$$log\, E = l\sqrt{n\, log\, n}\left(-\frac{2l}{ab}\sqrt{\frac{log\, n}{n}} + O\left(\sqrt{\frac{log^3 n}{n^3}}\right)\right).$$

Dies vereinfacht sich zu

$$log\, E = -\frac{2l^2}{ab}.log\, n + O\left(\frac{log^2 n}{n}\right)$$

oder einfacher wegen

$$l^2 = k^2 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n\, log\, n}}\right)$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

und

$$\frac{\log^2 n}{n} = o\left(\sqrt{\frac{\log n}{n}}\right)$$

zu

$$\log E = -\frac{2k^2}{ab}\log n + O\left(\sqrt{\frac{\log n}{n}}\right),$$

$$E = n^{-\frac{2k^2}{ab}}\left[1 + O\left(\sqrt{\frac{\log n}{n}}\right)\right].$$

Dies gibt insgesamt

$$U = n^{\frac{k^2}{2}\left(\frac{1}{a} - \frac{4}{ab} + \frac{1}{b}\right)}\left[1 + o\,(1)\right].\sqrt{\frac{1}{2\pi}}$$

Nun ist

$$\frac{1}{a} - \frac{4}{ab} + \frac{1}{b} = \frac{-3g^2}{g-1}.$$

Daher erhält man sofort, da der rechtsstehende Ausdruck für alle in Betracht kommenden Zahlen g negativ und dem absoluten Betrag nach nicht kleiner als 12 ist, für U die folgende Abschätzung: (wegen $k \geqq 1$)

$$U = n^{-3}.o\,(1).$$

Nun ist

$$m\,M(k, n) \leqq n\,U.$$

Daher ergibt sich

$$m\,M(k, n) = n^{-2}.o\,(1).$$

Nun bilden wir die Menge

$$M_{kn} = \sum_{p=n}^{\infty} M(k, p).$$

Es ist

$$m\,M_{kn} \leqq \sum_{p=n}^{\infty} m\,M(k, p),$$

woraus sofort

$$m\,M_{kn} = n^{-1}.o\,(1)$$

folgt.

Die Komplementärmenge CM unserer Menge M erfüllt die Bedingung, daß

$$\limsup_{n\to\infty}\, \frac{|H(n, x) - a\,n|}{\sqrt{n \log n}} = \infty.$$

Es muß daher bei festgehaltenem k CM Untermenge von M_{kn} für j e d e s n sein. Da aber $\lim\limits_{n\to\infty} m\,M_{kn} = 0$, so muß $m\,CM = 0$ sein. Es folgt $m\,M = 1$.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Zum Beweise einer Verallgemeinerung des genaueren Satzes von Khintchine reicht unsere Methode nicht aus. Wir legen darauf kein Gewicht. Für die Beweisführung zu den Sätzen 8 und 9 des § 3 würde sogar die schwächere ältere Borel'sche Abschätzung, daß

$$H(n, x) = an + o(n)$$

für fast alle x richtig ist, genügen.

Was den zweiten Hardy-Littlewood'schen Satz betrifft, so soll die folgende Skizze des Beweises einer Verallgemeinerung für beliebiges g genügen:

Nach dem sogenannten Bernouilli'schen Theorem der Wahrscheinlichkeitsrechnung (vgl. E. Czuber, Wahrscheinlichkeitsrechnung [1903], p. 99) läßt sich das Maß der Menge $M(k, n, \varepsilon)$ der Zahlen x, die die Bedingung

$$|H(n, x) - an| < (k+\varepsilon)\sqrt{n}$$

erfüllen, durch

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{k+\varepsilon}{\sqrt{2a}}} e^{-t^2}\, dt + \varepsilon_n$$

mit $\varepsilon_n \to 0$ für $n \to \infty$ ausdrücken.

Die weitere Durchführung des Beweises kann völlig nach Herrn Knopp (a. a. O., p. 418) erfolgen.

§ 2. Bestimmung des Maßes von Kettenbruchmengen.

Die Bestimmung des Maßes von Kettenbruchmengen ist in neuester Zeit von Herrn K. Knopp in seiner auch sonst oft zitierten Abhandlung »Mengentheoretische Behandlung.. sehr vereinfacht worden (vgl. p. 420 bis 426 dortselbst). Wir bemerken, daß unter Beschränkung auf meßbare Mengen die Knopp'schen Ausführungen sich noch vereinfachen lassen.

Hilfssatz 1. *Ist $f(x)$ eine positive beschränkte monoton abnehmende Funktion, sind weiter M und N zwei beschränkte meßbare Mengen von gleichem Maße und der Eigenschaft, daß die Restmenge $M' = M - MN$ durchwegs aus Punkten besteht, die größer als jeder Punkt von N sind, dann ist*

$$\int_M f(x)\, dx \leqq \int_N f(x)\, dx.$$

Dabei sind die Integrale im Lebesgue'schen Sinne zu verstehen. Ausdrücklich muß bemerkt werden, daß der Satz unabhängig davon gilt, ob die Menge MN vielleicht leer ausfällt. Weiter geht aus der

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

nun folgenden Beweisführung leicht hervor, daß der Satz auch gilt, wenn die Punkte der erwähnten Restmenge M' nur bis auf eine Nullmenge die Bedingung erfüllen, größer als jeder Punkt von N zu sein, weiter, auch wenn $mN > mM$ ist und die sonstigen Bedingungen erfüllt sind. Dieser auch an sich interessante Satz ist eine Erweiterung der bekannten Eigenschaft einer monoton abnehmenden Funktion, das für $b > a$ und $c > 0$

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqq \int_{a+c}^{b+c} f(x)\,dx$$

ist. In der letzten Ungleichung können wegen der Monotonie von $f(x)$ die Integrale auch im Riemann'schen Sinne verstanden werden.

Beweis: Wir wollen die die Lebesgue'schen Integrale approximierenden Summen bilden, die den Darboux'schen Summen für das Riemann'sche Integral analog sind (vgl. z. B. Schlesinger und Plessner, Lebesgue'sche Integrale und Fourier'sche Reihen (1925), p. 130 f.; Kamke, das Lebesgue'sche Integral (1925), p. 99 f.; de la Vallee-Poussin, Integrales de Lebesgue (1916), p. 46.

Betrachten wir also statt des Integrals

$$\int_N f(x)\,dx$$

die folgenden Summen

$$\sum_{k=1}^{n} \Phi(N_k)\, m\, N_k, \quad \sum_{k=1}^{n} \varphi(N_k)\, m\, N_k!$$

Hierin soll $N = \sum_{k=1}^{n} N_k$ eine beliebige Zerlegung von N in elementefremde, meßbare Teilmengen von durchwegs positivem Maße und respektive $\varphi(R)$ und $\Phi(R)$ die obere und untere Grenze von $f(x)$ in irgendeiner Teilmenge R des Definitionsbereiches sein. Sind also fin. sup. und fin. inf. abkürzende Bezeichnungen für obere und untere Grenze, so ist

$$\text{fin. inf.} \sum_k \Phi(N_k)\, m\, N_k = \text{fin. sup.} \sum_k \varphi(N_k)\, m\, N_k = \int_N f(x)\,dx.$$

In derselben Art ergibt sich aus jeder Zerlegung $M = \sum_{k=1}^{n} M_k$ in elementefremde, meßbare Teilmengen von durchwegs positivem Maße

$$\text{fin. inf.} \sum \Phi(M_k)\, m\, M_k = \text{fin. sup.} \sum \varphi(M_k)\, m\, M_k = \int_M f(x)\,dx.$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Nun können wir jeder Zerlegung von N

$$N = N_1 + N_2 + \quad + N_n$$

eine solche von M in dieselbe Zahl n von Untermengen

$$M = M_1 + M_2 + \quad M_n$$

zuordnen, daß stets $m M_k = m N_k$ ist ($k = 1, 2, \quad ., n$). Um dies in zweckentsprechender Art auszuführen, gehen wir so vor: Wir fügen zu $N_1 . M$ eine Teilmenge R_1 von M' hinzu, so daß $m R_1 = m (N_1 - N_1 M)$ wird. Dann wird $N_1 . M$ und R_1 elementefremd.[1] Setzen wir $N_1 M + R_1 = M_1$, dann ist daher

$$m M_1 = m N_1.$$

Die Restmenge $M - M_1$ hat dann dasselbe Maß wie $N - N_1$

$$m (M - M_1) = m (N - N_1).$$

Hierauf bilden wir M_2 in völlig analoger Art wie M_1. Wir fügen zu $N_2 (M - M_1)$ eine Teilmenge R_2 von $M' - R_1$ hinzu, die das Maß

$$m [M_2 - (N_2, M - M_1)]$$

hat. In dieser Art fahren wir fort. Zuletzt bleibt eine Restmenge M_n übrig, die wegen $m N = m M$ das Maß von N_n zu ihrem Maß und $N_n M$ zur Untermenge hat.

Nun wollen wir bei beliebig vorgegebenem k (k ganzzahlig, $1 \leqq k \leqq n$) zwei entsprechende Glieder der Summe

$$\Phi (N_k) \; m N_k, \; \Phi (M_k) \; m M_k$$

vergleichen! Es soll M_k auf die oben dargelegte Art aus N_k hervorgehen. Wir behaupten:

$$\Phi (N_k) \geqq \Phi (M_k).$$

Dies zu zeigen, bemerken wir zunächst, daß $\Phi (M_k) = \Phi (M_k N_k)$, sofern dieser Durchschnitt $M_k N_k$ nicht leer ausfällt. Denn da jeder Punkt von $M_k - M_k N_k$ zu M, aber nicht zu N gehört, ist $M_k - M_k N_k < M'$ und daher ist der Funktionswert in einem beliebigen Punkte von $M_k - M_k N_k$ nicht größer als in jedem von M, also auch in jedem Punkte von $M_k N_k$. Die Voraussetzungen zeigen ja sofort, daß der Funktionswert in einem beliebigen Punkte von M' nicht größer als in jedem Punkte von M ist. Sollte aber $M_k N_k$ leer ausfallen, so gilt aus den eben erwähnten Gründen ebenfalls $\Phi (N_k) \geqq \Phi (M_k)$. Wir können daher wegen $m M_k = m N_k$ schreiben:

$$\Phi (N_k) \; m N_k \geqq \Phi (M_k) \; m M_k.$$

---

[1] Hier machen wir Gebrauch von dem Satze, daß jede Punktmenge M, deren Maß $m M = \alpha$ ist, sicher Teilmengen vom Maße β hat, wo $\beta < \alpha$ ist (Carathéodory, Vorlesungen über reelle Funktionen, 2. Aufl. [1927], p. 288).

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

In der geschilderten Weise können wir zu jeder das Integral $\int\limits_N f(x)\,dx$ von oben approximierenden Summe $\sum\limits_k \Phi(N_k)\; m N_k$ eine Summe $\sum\limits_k \Phi(N_k)\; m N_k$ zuordnen, die nicht größer ist. Es folgt:

$$\text{fin. inf.} \sum_k \Phi(N_k)\; m N_k \geqq \text{fin. inf.} \sum_k \Phi(M_k)\; m M_k.$$

Das ist nichts anderes als

$$\int\limits_N f(x)\,dx \geqq \int\limits_M f(x)\,dx.$$

Wir wollen einen Kettenbruch

$$x = \frac{1}{|a_1} + \frac{1|}{|a_2} + \frac{1|}{|a_3} + .$$

kurz $x = \{a_1, a_2, a_3, \quad .\}$ schreiben. Weiter nennen wir $x^{(n)}$ den Kettenbruch

$$x^{(n)} = \{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \quad .\}.$$

Wir wollen auch manchmal schreiben statt

$$x = \{a_1, a_2, \quad ., a_n, a_{n+1} . \quad .\}$$

auch

$$x = \{a_1, a_2, a_3, \quad ., a_n;\; x^{(n)}\},$$

wo

$$x^{(n)} = \{a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}, \quad . .\}$$

ist.

Seien $\frac{r_n}{s_n}$ und $\frac{r_{n-1}}{s_{n-1}}$ der n-te und $n-1$-te Näherungsbruch der vorstehenden Kettenbruchentwicklung von x. Es sei also

$$\frac{r_n}{s_n} = \{a_1, a_2, a_3, \quad ., a_{n-1}, a_n\},\quad \frac{r_{n-1}}{s_{n-1}} = \{a_1, a_2, \quad ., a_{n-1}\}.$$

Dann ist bekanntlich

$$x = \frac{r_{n-1}\, x^{(n)} + r_n}{s_{n-1}\, x^{(n)} + s_n},\quad \text{weiter} \quad \begin{vmatrix} r_{n-1} & s_{n-1} \\ r_n & s_n \end{vmatrix} = (-1)^n.$$

Wir behaupten nun ähnlich Herrn K. Knopp:

Satz 1. *Jede meßbare Menge M von Elementen x, der Eigenschaft, daß mit x auch jedes zugehörige $x^{(n)}$ für beliebiges n zur Menge M gehört, ist homogen und hat daher das Maß 1 oder das Maß 0.*

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Wir beschränken uns also auf meßbare Mengen. Der Beweis des Herrn Knopp kann noch etwas vereinfacht werden.

Hiezu überlegen wir, daß der Nachweis genügt, daß, wenn das Maß der Menge $\delta < 1$ ist, die Dichte δ' in beliebig kleinen Teilintervallen des Intervalls $(0, 1)$ die Bedingung $\delta' \leqq \frac{1+\delta}{2}$ ist. Herr Knopp stellt dies durch eine Reihe sehr scharfsinniger Schlüsse fest.

Wir gehen so vor: schreiben wir mit Herrn Knopp

$$x^{(n)} = y, \ r_{n-1} = a, \ r_n = b, \ s_{n-1} = c, \ s_n = d,$$

so wird durch die Transformation

$$x = \frac{ay+b}{cy+d}$$

das von $y = x^{(n)}$ erfüllte Intervall $(0, 1)$ auf das zwischen $\frac{b}{d}$ und $\frac{a+b}{c+d}$ abgebildet. Dieses Intervall heiße i. Beschränke ich x auf Elemente aus M, so müssen auf Grund der Voraussetzung die y Elemente aus M sein. Möglicherweise erhalte ich aber auch bei dieser Beschränkung des y durch diese Transformation Werte x, die nicht zu M gehören (das ist durch die Voraussetzung nicht ausgeschlossen). Heißt M' die durch diese linear gebrochene Transformation aus y erhaltene Menge, so ist $i\,M < M'$ und daher $m\,(i\,M) \leqq m\,M'$.

Führe ich jetzt Inhaltsfunktionen für M und M' ein, und zwar

$$\begin{aligned} F(x) &= 1 \text{ für Punkte von } M, \\ F(x) &= 0 \text{ sonst;} \\ G(x) &= 1 \text{ für Punkte von } M', \\ G(x) &= 0 \text{ sonst, so ist} \end{aligned}$$

$$m\,M' = \int_{M'} dx = \left| \int_{\frac{b}{d}}^{\frac{a+c}{b+d}} F(x)\,dx \right|.$$

Nun führen wir in dieses Lebesgue'sche Integral neue Veränderliche ein durch die Substitution

$$x = \frac{ay+b}{cy+d}.$$

Wir erhalten

$$m\,M' = \int_0^1 \frac{G(y)\,dy}{(cy+d)^2} \left| \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \right| = \int_M \frac{dy}{(cy+d)^2} \left| \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \right|.$$

Nun ist $\left|\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\right| = 1$, da $\frac{a}{c}$ und $\frac{b}{d}$ aufeinanderfolgende Näherungsbrüche sind, und daher wird einfacher

$$m\,M' = \int_M \frac{dy}{(cy+d)^2}.$$

Ist $m\,M = \delta$, so sind M und N zwei Mengen, die den Bedingungen des Hilfssatzes 1 entsprechen, wenn wir unter N das Intervall $(0, \delta)$ verstehen. Die Funktion $f(y) = \frac{1}{(cy+d)^2}$ ist monoton abnehmend. Daher haben wir

$$m\,M' \leqq \int_0^\delta \frac{dy}{(cy+d)^2} = \frac{1}{c}\left(\frac{1}{c\delta+d} - \frac{1}{d}\right).$$

Hieraus kann man in ganz analoger Weise wie Herr Knopp auf $\delta' \leqq \frac{1+\delta}{2}$ schließen. Ist also y ein Element von M, so wird das Intervall zwischen $\frac{r_{n-1}}{s_{n-1}}$ und $\frac{r_n + r_{n-1}}{s_n + s_{n-1}}$ mit wachsendem n beliebig klein. Es ist weiter erst recht die Dichte von $i\,M \leqq \frac{1+\delta}{2}$. Fällt also in einem Teilintervall (α, β) von $(0, 1)$ die Menge M nicht leer aus, so gibt es innerhalb dessen beliebig kleine Unterintervalle, so daß die Dichte in denselben $\leqq \frac{1+\delta}{2}$ ist. Dies gilt aber natürlich auch dann, wenn die in (α, β) liegende Teilmenge von M in die leere Menge ausarten sollte.[1] In allen diesen Fällen schließt man aus den Sätzen in der Einleitung leicht, daß M homogen und daher $m\,M = 0$ sein muß.

Die Menge M kann daher, wenn sie meßbar ist, nur das Maß 1 oder das Maß 0 haben.

Die obige Bedingung geht also, wie aus dem Beweis zu ersehen ist, darauf hinaus, daß — ähnlich wie auch Herr Knopp sich ausdrückt — *eine Aussage* $\mathfrak{A}$ *über die Teilnenner von* x, *wenn sie für ein irrationales* x *aus* $(0, 1)$ *gilt, auch für alle zugehörigen* $x^{(n)}$ *richtig ist. Dann ist die Menge der* x, *für die* $\mathfrak{A}$ *richtig ist, homogen.*

Nicht notwendig für die Gültigkeit des Satzes ist, daß ein solches x nicht vielleicht auch als $u^{(n)}$ zu Kettenbrüchen u gehören könnte, die nicht zu M gehören.

[1] Diesen Umstand hat Herr K. Knopp nicht in Betracht gezogen. Seine Heranziehung erleichtert beispielsweise den Beweis von Satz 2 erheblich.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Die von Herrn Knopp gegebene Formulierung des Satzes ist *etwas enger:* sie besagt, daß die Aussage $\mathfrak{A}$ entweder für alle $x^{(n)}$ richtig ist oder für keines.

Nehme ich beispielsweise die Menge der Kettenbrüche, so daß $a_n \leqq U$, wo U ganz positiv und für alle Elemente der Menge und alle n fest ist, während n beliebig ist, so erfüllt sie unsere Bedingung, *aber nicht die engere Knopp'sche Formulierung.* Dasselbe gilt von der Menge, aus deren Teilnennern eine bestimmte positive ganze Zahl k ausgeschlossen ist. Diese Mengen sind also homogen (vom Maße 0).

Zugleich zeigt die obige Gleichung

$$m\, M' = \int\limits_M \frac{dy}{(cy+d)^2} \left| \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \right|,$$

daß bei eigentlichen linear gebrochenen Substitutionen Nullmengen in Nullmengen und meßbare Mengen mit von Null verschiedenem Maße in ebensolche übergehen. (Eigentlich heißt die linear gebrochene Substitution, wenn ihre Determinante $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$. Der Satz ist auch auf andere Art leicht zu beweisen, *aber nicht selbstverständlich.*)

Satz 2 (Satz von Knopp). *In den Kettenbruchentwicklungen fast aller Zahlen tritt eine jede natürliche Zahl, und zwar eine jede unendlich oft als Teilnenner auf.* Beweis:

Es sei M die Menge aller Zahlen, für die der Satz nicht gilt, d. h. daß nicht alle ganzen Zahlen unendlich oft als Teilnenner auftreten, weiter sei k eine beliebige, vorläufig festgehaltene positive ganze Zahl, $M(k)$ die Menge aller Zahlen, in deren Kettenbruchentwicklung der Teilnenner k überhaupt nicht auftritt, M_k die Menge aller Zahlen, die nur endlich viele Teilnenner haben, die gleich k sind.

Der nun folgende Beweis unterscheidet sich dadurch von dem durch Herrn Knopp gegebenen, daß er jede Rechnung vermeidet.

Zunächst beweisen wir: $m\,M(k) = 0$. Wir nennen $M(i, k)$ die Menge aller Zahlen, deren i-ter Teilnenner (i ganz, positiv, fest) nicht den Wert k hat.[1] Dann ist, wie sofort ersichtlich,

---

[1] Daß $M(k)$ meßbar ist, sieht man sofort: Es ist $M(1, k)$ meßbar (siehe weiter unten). Aus der Meßbarkeit der Zahlen x von $M(i, k)$ folgt die der Zahlen y von $M(i+1, k)$ wegen der Bedingung $y = \dfrac{1}{z+x}$, wo z der Reihe nach die Werte $1, 2, \ldots, k-1, k, k+1, \ldots$ annimmt. Halten wir für den Augenblick ein solches z fest und nennen $M(i+1, k, z)$ die Menge aller dieser y, wenn y ein Element aus $M(i, k)$ ist, so ist diese Menge offenbar meßbar, daher auch $M(i+1, k) = \sum M(i+1, k, z)$. Damit ist auch die Meßbarkeit von $M(i, k)$ für jedes i durch vollständige Induktion bewiesen.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$m\,M(1,\,k) = 1 - \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1}$$

oder

$$m\,M(1,\,k) < 1.$$

$M(k)$ erfüllt die Bedingungen unseres Satzes 1, ist somit homogen; denn mit x gehört auch $x^{(n)}$ für jedes ganzzahlige positive n zu $M(k)$. Daher kann $m\,M(k)$ nur entweder 1 oder 0 sein. Ersteres ist aber wegen $m\,M(1,k) < 1$ und $M(k) < M(1,k)$ ausgeschlossen. Es folgt: $m\,M(k) = 0$.

Bezeichnet weiter $M\left(\frac{b}{d},\,k\right)$ die Menge der Zahlen

$$x = \frac{ay+b}{cy+d},$$

wo $\frac{b}{d}$ eine beliebige rationale Zahl des Intervalls (0, 1), $\frac{a}{c}$ der vorletzte Näherungsbruch in der Kettenbruchentwicklung von $\frac{b}{d}$ (beide Brüche auf die kleinste Form gebracht) und y eine beliebige Zahl von $M(k)$ ist. Dann ist wegen $m\,M(k) = 0$ auch $m\,M\left(\frac{b}{d},\,k\right) = 0$, da die Zahlen der letzteren Menge aus denen der ersteren durch eine eigentliche linear gebrochene Transformation hervorgehen.

Es ist offenbar

$$M_k = \sum_{\frac{b}{d}} M\left(\frac{b}{d},\,k\right),$$

wo die Summe über alle abzählbar unendlich vielen rationalen Zahlen $\frac{b}{d}$ des Intervalls (0, 1) zu erstrecken ist. Daher ist M_k als Summe von abzählbar unendlich vielen Nullmengen eine Nullmenge.

Endlich ist

$$M = \sum_{n=1}^{\infty} M_k,$$

also aus demselben Grunde auch $m\,M = 0$, womit der Satz bewiesen ist.

Die Analogie der Menge $M(k)$ mit der Cantor'schen Punktmenge ist klar.

Die Bedeutung des Beweises liegt auch darin, daß er sich sofort auf den weiteren, anscheinend neuen Satz anwenden läßt:

Es ist somit auch $M(k)$ meßbar als Durchschnitt der abzählbar vielen Mengen $M(i,\,k)$ $(i = 1,\,2,\,3,\;\ldots)$. In ähnlicher Art ist bei allen anderen unterdrückten Beweisen, daß die betrachteten Mengen Borel'sche sind, vorzugehen.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Satz 3. *Jede beliebige Ziffergruppe von n endlich vielen Zahlen $(k_1, k_2, k_3, \ldots, k_{n-1}, k_n)$ (n fest) kommt in den Kettenbruchentwicklungen fast aller Zahlen unendlich oft in der vorgeschriebenen Reihenfolge vor, genauer gesagt: bei gegebener Ziffergruppe $(k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}, k_n)$ gibt es bei fast allen $x = \{a_1, a_2, \ldots\}$ unendlich viele ganzzahlige $p \geqq 0$, so daß $a_{p+1} = k_1, a_{p+2} = k_2, \ldots a_{p+n} = k_n$ ist* oder auch: *bei den Kettenbruchentwicklungen fast aller x finden sich zu jeder beliebigen Ziffergruppe $(k_1, k_2, \ldots k_{n-1}, k_n)$ unendlich viele zugehörige $x^{(n)}$, die wie folgt beginnen:*

$$x^{(n)} = \{k_1, k_2 \ldots, k_n; u\}.$$

Beweis: Heiße zur Abkürzung K die Gruppe der n-Ziffern $(k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n)$; $M(K)$ sei analog wie bei Satz 2 die Menge der x, aus deren Teilnennern die Gruppe K ausgeschlossen ist, genauer gesagt: gehört $x = \{a_1, a_2, \ldots\}$ zu $M(K)$, so soll es keinen Wert von p $(p = 0, 1, \ldots)$ geben, daß etwa alle n-Gleichungen

$$a_{p+1} = k_1, a_{p+2} = k_2, \ldots, a_{p+n} = k_n$$

durchwegs erfüllt sind.

Weiter heiße $M(1, K)$ die Menge jener Zahlen, bei denen die Ziffergruppe $(k_1, \ldots, k_n)$ nicht *an erster Stelle* vorkommt; sei also x ein Element von $M(1, K)$, so ist in der Kettenbruchentwicklung

$$x = \{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n; x^{(n)}\}$$

mindestens eine der Zahlen $a_j \neq k_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$.

Es ist dann offenbar:

$$m M(1, K) = 1 - |\{k_1, k_2, \ldots, k_n\} - \{k_1, k_2, \ldots, k_n + 1\}| < 1.$$

$M(K)$ ist homogen und meßbar. Letzteres wird ganz analog wie in Fußnote 3 für $M(k)$ bewiesen. Es muß daher $m\, M(K) = 1$ oder $m\, M(K) = 0$ sein. Ersteres ist ausgeschlossen wegen $M(K) < M(1, K)$ und $m\, M(1, K) < 1$. Es folgt: $m\, M(K) = 0$.

Die weitere Führung des Beweises erfolgt völlig analog der des Satzes 1.

Satz 4. *Wird eine Menge von Kettenbrüchen $x = \{a_1, a_2, \ldots\}$ durch die Bedingung $a_n = O(\varphi_n)$ charakterisiert, wo φ_n eine monoton ins Unendliche wachsende Funktion ist, so daß $\frac{\varphi_{n+1}}{\varphi_n} \to 1$, so ist das Maß der Menge 1, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi_n}$ konvergiert, hingegen 0, wenn diese Reihe divergiert.*

Dieser von Herrn Knopp (a. a. O., p. 425) bewiesene Satz folgt unmittelbar unter Anwendung des Satzes 1 aus dem älteren von Bernstein und Borel herrührenden:

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Satz 5. *Wird eine Menge von Kettenbrüchen durch die Bedingung* $\alpha_n \leqq a_n \leqq b_n$, ($\alpha_n$, b_n ganz positiv, $\alpha_n \leqq b_n$), *begrenzt, so hat sie nur dann ein positives Maß, wenn alle* α_n *mit einer endlichen Anzahl Ausnahmen den Wert 1 haben und die Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n}$ *konvergiert.*

Nun könnte man nach Satz 5 glauben, daß die Zahl 1 eine Sonderrolle spielt, indem sie gewissermaßen am häufigsten vorkommt. Denn nach diesem Satze erhalten wir sofort eine Nullmenge, wenn die Zahl 1 nicht unendlich oft als Teilnenner vorkommt. Nach dem von Herrn Knopp gefundenen Satze 2 ist diese Sonderstellung nicht vorhanden, da nach ihm die Menge das Maß 0 hat, wenn irgendeine beliebige Zahl k nicht unendlich oft als Teilnehmer vorkommt.

Satz 6 (Satz von A. Khintchine). *Die Menge aller Zahlen* x, *deren Kettenbruchentwicklung* $x = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ *die Bedingung*

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(x) = O\,(n^{1+\varepsilon})$$

erfüllt, hat für jedes $\varepsilon > 0$ *das Maß* 1 (Mathematische Zeitschrift, Bd. 18 [1922], p. 289).

Dieser Lehrsatz sei nur der Vollständigkeit halber angeführt, sowie wegen der Analogie zu Satz 7 des § 3.

§ 3. Bestimmung des Maßes von Mengen, deren Elemente durch Lüroth'sche Reihen gegeben sind.

Eine im Intervalle (0, 1) liegende Zahl x wird durch eine Lüroth'sche Reihe wie folgt dargestellt:

$$x = \frac{1}{d_1+1} + \frac{1}{d_1(d_1+1)}\,\frac{1}{d_2+1} + \\ + \frac{1}{d_1(d_1+1)\,d_2(d_2+1)}\,\frac{1}{d_3+1} + $$

Dabei sind die d_i $(i = 1, 2, \ldots)$ ganze positive Zahlen $\geqq 1$. Wir wollen sie Teilnenner dieser Entwicklung nennen.[1] Die Darstellung ist für alle irrationalen x eindeutig.

[1] Die gewöhnliche Bezeichnungsweise, wie sie auch Herr O. Perron a. a. O. verwendet, ist:

$$x = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_1(q_1-1)}\,\frac{1}{q_2} + \ldots$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Diese Zahl wollen wir auch kurz mit $|d_1, d_2, d_3, \ldots|$ oder auch $|d_1, d_2, d_3, \ldots, d_{n-1}, d_n; x_n|$ bezeichnen, wo x_n den folgenden Ausdruck bedeuten soll: $x_n = |d_{n+1}, d_{n+2} \ldots|$.

(Die mit einem Teilnenner d_1 behaftete Zahl $\frac{1}{d_1+1}$ müßte vorkommendenfalls mit $|d_1,|$ bezeichnet werden zum Unterschiede von $|d_1| =$ Absolutbetrag von d_1.)

Statt Entwicklung in Lüroth'sche Reihen wollen wir auch Lüroth'sche Entwicklung sagen und die Teilnenner entsprechend auch manchmal als Lüroth'sche Teilnenner bezeichnen.

Die d_n sind, wie schon erwähnt, ganze positive Zahlen $\geqq 1$. Wir wollen gelegentlich auch $d_n(x)$ schreiben, um die Abhängigkeit von x hervorzuheben.

Es mögen die ersten n der Zahlen $d_1, d_2, d_3, \ldots, d_{n-1}, d_n$ bei festem n bestimmte Werte haben, natürlich ganze durchwegs positive Zahlen. Wir fragen nach dem Maße der Mengen jener Zahlen, deren erste n Lüroth'sche Teilnenner die oben erwähnten Werte haben. Kurz, wir fragen nach dem Maß der Menge M' aller Zahlen x, deren Lüroth'sche Entwicklung wie folgt beginnt: $x = |d_1, d_2, d_3, \ldots, d_{n-1}, d_n; u|$, wo $u < 1$, sonst beliebig ist.

Die Menge M' ist offenbar ein abgeschlossenes Intervall, hat somit eine größte und eine kleinste Zahl. Die kleinste Zahl lautet wie folgt:

$$\frac{1}{d_1+1} + \frac{1}{d_1(d_1+1)}\frac{1}{d_2} + \ldots + \frac{1}{d_1(d_1+1)\ldots d_{n-1}(d_{n-1}+1)}\frac{1}{d_n} =$$
$$= |d_1, d_2, \ldots d_{n-1}, d_n,|,$$

während die größte offenbar erhalten wird, wenn ich alle d_i für $i > n \ldots 1$ setze. Sie hat daher den Wert:

$$|d_1, d_2, \ldots, d_n, 1, 1, 1, \ldots| =$$
$$= |d_1, d_2, \ldots, d_n,| + \frac{1}{d_1(d_1+1)\ldots d_n(d_n+1)}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots\right).$$

Die beiden Zahlen sind Endpunkte eines Intervalls der Länge

$$\frac{1}{d_1(d_1+1)\,d_2(d_2+1)\ldots d_n(d_n+1)}.$$

Es ist somit

$$m\,M' = \frac{1}{d_1(d_1+1)\,d_2(d_2+1)\ldots d_n(d_n+1)}$$

Wir haben die obige abändernde Bezeichnung aus wichtigen Gründen gewählt, nämlich damit die Analogie zwischen den Sätzen des § 2 und 3 besser hervortritt. Es ist $d_k = q_k - 1$ für $k = 1, 2, 3, \ldots$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Nunmehr wollen wir die Zahlen $d_1, \ldots, d_n$ wieder bei festem n wie folgt begrenzen:

$$\alpha_1 \leqq d_1 \leqq b_1,\ \alpha_2 \leqq d_2 < b_2, \ldots, \alpha_n < d_n < b_n.$$

Die α_i und b_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ sind ganze positive Zahlen, u. zw. sei

$$\alpha_i \leqq b_i.$$

Die so erhaltene Zahlenmenge, sie heiße M_n, hat dann als Maß die Summen der Längen der Teilintervalle, die wir erhalten, wenn wir für die d_i alle den obigen Ungleichungen genügenden Werte einsetzen. Es wird daher das Maß von M

$$m\,M_n = \sum \frac{1}{d_1(d_1+1)\,d_2(d_2+1) \ldots d_n(d_n+1)}$$

$$(\alpha_1 \leqq d_1 \leqq b_1,\ \alpha_2 \leqq d_2 \leqq b_2, \ldots, \alpha_n \leqq d_n \leqq b_n).$$

Dies läßt sich leicht in das folgende Produkt umformen:

$$m\,M_n = \sum_{d_1=\alpha_1}^{b_1} \frac{1}{d_1(d_1+1)} \sum_{d_2=\alpha_2}^{b_2} \frac{1}{d_2(d_2+1)} \sum_{d_3=d_3}^{b_3} \frac{1}{d_3(d_3+1)} \cdot \sum_{d_n=\alpha_n}^{b_n} \frac{1}{d_n(d_n+1)}$$

Nun ist für $b_i > \alpha_i$:

$$\sum_{z=\alpha_i}^{b_i} \frac{1}{z(z+1)} = \frac{1}{\alpha_i} - \frac{1}{b_i - 1}$$

Es ergibt sich somit als Maß der obigen Menge, falls alle $b_i > \alpha_i$ sind

$$m\,M_n = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{\alpha_i} - \frac{1}{b_i - 1}\right).^{1}$$

Nun wollen wir den Grenzübergang $n \to \infty$ vornehmen. Wir erhalten eine Menge $M = \lim\limits_{n=\infty} M_n$, deren Elemente x den Bedingungen:

$$\alpha_1 \leqq d_1 \leqq b_1,\ \alpha_2 \leqq d_2 \leqq b_2, \ldots$$

genügen, falls $x = |d_1, d_2, d_3, \ldots$ ist, und deren Maß sich

[1] Der Fall, daß einzelne oder — im Grenzfalle $n = \infty$ — auch unzählig viele $\alpha_i = b_i$ sind, wird durch das Resultat miterledigt. Man sieht sofort, daß in letzterem Falle — also wenn der Wert unzählig vieler Teilnenner bestimmt ist —, nur eine Nullmenge vorliegen kann.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$m\, M = \lim_{n \to \infty} m\, M_n = \prod_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha_i} - \frac{1}{b_i - 1} \right)$$

ergibt.

Diese Menge hat dann und nur dann ein von Null verschiedenes Maß, wenn das vorstehende unendliche Produkt konvergiert. Dazu ist notwendig und hinreichend, daß die α_i bis auf eine endliche Anzahl Ausnahmen den Wert 1 haben und die Reihe

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{b_i - 1}$$

konvergiert. Da zur Konvergenz dieser Reihe die der Reihe

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{b_i}$$

notwendig und hinreichend ist, so können wir den Satz aussprechen:

Satz 1. *Wird aus dem Intervalle* $(0, 1)$ *eine Teilmenge durch die Bedingung herausgegriffen, daß die Elemente sich in Lüroth-schen Reihen entwickeln lassen, deren Teilnenner* d_n *den Bedingungen*

$$\alpha_1 \leqq d_1 \leqq b_1,\ \alpha_2 \leqq d_2 \leqq b_2, . \quad \alpha_i \leqq d_i \leqq b_i, .$$

genügen, so hat die Menge nur dann ein von 0 verschiedenes Maß, wenn alle α_i *mit einer endlichen Anzahl Ausnahmen den Wert 1 haben und die Reihe* $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{b_i}$ *konvergiert.*

Auf den ersten Blick ist auffallend, daß wir hier für die Teilnenner der Lüroth'schen Reihe dieselbe Bedingung aufstellen müssen, wie für die Teilnenner einer Kettenbruchentwicklung nach dem Borel-Bernstein'schen Satz, damit die Menge ein von 0 verschiedenes Maß hat.

Eine wichtige Frage ist selbstverständlich für die weiteren Untersuchungen, ob hier wieder der Lehrsatz gilt, daß eine Menge homogen ist, wenn mit x zugleich jedes $x^{(n)}$ für beliebiges n in der Menge enthalten ist. Dies ist in der Tat der Fall:

Satz 2. *Es erfülle eine meßbare Menge* M *von Elementen* x: $x = |d_1, d_2, . \quad d_n, d_{n+1}, . |$ *die Bedingung, daß mit* x *auch jedes* x_n: $|d_{n+1}, d_{n+2}, d_{n+3}, . \quad |$ *in der Menge* M *enthalten sei. Dann ist diese Menge homogen und hat also entweder das Maß 1 oder das Maß 0.*

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Beweis: Es ist

$$x = \frac{a}{c} + \frac{x_n}{d_1(d_1+1)\ldots d_{n-1}(d_{n-1}+1)\,d_n(d_n+1)}$$

wo

$$\frac{a}{c} = |d_1, d_2, \ldots d_{n-1}, d_n, |$$

ist. Soll x zu M gehören, so muß auch x_n zu M gehören. Hat M das Maß 1, so ist der Satz bewiesen. Hat M ein Maß $\delta < \vartheta < 1$, so gilt: Durch die obige Gleichung wird das Intervall zwischen 0 und 1 in x in dasjenige zwischen

$$d_1, d_2, \ldots d_{n-1}, d_n+1, | \text{ und } |d_1, d_2, \ldots d_{n-1}, d_n, |$$

in x umgeformt. Das letztgenannte Intervall heiße i. Punkte der Menge iM werden offenbar nur so erhalten — laut Voraussetzung —, indem man für x_n in der obigen Gleichung ein Element aus M einsetzt. Aber laut Voraussetzung wird dabei, wenigstens nicht bei allen diesen Mengen M, immer ein Punkt von M erhalten. Heißt also M' die durch die obige Transformation aus M entstehende Menge, so ist offenbar $iM < M'$.

Es ist aber, da die Transformation eine Ähnlichkeitstransformation ist,

$$mM' = \frac{mM}{d_1(d_1+1)\,d_2(d_2+1)\ldots d_n(d_n+1)} = (mM).i,$$

wenn die Intervallänge — wie auch sonst oft — durch denselben Buchstaben wie das Intervall bezeichnet wird. Man findet daher die Dichte von M' innerhalb i wie folgt:

$$\frac{mM'}{i} < \vartheta < 1,$$

da

$$\frac{mM'}{i} = mM = \delta$$

ist, und erst recht die Dichte von $m(iM) < \vartheta$. i wird aber mit wachsendem n beliebig klein, u. zw. läßt sich jedes irrationale x in (0, 1) mit solchen beliebig kleinen Intervallen überdecken. Es ist daher die Bedingung erfüllt, daß die Dichte der Menge in beliebig kleinen Intervallen $< \vartheta < 1$, somit ist die Menge homogen vom Maße 0 ist.

Der Satz 2 gilt auch dann, wenn die Menge M nicht meßbar ist. Zunächst muß in diesem Falle $m_a M = 1$ sein, da man sonst auf genau dieselbe Art schließen könnte, daß die Dichte in jedem noch so kleinen Intervalle $< \vartheta < 1$ ist und somit die Menge eine Nullmenge, also meßbar sei im Gegensatz zu der Voraussetzung. Ist aber $m_i M < 1$, so ist doch jedenfalls $m_i\, M < \vartheta < 1$. Dann kann ich genau so

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

schließen, daß das innere Maß der Teilmenge in beliebig kleinen Intervallen j immer die Beziehung $m_i\,(Mj) < j\,\vartheta$ erfüllt. Die Komplementärmenge CM erfüllt dann die Bedingung, daß $m_a\,[(CM)j] > (1-\vartheta)j$ ist, hat somit in jedem Teilintervalle von $(0,\ 1)$ eine Dichte $> 1-\vartheta$, daher die Dichte 1 und das äußere Maß 1. Daraus folgt $m_i\,M = 0$. Die Menge M hat also das äußere Maß 1 und das innere Maß 0, ist somit homogen.

Satz 3. *In der Entwicklung fast aller Zahlen des Intervalls* $(0,\ 1)$ *in Lüroth'sche Reihen kommt eine jede natürliche Zahl als Teilnenner und eine jede unendlich oft vor.*

Beweis: Sei k eine gegebene ganze positive Zahl. Wir bezeichnen mit $M(k)$ die Menge aller jener Zahlen, wo bei der Entwicklung der Elemente in Lüroth'sche Reihen der Nenner k nicht vorkommt, mit M_k hingegen jene Menge, wo in der genannten Entwicklung der Teilnenner k nur endlich oft auftritt. Weiter heiße M die Menge, also die Menge der Zahlen, bei denen nicht jede natürliche Zahl k als Teilnenner bei dieser Entwicklung unendlich oft auftritt. Dann heißt unsere Behauptung $m\,M = 0$.

Zunächst erfüllen alle drei erwähnten Mengen die Eigenschaften von Satz 2. Sie sind auch meßbar. Denn es ist leicht zu zeigen, daß sie Borel'sche Mengen sind.

Weiter sei $M(1, k)$ die Menge jener Zahlen, wo in der genannten Entwicklung der erste Teilnenner von k verschieden ist. Es wird

$$m\,M(1, k) = 1 - \frac{1}{k\,(k+1)},$$

daher: $m\,M(1, k) < 1$.

Es ist $M(k)$ eine Teilmenge von $M(1,\ k)$, daher $m\,M(k) \leqq$ $\leqq m\,M(1, k)$. Es ist aber $M(k)$ homogen und meßbar, daher entweder $m\,M(k) = 1$ oder $m\,M(k) = 0$. Da nun erstere Möglichkeit wegen $m\,M(k) \leqq m\,M(1,\ k)$ und $m\,M(1, k) < 1$ ausgeschlossen ist, so folgt: $m\,M(k) = 0$.

Bezeichnen wir weiter mit $M\left(\frac{a}{c},\ k\right)$ die Menge der Zahlen,

$$x = \frac{a}{c} + \frac{x_n}{d_1\,(d_1+1)\,d_2\,(d_2+1)\ \ldots\ d_n\,(d_n+1)},$$

wo $\frac{a}{c}$ eine feste positive Zahl < 1 ist, deren Entwicklung in eine (abbrechende) Lüroth'sche Reihe $\frac{a}{c} = |d_1,\ d_2, \ldots,\ d_{n-1},\ d_n,|$ lautet, während x eine beliebige Zahl aus $M(k)$ sein soll. Kurz, die Menge $M\left(\frac{a}{c}, k\right)$ sei die Menge aller Zahlen $|d_1,\ d_2, \ldots,\ d_{n-1},\ d_n;\ u_1,$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

wo $\frac{a}{c} = |d_1, d_2, \ldots d_{n-1}, d_n|$ ist und u zu $M(k)$ gehört. Dann ist aus der obigen Darstellung der Elemente sofort ersichtlich, daß die Menge $M\left(\frac{a}{c}, k\right)$ mit der Menge $M(k)$ geometrisch ähnlich ist. Es ist daher

$$m\, M\left(\frac{a}{c}, k\right) = 0.$$

Offenbar ist

$$M_k = \sum_{\frac{a}{c}} M\left(\frac{a}{c}, k\right),$$

wo die Summe über alle abzählbar unendlich vielen rationalen Zahlen zu erstrecken ist und daher

$$m\, M_k = 0.$$

Endlich folgt aus

$$M = \sum_{k=1}^{\infty} M_k$$

und $m\, M_k = 0$, daß auch $m\, M = 0$ ist. Man sieht die Analogie in der Beweisführung zu Satz 2 des § 2.

Satz 4. *In den Lüroth'schen Entwicklungen fast aller Zahlen kommt unter den Teilnennern eine jede Zahlengruppe $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ unendlich oft in der vorgeschriebenen Reihenfolge vor, genauer: ist $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ eine gegebene Gruppe von n-Zahlen, so ereignet es sich bei den Lüroth'schen Entwicklungen fast aller Irrationalzahlen x:*

$$x = |d_1, d_2, d_3, \ldots|,$$

daß der Reihe nach $d_{p+1} = k_1, d_{p+2} = k_2, \ldots, d_{p+n} = k_n$ wird, und zwar für unzählig viele ganzzahlige p.

Der Beweis ist völlig analog dem des Satzes 3 vom § 2.

Hilfssatz 1. *Heiße $\delta_{d_1, d_2, d_3, \ldots, d_{n-1}, d_n}$ das Intervall der Zahlen $|d_1, d_2, \ldots d_n; u|$ mit beliebigem $u < 1$ und zugleich die Länge dieses Intervalls, so gilt für die genannte Intervallänge:*

$$\delta_{d_1, d_2, \ldots, d_{n-1}, d_n} = \frac{1}{d_n(d_n+1)}\, \delta_{d_1, d_2, \ldots, d_{n-1}}.$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Beweis: Die Menge $\delta_{d_1, d_2, \ldots, d_n}$ ist die im Beweise des Satzes 1 erwähnte Menge M'. Es ist daher

$$\delta_{d_1, d_2, \ldots, d_{n-1}, d_n} = \frac{1}{d_1 (d_1+1) \ldots d_{n-1} (d_{n-1}+1) \, d_n (d_n+1)}$$

und weiter

$$\delta_{d_1, d_2, \ldots, d_{n-1}} = \frac{1}{d_1 (d_1+1) \ldots d_{n-1} (d_{n-1}+1)},$$

woraus sofort der obige Satz folgt.

Wir sehen somit, daß das Verhältnis

$$\frac{\delta_{d_1, d_2, \ldots, d_{n-1}, d_n}}{\delta_{d_1, d_2, \ldots, d_{n-1}}}$$

nur von d_n abhängt, im Gegensatze zu den Kettenbruchentwicklungen, wo der analoge Quotient

$$\frac{\delta_{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n}}{\delta_{a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}}}$$

noch außer von a_n von den vorhergehenden Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ abhängig ist. Dies zeigt, daß das Problem der Maßbestimmung von Mengen Lürothscher Entwicklungen jedenfalls leichter und einfacher ist, wie das entsprechende Problem der Maßbestimmung von Kettenbruchmengen.

Sei n eine beliebige feste, ganze positive Zahl, desgleichen seien r, α, β ganze positive Zahlen, u. zw. $r \leqq n$, $\beta \leqq n$, $\alpha < \beta$. Dann heiße $M'(k;\ r;\ n)$ die Menge der Zahlen, in deren Lürothscher Entwicklung unter den ersten Endziffern der Teilnenner k genau an r bestimmten Stellen sich vorfindet. Weiter sei $M(k; r; n)$ die Menge der Zahlen, wo unter den n ersten Lürothschen Teilnennern die Zahl k genau an r beliebigen Stellen vorkommt. Endlich heiße $M(k;\ \alpha;\ \beta;\ n)$ die Menge der Zahlen, wo unter den n ersten Ziffern in der genannten Entwicklung der Teilnenner k sich nicht weniger als α-mal und nicht öfter als β-mal vorfindet. Wir haben

$$m\, M'(k;\ r;\ n) = g^{-r} \left(1 - \frac{1}{g}\right)^{n-r} \text{ mit } g = k(k+1).$$

Denn nach dem Beweise von Satz 1 wird

$$m\, M'(k;\ r;\ n) = g^{-r} \sum \frac{1}{z_1 (z_1+1)\, z_2 (z_2+1) \ldots z_n (z_n+1)},$$

wo die $n-r$-fach unendliche Summe über alle Zahlen $z_1, z_2, \ldots, z_n$ von 1 bis ∞ zu erstrecken ist mit der Ausnahme $z_r = k\ (r = 1, 2, \ldots, n)$. Nun löst sich aber die $n-r$-fach unendliche

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Summe sofort in das Produkt der Summen von $n-r$ gleichen Reihen auf. Eine jede derselben ist

$$\sum_{l=1}^{\infty}{}' \frac{1}{l(l+1)},$$

wobei der Wert $l = k$ und nur dieser ausgeschlossen bleibe. Diese Reihe hat aber $1-\frac{1}{g}$ zur Summe. Hieraus erhält man aber sofort für das Maß

$$m\, M'(k;\, r;\, n) = g^{-r}\left(1-\frac{1}{g}\right)^{n-r}$$

Nun denken wir uns die Menge $M(k;\, r;\, n)$ gebildet, indem wir die r-Teilnenner, die den Wert k haben, an beliebige der n-Stellen $1, 2, \ldots, n$ setzen. Da dies auf $\binom{n}{r}$ Arten möglich ist und dadurch ebenso viele elementefremde Mengen desselben Maßes $m\, M'(k;\, r;\, n)$ entstehen, so folgt

$$m\, M(k;\, r;\, n) = \binom{n}{r} g^{-r}\left(1-\frac{1}{g}\right)^{n-r}$$

Betrachten wir nun die Menge $M(k;\, \alpha,\, \beta;\, n)$! Da wieder sehr leicht zu sehen ist, daß zwei Mengen $M(k;\, r_1;\, n)$ und $M(k;\, r_2;\, n)$ mit $r_1 \neq r_2$ — abgesehen von rationalen Zahlen, von denen wir gänzlich absehen — elementefremd sind, folgt leicht

$$m\, M(k;\, \alpha,\, \beta;\, n) = \sum_{r=\alpha}^{\beta} \binom{n}{r} g^{-r}\left(1-\frac{1}{g}\right)^{n-r}$$

Das ist aber genau derselbe Ausdruck, der bei systematischen g-adischen Brüchen das Maß der Menge angibt, deren im Intervall (0, 1) liegende Elemente unter den n-Ziffern hinter dem Komma nicht weniger als α und nicht mehr als β enthalten, die einen bestimmten Wert (z. B. den Wert 1) haben. Wir sind somit in der Lage, die Forschungen von Borel, Hardy-Littlewood und so fort über Maßbestimmungen dyadischer Brüche auf das in Rede stehende Problem der Maßbestimmungen Lüroth'scher Entwicklungen zu übertragen.

Wir können insbesondere den folgenden Satz aussprechen unter Anwendung der beiden Hardy-Littlewood'schen Sätze:

Satz 5. *Heißt $K(k, n, x)$ die Anzahl derjenigen unter den ersten n-Teilnennern in der Lüroth'schen Entwicklung einer Zahl x des Intervalles* (0, 1)*, die den Wert k haben, so ist die Gleichung*

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$K(k, n, x) = \frac{n}{g} + O(\sqrt{n \log n})$$

für fast alle x richtig, hingegen die Gleichung

$$K(k, n, x) = \frac{n}{g} + O(\sqrt{n})$$

für fast alle x falsch. Hiebei ist

$$g = k(k+1).$$

Unser Satz 1 gestattet eine noch etwas weitere Ausgestaltung, wenn wir die Bedingung für d in der Form

$$d_n = O(\varphi_n)$$

setzen, wo φ_n eine mit n monoton ins Unendliche wachsende Funktion darstellt. Dann ist die so definierte Menge M homogen (nach Satz 2).

Konvergiert die Reihe $\sum \frac{1}{\varphi_n}$, so haben die durch die Ungleichungen

$$d_n(x) < [k\varphi_n] + 2,$$

wo k eine beliebige ganze positive Zahl ist, definierten Mengen $M(k)$ nach Satz 1 ein positives Maß; denn mit $\sum \frac{1}{\varphi_n}$ konvergiert auch die Reihe $\sum \frac{1}{[k\varphi_n] + 2}$. Es hat auch die Menge $M = \sum_{k=1}^{\infty} M(k)$ ein positives Maß; da sie aber homogen ist, so ist $m\,M = 1$.

Divergiert $\frac{1}{\varphi_n}$, so ist die Menge $M(k)$ für **jedes** k eine Nullmenge, somit auch die Menge $M = \sum_{k=1}^{\infty} M(k)$ als Summe abzählbar unendlich vieler Nullmengen. Wir haben daher den folgenden Satz:

Satz 6. *Die durch die Bedingung $d_n = O(\varphi_n)$ bestimmte Menge M — wo φ_n eine mit n monoton ins Unendliche wachsende Funktion ist — hat das Maß 1, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi_n}$ konvergiert. Sie hat hingegen das Maß 0, wenn $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi_n}$ divergiert.*

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Auch ein dem Satz von A. Khintchine über Kettenbruchentwicklungen völlig analoger Satz läßt sich hier beweisen durch fast wörtliche Übertragung von dessen Beweisführung.

Betrachten wir das Lebesgue'sche Integral

$$\int_{M(a)} d_n(x)\, dx,$$

erstreckt über die Menge $M(a)$ jener x, deren Lüroth'sche Entwicklungen für jedes k die Bedingung $d_k(x) < a\, k^{1+\varepsilon}$ $(\varepsilon > 0)$ erfüllen.

Wird $\lim\limits_{a \to \infty} M(a) = M$ gesetzt, so ist nach Satz 6 $m\, M = 1$, da die Elemente von M für unendlich werdendes k ja die Bedingung erfüllen

$$d_n = O(n^{1+\varepsilon})$$

und die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$ konvergiert.

Bilden wir zunächst $\int d_n(x) dx$ über das Intervall $\delta_{d_1, d_2, \ldots d_{n-1}, d_n}$ und setzen hiefür den Augenblick $d_n = d$, so erhalten wir

$$\int_{\delta_{d_1, d_2, \ldots d_{n-1}, d}} d_n(x)\, dx = \frac{1}{d+1}\, \delta_{d_1, d_2, \ldots d_{n-1}}$$

Diesen Ausdruck haben wir in bezug auf alle für die Menge $M(a)$ zulässigen Werte von $d_1, d_2, \ldots, d_{n-1}$ zu summieren. Wir erhalten offenbar:

$$\frac{1}{d+1}\, m\, M(a) < \frac{1}{d}$$

Indem wir noch die letzte Summation in bezug auf d zwischen den Grenzen $d = 1$ und $d = [a\, n^{1+\varepsilon}] - 1$ ausführen, erhalten wir:

$$\int_{M(a)} d_n(x)\, dx < B \log n,$$

wo B von n unabhängig ist.

Die weitere Beweisführung kann wörtlich wie bei Herrn A. Khintchine (a. a. O., p. 290 f.) erfolgen, da er zu derselben Ungleichung gelangt. Wir erhalten:

Satz 7. *Die Menge aller Zahlen x, deren Lüroth'sche Entwicklungen $x = |d_1, d_2, d_3, \ldots|$ die Bedingung*

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(x) = O(n^{1+\varepsilon})$$

erfüllt, hat das Maß 1.

Wir wollen im folgenden die Menge der Zahlen betrachten, deren Lüroth'sche Entwicklung die Bedingung erfüllt, daß die Gleichung

$$K(k, n, x) = \frac{n}{k(k+1)} + O(\sqrt{n \log n})$$

für jedes $k = 1, 2, 3, \ldots$ erfüllt ist. (Die Definition von $K(k, n, x)$ ist dieselbe wie im Satz 5 des § 3.) Diese Menge heiße im folgenden S. Sie ist der Durchschnitt von abzählbar unendlich vielen Mengen T_k, die so definiert sind, daß die Gleichung für ein bestimmtes k erfüllt ist. Da nun nach Satz 5 des § 3 $m\,T_k = 1$, anderseits $S = \prod_{k=1}^{\infty} T_k$ ist, so folgt $m\,S = 1$.

Nun sei weiter $\varphi(t)$ eine für alle ganzen positiven Werte von t definierte positive Funktion von endlicher oberer Grenze L. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi(k)}{k(k+1)}$ ist dann sicher konvergent. Ihre Summe heiße J. Sei weiter ε eine beliebig kleine positive konstante Zahl.

Wir können zeigen, daß für jedes x aus S die Größe $\frac{1}{n} \sum_{l=1}^{n} \varphi(d_l)$ bei hinreichend großem n schließlich zwischen $J - \varepsilon$ und $J + \varepsilon$ bleibt.

Zunächst denken wir uns eine Zahl k' so gewählt, daß

$$\sum_{l=1}^{k'} \frac{\varphi(l)}{l(l+1)} > J - \frac{\varepsilon}{2}$$

wird. Greife ich unter den n Zahlen

$$d_1, d_2, \ldots, d_n$$

nur jene heraus, die gleich $l < k'$ sind, so ist die Anzahl derselben wegen der Zugehörigkeit von x zu S:

$$\frac{n}{l(l+1)} + O(\sqrt{n \log n})$$

und ihr Beitrag zur Summe $\frac{1}{n} \sum_{l=1}^{n} \varphi(d_l)$ daher, da $\varphi(x) \leqq L$ jedenfalls endlich ist:

$$\frac{\varphi(k)}{k(k+1)} + O\left(\sqrt{\frac{\log n}{n}}\right).$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Wir erhalten daher als Beitrag jener Lüroth'schen Teilnenner $d_1, d_2, \ldots, d_{n-1}, d_n$, die $\leqq k'$ sind, zur Summe $\frac{1}{n}\sum_{l=1}\varphi(d_l)$:

$$\sum_{l=1}^{k'}\frac{\varphi(l)}{l(l+1)}+O\left(\sqrt{\frac{\log n}{n}}\right)$$

und daher

$$\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\varphi(d_l)\geqq\sum_{l=1}^{k'}\frac{\varphi(l)}{l(l+1)}+O\left(\sqrt{\frac{\log n}{n}}\right).$$

Nun lassen wir bei festgehaltenem k' die Größe n ins Unendliche wachsen. Wegen

$$O\left(\sqrt{\frac{\log n}{n}}\right)=o(1)$$

können wir schließlich n so groß werden lassen, daß der zweite Summand rechts seinem Absolutbetrag nach $<\frac{\varepsilon}{2}$ bleibt. Es folgt daher für hinreichend großes n:

$$\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\varphi(d_l)\geqq J-\varepsilon.$$

Anderseits sei K[1] eine ganze positive Zahl, so daß $\frac{L}{K+1}<\frac{\varepsilon}{2}$. Der Beitrag jener Lüroth'schen Teilnenner $d_1, d_2, \ldots, d_{n-1}, d_n$, die $>K$ sind, zur Summe $\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\varphi(d_l)$ läßt sich so abschätzen: Ihre Anzahl ist wegen der Zugehörigkeit von x zu S durch den Ausdruck:

$$n\left[1-\frac{1}{1.2}-\frac{1}{2.3}-\ldots-\frac{1}{K(K+1)}\right]+$$
$$+O(\sqrt{n\log n})=\frac{n}{K+1}+O(\sqrt{n\log n})$$

abgeschätzt, ihr Beitrag ergibt sich daher

$$\leqq\frac{L}{K+1}+O\left(\sqrt{\frac{\log n}{n}}\right).$$

[1] Eine Verwechslung mit $K(k, n, x)$ ist wohl ausgeschlossen.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Diejenigen unter den Lüroth'schen Teilnennern $d_1, d_2, \ldots, d_{n-1}, d_n$, die $\leqq K$ sind, liefern hingegen analog wie früher zur Summe $\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\varphi(d_l)$ den Beitrag:

$$\sum_{k=1}^{K}\frac{\varphi(l)}{l(l+1)}+O\left(\sqrt{\frac{\log n}{n}}\right)\leqq J+O\left(\sqrt{\frac{\log n}{n}}\right)$$

Es folgt:

$$\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\varphi(d_l)\leqq J+\frac{L}{K+1}+O\left(\sqrt{\frac{\log n}{n}}\right).$$

Lassen wir bei festgehaltenem K die Zahl n ins unendliche wachsen, so erhalten wir wegen $\frac{L}{K+1}<\frac{\varepsilon}{2}$ und $O\left(\sqrt{\frac{\log n}{n}}\right)=o(1)$ für hinreichend große n:

$$\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\varphi(d_l)\leqq J+\varepsilon.$$

Da nun willkürlich ist, so nähert sich $\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\varphi[d_l(x)]$ für alle x aus S der Grenze J. Wegen $m\,S=1$ können wir daher sagen:

Satz 8. *Ist $\varphi(t)$ eine für ganzzahlige positive t definierte positive Funktion von endlicher oberer Grenze L und sind $d_1(x), d_2(x), \ldots, d_n(x)$ die Lüroth'schen Teilnenner einer Irrationalzahl im Intervall* (0,1), *so ist die Gleichung*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\varphi[d_l(x)]=\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\varphi(l)}{l(l+1)}$$

für fast alle x richtig.

Ist insbesondere $\varphi(t)=\frac{1}{t}$, so sind die Bedingungen des Satzes 8 erfüllt. Gehen wir von dem links stehenden Mittelwert zur reziproken Zahl über, so können wir sagen:

Satz 9. *Das harmonische Mittel der ersten n Lüroth'schen Teilnenner einer Zahl x $(0<x<1)$, nämlich*

$$\frac{n}{\frac{1}{d_1(x)}+\frac{1}{d_2(x)}+\ldots+\frac{1}{d_n(x)}}$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

nähert sich für fast alle x der Grenze

$$\frac{1}{\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^2(l+1)}}.$$

Hier ist wegen

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^2(l+1)} = -\sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{1}{l(l+1)} - \frac{1}{l^2}\right) = \frac{\pi^2}{6} - 1$$

elementare Summierung möglich und es ergibt sich als Grenzwert des harmonischen Mittels $1 \cdot 55 \ldots$.

Wie man sieht, stehen die Sätze 1, 2, 3, 4, 5, 6 des § 2 in völliger Analogie zu den Sätzen 2, 3, 6, 4, 7 (der Reihe nach) des § 3. Man fragt unwillkürlich, welchen tieferen Grund diese Analogie hat.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1928

Band/Volume: 137_2a

Autor(en)/Author(s): Holzer Ludwig

Artikel/Article: Zur Bestimmung des LebesgueÂ'schen Maßes linearer Punktmengen, deren Elemente durch systematische Entwicklungen gegeben sind. 421-453