

Die Stabilität zentrisch und exzentrisch gedrückter Stäbe aus Baustahl

Von

Doz. Dr. Ing. Ernst Chwalla, Wien

(Mit 8 Textfiguren)

(Vorgelegt in der Sitzung am 12. Juli 1928)

1.

Die Häufigkeit der durch unzureichende Knicksicherung verursachten Einstürze und Bauunfälle weckte schon in den ersten Entwicklungsjahren des Eisenbaues das Bedürfnis nach einwandfreien Bemessungsgrundlagen für axial gedrückte Stäbe. Die frühzeitig empirisch gewonnene Erkenntnis der Ungültigkeit der klassischen Eulerformel¹ im Falle kleinerer Stabschlankheiten wies wohl auf den entscheidend großen Einfluß, der dem Formänderungsgesetz eines Werkstoffes im Komplex der Knickerscheinungen zuzuschreiben ist (Lamarle, Engesser), einer Erfassung des Problems jedoch zeigte sich die Theorie noch nicht gewachsen. Man war daher auch im einfachen Falle des rein zentrischen Kraftangriffes auf Formeln angewiesen, die ausschließlich der Versuchserfahrung entsprangen (Tetmajer, Schwarz-Rankine u. a.), bis es vor zwei Jahrzehnten Th. v. Kármán² in Anknüpfung an die Gedankengänge Engesser's gelang, zielbewußt die Gesetzmäßigkeit der »zentrischen« Knickfestigkeit aus dem Verhalten des Werkstoffes unter reinem Druck, also aus dem Formänderungsgesetz abzuleiten und die erhaltenen Ergebnisse durch einwandfrei durchgeführte Versuche zu bestätigen. Die Stabilitätssicherung von Baustahlstäben mit eindeutig festlegbaren exzentrischen Kraftangriffen beruhte nach wie vor auf Berechnungsweisen, die eine gewisse Abminderung der zentrischen Knicklast bezweckten und manchmal, in Verkennung des Wesens einer Knickerscheinung, durch Betrachtungen zustande kamen, bei denen das Stabilitäts- mit dem Spannungsproblem unmittelbar verschmolzen wurde. Kármán entwickelte in seiner Arbeit eine Methode zur Festlegung der kritischen Axiallasten bei exzentrischem Angriff, hatte jedoch bei diesen Untersuchungen einzig die Erkenntnis des Einflusses sehr kleiner, sogenannter »unvermeidlicher« Angriffsexzentrizitäten auf die Größe der zentrischen Knicklast zum Ziele. Erst in jüngster Zeit erschienen zwei größer angelegte Arbeiten

¹ Leonhard Euler, De curvis elasticis 1744 (in Ostwald's Klassikern Nr. 175).

² Th. v. Kármán, Untersuchungen über Knickfestigkeit. Mitteilungen über Forschungsarb. a. d. Geb. d. Ingenieurwesens, Heft 81, Berlin 1910.

(Krohn¹ und Roš-Brunner²), die die Knickfestigkeit des zentrisch wie auch exzentrisch gedrückten Baustahlstabes behandeln. Beide Untersuchungen sind, wie später auseinandergesetzt werden wird, nicht restlos befriedigend; das ganze Knickproblem axial gedrückter Stäbe aus Werkstoffen mit ausgesprochener Plastizitätsgrenze bedarf noch der Vertiefung und insbesondere scheint es aus didaktischen Gründen, mit Rücksicht auf die häufig anzutreffenden Irrtümer und Begriffsverwirrungen geboten, das qualitativ und quantitativ wesentlich unterschiedene Verhalten innerhalb eines »elastischen« und eines »elastisch-plastischen« Stabilitätsproblems besonders zu unterstreichen. Alle im Rahmen unserer Elastizitätstheorie gelösten Knickprobleme³, die alle das Hooke'sche Gesetz unbeschränkt voraussetzen, vermögen dem Eisenbau nur einen Teil seiner kritischen Belastungen zu liefern, während eine ganze Gruppe bedeutungsvoller Knickerscheinungen⁴ wie auch fast alle Ergebnisse qualitativer Natur dem eigenartigen Formänderungsgesetz des Baustahls entspringen. Und alle praktisch vorkommenden Stabschlankheiten sind noch derart weit von denen der »Blattfedern« entfernt, daß die Stabilitätsverhältnisse wesentlich von diesem Formänderungsgesetz beherrscht werden; ein Eisenstab selbst von der Schlankheit »150« vermag seine Eulerlast ungeachtet der zugeschärften Eulertheorie⁵ schon bei einer Ausbiegung von nur der halben Querschnittshöhe nicht mehr im Gleichgewicht zu halten.

Um diese entscheidende Bedeutung des Formänderungsgesetzes im Bereiche aller Knickungsuntersuchungen zu beleuchten und das

¹ R. Krohn, Knickfestigkeit, Zeitschr. »Die Bautechnik« 1923, p. 230.

² M. Roš und J. Brunner. Die Knicksicherheit von an beiden Enden gelenkig gelagerten Stäben aus Konstruktionsstahl. Bericht der Gruppe VI der Techn. Komm. d. Verb. Schweiz. Brücken- u. Eisenhochbaufabriken, Zürich, 1926.

³ Vgl. etwa R. v. Mises, Über die Stabilitätsprobleme der Elastizitätstheorie, Zeitschr. f. ang. Math. u. Mech. 1923, p. 406; E. Chwalla, Die Stabilität des Rahmenstabes, Sitzungsber. d. Ak. d. Wiss., Wien, Abt. II a, Bd. 136. p. 487 bis 529; E. Chwalla, Das ebene Stabilitätsproblem des Kreisbogens, daselbst, Bd. 136, p. 645 bis 678 u. a.

⁴ Hieher gehören insbesondere die praktisch wichtigen Stabilitätswechsel unter exzentrischem Druck, unter Kombinationen von Achsialdruck und Transversalbelastung in und senkrecht zur Knickrichtung, ferner jene bei gleichzeitiger Wirkung von Achsialdruck und Biegemoment oder bei meßbaren Angriffsexzentrizitäten senkrecht zur Knickrichtung, wie überhaupt bei allen zusätzlichen Beeinflussungen des Spannungsbildes.

Weiters besteht beispielsweise bei eisernen Bogenträgern die Möglichkeit, daß an Stelle der Vollast eine teilweise Belastung für den Stabilitätswechsel maßgebend wird, da starke Stützlinienabweichungen ein vorzeitiges »exzentrisches« Knicken verursachen können; der übliche Nachweis einer »zulässigen« Inanspruchnahme der Randfasern in den einzelnen Querschnitten gewährleistet jedenfalls nicht allgemein auch eine ausreichende Sicherheit gegen Knickung.

⁵ Neben der zitierten Euler'schen Abhandlung wäre hier zu erwähnen: F. Grashof, Theorie d. Elast. u. Festigkeit, 1878; A. Schneider, Zur Theorie der Knickfestigkeit, Zeitschr. d. Öst. Ing. u. Arch.-Ver. 1901, p. 633; R. v. Mises, Ausbiegung eines auf Knicken beanspruchten Stabes, Zeitschr. f. ang. Math. u. Mech. 1924, p. 435; O. Domke, Die Ausbiegung eines Druckstabes bei Überschreitung der Knicklast, Zeitschr. »Die Bautechnik« 1926, p. 747 u. a.

Erfordernis einer scharfen Problemtrennung in zwingender Deutlichkeit erkennen zu lassen, seien an der Spitze unserer Darlegungen die aus der Theorie resultierenden Stabilitätsverhältnisse gelenkig gelagerter, axial gedrückter Stäbe vom Standpunkt des Materialverhaltens in Kürze gekennzeichnet. Einen Gleichgewichtszustand nennen wir nach dem üblichen Sprachgebrauche »stabil«, wenn er die Eigenschaft besitzt, sich nach einer Störung von selbst wieder herzustellen. Die Knicktheorie des unbeschränkt elastischen Druckstabes vermag sich hiebei auf Verformungen »virtueller« Natur, wie sie etwa im analytischen Stabilitätskriterium einer positiven zweiten Variation der Gesamtenergie zum Ausdruck kommt, zu beschränken; bei elastisch-plastischem Materialverhalten jedoch vermögen unter Umständen sehr kleine Verformungen endlicher Größe einen Stabilitätswechsel herbeizuführen, so daß wir, dem Stabilitätsbegriff im baupraktischen Sinne Rechnung tragend, für die gedachten, das Gleichgewicht störenden Verschiebungen auch Werte von endlicher Größe in unsere Betrachtungen mit einbeziehen wollen; im allgemeinen handelt es sich hiebei um Größen, die nur Bruchteile des Trägheitsradius des Querschnittes vorstellen. Der gesuchte Stabilitätswechsel tritt auch bei großen Angriffsexzentrizitäten schon bei Spannungsbildern ein, die noch weit entfernt sind vom Stadium einer Gefügetrennung, eines Bruches, und in diesem Sinne rangiert auch dort, wo ein derartiges Stabilitätsproblem existiert, dieses grundsätzlich vor dem Spannungsproblem.

2.

a) Ein zentrisch-axial gedrückter, gerader, homogener Stab aus einem ideellen, ausreichend bruchsicheren Werkstoff, der unbeschränkt dem Hooke'schen Gesetze folgt, besitzt unter Axiallasten, die kleiner sind als der kritische Wert, als einzige mögliche Gleichgewichtsform jene mit gerader, etwas verkürzter Achse. Nach jeder noch so großen, gewaltsamen Ausbiegung kehrt der belastete Stab von selbst wieder zu seiner ursprünglichen Form zurück, so daß wir diese allein mögliche Gleichgewichtslage als »unbeschränkt stabil« bezeichnen können. Erreicht die Axiallast den ersten kritischen Wert, der in Schärfe der ersten Euler'schen Knickwurzel entspricht, so wird, als Grenzfall aufgefaßt, neben der geradlinigen noch eine dieser unmittelbar benachbarte, unendlich wenig ausgebogene Gleichgewichtsform möglich; die geradlinige ist »indifferent bezüglich einer unendlich kleinen Ausbiegung«, die ausgebogene »unbeschränkt stabil bezüglich einer Ausbiegungsvergrößerung«, da jede noch so große, gewaltsame Ausbiegung nach erfolgter Störung, wenn auch äußerst langsam, wieder rückgängig gemacht wird. Überschreitet die Axialkraft den ersten kritischen Wert (von der Erzwingung höherer Knickwurzeln wird bei unseren Betrachtungen grundsätzlich abgesehen), so existiert neben der geradlinigen noch eine von endlicher Größe ausgebogene Gleichgewichtslage; die erstere ist »labil«, da der Stab nach jeder

noch so geringfügigen Störung seine gestreckte Form verläßt; er biegt sich hierbei so lange aus, bis er die zweite Form erreicht. Diese ausgebogene Gleichgewichtslage stellt der belastete Stab nach jeder Störung wieder her, so daß sie als »stabil« zu bezeichnen ist. Das Wort »unbeschränkt« wurde in den beiden letzten Fällen nicht verwendet, da hier noch je eine zweite Gleichgewichtslage existiert. Das übliche Ermittlungsverfahren der kritischen Belastungswerte ist in einwandfreier Weise auf den erwähnten Zustand des »Indifferentismus bezüglich einer unendlich kleinen Ausbiegung« abgestimmt, dem auch der »Verzweigungspunkt« des Gleichgewichtes zugeordnet ist, da von hier an das Gleichgewichtsproblem mehrdeutig wird. Der übliche Nachweis der oberhalb der Grenzlast rapid anwachsenden und die Bruchgrenze bald überschreitenden Randspannungen kann sich auf einen Baustahlstab naturgemäß nicht beziehen, da hier sowohl die Ausbiegungen als auch die Spannungswerte einen gänzlich anderen Verlauf zeigen und wohl noch kein zerknickter Flußeisenstab eine Gefügetrennung aufgewiesen hat.

β) Ein exzentrisch-axial gedrückter, gerader, homogener Stab aus einem ideellen, ausreichend bruchsicheren Werkstoff, der unbeschränkt dem Hooke'schen Gesetze gehorcht, besitzt eine einzige mögliche Gleichgewichtsform, die eine gebogene Achse aufweist und als »unbeschränkt stabil« zu bezeichnen ist; ein »Knicken unter exzentrischem Druck« existiert nicht. Diesbezügliche, selbst in jüngster Zeit noch auftretende Irrtümer verdanken ihr Entstehen, von den einleitend erwähnten Verwechslungen von Spannungs- und Stabilitätsproblem abgesehen, der üblichen Unterdrückung der ersten Ableitung im analytischen Ausdruck für die Achsenkrümmung und einer fehlerhaften Deutung von fälschlich unendlich werdenden Stabausbiegungen.

γ) Ein zentrisch-axial gedrückter, gerader, homogener Stab aus einem elastisch-plastischen Material, etwa unserem Baustahl, besitzt unter Achsiallasten, die kleiner sind als der erste kritische Wert, zwei mögliche Gleichgewichtszustände; in dem einen Fall ist die Stabachse gerade, nur ein wenig verkürzt, im anderen ist sie ausgebogen und besitze einen Biegungspfeil von der Größe Y . Bei sehr kleinen Axiallasten » P « ist » Y « verhältnismäßig groß und nimmt mit steigendem » P « ab, so daß sich die zweite, ausgebogene Gleichgewichtslage der ersten, gestreckten, immer mehr nähert. Der belastete Stab kann unter Aufwendung äußerer Arbeit, deren erforderliche Menge wir mit » A « bezeichnen wollen, von der geradlinigen in die ausgebogene Gleichgewichtsform übergeführt werden. Erfährt der erste Gleichgewichtszustand eine Störung, bei der unter Aufwendung der Arbeit $\mathfrak{A} < A$ eine Ausbiegung vom Pfeil $y' < Y$ erzwungen wird, so nimmt der belastete Stab nach erfolgter Störung seine ursprüngliche, gestreckte Lage von selbst wieder ein; die geradlinige Gleichgewichtsform erweist sich somit als »beschränkt stabil«, da das Rückgängigmachen der Störung an die Bedingung $y' < Y$, $\mathfrak{A} < A$ gebunden ist. Sowohl Y

als auch A sind in ihrer Art befähigt, als Kriterien der Stabilitätsbeschränkung zu dienen und seien daher »Stabilitätsmaße« genannt. Der zweite, ausgebogene Gleichgewichtszustand ist hinsichtlich einer Verkleinerung der Ausbiegung im gleichen Maße »beschränkt labil«, hingegen »unbeschränkt labil« bezüglich einer Vergrößerung der Ausbiegung, da jede noch so geringfügige Vergrößerung von Y einen Zustand einleitet, den wir etwa »Erschlaffung« nennen können und der durch eine ständige Unterlegenheit des inneren Widerstandes gegenüber dem äußeren Angriff gekennzeichnet ist; das Stabilitätsmaß bezieht sich unmittelbar auf diesen Erschlaffungsbeginn und erhält dadurch seine besondere Bedeutung. Näher sich die Achsiallast immer mehr dem ersten kritischen Wert, so nimmt das Stabilitätsmaß immer mehr ab und erreicht im kritischen Zustande genau oder in praktisch ausreichender Annäherung den Wert Null. Hier wird die übliche Unterscheidung von zwei Bereichen, einem »elastischen« und einem »unelastischen« erforderlich, die dadurch gekennzeichnet sind, daß die mittlere Druckspannung im kritischen Zustand kleiner-gleich, beziehungsweise größer ist als die Grenzspannung der Hooke'schen Gesetzmäßigkeit (Proportionalitätsgrenze).

Im typisch »unelastischen« Bereich wird das Stabilitätsmaß im Grenzzustand Null, so daß die gestreckte Gleichgewichtslage als »indifferent bezüglich einer unendlich kleinen Ausbiegung« anzusprechen ist; das Kármán'sche Verfahren (l. c.) zur Bestimmung der kritischen Belastungsgrößen ist diesem Zustande zugeordnet und ergibt einwandfreie Werte. Die zweite, unendlich wenig ausgebogene Gleichgewichtsform ist »unbeschränkt labil bezüglich einer Ausbiegungsvergrößerung«, da durch jede noch so geringfügige Verstärkung der Ausbiegung der Erschlaffungszustand eingeleitet wird.

Im typisch »elastischen« Bereich existiert ein Biegunspfeil $y = y_H$, bis zu dem der gesamte Stab dem Hooke'schen Gesetze unterliegt und dementsprechend die Darlegungen des Absatzes α) Geltung besitzen. Die gestreckte Gleichgewichtsform ist somit »indifferent bezüglich einer unendlich kleinen Ausbiegung« und die darauf abgestimmte Eulertheorie gibt einwandfreie Grenzlaster; die unendlich wenig ausgebogene Form ist »beschränkt stabil bezüglich einer Ausbiegungsvergrößerung« mit äußerst geringfügigem Stabilitätsmaß. Dem verschwindend langsamen Anstieg der Gleichgewichtslasten bei wachsender Ausbiegung wirkt von $y = y_H$ angefangen der Einfluß des rasch abnehmenden inneren Widerstandes entgegen, so daß grundsätzlich für $y > y_H$, also außerhalb des Hooke'schen Bereiches, noch ein dritter Gleichgewichtszustand unter der kritischen Belastung möglich ist, der sich als »labil bezüglich jeder Ausbiegungsvergrößerung« erweist, wie schon im Falle des »unelastischen« Bereiches dargelegt wurde. Diese drei Gleichgewichtslagen sind jedoch nur bei Stäben von extremer, im Bauwerk nie vorkommender Schlankheit merkbar unterschieden, ansonsten aber von einem endlich erstreckten Indifferentismus schlechtweg nicht auseinander zu halten (vgl. den 10. Abschn.).

Für Axiallasten, die über dem kritischen Werte liegen, gibt es, wenn man im »elastischen« Bereich von jenen extrem großen Stab-schlankheiten absieht, überhaupt keine ausgebogene Gleichgewichtslage, somit einzig nur die »unbeschränkt labile« Gleichgewichtsform mit geradliniger, etwas verkürzter Stabachse.

δ) Ein exzentrisch-axial gedrückter, gerader, homogener Stab aus einem elastisch-plastischen Werkstoff, etwa unserem Baustahl, unterliegt einem Stabilitätswechsel unter Axiallasten, die grundsätzlich kleiner sind als die kritischen Werte bei zentrischem Kraftangriff. Die Abweichung von der Hooke'schen Gesetzmäßigkeit, also das unelastische Materialverhalten, bildet die Voraussetzung für die Existenz dieses Stabilitätsproblems; solange die Randspannungen die Proportionalitätsgrenze nicht überschreiten, ist ein »exzentrisches« Knicken ausgeschlossen; jedoch braucht zum Eintritt dieses Knickens die größte Randpressung durchaus nicht die Quetschgrenze zu erreichen. Rein formell kann auch hier wieder im Sinne unserer früheren Kennzeichnung nach einem »elastischen« und »unelastischen« Problembereich geschieden werden. Solange die Axiallast kleiner ist als der erste kritische Wert, besitzt der Stab zwei mögliche Gleichgewichtslagen, die beide ausgebogen sind und verschieden große Biegungspfeile aufweisen. Eine gewaltsame Störung der ersten, schwächer gekrümmten Form wird ins solange vom belasteten Stab wieder rückgängig gemacht, als nicht unter Aufwendung einer erforderlichen Arbeitsmenge » A « die zweite mögliche, um die Pfeildifferenz » Y « stärker ausgebogene Gleichgewichtslage erreicht wird; die erste Gleichgewichtsform erweist sich somit als »beschränkt stabil« mit den Stabilitätsmaßen Y , beziehungsweise A . Die zweite stärker gekrümmte Gleichgewichtslage ist hinsichtlich einer Verkleinerung der Ausbiegung im gleichen Maße »beschränkt labil«, hingegen »unbeschränkt labil« bezüglich einer Vergrößerung der Ausbiegung, da jede noch so geringfügige Ausbiegungsverstärkung die »Erschlaffung«, also den Zustand ständiger Unterlegenheit des inneren Widerstandes einleitet. Das Stabilitätsmaß der ersten, schwächer gekrümmten Form nimmt mit dem Anwachsen der Axiallast ständig ab und wird Null, wenn der kritische Belastungswert erreicht ist. Dann liegen die beiden möglichen Gleichgewichtslagen unendlich nahe benachbart und es ist die stärker ausgebogene »unbeschränkt labil bezüglich einer Ausbiegungsvergrößerung.« Für Axiallasten, die über dem kritischen Werte liegen, existiert überhaupt keine Gleichgewichtslage.

Vom Standpunkt der Allgemeinheit ist noch zusätzlich zu vermerken, daß die volle Freizügigkeit in der Fassung des Formänderungsgesetzes auch zu Fällen führen kann, in denen mehr als zwei Gleichgewichtslagen möglich sind oder aber die unbeschränkte Labilität der zweiten Lage in einen endlich erstreckten Indifferentismus ausartet, beziehungsweise schon Spannungsbildern zugeordnet ist, die wegen ihrer Nähe vom Bruchstadium außer acht gelassen werden.

Eine vergleichende Betrachtung dieser Kennzeichnung der Stabilitätsverhältnisse läßt die Bedeutung des Formänderungsgesetzes

in seiner ganzen Größe erfassen. Die Eindeutigkeit des Gleichgewichtsproblems gilt mit Recht als Kriterium der »elastischen« Stabilität, da bei unbeschränkter Hooke'scher Gesetzmäßigkeit nur einem instabilen Zustand ein mehrdeutiges Gleichgewicht entspricht. Bei elastisch-plastischem Materialverhalten hingegen erweist sich das Gleichgewichtsproblem sowohl bei zentrischem als auch exzentrischem Kraftangriff unterhalb des kritischen Zustandes grundsätzlich als mehrdeutig und die vorhandene Stabilität erscheint an einen Maximalwert transversaler Gleichgewichtsstörung, ein Stabilitätsmaß gebunden, das in seiner Größe nicht nur von der axialen Last, sondern auch vom Materialverhalten, dem Formänderungsgesetz, abhängig ist; bei den üblichen Stabschlankheiten handelt es sich hierbei nur um Bruchteile des Trägheitsradius. Da unberücksichtigte seitliche Ausbiegungen eines Druckstabes zufolge Schwingungen, Eigengewicht, Nebenspannungen u. a. im Bauwerk zumindest ebenso möglich sind wie Achsiallaststeigerungen, bildet dieses Stabilitätsmaß einen wichtigen Faktor im baupraktischen Begriff der »Knicksicherheit« eines eisernen Druckstabes. Größere Transversalbelastungen sowohl in als auch senkrecht zur Knickrichtung eines Druckstabes oder merkbare Angriffsexzentrizitäten senkrecht zur Knickrichtung, wie überhaupt größere zusätzliche Beeinflussungen des Spannungsbildes vermögen die Knicklasten bei elastisch-plastischem Materialverhalten derart stark herabzusetzen, daß sie nicht mehr durch den Sicherheitsgrad zu decken sind und eigens berücksichtigt werden müssen; bei Querbelastungen kann durch probeweises Gleichsetzen der verursachten Scheiteldurchbiegung mit dem Stabilitätsmaß »Y« (vgl. Fig. 8) ein Näherungswert für die erforderliche Schlankheitsverminderung gefunden werden. Bei Vergleichen von »Knick-« und »Bruch-« Sicherheiten sei auch in Rücksicht gezogen, daß für Stabilitätswechsel die Möglichkeit einer Verfestigung entfällt.

3.

Mit Beziehung auf exzentrisch-achsiale Kraftangriffe macht das Formänderungsgesetz eines elastisch-plastischen Materials auch eine Unterscheidung hinsichtlich der Art der Lastaufbringung erforderlich. Die Achsialkraft kann unter zentrischem Angriff von Null auf ihren vollen Endbetrag anwachsen und daraufhin hinausrücken in die der Untersuchung zugrunde gelegte exzentrische Lage oder aber, und dies ist bei Bauwerkstäben die Regel, an die in Rechnung gestellte Anfangsexzentrizität grundsätzlich gebunden sein, somit auch in dieser Lage die rechnungsmäßige Größe erhalten. Im »elastischen« Bereich liefern beide Belastungsarten dieselben Gleichgewichtsformen, im »unelastischen« hingegen führen sie auf mehr oder weniger verschiedenartige Spannungsbilder und damit auch auf verschiedene Deformationsfiguren und kritische Belastungswerte. Im ersten Falle werden wie bei der zentrischen Knickung vorerst sämtliche Fasern des Querschnittes unelastisch

gestaucht, worauf das Spannungsbild von einer Verteilung anwachsender Biegungsspannungen überlagert wird, so daß auf der Biegezugseite das Formänderungsgesetz der Entlastung unelastisch deformierter Fasern Geltung besitzt, während es im anderen Falle mit Rücksicht auf das gemeinsame, wenn auch verschieden starke Ansteigen von Axialkraft und Angriffsmoment zu einer derartigen Entlastung nicht kommen kann und das Formänderungsgesetz der Belastung allein maßgebend ist. Die daraus resultierenden Unterschiede nehmen mit der mittleren Druckspannung des Stabes zu und können bei Werten oberhalb der Quetschgrenze, wie die zugehörigen Spannungsbilder erkennen lassen, recht bedeutend werden; auch bei der Untersuchung des Einflusses »unvermeidlicher« Anfangsexzentrizitäten auf die Größe zentrischer Knicklasten im unelastischen Bereich (Kármán, l. c.), der sich nach der Versuchserfahrung als beträchtlich erweist, wäre grundsätzlich auf diese, wegen der Kleinheit des Hebelarmes allerdings nur geringfügige Verschiedenheit im Spannungsbild und damit im inneren Widerstand Rücksicht zu nehmen.

Hier sei auch auf die paradoxen Gleichgewichtsformen hingewiesen, die sich (mit Rücksicht auf das Entlastungsgesetz) im unelastischen Bereiche bei einer Verkleinerung der Angriffsexzentrizität einer unveränderlich großen Axiallast ergeben und unter Voraussetzung des Ebenbleibens ebener Querschnitte graphisch verfolgt werden können.

4.

Wie einleitend bemerkt wurde, sind von größer angelegten, das Knickproblem axial gedrückter Baustahlstäbe bei zentrischem und auch exzentrischem Kraftangriff behandelnden Arbeiten nur die von Krohn (l. c.) und Roš-Brunner (l. c.) bekannt geworden. Krohn's Abhandlung beinhaltet den Versuch einer rein analytischen Erfassung des Problems; die begrifflichen Schwierigkeiten eines derartigen Lösungsweges zwingen zu einer Reihe vereinfachender Annahmen, die in ihrem Einfluß nicht leicht zu überblicken sind, da die Herleitung durch die Einführung der »Dehnungszahlen $D = \frac{\sigma}{\varepsilon}$ « undurchsichtig wird und

im Formelbau von den gewohnten Formen abweicht. Die Untersuchung der zentrischen Knickfestigkeit im unelastischen Bereich berücksichtigt nicht die Tatsache einer Entlastung vorher unelastisch gestauchter Fasern auf der Biegezugseite und führt damit auf ein von Kármán's Formel etwas abweichendes Ergebnis; bei der Behandlung der exzentrischen Knickung werden unter anderem für die Gleichgewichtsformen schlechtweg Sinuslinien angenommen. Das angestrebte Ziel, das Problem bis zu einem der Praxis unmittelbar zugänglichem Endergebnis zu verfolgen, hat nur Roš-Brunner's »Verfahren der T. K. V. S. B.« erreicht. Es wurden bei diesem Verfahren jedoch unter anderem die Gleichgewichtsformen unter exzentrischem Druck willkürlich angenommen, und zwar der

Einfachheit halber ganze Halbwellen der Sinuslinie, die übrigens an den Stabenden zu dem Widerspruche führen, daß dem unter Umständen beträchtlichen Angriffsmoment der exzentrisch wirkenden Axiallast im elastischen und unelastischen Bereiche die Achsenkrümmung Null gegenübersteht; der dadurch begangene Fehler ist, wie ein Vergleich der erhaltenen Ergebnisse mit den strengen Werten zeigt, schon tief im elastischen Bereich (vgl. die Maximalordinaten der Fig. 8 mit Roš-Brunner's Diagrammwerten für 1000 at Knickspannung; bei » $m = 3$ « sind jene um etwa 46% größer!) von merklicher Größe. Ferner wurde mit Spannungsbildern gerechnet, die im unelastischen Bereiche auf der Biegezugseite die Entlastungsgerade des einfachen Proportionalitätsgesetzes aufweisen, während unter exzentrisch anwachsenden Axiallasten (vgl. 3. Abschnitt) das

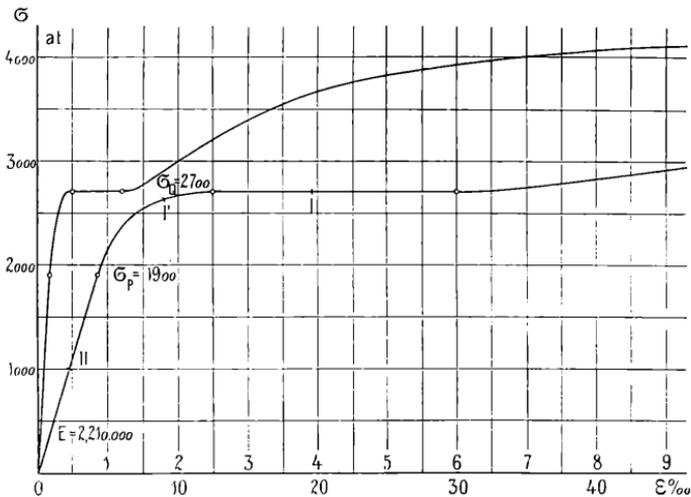


Fig. 1.

Formänderungsgesetz der Belastung gilt und daher die für gedrungene Stäbe ermittelten exzentrischen Knicklasten unter Umständen bedeutend tiefer liegen können. Die praktisch schon wegen der vorkommenden Schwankungen im Modul und im genauen Arbeitslinienverlaufe wie auch des Einflusses der Walzung und Querschnittsform belanglosen Einflüsse der Schubspannungen und der Nulllinienverschiebung wurden in beiden Arbeiten vernachlässigt.

Da ein einigermaßen einwandfreies analytisches Lösungsverfahren des gesamten »zentrischen« und »exzentrischen« Knickproblems wegen der Unmöglichkeit einer analytischen Fassung des Formänderungsgesetzes aussichtslos erscheint, wird im folgenden der graphisch-analytische Weg eingeschlagen und als Ziel in Übereinstimmung mit Roš-Brunner ein übersichtliches, gebrauchsfertiges Diagramm angestrebt; dieses enthält in einem rechtwinkligen Koordinatensystem die einer Serie von »Exzentrizitätsmaßen m « (das sind die Verhältniswerte der Anfangsexzentrizität » p « der Axialkraft zur Kernweite des Stabquerschnittes) zugeordneten Kurven,

die den funktionalen Zusammenhang zwischen den Stabschlankheiten (Abszissenachse) und den ersten kritischen »mittleren Druckspannungen« (Koordinatenachse) zur Darstellung bringen. Die obere Begrenzung dieser Kurvenschar bildet dann entsprechend $p = m = 0$ die Euler-Kármán-Linie der »zentrischen« Knickung. Die genaue Form der Gleichgewichtslagen und auch, dies einzig aus theoretischem Interesse, der Einfluß der Schubverzerrung und Nulllinienverschiebung soll bei der Herleitung in Rücksicht gezogen werden. Eine in gewissem Maße durch die Versuchserfahrung¹ gerechtfertigt erscheinende Voraussetzung bildet das Ebenbleiben ebener Querschnitte auch bei elastisch-plastischen Spannungsbildern; das Quadrat

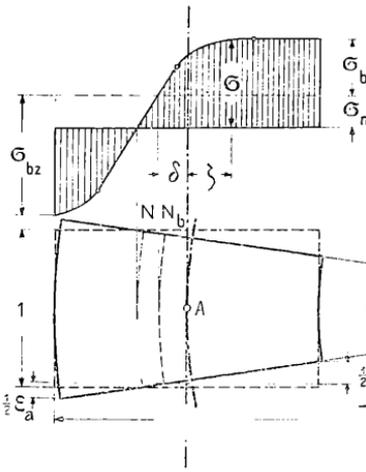


Fig.

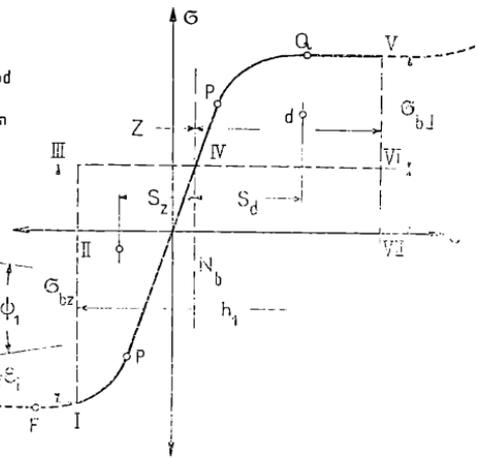


Fig. 2 b.

der ersten Ableitung der Stabausbiegung kann mit einem Fehler von weniger als 1⁰/₀₀ (vgl. p. 510) gegenüber »1« vernachlässigt werden, da sich der gesuchte Stabilitätswechsel unter exzentrischem Druck schon bei sehr kleinen Ausbiegungen einstellt. Unsere Darlegungen beziehen sich auf einen geraden, homogenen, beiderseits gelenkig gelagerten Stab von rechteckigem Querschnitt, dessen Axialkraft und Biegelinie der zur Querschnittshöhe parallelen Symmetrieebene angehören. Der Herleitung wird ein ideales Druck-Stauchungs-Diagramm (Fig. 1) zugrunde gelegt, das sich mit dem der Roß-Brunner'schen Arbeit weitgehend deckt und auf Baustahlarten von Normalgüte bezieht; die Proportionalitätsgrenze $\sigma_P = 1900$ at wird bei einer spezifischen Längenänderung $\epsilon_P = 0.86\%$ erreicht, so daß sich ein Elastizitätsmodul $E = 2,210.000$ at ergibt. Der Quetschbereich wird mit Rücksicht auf die übliche Zusammensetzung der Druckglieder aus kleineren Walzenprofilen mit $\sigma_Q = 2700$ at festgesetzt, beginnt bei $\epsilon_Q = 2.5\%$ und erstreckt

¹ E. Meyer, Die Berechnung der Durchbiegung von Stäben, deren Material dem Hooke'schen Gesetz nicht folgt. Zeitschr. d. V. d. I. 1908, p. 167.

sich, ohne Unterscheidung einer allfälligen »oberen« und »unteren« Quetschgrenze, bis zu etwa $\varepsilon = 6\%_{00}$; nach dem Fließen steigt die Drucklinie stetig an und erreicht bei $\varepsilon = 35\%_{00}$ die Spannung 4000 at. Die zweite Kurve in Fig. 1 stellt den Verlauf dieser Arbeitslinie bis zum plastischen Bereich mit fünffach vergrößerten Abszissenwerten vor. Für das Zug-Dehnungsdiagramm wird im benötigten Bereich bis etwa $\sigma = 3000$ at mit Rücksicht auf die erfahrungsgemäße Kleinheit der Abweichungen der gleiche Arbeitslinienverlauf in Rechnung gestellt.

5.

Man denke sich ein prismatisches Stabelement der Länge »Eins« an einer Stelle A (Fig. 2 a) des spannungslosen Stabes herausgegriffen und betrachte dieses Element im verformten Zustand, nachdem der Stab unter einer zentrischen oder exzentrischen Axialkraft P eine ausgebogene Gleichgewichtslage angenommen hat. Ist die Krümmung der Stabachse in A gering, so werden sämtliche Fasern des Elementes mehr oder weniger stark verkürzt sein und das Element erfährt mit Rücksicht auf das vorausgesetzte Ebenbleiben der Querschnitte eine Verformung, wie sie etwa Fig. 4 zeigt. Ist die Achsenkrümmung der Gleichgewichtslage an der Stelle A groß, so werden die auf der Biegezugseite befindlichen Fasern eine effektive Dehnung erfahren (Fig. 2 a) und es existiert dann im Stab eine Faser, die ihre ursprüngliche Länge »Eins« erhalten hat, somit der »absoluten Nulllinie N « zugehört (vgl. Fig. 6 mit » N « am Querschnittsrand). Da erfahrungsgemäß den Längenänderungen von Fasern gebogener Stäbe die gleichen Spannungen entsprechen, die beim reinen Zug- oder Druckversuch geweckt werden würden, so müssen, der linearen Verteilung der spezifischen Längenänderungen im verformten Element gemäß, die im Stabquerschnitt A übertragenen Gesamtspannungen in ihrem Verlaufe den Arbeitslinien für Druck und Zug folgen. Dieser Schluß gilt jedoch nicht, wenn einzelne Fasern vor einer Zugbeanspruchung unelastisch gestaucht wurden und es tritt in einem solchen Fall das einfache Proportionalitätsgesetz der Entlastung an Stelle des Formänderungsgesetzes der Belastung. Denkt man sich nun die dieserart eindeutig durch die Verformung festgelegten Gesamtspannungen unter Wahrung des Vorzeichens ersetzt durch eine über den ganzen Querschnitt gleichmäßig verteilte Spannung der gleichen Spannungsfläche, so wird damit jene »mittlere Druckspannung σ_m « erhalten, die mit der Stabquerschnittsfläche » $b \cdot h$ « multipliziert, der Axialkraft P gleich sein muß. Die vorhandene Verteilung σ ist dann als Ergebnis einer Überlagerung dieser mittleren Druckspannung durch eine Biegespannungsverteilung σ_b aufzufassen, deren beide Randwerte mit σ_{ba} , σ_{bz} bezeichnet werden mögen und deren Nullpunkt der »Nulllinie der Biegespannung N_b « angehört (vgl. Fig. 2 a, 5, 6). Die äußere Einwirkung auf das Element A

besteht aus einer im Querschnittsschwerpunkt wirksamen Axialkraft P und einem äußeren Moment $M_a = P \cdot y$, wobei y den ganzen, aus Anfangsexzentrizität p und Stabausbiegung \bar{y} zusammengesetzten Hebelsarm von P an der Stelle A bedeutet. Das Gleichgewicht zwischen inneren und äußeren Kräften wird einerseits durch die Beziehungen

$$P = F \cdot \sigma_m, \quad \int_F \sigma_b \cdot dF = 0$$

befriedigt und verlangt andererseits das Vorhandensein eines Spannungsmomentes

$$M_i = \int_F \sigma_b \cdot \zeta \cdot dF,$$

das dem Angriffsmoment M_a wertgleich entgegenwirkt. Im Verformungsfall Fig. 2 a entsprechen den spezifischen Längenänderungen der beiden Randfasern des Elementes die beiden Abszissenpunkte II und VII im Spannungs-Dehnungsdiagramm für Zug und Druck (Fig. 2 b) und sinngemäß sind jene Zwischenpunkte einander zugeordnet, die »h«, beziehungsweise »h₁« im gleichen Verhältnis unterteilen; für das Spannungsmoment folgt dann aus dem Diagramm unmittelbar der Wert

$$M_i = \left(\frac{h}{h_1}\right)^2 b \cdot \int_{h_1} \sigma_b \cdot \varepsilon \, d\varepsilon,$$

wobei

$$\sigma_b = \sigma - \sigma_m = \sigma - \frac{1}{b} \cdot \int_{h_1} \sigma d\varepsilon$$

besteht. Bezeichnet man die gleich großen Biegespannungsflächen I, III, IV, beziehungsweise IV, V, VI mit Φ und ihre Schwerpunktsentfernungen von der Nulllinie N_b mit s_z , beziehungsweise s_d , so ergibt sich einfach

$$M_i = b \cdot h^2 \cdot \Phi \cdot \frac{s_z + s_d}{h_1^2}$$

und es läßt sich in dieser Art für beliebige Werte der beiden Randfaserdehnungen das zugehörige P und M_a ermitteln. Ist die Größe der Axiallast vorgegeben, so ist $\sigma_m = \frac{P}{b \cdot h}$ fixiert und die Biege-

spannungsverteilung allein variabel; die Verformung des Elementes ist dann durch die Summe ($\varepsilon_i + \varepsilon_d$) der Längenänderungen zufolge der Biegerandspannungen σ_{bd} , beziehungsweise σ_{bz} eindeutig festgelegt und aus dem Spannungs-Dehnungsdiagramm resultiert das dieser Randdehnungssumme entsprechende

$$\frac{M_i}{b \cdot h^2} = \frac{P \cdot y}{b \cdot h^2} = \Phi \cdot \frac{s_z + s_d}{h_1^2}$$

Die praktische Durchführung dieses Ermittlungsverfahrens, das das Diagramm Fig. 3 und die Tab. I bis III zum Ziele hat, ist am besten aus einem Zahlenbeispiel zu ersehen. Es sei $P = 1000 \cdot b \cdot h$, somit $\sigma_m = 1000$ at gewählt und $M_a = P \cdot y = M_i$ soll derart groß sein, daß die innere Randfaser innerhalb des Quetschbereiches liegt (vgl. dazu das Spannungsbild der Fig. 5, das diesem Beispiel entspricht); im Spannungs-Dehnungsdiagramm Fig. 1 (zweite Kurve), dessen Originalmaßstab »1 cm = 200 at, beziehungsweise 0.5%₀₀« beträgt, ist diese Randfaserstauchung durch den Punkt I fixiert, der vom

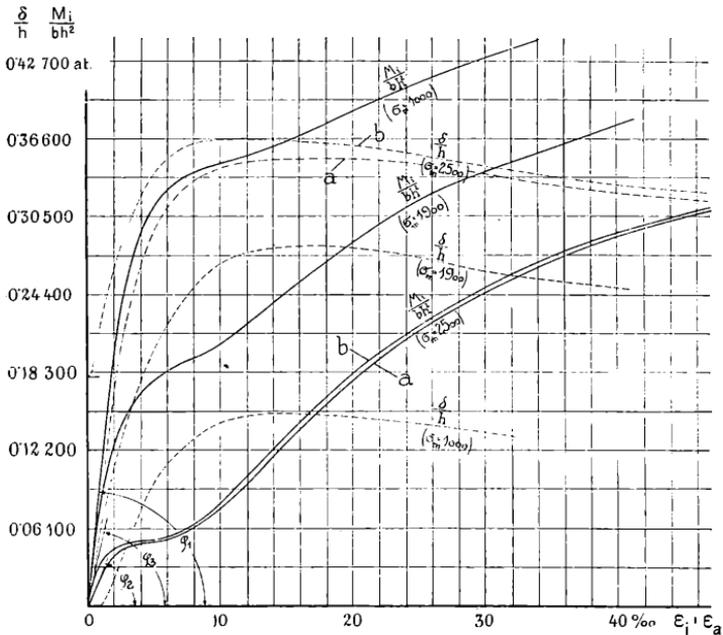


Fig. 3.

Arbeitslinienpunkt II (Ordinate $\sigma = \sigma_m = 1000$ at) eine Originalentfernung von $d = 6.949$ cm besitzt. Die Spannungsfläche innerhalb der Geraden » $\sigma = \sigma_m = 1000$ at«, der Arbeitslinie und der Ordinate von I wird mit $\Phi_d = 50.9855$ cm², ihre horizontale Schwerpunktsentfernung von II mit $s_d = 3.901$ cm erhalten. Nun ist die Arbeitslinie über den Ursprung hinaus geradlinig zu verlängern und auf ihr ein Punkt II' mit der Ordinate $\sigma = -\sigma_m = -1000$ at festzulegen; durch Probieren kann dann jener Punkt I' der Arbeitslinie gefunden werden, bis zu dessen Ordinate sich die Spannungsfläche innerhalb der Geraden » $\sigma = -\sigma_m = -1000$ at« und der verlängerten Arbeitslinie mit $\Phi_z = \Phi_d = 50.9855$ cm² ergibt. Man findet, von II' gemessen, für I' eine horizontale Entfernung $z = 4.506$ cm, eine Entfernung des Flächenschwerpunktes $s_z = 2.909$ cm und einen Ordinatenwert $\sigma_{bz} = (\sigma_m + 2635)$ at (Fig. 5). Würde der rechteckige Stabquerschnitt die Seitenlängen $b_1 = 1$ cm und $h_1 = z + d = 11.455$ cm

besitzen, so würde mit Rücksicht auf den Diagrammaßstab eine Randdehnungssumme

$$(\varepsilon_i + \varepsilon_a) = \frac{11 \cdot 455 \text{ cm}}{2 \text{ cm}} = 5 \cdot 7275\text{‰},$$

eine Spannungsergebnante $D_1 = Z_1 = 200 \cdot \Phi_a$, ein innerer Hebelsarm $a_1 = s_z + s_a$, ein Spannungsmoment ${}_1M_i = D_1 \cdot a_1$ und ein Abstand $\delta_1 = d - \frac{1}{2} h_1$ der Nulllinie N_b von der Schwerachse resultieren;

besitzt der Stabquerschnitt allgemein die Seitenlängen »b« und »h« so erhält man daraus die Gruppe zusammengehöriger, der mittleren Druckspannung $\sigma_m = 1000$ at zugeordneten Größen

$$D = Z = \frac{50 \cdot 9855}{11 \cdot 455} \quad b \cdot h = 890 \cdot b \cdot h, \quad a = \frac{6 \cdot 81}{11 \cdot 455} \quad h = 0 \cdot 594 \cdot h,$$

$$M_i = D \cdot a = 529 \cdot b \cdot h^2, \quad \delta = \left(\frac{6 \cdot 949}{11 \cdot 455} - 0 \cdot 5 \right) h = 0 \cdot 1067 \cdot h$$

Tabelle I ($\sigma_m = 1000$ at).

$\frac{y}{h}$	$\frac{M_i}{b h^2} = \sigma_m \cdot \frac{y}{h}$	$\varepsilon_i + \varepsilon_a$	$\frac{\delta}{h}$
0·000	000·0 at	0·00000000	0·0000
0·075	75·0	0·00040722	0·0000
0·150 ¹	150·0	0·00081444	0·0000
0·180	180·0	0·000982	0·0005
0·210	210·0	0·001158	0·0019
0·240	240·0	1343	0·0049
0·270	270·0	1540	0·0091
0·300	300·0	1770	0·0145
0·330	330·0	2025	220
0·360	360·0	2300	300
0·390	390·0	260	393
0·420	420·0	295	498
0·450 ²	450·0	340	625
0·480	480·0	395	762
0·510	510·0	465	940
0·540	540·0	646	0·1135
0·570 ³	570·0	0·01085	1432
0·600	600·0	1545	1473
0·630	630·0	1935	1451
0·660	660·0	2325	1413
0·675 ⁴	675·0	0·02545	0·1390

¹ Die Randspannung auf der Biegedruckseite erreicht die Proportionalitätsgrenze.

² Vor Beginn des Quetschens am Innenrand; nach dem Überschreiten der Proportionalitätsgrenze am Außenrand.

³ Nach dem Quetschen am Innenrand; während des Fließens Außenrand.

⁴ Am Innenrand ungefähr — 3500 at, Außenrand ungefähr + 2900 at.

sowie die effektiven Randspannungen $\sigma_d = -2700$ (während des Quetschens) und $\sigma_z = 2635$ at. In dieser Weise wurden für die drei mittleren Druckspannungswerte $\sigma_m = 1000, 1900 = \sigma_P$ und 2500 at je eine ausreichende Anzahl zusammengehöriger Werte ermittelt und die Ergebnisse im Diagramm Fig. 3 sowie den Tabellen I bis III niedergelegt. Für die Spannung $\sigma_m = 2500$ at mußte die Untersuchung doppelt durchgeführt werden, da hier im »unelastischen« Bereiche das Spannungsbild von der Art der Lastaufbringung (vgl. Abschnitt 3) abhängt; die Kurve *a* und die Tab. III *a* beziehen sich auf den Fall des üblichen exzentrischen Anwachsens der Axiallast, Kurve *b* und Tab. III *b* auf dem des zentrischen. Im ersten Fall ist der innere Widerstand grundsätzlich kleiner als im zweiten, doch sind die Unterschiede hier, bei $\sigma_m < \sigma_Q$, noch geringfügig. Die Ermittlung der Wertegruppen wurde jeweils bis zu Randdehnungssummen durchgeführt, denen effektive Randspannungswerte von etwa 3000 at Zug, beziehungsweise 4300 at Druck entsprechen; darüber hinaus wurde mit Rücksicht auf die der Untersuchung zugrundeliegenden Voraussetzungen und die geringe praktische Bedeutung nicht gegangen. Die Tabellenwerte sind nach den ins

Tabelle II ($\sigma_m = \sigma_P = 1900$ at).

$\frac{y}{h}$	$\frac{M_i}{bh^2} = \sigma_m \frac{y}{h}$	$\varepsilon_i + \varepsilon_a$	$\frac{\delta}{h}$
0·00	000·0 at	0·000000	0·0000
1	19·0	108	0·0030
2	38·0	220	0·0100
3	57·0	340	195
4	76·0	470	290
5	95·0	620	400
6	114·0	775	495
8	152·0	0·001170	712
0·10	190·0	165	930
12 ¹	228·0	230	0·1200
14	266·0	360	1640
16 ²	304·0	618	2215
18	342·0	0·01030	2680
20	380·0	1330	274
22 ³	418·0	1620	277
24	456·0	1915	276
26	494·0	2215	274
28	532·0	2615	267
0·30 ⁴	570·0	0·03210	254

¹ Vor Beginn des Quetschens am Innenrand; vor dem Auftreten von Zugspannungen am Außenrand.

² Während des Quetschens am Innenrand; Erreichen der Proportionalitätsgrenze am Außenrand.

³ Am Innenrand ungefähr — 3250 at; nach dem Beginn des Fließens am Außenrand.

⁴ Am Innenrand über — 3800 at; nach dem Fließen am Außenrand.

Tabelle III ($\sigma_m = 2500$ at).

$\frac{y}{h}$	$\frac{M_i}{b h^2} = \sigma_m \cdot \frac{y}{h}$	a) für exzent. Anwachsen von »P«		b) für zentr. Anwachsen von »P«	
		$\varepsilon_i + \varepsilon_a$	$\frac{\delta}{h}$	$\varepsilon_i + \varepsilon_a$	$\frac{\delta}{h}$
0·000	000·0	0·000000	0·0000	0·000000	0·1760
10	25·0	611	496	380	1894
20	50·0	0·001345	0·1136	855	2370
30	75·0	2765	2076	0·002175	2980
34 ¹	85·0	5548	2970	4625	3280
40 ²	100·0	7965	3270	7500	3546
5	125·0	9911	3343	9450	3580
6	150·0	0·011440	3390	0·010950	3590
7	175·0	1291	3421	1239	3590
8	200·0	1438	3438	1383	3580
9	225·0	1587	3446	1529	3570
0·10	250·0	1740	3448	1680	3560
11	275·0	1902	3448	1840	3548
12 ³	300·0	2076	3440	2012	3534
13	325·0	2265	3424	2199	3518
14	350·0	2474	3400	2404	3490
15	375·0	2713	3368	2635	3454
16	400·0	2982	3330	2896	3410
17	425·0	3284	3289	3190	3362
18	450·0	3620	3245	3520	3311
19	475·0	4006	3195	3900	3260
0·20 ⁴	500·0	4562	3135	4450	3210

1 Vor dem Ende des Quetschens am Innenrand.
Vor dem Auftreten von Zugspannungen am Außenrand.
3 Am Innenrand mehr als — 3600 at; vor dem Fließen am Außenrand.
4 Am Innenrand ungefähr — 4050 at; nach dem Fließen am Außenrand.

Verhältnis zur Querschnittshöhe gesetzten Hebelarmen »y« der Axialkraft geordnet; für festgelegte Größen σ_m und $\frac{y}{h}$ ergibt sich aus Gleichgewichtsgründen unmittelbar

$$\frac{M_i}{b h^2} = \frac{P \cdot y}{b h^2} = \frac{y}{h}$$

so daß die diesen Werten entsprechenden Größen ($\varepsilon_i + \varepsilon_a$) und $\frac{\delta}{h}$ dem Diagramm entnommen werden können. Mit Bezug auf den Verlauf der $\frac{M_i}{b \cdot h^2}$ -Linien in Fig. 3 ist zu bemerken, daß für ihre Neigungswinkel »φ« im Diagrammursprung die Beziehung

$$(\operatorname{tg} \varphi) = \frac{d \frac{M_i}{b h^2}}{d(\varepsilon_i + \varepsilon_a)} \Big|_{M_i \rightarrow 0} = \frac{E' \cdot J}{b h^3} = \frac{E'}{12}$$

entspringt, wobei E' den »resultierenden Modul« für eine infinitesimale Verbiegung vorstellt. Für $\sigma_m = 1000$ und 1900 at, also im »elastischen« Bereiche, ist E' dem Elastizitätsmodul gleich, wie auch unmittelbar aus

$$(\varepsilon_i + \varepsilon_a) \Big|_{M_i \rightarrow 0} = \frac{2}{E} \sigma_{b,d} = \frac{12 \cdot M_i}{E \cdot b \cdot h^2}, \quad (\text{tg } \varphi_1) = \frac{M_i}{b \cdot h^2 \cdot (\varepsilon_i + \varepsilon_a)} \Big|_{M_i \rightarrow 0} = \frac{E}{12}$$

folgt. Im »unelastischen« Bereich ergibt sich bei Zuziehung des entlastungsfreien Formänderungsgesetzes (Kurve a , vgl. 3. Abschnitt) formell der Grenzwert

$$E' = E_1 = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \Big|_{\sigma = \sigma_m}$$

(Diagramm Fig. 1), während im Fall eines zentrischen Anwachsens der Axiallast (Kurve b) der Kármán'sche Knickmodul

$$E' = \bar{E} = \frac{4 \cdot E \cdot E_1}{(\sqrt{E'} + \sqrt{E_1})^2}$$

Geltung besitzt; für $\sigma_m = 2500$ at wird demgemäß

$$(\text{tg } \varphi_2) = \frac{508.000}{12} \quad \text{und} \quad (\text{tg } \varphi_3) = \frac{930.000}{12} \quad \text{at}$$

erhalten. Das Maß » δ «, um das sich die Nulllinie der Biegespannungen von der Stabachse nach der Biegezugseite hin verschiebt, wurde als Verhältniswert $\frac{\delta}{h}$ in seiner Abhängigkeit von $(\varepsilon_i + \varepsilon_a)$ ebenfalls in Fig. 3 eingetragen (linker Ordinatenmaßstab); innerhalb des Hooke'schen Bereiches, so lange also die $\frac{M_i}{b \cdot h^2}$ -Linie geradlinig verläuft, ist

$$\frac{\delta}{h} = 0, \quad \text{um dann mit horizontaler Tangente anzusteigen und nach Er-$$

reichung eines Höchstwertes als Folge der nachplastischen Verfestigung auf der Druck- und auch Zugseite langsam wieder abzunehmen. Im Falle

$\sigma_m > \sigma_P$ besitzt $\frac{\delta}{h}$ bei zentrischem Anwachsen der Axialkraft (Kurve b) schon unter infinitesimalen $(\varepsilon_i + \varepsilon_a)$ -Werten eine endliche, dem Kármán'schen Knickspannungsbilde (l. c.) entspringende Größe.

6.

Wir wollen nun, ohne noch auf die Verzerrung durch die Schubspannungen einzugehen, die Verformung eines einer Gleichgewichtslage entnommenen Stabelementes von der kleinen, im

spannungslosen Zustand gemessenen Länge »Eins« des näheren untersuchen. Da die Deformationsfigur einen stetigen Verlauf zeige ändern sich auch die Angriffsmomente $M_a = P \cdot y$ und damit die ihnen wertgleichen Spannungsmomente M_i längs der Stabachse, stetig und gilt unter Voraussetzung einer stetigen Arbeitslinie das gleiche auch für den Übergang der Spannungsbilder. Ein in der oberen Begrenzungsfläche des Stabelementes (Fig. 4) übertragenes Spannungsmoment M_i besitzt demnach im unteren Begrenzungsquerschnitt schon die Größe

$$M_i + \frac{dM_i}{dx} \cdot 1$$

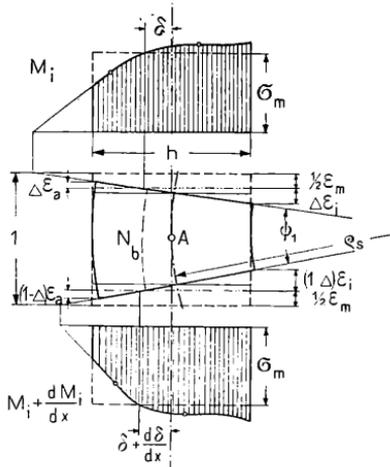


Fig. 4

und auch die Entfernung » δ « des Nullpunktes der Biegespannungen von der Stabachse wächst innerhalb des Elementes auf den Wert

$$\delta = \frac{d\delta}{dx} \cdot 1$$

an, so daß die Nulllinie N_b in einer ausgebogenen Gleichgewichtslage allgemein nicht parallel zur Schwerachse verläuft. Die Verformung unseres Stabelementes setzt sich zusammen aus einer gleichmäßigen Verkürzung ϵ_m , die der mittleren Druckspannung σ_m entspricht, und einer darübergelagerten linearen Verteilung der den Biegespannungen entspringenden Längenänderungen mit den beiden Randwerten ϵ_i und ϵ_a ; im Beispiel der Fig. 4 bewahrt keine der Fasern ihre spannungslose Länge »Eins«, die absolute Nulllinie N ist somit außerhalb des Stabquerschnittes gelegen. Ist im Element der Hooke'sche Bereich überschritten, dann werden die Fasern in der Schwerachse nicht nur durch die mittlere Druckspannung,

sondern auch durch Biegedruckspannungen verkürzt und erhalten im verformten Zustand die Länge

$$1 - \varepsilon_m - \int_{\psi_1} \delta \cdot d\psi;$$

wird der Krümmungsradius der Stabschwerachse im ausgebogenen Gleichgewichtszustand mit ρ_s bezeichnet, so folgt aus Fig. 4 für die Stelle A unmittelbar die geometrische Beziehung

$$\rho_s \cdot \psi_1 = \rho_s \cdot \frac{\varepsilon_i + \varepsilon_a}{h} = 1 - \varepsilon_m - \int_{\psi_1} \delta \cdot d\psi \quad \text{oder} \quad \frac{\varepsilon_i + \varepsilon_a}{h} = \frac{1 - \varepsilon_m}{\rho_s + \frac{1}{\psi_1} \cdot \int_{\psi_1} \delta \cdot d\psi};$$

da

$$\frac{1}{\psi_1} \int_{\psi_1} \delta \cdot d\psi \approx 1 \cdot \delta$$

sehr klein gegenüber ρ_s ist und ε_m sehr klein gegenüber »Eins« ist, kann diese Beziehung mit scharfer Annäherung auch in der Form

$$\frac{1}{\rho_s} = \frac{\varepsilon_i + \varepsilon_a}{h} \cdot \frac{1}{1 - \varepsilon_m - \frac{\delta}{h} (\varepsilon_i + \varepsilon_a)} \quad (I)$$

geschrieben werden.

Denkt man sich den Verlauf der Schwerachse einer ausgebogenen Gleichgewichtslage auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem x, y bezogen, dessen Ursprung an einem der beiden Stabenden im Angriffspunkt der Axialkraft gelegen ist und dessen Ordinatenachse zur Stabachsensene parallel läuft, so gilt für die in Betracht kommenden Stabausbiegungen mit einem Fehler von unter $10/100$

$$\frac{1}{\rho_s} = - \frac{d^2 y}{dx^2} = - y'';$$

da wir den Tabellen des 5. Abschn. die zusammengehörigen Werte y und $(\varepsilon_i + \varepsilon_a)$ entnehmen können, ist für eine gewählte mittlere Druckspannung aus obiger Beziehung (I) zu jedem y das zugeordnete

$$\frac{1}{\rho_s} = - y''$$

bestimmbar, somit der funktionale Zusammenhang $y'' = \Psi(y)$ graphisch festlegbar. Die Lösung dieser Differentialbeziehung kann in bekannter Weise auf Quadraturen zurückgeführt werden und liefert, wie später noch gezeigt werden wird, im Graphikon die gesuchte Gleichgewichtsform $y = F(x)$, somit auch die Länge » L « des Stabes, der bei einer bestimmten Scheitelausbiegung » $y_0 = \max. y$ « einer vorgegebenen Axiallast P das Gleich-

gewicht hält. Dieses so ermittelte » L « ist jedoch noch nicht identisch mit der Stablänge » \mathcal{L} « im spannungslosen Zustand, da sich die resultierende Deformationsfigur auf die verkürzte Schwerachse bezieht; » L « muß daher noch eine additive Korrektur um einen Betrag erfahren, der sich aus den Darlegungen dieses Abschnittes unmittelbar mit

$$\Delta L = L \cdot \varepsilon_m + \int_L \delta \cdot d\psi = L \cdot \varepsilon_m + \int_L \delta \cdot y'' dx$$

ergibt. Der Einfluß der Schwerachsenverkürzung auf die Deformationsfigur ist äußerst geringfügig und auch beim gedrungeusten exzentrisch gedrückten Stab praktisch vernachlässigbar. Die Gleichgewichtslänge » L « wird bei Berücksichtigung dieser Verkürzung im Krümmungsausdruck ein wenig kleiner, nach Hinzufügen des erforderlichen ΔL jedoch grundsätzlich ein wenig größer als bei ihrer Außerachtlassung erhalten. Die Vernachlässigung der Schwerachsenverkürzung als Folge der Axialkraft und Nulllinienverschiebung führt demnach vom exakten Standpunkt, so wie auch die Annäherung

$$\frac{1}{\rho_s} = y''$$

auf etwas zu kleine »exzentrische« Knicklasten. Hingegen beeinflusst, wie wir schon hier vermerken wollen, die Vernachlässigung der im nächsten Abschnitt behandelten Schubverzerrung die Gleichgewichtslängen und damit auch die Knicklasten im entgegengesetzten Sinne und ergibt ein wenig zu große Werte, so daß wegen dieses weitgehenden Ausgleiches aller Fehler auch die kritischen Belastungswerte einer einzig die Biegespannungen berücksichtigenden Problembehandlung als ausreichend scharf zu bezeichnen sind.

7.

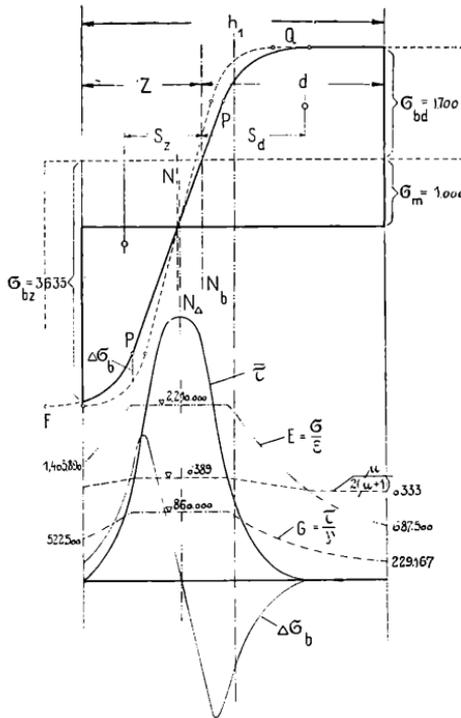
Wie wir im vorigen Abschnitt festgestellt haben, sind benachbarten Querschnitten eines ausgebogenen, unter axialem Druck im Gleichgewicht stehenden Stabes wegen der stetigen Änderung des Angriffsmomentes verschiedene Spannungsbilder von derselben mittleren Druckspannung zugeordnet. Denkt man sich das im betrachteten Querschnitt vorhandene Spannungsmoment M_i um einen kleinen Betrag ΔM_i abgeändert und das diesem vergrößerten Werte $M_i + \Delta M_i$ zugehörige Spannungsbild über das ursprüngliche gezeichnet, so erhält man unmittelbar den Verlauf der Biegespannungsdifferenzen $\Delta \sigma_b$, für den, wie ohne weiteres einzusehen ist, die Gleichung

$$\int_F \Delta \sigma_b \cdot dF = 0$$

besteht. Bezeichnet man die Entfernung einer Stabfaser vom Querschnittsrand mit » ξ «, so stellen die Werte

$$\bar{\tau}_\xi = \int_0^\xi \Delta \sigma_b \cdot d\xi$$

die Schubkräfte für die Einheit der Querschnittsbreite vor, die in axialer Richtung in einem Stabelement wirksam sind, das in seinen Begrenzungsquerschnitten die Momente M_i , beziehungsweise



$M_i + \Delta M_i$ überträgt. Wird ΔM_i ausreichend klein gewählt, so ist der Verlauf dieser $\bar{\tau}$ -Werte, der sich durch die Summenlinienkonstruktion graphisch in einfacher Weise aus dem $\Delta \sigma_b$ -Verlaufe bestimmen läßt, mit dem der axialen und wertgleichen transversalen Schubspannungen » τ « zu identifizieren; die absoluten Größen dieser » τ « werden dann durch die Bedingung

$$\int_F \tau \cdot dF = Q = \frac{dM}{dx} = \sigma_m \cdot b \cdot h \cdot y'$$

festgelegt.

Die praktische Durchführung dieses Ermittlungsverfahrens ist aus den beiden Beispielen Fig. 5 und 6 zu entnehmen. In Fig. 5

wurde ein Querschnitt untersucht, in dem eine mittlere Druckspannung $\sigma_m = 1000$ at und ein Spannungsmoment $M_i = 529 b \cdot h^2$ (vgl. dazu das Zahlenbeispiel im 5. Abschnitt) übertragen wird. Um den in diesem Querschnitt bestehenden $\Delta \sigma_b$ -Verlauf mit ausreichender Schärfe zu erhalten, wurden die beiden gleich großen Spannungsflächen der Biegedruck- und Biegezugspannungen um kleine, dem Arbeitslinienverlaufe entsprechende, ebenfalls gleich große (dünn gestrichelt eingezeichnete) Flächenstücke vermehrt und

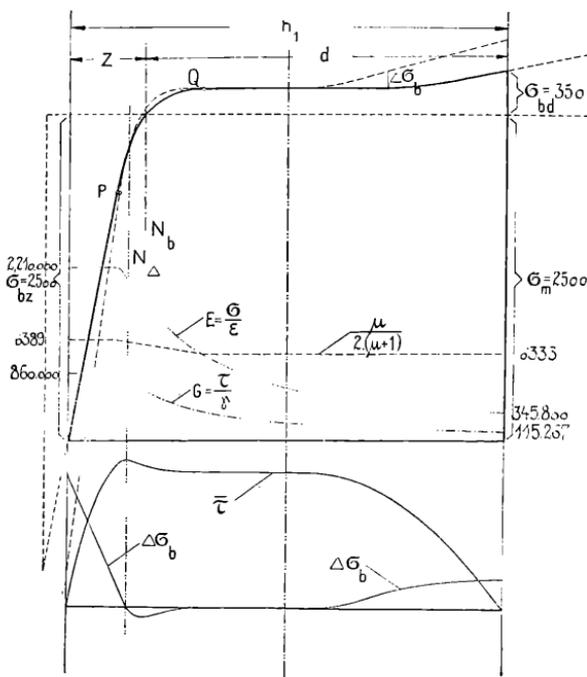


Fig. 6.

das dieserart erhaltene Diagramm nach einer Reduktion seines Abszissenmaßstabes über der Querschnittshöhe » h_1 « aufgebaut; man erhält damit das dick strichliert eingetragene Spannungsbild, das bei unveränderter mittlerer Druckspannung σ_m ein etwas vergrößertes Moment $M_i + \Delta M_i$ liefert und sich mit der ursprünglichen Spannungslinie in der »Nulllinie der Spannungsdifferenzen N_Δ « schneidet. Die sich ergebenden $\Delta \sigma_b$ -Werte wurden nun (als dünne volle Linie) eigens aufgetragen und die zugehörige Summenlinie

$$\bar{\tau}_\xi = \int_0^\xi \Delta \sigma_b \cdot d\xi$$

ermittelt, die an den Querschnittsrändern die Bedingung $\bar{\tau} = 0$ befriedigt und in N_Δ ihren Scheitel besitzt; der Ordinatenmaßstab

dieses $\bar{\tau}$ -Diagrammes wird durch die im Querschnitt vorhandene Schubkraft $Q = \sigma_m \cdot b \cdot h \cdot y'$ bestimmt. Innerhalb des rein plastischen Bereiches gibt es keine Spannungsunterschiede $\Delta \sigma_b$ und damit auch keine Schubspannungen, sofern die effektiven Randspannungswerte nicht den nachplastischen Verfestigungsbereich erreichen. Fig. 6 zeigt einen Fall des unelastischen Bereiches ($\sigma_m = 2500$ at) mit kleinem, durch eine Gesamtexzentrizität von nur ungefähr $0.04 \cdot h_1$ erzeugten Spannungsmoment. Auch hier ergibt sich nach wertgleichen, möglichst geringfügigen Erweiterungen der Biegespannungsfläche und darauffolgender Reduktion der Abszissen auf die Querschnittshöhe » h_1 « das Spannungsbild » σ « für $M_i + \Delta M_i$ bei unverändertem σ_m ; der gesamte plastische Bereich liegt innerhalb des Stabquerschnittes, so daß die $\Delta \sigma_b$ -Linie nach einem streckenweise Verlaufe in der Abszissenachse wieder ansteigt, wie es der nachplastischen Verfestigung entspricht. Die zugeordnete Summenlinie » $\bar{\tau}$ « besitzt wieder in N_Δ ihre Maximalordinate und liefert im plastischen Gebiet konstante $\bar{\tau}$ -Werte. Die Schubspannungen, um die es sich im Rahmen unseres Stabilitätsproblems handelt, sind wegen der geringen in Betracht kommenden Stabausbiegungen im allgemeinen klein und liegen jedenfalls ausreichend tief, um auf den Eintritt des plastischen Zustandes selbst keinen merkbaren Einfluß ausüben zu können.

8.

Da der Verlauf der Schubspannungen in jedem Querschnitt eines achsial gedrückten, im Gleichgewicht befindlichen Stabes festlegbar erscheint, soll nunmehr versucht werden, die durch diese Schubspannungen verursachten Formänderungen zu ermitteln. Mit Bezug auf das Spannungs-Dehnungsdiagramm (Fig. 1) pflegt man zwei, außerhalb des Hooke'schen Bereiches verschiedene Dehnmaße

$$E_1 = \frac{d \sigma}{d \varepsilon}$$

und

$$\mathcal{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

zu unterscheiden; dem einen entspricht im Spannungs-Dehnungsdiagramm die Richtung der Tangente in einem Arbeitslinienpunkt » σ, ε «, dem andern hingegen die Richtung der vom Ursprung zu diesem Punkte gezogene Sehne. In gleicher Weise werden auch im Schubspannungs-Gleitungsdiagramm diese beiden Moduli mit

$$G_1 = \frac{d \tau}{d \gamma}$$

und

$$\mathcal{G} = \frac{\tau}{\gamma}$$

bezeichnet. Im Hooke'schen Bereiche ist $E_1 = \mathfrak{E} = E$, $G_1 = \mathfrak{G} = G$ und es besteht für das homogene, quasi-isotrope Material die Bedingung

$$G = \frac{\mu}{2 \cdot (\mu + 1)} \cdot E,$$

wobei μ die »Poisson'sche Querdehnungszahl« vorstellt. Im Gebiete außerhalb der Hooke'schen Gesetzmäßigkeit, das nach den einleitenden Bemerkungen für unser Stabilitätsproblem von entscheidender Bedeutung ist, können wir die in jüngster Zeit gewonnene Erkenntnis der Erhaltung der Quasi-Isotropie auch im plastischen Zustand verwerten.¹ Überschreiten die effektiven Stabspannungen als Folge des Anwachsens der Belastung und Ausbiegung die Plastizitätsgrenze, so tritt im Sinne dieser Erkenntnis in unserem Falle das Fließen, also die Möglichkeit einer Formänderung ohne Spannungserhöhung, auch für die Schubbeanspruchnahme ein, trotzdem die Schubspannungen noch weit unter ihrer eigenen Plastizitätsgrenze ($\tau_F = 0.6 \cdot \sigma_0$) gelegen sind. Die Querdehnungszahl, die im elastischen Bereiche für Druckungefähr $\mu = 3.5$ beträgt, nimmt im plastischen und nachplastischen Gebiete praktisch genau den Wert $\mu = 2.0$ an, so daß die Verformung hier ohne Volumsänderung erfolgt.

Der Fall einer »reinen Schubspannung τ « entspricht bekanntlich einem ebenen Spannungszustand, dessen beide entgegengesetzt gleichen Hauptspannungen σ mit der Schubspannungsrichtung einen Winkel von 45° einschließen und wertgleich sind der Schubspannung τ . Ein würfelförmiges, in Richtung der Hauptspannungen herausgeschnitten gedachtes Element der Seitenlänge »Eins« erfährt ungeachtet des Hooke'schen Gesetzes Kantenlängenänderungen

$\frac{\sigma}{\mathfrak{E}}$ und Querdehnungen $-\frac{1}{\mu} \frac{\sigma}{\mathfrak{E}}$, wobei im allgemeinen die

Größen \mathfrak{E} und μ von der Spannung σ abhängig sind. Läßt man näherungsweise mit Rücksicht auf die Kleinheit der Querdehnungen eine Superposition zu, so hat diese Würfelverformung eine Winkeländerung der Diagonalfächen im Betrage von

$$\gamma = \frac{2 \cdot (\mu + 1)}{\mu} \frac{\sigma}{\mathfrak{E}}$$

¹ Vgl. Roš-Eichinger, Versuche zur Klärung der Frage der Bruchgefahr (Schweiz. Verband für die Materialprüfungen der Technik), Zürich 1926.

Hier sei bemerkt, daß diese Erkenntnis auch beim Stabilitätsproblem der Platten, die längs einer Seite unelastisch gedrückt werden (wie z. B. alle plattenförmigen Elemente gedrungener eiserner Druckglieder, also Stege, Lamellen und Flanschen) von Bedeutung ist und die einer Auffassung als »elastisches Gewebe« entspringende übliche Einführung der Elastizitätskonstanten für die zur Belastung senkrecht stehende, lastfreie Richtung mit dieser Erkenntnis im Widerspruch steht, somit zu fehlerhaften, auf Seite der Unsicherheit liegenden Ergebnissen führt.

zur Folge, so daß wegen $|\sigma| = \tau$ und $\gamma = \frac{\tau}{\mathfrak{G}}$ die Beziehung

$$\mathfrak{G} = \frac{\mu}{2 \cdot (\mu + 1)} \quad \mathfrak{E}$$

entspringt, die dann angenähert auch außerhalb des Hooke'schen Bereiches Geltung besitzt. Der Modul

$$\mathfrak{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

ist für jede Faser eines Querschnittes der Gleichgewichtslage aus dem Spannungs-Dehnungsdiagramm ermittelbar, das nach den Darlegungen des 5. Abschnittes mit dem Spannungsbild in unmittelbarem Zusammenhange steht. Für effektive Spannungswerte $\sigma < \sigma_1$ beträgt der Faktor

$$\frac{\mu}{2 \cdot (\mu + 1)} \doteq 0 \cdot 389,$$

für $\sigma > \sigma_0$ hingegen $0 \cdot 333$; der Unterschied ist gering und es kann daher im Bereiche $\sigma_P < \sigma < \sigma_0$ einfach geradlinig interpoliert werden. In den beiden Beispielen der Fig. 5 und 6 wurden in

dieser Art die \mathfrak{E} , $\frac{\mu}{2 \cdot (\mu + 1)}$ und \mathfrak{G} -Werte ermittelt und im Diagramm eingetragen; die Erhaltung der Quasi-Isotropie kommt in der Gleichartigkeit des \mathfrak{E} - und \mathfrak{G} -Linienverlaufes zum Ausdruck.

Nun verbleibt noch die Aufgabe, die tatsächliche Gleitung eines ganzen Stabelementes, also die Ordinatenunterschiede aufeinanderfolgender Achsenpunkte zufolge der Querkraft $Q = \sigma_m \cdot b \cdot h \cdot y'$ zu ermitteln. Wir setzen allgemein für die spezifische Gleitung

$$\gamma = \omega \cdot \frac{Q}{F} = \omega \cdot \sigma_m \cdot y'$$

und bestimmen die Beiwerte ω auf Grund einer Überlegung, die sich an den Begriff der »Formänderungsarbeit« anlehnt; da im Rahmen dieser Untersuchung die absoluten Schubspannungsgrößen nicht benötigt werden, kann unmittelbar mit den τ -Werten gerechnet werden. Für eine beliebige Faser in der Entfernung » ξ « vom Rand sind nach den bisherigen Darlegungen $\bar{\tau}_\xi$ und \mathfrak{G}_ξ als bekannt anzusehen und kann das Produkt

$$\bar{\tau}_\xi \cdot \gamma_\xi = \frac{1}{\mathfrak{G}_\xi} \bar{\tau}_\xi^2$$

berechnet werden; da die im Querschnitt vorhandene Schubkraft dann

$$Q = \int_F \bar{\tau}_\xi dF$$

beträgt, kann für die gesuchte Achsenverzerrung die Gleichung

$$Q \cdot \gamma = \int_F \bar{\tau}_z \cdot \gamma_z \cdot dF$$

angesetzt werden, so daß für die spezifische Gleitung γ_1 eines Stabelementes unter der Querkraft »Eins« die Beziehung

$$\gamma_1 = \frac{\gamma}{Q} = \frac{\int_F \frac{\bar{\tau}_z^2}{\mathcal{G}_z} dF}{\left(\int_F \bar{\tau}_z dF \right)^2}$$

entspringt. Im Hooke'schen Bereich folgt der Schubspannungsverlauf einer Parabel und man erhält wegen $\mathcal{G}_z = \text{konst.} = 860.000$ at einfach

$$\gamma_1 = \omega \cdot \frac{1}{F} = \frac{f}{G \cdot F} = \frac{1 \cdot 396}{b \cdot h} \cdot 10^{-6},$$

wobei $f = 1,2$ als »Schubverteilungszahl« bezeichnet wird. Im Beispiel Fig 5 ergab sich bei freigewähltem $\bar{\tau}$ -Maßstab für den Flächeninhalt des $\bar{\tau}$ -, beziehungsweise $\frac{\bar{\tau}_z^2}{\mathcal{G}_z}$ Diagrammes (das

letztere wurde nicht eigens eingetragen) ein Wert von 3,375, beziehungsweise $2,970 \cdot 10^{-6}$, so daß nach der Reduktion von $h_1 = 11,455 \text{ cm}$ und $b_1 = 1 \text{ cm}$ auf die allgemeinen Größen b und h für die Integralwerte

$$\int_F \bar{\tau}_z \cdot dF = \frac{3 \cdot 375}{11 \cdot 455} \cdot b \cdot h,$$

beziehungsweise

$$\int_F \frac{\bar{\tau}_z^2}{\mathcal{G}_z} dF = 0 \cdot 259 \cdot 10^{-6} \cdot b \cdot h$$

erhalten wird und ein $\gamma_1 = \frac{2 \cdot 98}{b \cdot h} \cdot 10^{-6}$ resultiert; da im Quer-

schnitt eine Querkraft $Q = 1000 \cdot b \cdot h \cdot y'$ vorhanden ist, beträgt die gesuchte spezifische Verschiebung der Stabachse an der durch eine Randdehnungssumme $(\varepsilon_i + \varepsilon_a) = 5 \cdot 728^0_{/00}$ (vgl. p. 482) gekennzeichneten Stelle der Gleichgewichtslage $\gamma = 0 \cdot 00298 \cdot y'$. Im Beispiel der Fig. 6 ergeben sich die Integralwerte $0 \cdot 847 \cdot b \cdot h$, beziehungsweise $3 \cdot 17 \cdot 10^{-6} \cdot b \cdot h$ und damit die der Randdehnungssumme $(\varepsilon_i + \varepsilon_a) = 8 \cdot 250^0_{/00}$ zugeordneten Verschiebungen $\gamma_1 = \frac{4 \cdot 42}{b \cdot h} \cdot 10^{-6}$

und $\gamma = 0 \cdot 01105 \cdot y'$. In gleicher Weise wurden nun für eine ausreichende Anzahl von Spannungsbildern mit unveränderlicher mittlerer Druckspannung $\sigma_m = 1000$ at die Beiwerte

$$\omega \cdot \sigma_m = \frac{\gamma}{y'}$$

als Funktion von $(\varepsilon_i + \varepsilon_a)$ ermittelt; die erhaltene Diagrammlinie (die in Fig. 3 nicht eigens dargestellt wurde) verläuft im Hooke'schen Bereich, das ist für $0 < (\varepsilon_i + \varepsilon_a) < 0.814 \text{‰}$ geradlinig in der Höhe $\omega \cdot \sigma_m = 0.001396$, steigt dann langsam an und erreicht im Endpunkt $(\varepsilon_i + \varepsilon_a \doteq 30 \text{‰})$ ungefähr die Größe $\omega \cdot \sigma_m = 0.0091$. Im unelastischen Bereiche sind die resultierenden Werte $\omega \cdot \sigma_m$, wie man schon aus dem Beispiel Fig. 6 ersieht, wesentlich größer.

9.

Betrachtet man eine ausgebogene Gleichgewichtslage eines der unseren Untersuchungen zugrunde liegenden, an beiden Enden gelenkig gelagerten und unter einer zentrisch oder exzentrisch angreifenden Druckkraft $P = b \cdot h \cdot \sigma_m$ stehenden Baustahlstäbe von rechteckigem Querschnitt, so ergibt sich an einer beliebigen Stelle dieses Stabes ein Hebelsarm des Kraftangriffes $y = p + \bar{y}$ (wobei p die Anfangsexzentrizität und \bar{y} die seitliche Ausbiegung an dieser Stelle vorstellt) und damit ein wirksames Biegemoment $M_a = \sigma_m \cdot b \cdot h \cdot y$, dem aus Gleichgewichtsgründen das Spannungsmoment M_i wertgleich sein muß. Diesem M_i ist eine Summe $(\varepsilon_i + \varepsilon_a)$ der spezifischen Längenänderungen am inneren und äußeren Querschnittsrande zugeordnet (vgl. den 5. Abschnitt), der eine Verdrehung ψ_1 der nach Voraussetzung eben bleibenden Querschnittsflächen entspringt und die eine in Gleichung I des 6. Abschnittes festgelegte Schwerachsenkrümmung $\frac{1}{\rho_s}$ erzeugt. Außer

dieser durch die Biegespannungen verursachten Verformung erwächst zusätzlich eine Verzerrung zufolge der Schubspannungen, da, vom Scheitelpunkt abgesehen, an jeder Stelle der Gleichgewichtslage eine Querkraft $Q = \sigma_m \cdot b \cdot h \cdot \bar{y}' = \sigma_m \cdot b \cdot h \cdot y'$ wirksam ist und eine spezifische Schwerachsenverschiebung $\gamma = \omega \cdot \sigma_m \cdot y'$ hervorruft; die Größe des Beiwertes ω hängt hiebei allgemein von der Verteilung der Schubspannungen und der Gleitmoduli, somit vom Spannungsbild ab und ist bei vorgegebenen mittleren Druckspannungswerten σ_m durch die Randdehnungssumme $(\varepsilon_i + \varepsilon_a)$ eindeutig festlegbar (vgl. 8. Abschnitt). Der Betrag, mit dem die Schubspannungen an der Achsenkrümmung beteiligt erscheinen, ergibt sich durch Differentiation von γ unmittelbar mit

$$\frac{d\gamma}{dx} = \omega \cdot \sigma_m \cdot y'' + \frac{d\omega}{dx} \cdot \sigma_m \cdot y' = \omega \cdot \sigma_m \cdot y'' + \frac{d\omega}{dy} \cdot \sigma_m \cdot y'^2.$$

Von der an einer bestimmten Stelle der Gleichgewichtslage tatsächlich bestehenden Krümmung

$$\left(\frac{1}{\rho_s} \right) \doteq -\bar{y}'' = -y''$$

der Schwerachse entspringt demnach den Biegespannungen nur der (allerdings weit überwiegende) Anteil

$$\left(\frac{1}{\rho_s} \right) - \frac{d\gamma}{dx}$$

und nur diesem entspricht die rechte Gleichungsseite von I, p. 487, so daß die Differentialbeziehung der untersuchten Gleichgewichtslage in strenger Fassung

$$y'' \left[1 - \omega \cdot \sigma_m - \frac{d\omega}{dy} \sigma_m \frac{y'^2}{y''} \right] \left[1 - \varepsilon_m - \frac{\delta}{h} (\varepsilon_i + \varepsilon_a) \right] = \\ = - \frac{\varepsilon_i + \varepsilon_a}{h} \quad .II$$

lautet. Solange im ganzen ausgebogenen Stabe das Hooke'sche Gesetz gilt, also sämtliche Randspannungen unter der Proportionalitätsgrenze liegen, besteht

$$- \frac{\varepsilon_i + \varepsilon_a}{h} = - \frac{2}{E \cdot h} \sigma_{ba} = - \frac{P \cdot y}{E \cdot J}$$

(wobei J das Trägheitsmoment des Stabquerschnittes vorstellt) und es ist

$$\delta = 0, \quad \omega = \frac{1 \cdot 2}{G} = \text{konstant}, \quad \frac{d\omega}{dy} = 0.$$

Wird, wie üblich, der Einfluß der Achsenverkürzung ε_m vernachlässigt, so folgt aus II die Differentialgleichung

$$y'' \cdot \left(1 - \frac{1 \cdot 2}{G} \frac{P}{F} \right) + \frac{P}{EJ} y = 0,$$

die nach Einführung der Randbedingungen auf die kritische Axialkraft

$$P_K = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J}{L^2} \left(1 - \frac{1 \cdot 2}{F \cdot G} \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J}{L^2} \right)$$

führt; die Euler'sche Knicklast erfährt somit durch den Einfluß der Schubspannungen eine allerdings nur verschwindend geringe Verkleinerung.

Wird, wie es beim exzentrischen Knickproblem grundsätzlich erforderlich ist, im Stabe der Hooke'sche Bereich überschritten,

dann sind die Funktionen $(\varepsilon_i + \varepsilon_a)$, ω und $\frac{\delta}{h}$ durch ihre graphischen Darstellungen festgelegt und die Gleichung II erhält zweck-

mäßig (unter Vernachlässigung der Produkte der relativ äußerst kleinen Korrekturglieder) die Form

$$y'' \cdot (1 - \alpha) = - \frac{\varepsilon_i + \varepsilon_a}{h}, \text{ wobei}$$

$$\alpha = \omega \cdot \sigma_m + \frac{d\omega}{dy} \sigma_m \frac{y'^2}{y''} + \varepsilon_m + \frac{\delta}{h} \cdot (\varepsilon_i + \varepsilon_a). \quad \dots \text{IIa}$$

Im Korrekturfaktor $(1 - \alpha)$ kommt dann die Beeinflussung der Achsenkrümmung durch die Schubspannungen, die Verschiedenartigkeit des Gleitwiderstandes, der Achsenverkürzung und Nulllinienverschiebung zum Ausdruck. Die bei der Integration dieser Gleichung zu befriedigenden Randbedingungen verlangen für die

Stabmitte $x = \frac{L}{2} \quad y' = 0$ und für die Stabenden $x = 0$, be-

ziehungsweise $L, y' = p$, während die Gelenkigkeit der Lagerung schon in der Herleitung in Rücksicht gezogen wurde. Zieht man einzig die Verdrehung der Querschnittsflächen durch die Biegespannungen in Betracht, so gilt wegen

$$\alpha = 0, \quad y'' = - \frac{\varepsilon_i + \varepsilon_a}{h}$$

als scharfer Näherungswert und es wird mit Verwertung des bekannten Zusammenhanges

$$(y')^2 = 2 \cdot \int y'' \cdot dy$$

die Beziehung

$$\frac{\bar{y}'^2}{y''} = \frac{2 \cdot \int_{y_0}^{y_1} \frac{\varepsilon_i + \varepsilon_a}{h} \cdot dy'}{\frac{\varepsilon_i + \varepsilon_a}{h}}$$

erhalten, die mit ausreichender Schärfe bei der Ermittlung des sehr kleinen » α « verwendet werden kann; y_0 ist hierbei die Gesamtauslenkung in Stabmitte, in der die Randbedingung $y'_0 = 0$ gewahrt erscheint. Der Verlauf des Korrekturgliedes α ist damit für eine vorgegebene mittlere Druckspannung

$$\sigma_m = \frac{P}{b \cdot h}$$

und eine gewählte Scheitelauslenkung $y_0 = p + \bar{y}_0$ der gesuchten, bezüglich der Stabschlankheit unbestimmten Gleichgewichtslage als Funktion von y graphisch festlegbar; als Beispiel wurden in Fig. 7

für $\sigma_m = 1000$ at und $\frac{y_0}{h} = 0.135, 0.270, 0.405, 0.540$ und 0.675 diese α -Linien ermittelt. Zu jedem Verhältnis $\frac{y}{h}$ gehört nach Tab. I, p. 482, neben einem $\frac{\delta}{h}$ ein Wert $(\varepsilon_i + \varepsilon_a)$ und zu diesem nach den Darlegungen des 8. Abschnittes ein bestimmter Beiwert ω , so daß die funktionalen Zusammenhänge

$$(\varepsilon_i + \varepsilon_a) = f_1\left(\frac{y}{h}\right), \quad \omega = f_2\left(\frac{y}{h}\right) \quad \text{und} \quad \frac{\delta}{h} = f_3\left(\frac{y}{h}\right)$$

als Diagrammkurven dargestellt werden können. Der erste und vierte Summand von α ist damit in seiner Abhängigkeit von $\frac{y}{h}$ bestimmbar, während sich für den dritten unmittelbar (vgl. p. 491)

$$\varepsilon_m = \frac{\sigma_m}{\mathcal{E}}$$

ergibt, so daß nur noch der Verlauf

$$\frac{d\omega}{dy} \cdot \sigma_m \cdot \frac{y'^2}{y''} = \frac{d\omega}{d\left(\frac{y}{h}\right)} \cdot \frac{y'^2}{h \cdot y''} \quad \sigma_m = f_4\left(\frac{y}{h}\right)$$

zu ermitteln bleibt. Dem ω -Diagramm kann der erste Faktor als Neigung der Tangente an die ω -Linie entnommen werden und das $(\varepsilon_i + \varepsilon_a)$ -Diagramm liefert den Integralwert

$$\frac{y_0}{h} \int \frac{y_0}{h} (\varepsilon_i + \varepsilon_a) d\left(\frac{y}{h}\right) = \frac{1}{2} \cdot y'^2,$$

so daß mit Zuziehung der oben angeführten Differentialbeziehung auch die Größe von $\frac{y'^2}{h \cdot y''}$ berechnet werden kann. In Fig. 7 ist der auf diese Art ermittelte Verlauf des Korrekturgliedes α für die fünf festgelegten Scheitelauslenkungen y_0 dünn strichliert dargestellt. Bei Hebelsarmverhältnissen $\frac{y}{h} < 0.150$, also Momenten-

werten $M_a = M_i \leq 150 \cdot b \cdot h^2$, überschreitet für $\sigma_m = 1000$ at, wie aus Tab. I zu ersehen ist, die auftretende Randspannung nicht die Proportionalitätsgrenze, so daß wir im Diagramm Fig. 7 den Bereich der Hooke'schen Gesetzmäßigkeit durch die vertikale Gerade

»H« mit der Gleichung

$$\frac{y'}{h} = \frac{y_H}{h} = 0 \cdot 150$$

begrenzen können. Innerhalb dieses, naturgemäß nur für $\sigma_m < \sigma_P$ existierenden Gebietes verlaufen die α -Linien horizontal in der Höhe

$$\alpha = \omega \cdot \sigma_m + \frac{\sigma_m}{E} = 0 \cdot 001396 + 0 \cdot 00045 = 1 \cdot 85 \text{ ‰}$$

und nur für die größte Scheitelauslenkung $y_0 = 0 \cdot 675 \cdot h$ steigt sie stärker bis zu einem max. $\alpha = 2 \cdot 33 \text{ ‰}$ an; dieser Höchstbetrag tritt ungefähr in den Stabdrittelpunkten auf, da $\frac{d\omega}{dy}$ gegen die Stabmitte zu-, y' hingegen abnimmt. Im unelastischen Bereiche $\sigma_m > \sigma_P$ vermag α bedeutend größere Werte zu erreichen, aber auch hier besitzt dieses Korrekturglied mehr theoretisches Interesse und sein Einfluß auf das Endergebnis kann praktisch vernachlässigt werden.

Ist der Korrekturfaktor $(1-\alpha)$ an jeder Stelle $\frac{y}{h}$ bekannt, so sind mit Verwendung der Tab. I die Größen $\frac{\varepsilon_i + \varepsilon_a}{1-\alpha}$ ermittelbar und es kann der durch die Differentialgleichung IIa

$$h \cdot y'' = - \frac{\varepsilon_i + \varepsilon_a}{1-\alpha} = f_5 \left(\frac{y}{h} \right)$$

festgelegte Verlauf der zweiten Ableitung im Diagramm Fig. 7 (als strichpunkt-punktierte Linie) eingetragen werden. Die Lösung dieser Bedingungsgleichung, die den p. 497 festgesetzten Randbedingungen unterliegt, ist, wie schon erwähnt wurde, auf Quadraturen zurückführbar. Der Substitution

$$y'' = \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{2} y'^2 \right)$$

entspringt die Beziehung

$$\frac{1}{2} y'^2 = \int_y^{y_0} y'' dy = \int_{\frac{y}{h}}^{\frac{y_0}{h}} f_5 \left(\frac{y}{h} \right) d \left(\frac{y}{h} \right),$$

so daß durch eine einfache Summenlinienbildung der Verlauf von

$$\frac{1}{2} y'^2 = f_6 \left(\frac{y}{h} \right)$$

erhalten werden kann; diese Summenkurve hat gemäß der zu wählenden Randbedingung $y'_0 = 0$ im vorgegebenen Abszissenpunkt $\frac{y_0}{h}$ anzusetzen und steigt gegen den Ursprung an. Verdoppelt man nun die einzelnen Ordinatenwerte dieser Linie, zieht die Wurzel und berechnet den reziproken Wert, so ergibt sich im Diagramm unmittelbar das Bild des funktionalen Zusammenhanges

$$\frac{1}{y'} = f_1 \left(\frac{y}{h} \right).$$

In Fig. 7 wurde der dieserart ermittelte Verlauf der y'^2 - und $\frac{1}{y'}$ -Linie für eine gewählte Scheitelauslenkung $y_0 = 0,675 \cdot h$ zur Darstellung gebracht und als Ersatz für einen Maßstab die Größe der Ursprungsordinate vermerkt. Die $\frac{1}{y'}$ -Kurve steigt in der Nähe des Scheitels stark an und nähert sich asymptotisch der Geraden

$$\frac{y'}{h} = \frac{y_0}{h},$$

so daß nunmehr eine Unterteilung des Integrationsbereiches, etwa bei

$$y_1 = \frac{2}{3} y_0,$$

erforderlich wird. Im Gebiete $p < y < y_1$ ist die Beziehung

$$\frac{x}{h} = \int_{\frac{p}{h}}^{\frac{y}{h}} \frac{1}{y'} \cdot d \left(\frac{y}{h} \right)$$

unmittelbar zu verwenden und dementsprechend die Summenlinie zur $\frac{1}{y'}$ -Kurve zu bestimmen, die wegen der Randbedingung $x = 0, y = p$ im Abszissenpunkt

$$\frac{y}{h} = \frac{p}{h}$$

beginnt. Im Bereiche $y_1 < y < y_0$ wird zweckmäßig die Gleichung

$$\frac{x}{h} = \int_{y'_1}^{y'} \frac{1}{h \cdot y''} dy'$$

verwertet; die Größen y' und $h \cdot y''$ sind an jeder Stelle $\frac{y'}{h}$ bekannt und es kann daher auch die Summenlinie dieser Kurve

$$\frac{1}{h \cdot y''} = f_8(y')$$

ermittelt und der resultierende $\frac{x}{h}$ -Verlauf eindeutig auf $\frac{y'}{h}$ bezogen werden. Übergreifen die beiden Integrationsbereiche einander, so erhält man willkommene Kontrollen für die zur Summenlinienbildung nötigen Planimetrierungen. Die auf diese Weise für vorgegebene

$$\sigma_m, \frac{p}{h} \text{ und } \frac{y_0}{h}$$

graphisch festgelegte Beziehung

$$\frac{x}{h} = F\left(\frac{y'}{h}\right)$$

liefert unmittelbar den Verlauf der ausgebogenen Schwerachse der gesuchten Gleichgewichtslage, während der für die Stelle $\frac{y_0}{h}$ er-

haltene Endwert $\frac{L}{2h}$ der Quadratur das dieser Gleichgewichtslage zugeordnete Verhältnis der halben Stablänge zur Querschnittshöhe vorstellt. Erfährt die Achsenlänge L noch die im 6. Abschnitt angeführte Korrektur ΔL , so ergibt sich mit

$$\frac{Q}{i} = 2 \cdot \sqrt{12} \cdot \frac{L + \Delta L}{2h}$$

die Schlankheit jenes spannungslosen Stabes, der die Axiallast $P = \sigma_m \cdot b \cdot h$ bei gegebener Angriffsexzentrizität p und Scheitelauslenkung $y_0 = p + \bar{y}_0$ im Gleichgewicht zu halten vermag.

Es ist grundsätzlich ausreichend, die Deformationsfiguren

$$\frac{x}{h} = F\left(\frac{y'}{h}\right)$$

nur für den Fall des zentrischen Kraftangriffes $p = 0$ zu bestimmen, da man aus diesen unmittelbar auch die Gleichgewichtsformen unter exzentrischen Kraftangriffen derselben Axiallast erhält. Die Anfangsexzentrizität p kommt im Integrationsverfahren nur als untere Integralgrenze von $\frac{x}{h}$ vor und es besteht daher die Deformationsfigur unter einem exzentrischen Angriff

$$\frac{p}{h} < \frac{y_0}{h}$$

einfach aus dem innerhalb der beiden Ordinatenwerte

$$\frac{y}{h} = \frac{P}{h}$$

liegenden Ast der für zentrischen Angriff ermittelten Gleichgewichtslage.

Im Diagramm Fig. 7 wurden in der geschilderten Art fünf ausgebogene Gleichgewichtsformen eines beiderseits gelenkig gelagerten Baustahlstabes von rechteckigem Querschnitt ermittelt, dessen axiale Druckkraft P zentrisch angreift und eine mittlere Druckspannung

$$\sigma_m = \frac{P}{b \cdot h} = 1000 \text{ at}$$

erzeugt. Die sich ergebenden Endwerte der Quadratur betragen für diese durch die gewählten Scheitelauslenkungen $y_0 = 0,135, 0,270, 0,405, 0,540$ und $0,675 \cdot h$ gekennzeichneten Deformationsfiguren der Reihe nach $\frac{L}{2h} = 21 \cdot 297, 20 \cdot 987, 19 \cdot 736, 16 \cdot 903$ und $10 \cdot 544$, so daß nach Berücksichtigung der geringfügigen Zusatzglieder ΔL die auf den spannungslosen Zustand bezogenen Gleichgewichtsschlankheiten $\frac{\mathcal{L}}{i} = 147 \cdot 6, 145 \cdot 3, 136 \cdot 9, 117 \cdot 3$ und $73 \cdot 1$ resultieren.

Innerhalb des Hooke'schen, im Diagramm durch die Ordinatenachse und die mit »H« bezeichnete Gerade mit der Gleichung

$$\gg \frac{y}{h} = \frac{y_H}{h} = 0 \cdot 150 \ll$$

begrenzten Bereiches verläuft die $\frac{\varepsilon_i + \varepsilon_a}{1 - \alpha}$ -Linie geradlinig, da α konstant und

$$(\varepsilon_i + \varepsilon_a) = \frac{P}{EJ} \cdot y$$

ist. Die erste Quadratur liefert daher für $y_0 \leq y_H$

$$y'^2 = 2 \cdot \int_y^{y_0} \frac{P \cdot y}{EJ(1-\alpha)} dy = \frac{P}{E \cdot J \cdot (1-\alpha)} (y_0^2 - y^2)$$

und aus der zweiten folgt

$$x = \int_0^y \frac{1}{y'} dy = \sqrt{\frac{EJ(1-\alpha)}{P}} \arcsin \frac{y}{y_0}$$

oder

$$y = y_0 \cdot \sin x \sqrt{\frac{P}{EJ(1-\alpha)}}$$

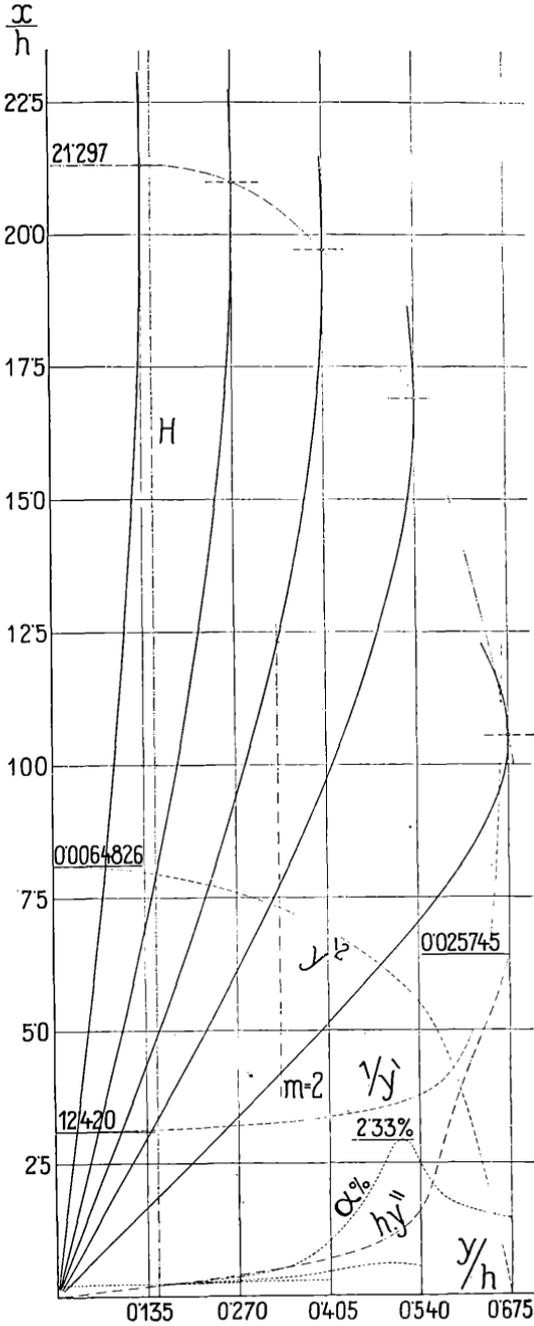


Fig. 7.

Im Bereiche der Hooke'schen Gesetzmäßigkeit gilt somit für die unseren Betrachtungen zugrunde liegenden, relativ sehr kleinen Ausbiegungen das Gesetz der Sinuslinie, dem alle in Fig. 7 links von »H« liegenden Äste der Gleichgewichtsformen folgen müssen. Demgemäß ist auch die längste der eingezeichneten fünf Deformationsfiguren, die sich mit

$$\frac{y_0}{h} = 0 \cdot 135$$

zur Gänze innerhalb von »H« befindet, eine Halbwelle der Sinuslinie und man könnte in diesem Falle die gesuchte Gleichgewichtsschlankheit auch unmittelbar aus der Differentialgleichung IIa mit den oben angeführten Werten berechnen; man würde hiebei

$$\frac{Q}{i} = \pi \cdot \sqrt{\frac{E}{\sigma_m}} \cdot \sqrt{1-\alpha} \cdot (1 + \epsilon_m)$$

und wegen $E = 2,210.000$ at, $\sigma_m = 1000$ at, $\alpha = 1,85\%$, $\epsilon_m = 0,45\%$ wieder das angegebene

$$\frac{Q}{i} = 147 \cdot 6$$

erhalten. Mit wachsender Scheitelausbiegung $y_0 > y_H$ konzentriert sich die Krümmung der Deformationsfigur immer mehr in der Scheitelgegend und die Abweichungen von der Sinusform nehmen stark zu.

Mit wachsender mittlerer Druckspannung rückt »H« gegen den Ursprung und im unelastischen Bereich $\sigma_m > \sigma_P$ gibt es kein Hooke'sches Gesetz und damit auch keine Sinuslinie als Gleichgewichtsform. Nimmt man jedoch außerhalb des Hooke'schen Bereiches für die Gleichgewichtsformen das Sinusgesetz

$$\frac{y}{h} = \frac{y_0}{h} \sin \frac{\pi x}{L}$$

willkürlich an und legt der Rechnung nur den stärkst beanspruchten Scheitelquerschnitt ($x = \frac{L}{2}$, $y = y_0$) zugrunde, so erhält man nach zweimaliger Ableitung

$$-\frac{y_0''}{h} = \frac{y_0}{h} \frac{\pi^2}{L^2}$$

und daraus als Gleichgewichtslänge

$$L = \pi \sqrt{\frac{y_0}{-y_0''}}$$

Nun ist, wie wir gesehen haben, jedem $\frac{y}{h}$ ein bestimmter Wert

$$\frac{\varepsilon_i + \varepsilon_a}{1 - \alpha} = -h \cdot y''$$

zugeordnet (vgl. Fig. 7 oder die Tab. p. 482), so daß für jede gewählte Scheitelauslenkung $y = y_0$ die Größe

$$\frac{L}{h} = \frac{L}{i \sqrt{12}} = \pi \cdot \sqrt{\frac{y_0 \cdot (1 - \alpha)}{h \cdot (\varepsilon_i + \varepsilon_a)}}$$

und damit die auf den spannungslosen Zustand bezogene Gleichgewichtsschlankheit $\frac{\mathcal{L}}{i}$ bestimmt werden kann. Man erhält bei-

spielsweise für $\sigma_m = 1000$ at und $\frac{y_0}{h} = 0 \cdot 180, 0 \cdot 210, 0 \cdot 270,$

$0 \cdot 360, 0 \cdot 405$ der Reihe nach die Werte $\frac{\mathcal{L}}{i} = 147 \cdot 3, 146 \cdot 5,$

$143 \cdot 8, 135 \cdot 7, 131 \cdot 0$ und vermag schon bei diesen ganz geringfügigen Überschreitungen des Hooke'schen Bereiches aus einem Vergleich mit den strengen Werten (vgl. Fig. 8) das rasche Anwachsen der Abweichungen zu erkennen. Die Annahme eines Astes oder gar einer ganzen Halbwelle der Sinuslinie (vgl. den 4. Abschnitt) für die Gleichgewichtsformen unter exzentrischem Druck ist daher selbst hier im elastischen Bereich nur eine gröbere Annäherung.

10.

Ist eine ausreichende Anzahl von ausgebogenen, zentrisch-axial gedrückten Gleichgewichtsformen für eine bestimmte mittlere Druckspannung

$$\sigma_m = \frac{P}{b \cdot h}$$

graphisch festgelegt, so sind damit, wie schon bemerkt wurde, auch sämtliche Deformationsfiguren für exzentrische Angriffe » p « derselben Axialkraft P bestimmt, da diese identisch sind mit den innerhalb der beiden Ordinatenwerte

$$\frac{y}{h} = \frac{p}{h}$$

liegenden Ästen der ermittelten Gleichgewichtslagen. An Stelle der Verhältniszahlen $\frac{p}{h}$ wollen wir im weiteren die schon erwähnten

$$\text{»Exzentrizitätsmaße } m = \frac{6 \cdot p}{h} = \frac{p}{k} \text{«}$$

verwenden, die uns das Verhältnis der Anfangsexzentrizität p zur Kernweite k des Querschnittes angeben. Wird demnach eine Deformationsfigur des zentrischen Druckes durch eine zur Ordinatenachse parallele Gerade

$$\frac{y}{h} = \frac{p}{h} = \frac{m}{6}$$

zum Schnitt gebracht, so stellt das innerhalb der beiden (immer symmetrisch zum Scheitel liegenden) Schnittpunkte befindliche Kurvenstück die gesuchte Gleichgewichtsform und die Ordinaten-differenz der beiden Schnittpunkte den gesuchten Verhältniswert $\frac{L}{h}$ der Gleichgewichtslänge für den Fall eines vorhandenen Exzentrizitätsmaßes » m « vor.

In Beispiel Fig. 7 wurde die Vertikale

$$\text{»} \frac{y}{h} = \frac{p}{h} = 0.333 \text{«}$$

eingetragen, die einem Angriff der Axiallast $P = 1000 \cdot b \cdot h$ in der doppelten Kernweite

$$m = \frac{6 \cdot p}{h} = 2$$

entspricht; sie schneidet, wie aus der Figur zu ersehen ist, die drei Gleichgewichtslagen

$$\frac{y_0}{h} = 0.675, 0.540, 0.405 > \frac{p}{h}$$

und man vermag die Verhältniswerte

$$\frac{L}{2h} = 6.34, 9.36 \text{ und } 7.38$$

als Entfernungen dieser Schnittpunkte von den Stabmitten dem Diagramm unmittelbar zu entnehmen. Wird noch das Korrekturglied ΔL (vgl. 4. Abschnitt) in Rücksicht gezogen, so ergeben sich die Gleichgewichtsschlankheiten

$$\frac{L}{i} = \frac{L + \Delta L}{h} \quad \sqrt{12} = 44.04, 64.92 \text{ und } 51.18,$$

die dann im Diagramm Fig. 8 als Ordinatenwerte obigen Scheitel-auslenkungen $y_0 = p + \bar{y}_0 = 0.675, 0.540 \text{ und } 0.405 \cdot h$ zugeordnet

erscheinen. Auf diese Weise wurden die Gleichgewichtsschlankheiten $\frac{\mathcal{L}}{i}$ einer ausreichenden Anzahl von Deformationsfiguren des Beispiels $\sigma_m = 1000 \text{ at}$, Fig. 7, für die Exzentrizitätsmaße $m = 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1, 2, 3$ und 3.5 ermittelt und die erhaltenen Ergebnisse im Diagramm Fig. 8 als Funktion der Gesamtauslenkung

$$\frac{y_0}{h} = \frac{p}{h} + \frac{\bar{y}_0}{h}$$

eingetragen. Die Diagrammlinie $m = 0$, die einen unbegrenzten Ast in der Ordinatenachse besitzt, weist schon im Ursprung einen endlichen Ordinatenwert auf, der die Knickschlankheit unter zentrischem Druck vorstellt, während alle Diagrammkurven » $m > 0$ « in den Punkten

$$\frac{y_0}{h} = \frac{p}{h} = \frac{m}{6}$$

der Abszissenachse ansetzen. Die vertikale Gerade » H « mit der Gleichung

$$\frac{y}{h} = 0.150$$

begrenzt wieder den Bereich der Hooke'schen Gesetzmäßigkeit, innerhalb dessen die Deformationsfigur dem Sinusgesetz gehorcht. Würde man in der Herleitung den strengen analytischen Ausdruck für die Krümmung in Rechnung stellen, so würden die Ordinatenwerte aller » m «-Linien eine additive Korrektur erfahren, deren Betrag mit der Abszisse wächst, jedoch bei den unseren Betrachtungen zugrunde liegenden Ausbiegungen von Bruchteilen der Querschnittshöhe (max. $y_0 = 0.675 \cdot h$) mit weit weniger als 1% von schlechtweg unfaßbarer Kleinheit ist. Demgemäß wäre dann auch für die Diagrammlinie » $m = 0$ « innerhalb des Hooke'schen Bereiches an Stelle des geradlinigen Verlaufes eine äußerst geringfügig ansteigende, mit horizontaler Tangente anlaufende Kurve zu setzen, so daß diese Diagrammlinie, genau genommen, ihre Maximalordinate in unmittelbarer Nähe von » H « besitzt.

Eine Betrachtung des Diagramms Fig. 8 führt zur Erkenntnis, daß ein Baustahlstab von vorgegebener, mit einem Exzentrizitätsmaß $m = \frac{p}{k}$ angreifender achsialen Druckkraft $P = \sigma_m \cdot b \cdot h$ und bestimmter, unterhalb des kritischen Wertes gelegener Stab-schlankheit $\frac{\mathcal{L}}{i}$ grundsätzlich mehr als eine Gleichgewichtslage besitzt, da sämtliche » m «-Linien von einer ausreichend tief liegenden horizontalen Geraden » $\frac{\mathcal{L}}{i} = \text{konst.}$ « in mindestens zwei Punkten

geschnitten werden. Im Falle $m = 0$ liegt der eine Schnittpunkt auf dem erwähnten, unbeschränkt mit der Ordinatenachse zusammenfallenden Ast der Diagrammlinie, so daß die ausbiegungsfreie Form $y_0 = \bar{y} = 0$ stets eine mögliche Gleichgewichtslage vorstellt. Bei jeder noch so kleinen Angriffsexzentrizität hingegen, also für jede

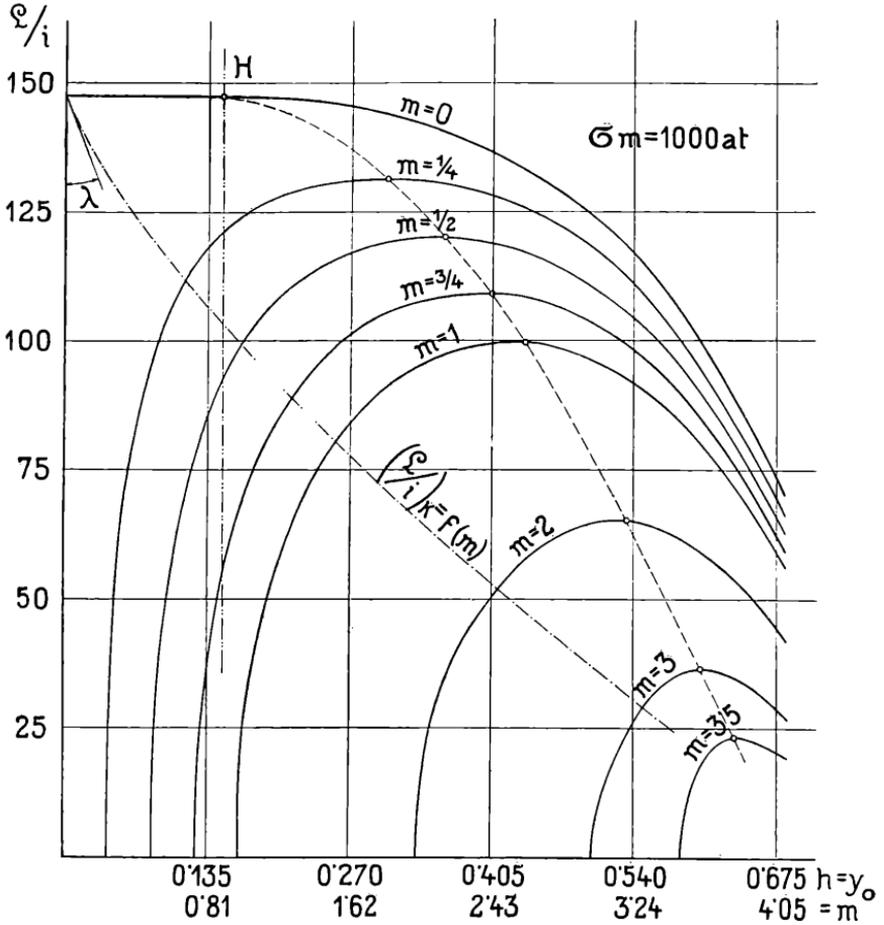


Fig. 8.

» $m > 0$ «-Linie, sind beide Gleichgewichtsformen ausgebogen und die zugehörige Gesamtauslenkung der Stabmitte $y_0 = p + \bar{y}_0$ kann unmittelbar dem Diagramm entnommen werden. Wird die Schlankheit des betrachteten Stabes bei unverändertem »P« vergrößert, so liegt die Gerade » $\frac{Q}{i} = \text{konst.}$ « höher und die beiden, die Scheitel- ausbiegung der Gleichgewichtsform festlegenden Schnittpunkte rücken näher aneinander. Die höchste unter diesen Geraden, die mit der

» m «-Linie noch Punkte gemeinsam hat und damit Gleichgewichtszustände zuläßt, ist die an die » m «-Kurve gelegte horizontale Tangente;

die ihr entsprechende Maximalordinate $\left(\frac{\mathcal{Q}}{i}\right)_K$ wird die »Knickschlankheit« des exzentrisch gedrückten Stabes und umgekehrt die dieser Stabschlankheit zugeordnete Gleichgewichtslast » $P = \sigma_m \cdot b \cdot h$ « = $1000 \cdot b \cdot h$ « die »Knickkraft« genannt.

Bedeutungsvoll ist hierbei, daß in den Fällen $m \leq 1$ die Knickung gemäß Fig. 8 schon bei Scheitelausbiegungen $y_0 < 0,450 \cdot h$ eintritt, bei denen nach Tab. I, p. 482, die größte Randpressung noch weit unter der Quetschgrenze liegt. Im Falle eines zentrischen Angriffes » $m = 0$ « ist diese Knickschlankheit, wenn man von den praktisch belanglosen Korrekturen α und ΔL absieht, identisch mit dem Euler-Kármán'schen Werte (l. c.). Diese »zentrische« Knickschlankheit ist die größtmögliche; alle einem exzentrischen Angriff derselben Axialkraft entspringenden »exzentrischen« Knickschlankheiten sind grundsätzlich kleiner. Fig. 8 zeigt auch den Verlauf der

$\left(\frac{\mathcal{Q}}{i}\right)_K$ -Werte als Funktion des Exzentrizitätsmaßes » m « (strichpunktierte Linie, unterer Abszissenmaßstab) und läßt den starken Abfall der Knickschlankheiten oder, was qualitativ das gleiche ist, den Abfall der Knicklasten bei wachsender Angriffsexzentrizität erkennen; die reziproken Werte des Anlaufwinkels λ dieser Diagrammkurve vermögen im Rahmen des zentrischen Knickproblems als Maß der »Empfindlichkeit bezüglich unvermeidlicher Angriffsexzentrizitäten« zu dienen. Mit wachsender mittlerer Druckspannung

nimmt die Steilheit dieser $\left(\frac{\mathcal{Q}}{i}\right)_K = f(m)$ -Kurve und damit auch

die »Empfindlichkeit $\frac{1}{\lambda}$ zu, um dann im unelastischen Bereiche

$\sigma_m > \sigma_P$ (vgl. dazu auch den 3. Abschnitt) eine auch empirisch auffallende Größe zu erreichen.

Die im 2. Abschnitt allgemein dargelegten Stabilitätsverhältnisse eines axial gedrückten Stabes aus einem elastisch-plastischen Material sind an Hand des Diagramms Fig. 8 leicht zu verfolgen. Solange die Stabschlankheit bei gegebener Axialkraft unterhalb der Knickschlankheit oder, was qualitativ das gleiche ist, die Axialkraft eines vorgegebenen Stabes unterhalb der Knicklast bleibt, existieren (mindestens) zwei mögliche Gleichgewichtszustände, denen verschieden große Scheitelausbiegungen y_I, y_{II} der Stabachse zugehören; im Falle eines zentrischen Angriffes ist stets $y_I = 0$. Geringfügige Störungen der ersten, weniger ausgebogenen Gleichgewichtsform werden vom belasteten Stab rückgängig gemacht, da im Diagramm einem etwas vergrößerten, beziehungsweise verkleinerten Abszissenwert $y \leq y_I$ einer » m «-Linie schon eine größere, beziehungsweise kleinere Gleichgewichtsschlankheit (oder auch

Gleichgewichtslast) entspricht und somit in dem einen Fall die inneren, im anderen die äußeren Kräfte die Herstellung des ursprünglichen Zustandes » y_I « erzwingen. Erreicht die störende Ausbiegung jedoch den Wert $y = y_{II}$ der zweiten möglichen Gleichgewichtslage, so vermag sie der belastete Stab nicht mehr rückgängig zu machen; der erste Gleichgewichtszustand ist demnach als »beschränkt stabil« zu bezeichnen, wobei als »Stabilitätsmaß« die Größe $Y = y_{II} - y_I$ oder die zu dieser Ausbiegung erforderliche Störungsarbeit » A « dienen kann, für die etwa der Flächeninhalt

der m -Linie oberhalb der Schnittgeraden » $\frac{Q}{i} = \text{konst.}$ « ein anschauliches Bild zu geben vermag. Die zweite Gleichgewichtsform ist hinsichtlich einer Ausbiegungsverkleinerung im gleichen Maße »beschränkt labil«, da der belastete Stab in die erste Form zurückzufedern trachtet, hingegen »unbeschränkt labil« bezüglich einer Ausbiegungsvergrößerung, da die m -Linie für alle vom Bruchstadium ausreichend weit entfernten Gleichgewichtszustände » $y > y_{II}$ « Stabschlankheiten (oder Axiallasten) fordert, die kleiner sind als die vorhandenen Werte (»Erschlaffungszustand«). Im Knickzustand tangiert die

Gerade » $\frac{Q}{i} = \left(\frac{Q}{i}\right)_K = \text{konst.}$ « an die m -Linie und liefert damit

zwei unendlich nahe benachbarte Gleichgewichtslagen; die beschränkte Stabilität, beziehungsweise Labilität artet hier in einem »Indifferentismus bezüglich einer unendlich kleinen Ausbiegung« aus und das die beiden Lagen trennende Stabilitätsmaß wird Null. Für Stabschlankheiten (beziehungsweise Axiallasten) oberhalb des kritischen Wertes gibt es für $m = 0$ nur den Schnittpunkt mit der Ordinatenachse (geradlinige Gleichgewichtsform), für $m > 0$ überhaupt keinen Schnittpunkt und damit auch kein Gleichgewicht zwischen äußerem Angriff und innerem Widerstand. Innerhalb des elastischen Bereiches $\sigma_m < \sigma_P$ liefert die » $m = 0$ «-Linie im Euler'schen Knickzustand einen endlich erstreckten, auf den Hooke'schen Bereich beschränkten Indifferentismus. Würde man den strengen analytischen Ausdruck für die Achsenkrümmung berücksichtigen, so würde bei unveränderlicher Achsiallast für die Scheitelausbiegung eines rechteckigen Stabes innerhalb des Hooke'schen Bereiches die Beziehung (vgl. dazu v. Mises, l. c.)

$$\left(\frac{y_0}{h}\right)^2 = 0.0675 \cdot (L/i)^2 \cdot \left[\frac{(L/i)^2}{(L/i)_K^2} - 1 \right]$$

resultieren; nach dieser Formel ergibt sich mit $\sigma_m = 1000$ at, also $(L/i)_K = 147.6$ für die Grenze » $\frac{y_0}{h} = 0.150$ « der Hooke'schen

Gesetzmäßigkeit eine Erhöhung der Gleichgewichtsschlankheit (vgl. Fig. 8) von nicht einmal $0\cdot01\%$. Die einleitend erwähnte exakte Unterscheidung von drei Gleichgewichtszuständen an Stelle des Indifferentismus kommt demnach überhaupt erst bei Eisenstäben von extremer, im Bauwerk nie auftretender Schlankheit in Frage und nur derartige Stäbe (die auch bei großen Ausbiegungen den Hooke'schen Bereich nicht verlassen) vermögen dann unter zentrischen Achsiallasten, die verschwindend wenig über dem Eulerwert liegen, eine beschränkt stabile ausgebogene Gleichgewichtslage anzunehmen und besitzen erst nach einer weiteren äußerst kleinen Erhöhung der Achsiallast ausschließlich die labile gestreckte Gleichgewichtsform.

Bei großen mittleren Druckspannungen und großen Exzentrizitätsmaßen $m = \bar{m}$ kann die m -Linie die erreichte Maximalordinate $\left(\frac{\bar{Q}}{i}\right)_K$ im weiteren Verlaufe angenähert beibehalten, so daß im kritischen Zustand ein endlich erstreckter Indifferentismus besteht. Für Werte $m > \bar{m}$, beziehungsweise

$$\left(\frac{Q}{i}\right)_K < \left(\frac{\bar{Q}}{i}\right)_K$$

steigen dann die m -Kurven unentwegt langsam an, so daß sehr gedrungene, stark exzentrisch gedrückte Baustahlstäbe innerhalb des unseren Betrachtungen zugrunde liegenden, ausreichend weit vom Bruchstadium entfernten Spannungsbereiches nicht zu knicken vermögen.

Wie schon einführend festgestellt wurde, erscheint die Fassung der gewonnenen Untersuchungsergebnisse in Form eines Diagramms am zweckmäßigsten, das für die einzelnen Exzentrizitätsmaße » m « den Zusammenhang zwischen den ersten kritischen Werten der Stabschlankheit und der mittleren Druckspannung (Knickspannung) festlegt. Die Schar der » m «-Linien dieses Diagrammes schneidet eine abszissenparallele Gerade » $(\sigma_m)_K = \text{konst.}$ « in einer Serie von Punkten, deren Abszissenwerte $\left(\frac{Q}{i}\right)_K$ die zugeordneten kritischen

Schlankheiten vorstellen und unmittelbar aus einem Diagramm nach Fig. 8 zu entnehmen sind. Die Ermittlung und Auswertung der Gleichgewichtslagen hat daher in der im Beispiel Fig. 7, 8 für $(\sigma_m)_K = 1000$ at dargelegten Weise für eine ausreichende Anzahl von mittleren Druckspannungswerten zu erfolgen und liefert je eine Serie von Diagrammpunkten konstanter Ordinatengröße. Für praktische Zwecke ist es hiebei unbedingt ausreichend (vgl. auch p. 488), die Einflüsse α und ΔL der Schubspannungen, der Achsenverkürzung und Nulllinienverschiebung zu vernachlässigen; weiteren vereinfachenden Annahmen, wie etwa der willkürlichen Festsetzung eines

Deformationsgesetzes (vgl. p. 477), können jedoch merkliche Fehler entspringen.

Werden exzentrisch gedrückte Baustahlstäbe derart bemessen, daß die etwa unter der 2,8-fachen Baulast auftretenden, mit formeller Zuziehung des Hooke'schen Gesetzes und Rücksichtnahme auf die Stabausbiegung berechnete größte Randpressung die Quetschgrenze nicht überschreitet, so ist damit in der Regel auch eine ausreichende (unter Umständen jedoch unnötig große) Knick-sicherheit des Stabes gewährleistet.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften
mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse](#)

Jahr/Year: 1928

Band/Volume: [137_2a](#)

Autor(en)/Author(s): Chwalla Ernst

Artikel/Article: [Die Stabilität zentrisch und exzentrisch gedrückter Stäbe
aus Baustahl. 469-512](#)