

# Die Fehlertensoren und das Fehlerübertragungsgesetz der vektoralgebraischen Elementaroperationen

Von

Alfred Basch in Wien

(Mit 2 Textfiguren)

(Vorgelegt in der Sitzung am 12. Juli 1928)

## § 1. Der mittlere Fehler eines Skalars.

Während in früherer Zeit die Ausgleichsrechnung auch dann, wenn sie, wie es die Regel war, sich mit der Behandlung geometrischer Aufgaben befaßte, vollends auf dem Boden der Skalarmathematik stand, beginnt man in den letzten Jahren die vektorische Betrachtungs- und Behandlungsweise plangemäß in sie einzuführen.<sup>1</sup> Die bisherigen Veröffentlichungen sind mehr oder weniger der Behandlung von Spezialaufgaben gewidmet. Die folgenden Zeilen befassen sich mit zwei Grundfragen der vektorisch vorgehenden Fehlertheorie: der Frage der Fehler-, beziehungsweise Genauigkeitskennzeichnung und der Frage der Fehlerübertragung.

Liegen für eine Skalargröße  $X$  direkte oder indirekte Beobachtungen vor, so wird man immer anstreben, außer ihrem wahrscheinlichsten Wert (auch vorteilhaftester oder plausibelster Wert genannt) den sogenannten »mittleren Fehler«  $\mu_{xx}$  anzugeben, dessen Quadrat der im Sinne der Wahrscheinlichkeitsrechnung definierte Mittelwert sämtlicher möglichen Fehlerquadrate ist. Bedeutet  $x$  bei direkter Beobachtung den bei einer Bestimmung von  $X$  begangenen Fehler, bei indirekter Beobachtung jenen Fehler, der eine nach den Regeln der Differenzenrechnung sich ergebende Funktion der Fehler der direkt beobachteten Größen ist,  $\mathfrak{W}(x)$  die Wahrscheinlichkeitsdichte für das Auftreten des Fehlers  $x$ , so ist

$$\mu_{xx}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{W}(x) x^2 dx = M(x^2). \quad (1)$$

---

<sup>1</sup> R. Dietzius, Ausdehnung der Korrelationsmethode und der Methode der kleinsten Quadrate auf Vektoren. Diese Berichte. Abt. IIa, 125. Bd., 1916, p. 3 bis 20.

R. Schumann, Vektoranalytischer Ausgleich geschlossener geodätischer Figuren in der Ebene. Zeitschr. f. Vermessungswesen. Jahrg. 1926, p. 609 bis 626, 644 bis 662, 705 bis 712. (Dasselbst weitere Literaturangaben.)

Derselbe, Über vektorischen Ausgleich geschlossener geodätischer Figuren im Falle beliebiger Gewichte für Strecken und Richtungen. Diese Berichte. Abt. IIa, 136. Bd., 1927, p. 429 bis 434.

Im weiteren soll für Mittelwerte im Sinne der Wahrscheinlichkeitsrechnung immer nur das zuletzt angegebene Symbol verwendet werden. Der Vorzug des mittleren Fehlerquadrates gegenüber anderen mittleren Fehlerpotenzen liegt darin, daß es unter Voraussetzung einer Gauß'schen Fehlerverteilung aus einer endlichen Anzahl wahrer oder scheinbarer Fehler mit der größten relativen Genauigkeit bestimmbar ist. Die hier folgenden Betrachtungen sind aber von der Gültigkeit des Gauß'schen Gesetzes vollkommen unabhängig.

## § 2. Der Vektor und sein Fehlertensor.

Liegt ein System von  $n$  durch Beobachtungen irgendwelcher Art bestimmter Skalare  $X_v$  ( $v=1, \dots, n$ ) vor, so kann dieses System von Zahlen als Punkt mit den rechtwinkligen Koordinaten  $X_1, \dots, X_n$  in einem Raum von  $n$  Dimensionen oder in gleichwertiger Weise durch einen Vektor  $\mathfrak{X}$  in diesem Raum gedeutet werden. Die Berechtigung dieser Anschauungsweise wird sich aus ihrer Zweckmäßigkeit ergeben. Die Genauigkeit der Ortsbestimmung des Punktes, beziehungsweise die Genauigkeit des Vektors  $\mathfrak{X}$  ist hinreichend gekennzeichnet, wenn der mittlere Fehler der Komponente des Vektors in einer beliebigen durch den Einheitsvektor  $\mathfrak{c}$  gegebenen Richtung bestimmbar ist. Sind  $\mathfrak{e}_v$  ( $v=1, \dots, n$ ) die Einheitsvektoren in den Koordinatenrichtungen (Grundvektoren), so ist der Fehler des Vektors

$$\mathfrak{X} = \sum_1^n X_v \mathfrak{e}_v, \quad \mathfrak{x} = \sum_1^n x_v \mathfrak{e}_v$$

und der mittlere Fehler in der durch den Einheitsvektor

$$\mathfrak{c} = \sum_1^n \rho_v \mathfrak{e}_v, \quad \left( \sum_1^n \rho_v^2 = 1, \quad \rho_v \text{ Richtungskosinus} \right)$$

gegebenen Richtung

$$\mu_{cc}^2 = \mathbf{M}(\mathfrak{c} \mathfrak{x})^2 = \mathfrak{c} \mathbf{M}(\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{x}) \mathfrak{c} = \mathfrak{c} \mathbf{T} \mathfrak{c} \quad {}^1 \quad (2)$$

$\mathbf{T} = \mathbf{M}(\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{x})$  ist als Mittelwert — daher auch als Summe — symmetrischer Dyaden ein symmetrischer Affinor, das ist ein Tensor, der als »Fehlertensor« bezeichnet werden soll. Die  $\frac{1}{2} n(n+1)$  rechtwinkligen Skalarkomponenten des Fehlertensors erhält man durch linksfaktorielle und rechtsfaktorielle Multiplikation des Tensors mit je einem Grundvektor. Demnach sind die  $n$  Hauptglieder

$$\mathfrak{e}_v \mathbf{T} \mathfrak{e}_v = \mathfrak{e}_v \mathbf{M}(\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{x}) \mathfrak{e}_v = \mathbf{M}(x_v^2) = \mu_{vv}^2 \quad (v=1, \dots, n) \quad (3a)$$

<sup>1</sup> Hier und im weiteren bedeutet  $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$  das »unvollständige« oder »Gibbs'sche Produkt« der Vektoren  $\mathfrak{a}$  und  $\mathfrak{b}$ .

die mittleren Fehlerquadrate der  $n$ -Vektorkomponenten. Die  $\frac{1}{2}n(n-1)$  Seitenglieder

$$e_x T e_\lambda = e_x M(x, x) e_\lambda = M(x_x x_\lambda) = \mu_{x\lambda}^2 = \mu_{\lambda x}^2$$

$$(x, \lambda = 1, \dots, n; x \neq \lambda) \quad (3b)$$

sollen als »mittlere Fehlerrechtecke« bezeichnet werden. Die mittleren Fehlerquadrate sind immer positiv; die mittleren Fehlerrechtecke können positiv, null oder negativ sein.<sup>1</sup> Bei Darstellung mit Hilfe der Tensorkomponenten ergibt sich für das mittlere Fehlerquadrat der Vektorkomponente in der Richtung  $c$

$$\mu_{cc}^2 = M(x_1 \rho_1 + x_2 \rho_2 + \dots + x_n \rho_n)^2 = \sum_{x, \lambda=1}^n \mu_{x\lambda}^2 \rho_x \rho_\lambda, \quad (2')$$

also die immer positiv definite quadratische Form der Richtungskosinus, deren Vorzeichen die mittleren Fehlerquadrate und die mittleren Fehlerrechtecke sind.

### § 3. Der Kotensor und das Fehlerhyperellipsoid.

Zu dem Fehlertensor

$$T = \begin{Bmatrix} \mu_{11}^2, \mu_{12}^2, & \mu_{1n}^2 \\ \mu_{n1}^2, \mu_{n2}^2, & \mu_{nn}^2 \end{Bmatrix} \quad (\mu_{x\lambda}^2 = \mu_{\lambda x}^2) \quad (4)$$

gehört der Kotensor

$$\text{ko } T = \begin{Bmatrix} U_{11}, U_{12}, & U_{1n} \\ & \cdot \\ U_{n1}, U_{n2}, & U_{nn} \end{Bmatrix} \quad (U_{x\lambda} = U_{\lambda x}), \quad (5)$$

<sup>1</sup> Das Verschwinden des Fehlerrechteckes  $\mu_{x\lambda}^2$  ist das Zeichen für die vollständige korrelative Unabhängigkeit der Fehler  $x_x$  und  $x_\lambda$ . Das trifft nicht nur bei Gültigkeit des Gauß-Bravais'schen Fehlerverteilungsgesetzes zu, sondern bei jedem zweidimensionalen Fehlerverteilungsgesetz, bei dem bei vorgegebenem Verhältnis  $x_x : x_\lambda$  die Wahrscheinlichkeitsdichte für das Auftreten des Fehlerpaares  $(x_x, x_\lambda)$  nur von dem Betrag des Produktes  $x_x x_\lambda$  abhängig ist.

$$r_{x\lambda} = r_{\lambda x} = \mu_{x\lambda}^2 / \mu_{xx} \mu_{\lambda\lambda}$$

wird als Korrelationskoeffizient zwischen  $x_x$  und  $x_\lambda$  bezeichnet. Da

$$\mu_{xx}^2 \mu_{\lambda\lambda}^2 - \mu_{x\lambda}^4 \geq 0,$$

(Cauchy-Schwartz'sche Ungleichung), so ist

$$-1 \leq r_{x\lambda} \leq 1.$$

Die Grenzfälle

$$r_{x\lambda} = \pm 1$$

bedeuten die vollständige positive, beziehungsweise die vollständige negative Korrelation, d. h. funktionellen linearen Zusammenhang zwischen  $x_x$  und  $x_\lambda$ .

dessen Glieder die aus der Matrix von  $T$  gebildeten Unterdeterminanten sind. Es sei

$$R = S_n(T) = |\mu_{11}^2, \mu_{22}^2, \dots, \mu_{nn}^2|$$

die Determinante oder die  $n$ -te skalare Invariante des Tensors  $T$ . Das Hyperellipsoid

$$\eta \text{ ko } T \eta = \sum_{\alpha, \lambda=1}^n U_{\alpha\lambda} j'_\alpha j'_\lambda = R \quad (6)$$

besitzt in dem Punkte mit dem Ortsvektor  $\eta$  die zu

$$\frac{1}{2} \text{ grad } (\eta \text{ ko } T \eta) = \text{ko } T \eta \quad (7)$$

normale Tangentialhyperebene

$$\delta \text{ ko } T \eta = \sum_{\alpha, \lambda=1}^n U_{\alpha\lambda} j'_\alpha z_\lambda = R. \quad (8)$$

Wird auf sie vom Bezugspunkt aus das Lot gefällt, so gilt für den Ortsvektor  $\delta$  des Durchstoßpunktes, da das Lot zu  $\text{grad } (\eta \text{ ko } T \eta)$  parallel ist,

$$\frac{\delta}{\text{ko } T \eta} = k.$$

Durch Einsetzen dieser Gleichung in (8) erhält man

$$k = \frac{R}{(\text{ko } T \eta)^2}$$

und somit für den Ortsvektor des Durchstoßpunktes

$$\delta = \frac{R}{(\text{ko } T \eta)^2} \text{ ko } T \eta$$

und für das Quadrat des Lotes  $p$

$$p^2 = z^2 = \frac{R^2}{(\text{ko } T \eta)^2} \quad (9)$$

Setzt man in (2)

$$c = \frac{\text{grad } (\eta \text{ ko } T \eta)}{|\text{grad } (\eta \text{ ko } T \eta)|} = \frac{\text{ko } T \eta}{|\text{ko } T \eta|},$$

d. h. rechnet man das mittlere Fehlerquadrat in der zum Gradienten des Hyperellipsoids im Punkte  $\eta$  parallelen oder in der zur

Tangentialhyperebene normalen Richtung, so ergibt sich bei Berücksichtigung der Gleichung (6) des Hyperellipsoids

$$\begin{aligned}\mu_{cc}^2 &= \frac{(\text{ko } \mathbf{T} \, \mathfrak{h}) \, \mathbf{T} (\text{ko } \mathbf{T} \, \mathfrak{h})}{(\text{ko } \mathbf{T} \, \mathfrak{h})^2} = \frac{\mathfrak{h} (\text{ko } \mathbf{T}) \, \mathbf{T} (\text{ko } \mathbf{T}) \, \mathfrak{h}}{(\text{ko } \mathbf{T} \, \mathfrak{h})^2} = \\ &= R \frac{\mathfrak{h} \text{ ko } \mathbf{T} \, \mathfrak{h}}{(\text{ko } \mathbf{T} \, \mathfrak{h})^2} = \frac{R^2}{(\text{ko } \mathbf{T} \, \mathfrak{h})^2}.^1\end{aligned}$$

Das auf eine Tangentialhyperebene des Hyperellipsoids (6) gefällte Lot gibt somit den der Richtung dieses Lotes entsprechenden mittleren Fehler an. Das Hyperellipsoid (6) kann daher zutreffend als »mittleres Fehlerhyperellipsoid« oder kurz als »Fehlerhyperellipsoid« bezeichnet werden.<sup>2</sup>

Das mittlere Fehlerhyperellipsoid gibt aber nicht nur die mittleren Fehler als Normalabstände der Tangentialhyperebenen vom Mittelpunkt an, es lassen sich ihm auch die mittleren Fehlerrechtecke entnehmen. Die zu der durch die Achsen  $x_\alpha$  und  $x_\lambda$  gelegten Ebene normalen linearen Mannigfaltigkeiten berühren das Hyperellipsoid (6) in Punkten, in denen

$$e_\sigma \text{ ko } \mathbf{T} \, \mathfrak{h} = \sum_{\nu=1}^n U_{\sigma\nu} \mathfrak{h}'_\nu = 0$$

( $\sigma = 1, 2, \dots, n$  mit Ausschluß von  $\alpha$  und  $\lambda$ ).

Diese  $n-2$  Gleichungen von Hyperebenen bilden im Verein mit der Gleichung (6) des Hyperellipsoids die  $n-1$  Gleichungen einer Konturellipse. Die Elimination der  $n-2$  Koordinaten  $x_\sigma$  aus den Gleichungen der Kontur geben die Gleichung des das Hyperellipsoid umhüllenden, zur  $x_\alpha x_\lambda$ -Ebene normalen Hyperzylinders, gleichzeitig die Projektion der Kontur auf diese Ebene:

$$\mu_{\lambda\lambda}^2 \mathfrak{h}'_\alpha^2 - 2 \mu_{\alpha\lambda}^2 \mathfrak{h}'_\alpha \mathfrak{h}'_\lambda + \mu_{\alpha\alpha}^2 \mathfrak{h}'_\lambda^2 = \mu_{\alpha\alpha}^2 \mu_{\lambda\lambda}^2 - \mu_{\alpha\lambda}^4. \quad (10)$$

<sup>1</sup> Nach einer geläufigen Beziehung der Affinoralgebra ist

$$\mathbf{T}^{-1} = \frac{\text{ko } \mathbf{T}}{S_n(\mathbf{T})} = \frac{\text{ko } \mathbf{T}}{R},$$

daher ist

$$(\text{ko } \mathbf{T}) \, \mathbf{T} (\text{ko } \mathbf{T}) = R \mathbf{T}^{-1} \mathbf{T} \text{ ko } \mathbf{T} = R \text{ ko } \mathbf{T}.$$

<sup>2</sup> Bei Anstellung wahrscheinlichkeitstheoretischer Betrachtungen spielt die gesamte Schar der mit dem mittleren Fehlerhyperellipsoid (6) konzentrischen, ähnlichen und ähnlich liegenden Hyperellipsoide

$$\mathfrak{h} \text{ ko } \mathbf{T} \, \mathfrak{h} = \text{const}$$

eine wichtige Rolle. Sie sind die Hyperflächen konstanter Wahrscheinlichkeitsdichte. Werden wahrscheinlichkeitstheoretische Betrachtungen aber nicht angestellt, so reicht zur Genauigkeitscharakteristik die eine Fläche der Schar, das »mittlere Fehlerhyperellipsoid« aus, das dann kurz als »Fehlerhyperellipsoid« bezeichnet werden kann.

Das ist die Gleichung der »mittleren Fehlerellipse«, die für die Genauigkeit der Projektion des gesuchten Punktes oder Vektors in die  $x_x x_\lambda$ -Ebene kennzeichnend ist. Die mittleren Fehler  $\mu_{xx}$  und  $\mu_{\lambda\lambda}$  sind durch die Abstände der achsparallelen Tangenten vom Mittelpunkt der Ellipse gegeben (siehe Fig. 1).

$$\mu_{x\lambda}^2 = OACD = OFEB = \mu_{\lambda x}^2$$

erscheint wirklich durch zwei flächengleiche Rechtecke dargestellt, deren Seiten Fehler sind.  $\mu_{x\lambda}^2 : \mu_{xx}$  ist der unter Voraussetzung des Wertes  $\mu_{xx}$  des Fehlers  $x_x$  im Mittel zu erwartende Wert des Fehlers  $x_\lambda$ ,  $\mu_{x\lambda}^2 : \mu_{\lambda\lambda}$  der unter Voraussetzung des Wertes  $\mu_{\lambda\lambda}$  des Fehlers  $x_\lambda$  im Mittel zu erwartende Wert des Fehlers  $x_x$ .

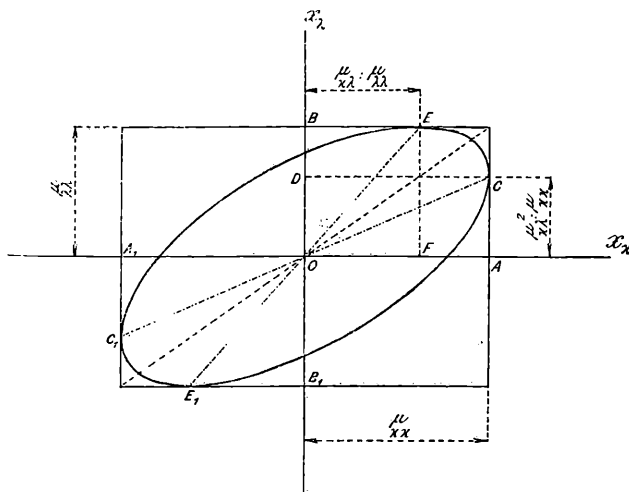


Fig. 1.

Die Gleichung (10) der mittleren Fehlerellipse ist im übrigen nichts anderes als die Versonderung der Gleichung (6) des mittleren Fehlerhyperellipsoids für den zweidimensionalen Fall.

#### § 4. Die Linearkombination von Skalaren.

Eine beliebige Linearkombination

$$F = \sum_{v=1}^n a_v X_v,$$

der durch Beobachtungen irgendwelcher Art bestimmten Skalar-  
größen  $X_1, X_2, \dots, X_n$  besitzt den Fehler

$$f = \sum_{v=1}^n a_v x_v = g \text{ x.}$$

Hiebei bedeutet

$$g = \sum_1^n \alpha_v e_v = \sum_1^n e_v \frac{\partial F}{\partial X_v} = \text{grad } F = \text{grad } f$$

den Gradienten von  $F$ , das eine skalare Ortsfunktion ist. Das mittlere Fehlerquadrat

$$\begin{aligned} \mu_{ff}^2 &= M(f^2) = M(g \cdot g)^2 = g M(g \cdot g) g = g T g = \\ &= g^2 c T c = (\text{grad } F)^2 \mu_{cc}^2 = \sum_{\alpha, \lambda=1}^n \mu_{\alpha\lambda}^2 \alpha_\alpha \alpha_\lambda. \end{aligned} \quad (11)$$

$c$  bedeutet hiebei den Einheitsvektor in der Richtung des Gradienten von  $F$ . Der mittlere Fehler der Funktion  $F$

$$\mu_{ff} = |\text{grad } F| \mu_{cc} \quad (11')$$

ist demnach gleich dem Abstand  $\mu_{cc}$  der das mittlere Fehlerhyperellipsoid tangierenden Niveauhyperebene ( $F = \text{const}$ ) vom Mittelpunkt multipliziert mit dem Betrag des Gradienten von  $F$ . Das ist aber nichts anderes als der Betrag des Unterschiedes der Werte der Funktion  $F$  im Mittelpunkte des mittleren Fehlerhyperellipsoids und in einer der beiden es tangierenden Niveauhyperebenen.

Nach denselben Gleichungen (11) oder (11') ist der mittlere Fehler einer beliebigen Funktion

$$F(X_1, X_2, \dots, X_n).$$

zu rechnen, sofern die Mittelwerte von Produkten höherer Ordnung nach den Fehlern  $x_v$  bei Berücksichtigung der Werte der zweiten und höheren Differentialquotienten von  $F$  nach den Koordinaten  $X_v$  gegen Mittelwerte von Fehlerprodukten zweiter Ordnung vernachlässigt werden können.

## § 5. Der affin transformierte Vektor.

Wird der fehlerhaft bestimmte Vektor

$$\mathfrak{X} = \sum_1^n X_v e_v$$

einer affinen Transformation  $\Phi$  unterworfen und durch sie in

$$\mathfrak{X}' = \Phi \mathfrak{X}$$

umgewandelt, so machen die Fehler  $\mathfrak{x}$  von  $\mathfrak{X}$  die gleiche Affintransformation in die Fehler  $\mathfrak{x}'$  von  $\mathfrak{X}'$  durch. Der Fehlertensor des transformierten Vektors

$$T' = M(\mathfrak{x}' \cdot \mathfrak{x}') = M(\Phi \mathfrak{x} \cdot \Phi \mathfrak{x}) = \Phi M(\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{x}) \Phi_c = \Phi T \Phi_c. \quad (12)$$

$\Phi_c$  ist hiebei der zu  $\Phi$  konjugierte Affinor.

Sind  $A_{\kappa\lambda}$ ,  $B_{\kappa\lambda}$ ,  $C_{\kappa\lambda}$  die Glieder der Affinoren  $A$ ,  $B$ ,  $\Gamma$ , so sind nach einer bekannten Beziehung der Affinoralgebra die Glieder des Dreifachproduktes

$$\prod = A B \Gamma$$

$$P_{\kappa\lambda} = \sum_{\rho, \sigma=1}^n A_{\kappa\rho} B_{\rho\sigma} C_{\sigma\lambda},$$

und falls  $\Gamma = A_c$

$$P_{\kappa\lambda} = \sum_{\rho, \sigma=1}^n A_{\kappa\rho} B_{\rho\sigma} A_{\lambda\sigma}.$$

Bezeichnet man mit  $\alpha_{\kappa\lambda}$  die Glieder des Transformationsaffinors  $\Phi$ , so ergeben sich die Glieder des Fehlertensors  $T'$  des transformierten Vektors  $\mathfrak{X}'$  (mittlere Fehlerquadrate und mittlere Fehlerrechtecke) aus

$$\mu_{\kappa\lambda} = \sum_{\rho, \sigma=1}^{ii} \mu_{\rho\sigma}^2 \alpha_{\kappa\rho} \alpha_{\lambda\sigma}. \quad (13)$$

So wäre beispielsweise im dreidimensionalen Fall, wenn man die Koordinaten üblicherweise mit  $x, y, z$  bezeichnet

$$\left. \begin{aligned} \mu_{xx}'^2 &= \mu_{xx}^2 \alpha_{xx}^2 + \mu_{yy}^2 \alpha_{xy}^2 + \mu_{zz}^2 \alpha_{xz}^2 + 2 \mu_{yz}^2 \alpha_{xy} \alpha_{xz} + \\ &\quad + 2 \mu_{zx}^2 \alpha_{xz} \alpha_{xx} + 2 \mu_{xy}^2 \alpha_{xx} \alpha_{xy} \\ \mu_{yz}'^2 &= \mu_{xx}^2 \alpha_{yx} \alpha_{zx} + \mu_{yy}^2 \alpha_{yy} \alpha_{zy} + \mu_{zz}^2 \alpha_{yz} \alpha_{zz} + \\ &\quad + \mu_{yz}^2 (\alpha_{yy} \alpha_{zz} + \alpha_{yz} \alpha_{zy}) + \mu_{zx}^2 (\alpha_{yz} \alpha_{zx} + \alpha_{yx} \alpha_{zz}) + \\ &\quad + \mu_{xy}^2 (\alpha_{yx} \alpha_{zy} + \alpha_{yy} \alpha_{zx}). \end{aligned} \right\} \quad (13')$$

Bei geometrischer Darstellung der Genauigkeit der Vektoren durch das mittlere Fehlerhyperellipsoid erweist sich aber die Beziehung zwischen den alten und neuen mittleren Fehlerquadraten und Fehlerrechtecken als weit weniger kompliziert. Ist

$$\eta' \text{ ko } T' \eta' - R' = 0$$

die Gleichung des mittleren Fehlerhyperellipsoids des transformierten Vektors, wobei

$$R' = S_n (T') = S_n (\Phi T \Phi_c) = (S_n \Phi)^2 S_n (T) = (S_n \Phi)^2 R$$

bedeutet, so ist, da

$$\text{ko } T' = \text{ko } (\Phi T \Phi_c) = (\text{ko } \Phi) (\text{ko } T) (\text{ko } \Phi_c)^1$$

<sup>1</sup> Vgl. z. B. J. Spielrein, Lehrbuch der Vektorrechnung. Zweite Auflage, Stuttgart, 1926, p. 317.

$$\text{ko } (\Phi_1 \Phi_2 \Phi_3) = (\text{ko } \Phi_1) (\text{ko } \Phi_2) \text{ ko } \Phi_3.$$

$$\eta' \frac{\text{ko } \Phi}{S_n(\Phi)} \text{ko } T \frac{\text{ko } \Phi_c}{S_n(\Phi)} \eta' = \eta' \Phi_c^{-1} (\text{ko } T) \Phi^{-1} \eta' = \eta \text{ko } T \eta = R.$$

Die Ortsvektoren  $\eta$  des alten Fehlerhyperellipsoids gehen aus denjenigen des neuen  $\eta'$  durch die Affintransformation  $\Phi^{-1}$  hervor, oder umgekehrt: Man erhält das mittlere Fehlerhyperellipsoid des transformierten Vektors, wenn man dasjenige des Ausgangsvektors der gleichen affinen Transformation unterwirft wie den Vektor selbst.

## § 6. Die Linearkombination von Vektoren.

Es liege eine Linearkombination

$$\mathfrak{S} = \sum_1^o \alpha_{\omega} \mathfrak{V}_{\omega}$$

von mit ihren Fehlertensoren  $T_{\omega}$  gegebenen Vektoren vor. Der Fehler dieser Linearkombination ist

$$\mathfrak{s} = \sum_1^o \alpha_{\omega} a_{\omega}$$

und ihr Fehlertensor

$$\begin{aligned} T_{\mathfrak{S}} &= M(\mathfrak{s} \cdot \mathfrak{s}) = M\{(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_o a_o) \cdot (\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_o a_o)\} = \\ &= \alpha_1^2 M(a_1 \cdot a_1) + \dots + \alpha_o^2 M(a_o \cdot a_o) + \alpha_1 \alpha_2 M(a_1 \cdot a_2 + a_2 \cdot a_1) + \dots \\ &\quad + \alpha_{o-1} \alpha_o M(a_{o-1} \cdot a_o + a_o \cdot a_{o-1}), \end{aligned}$$

Unter der wesentlichen Voraussetzung, daß zwischen den Fehlern der verschiedenen Vektoren keine Korrelation besteht, ist für

$$\rho \neq \sigma \quad M(a_{\rho} \cdot a_{\sigma}) = 0$$

oder für beliebige Komponenten

$$M(a_{\rho, \kappa} a_{\sigma, \lambda}) = 0.$$

In diesem — aber auch nur in diesem Fall — ist

$$T_{\mathfrak{S}} = \sum_{\omega=1}^o \alpha_{\omega}^2 T_{\omega} \quad (14)$$

und es gilt für jedes beliebige Glied des Fehlertensors

$$\mu_{\mathfrak{S}, \kappa \lambda}^2 = \sum_{\omega=1}^o \alpha_{\omega}^2 \mu_{\omega, \kappa \lambda}^2 \quad (14')$$

wobei  $\mu_{\omega, \lambda}^2$  das betreffende mittlere Fehlerrechteck, beziehungsweise im Falle der Gleichheit von  $\lambda$  und  $\lambda$  das betreffende mittlere Fehlerquadrat des Vektors  $\mathfrak{U}_\omega$  ist.

Sind z. B.  $\mathfrak{U}$  und  $\mathfrak{B}$  die Ortsvektoren zweier Punkte  $P_A$ , beziehungsweise  $P_B$  der  $xy$ -Ebene, so kann man die Bestimmungsstücke der Fehlerellipse des von  $P_B$  nach  $P_A$  führenden Vektors  $\mathfrak{C} = \mathfrak{U} - \mathfrak{B}$  aus den Bestimmungsstücken der Fehlerellipsen der beiden Punkte rechnen:

$$\mu_{\mathfrak{C}, xx}^2 = \mu_{\mathfrak{U}, xx}^2 + \mu_{\mathfrak{B}, xx}^2,$$

$$\mu_{\mathfrak{C}, xy}^2 = \mu_{\mathfrak{U}, xy}^2 + \mu_{\mathfrak{B}, xy}^2,$$

$$\mu_{\mathfrak{C}, yy}^2 = \mu_{\mathfrak{U}, yy}^2 + \mu_{\mathfrak{B}, yy}^2.$$

Die Fehlerellipse des Verbindungsvektors ist auf Grund dieser Gleichungen leicht aus den Fehlerellipsen der beiden Punkte  $P_A$  und  $P_B$  zu konstruieren.

## § 7. Der mittlere Fehler des Skalarproduktes.

Das Skalarprodukt

$$S = \mathfrak{U} \mathfrak{B}$$

zweier in der Genauigkeit ihrer Angabe durch ihre mittleren Fehler-tensoren  $\mathbf{T}_{\mathfrak{U}}$  und  $\mathbf{T}_{\mathfrak{B}}$  gekennzeichneten Vektoren  $\mathfrak{U}$  und  $\mathfrak{B}$  besitzt den Fehler

$$s = \mathfrak{B} a + \mathfrak{U} b + a b$$

und das mittlere Fehlerquadrat

$$\mu_{ss}^2 = M(s^2) = M(\mathfrak{B} a)^2 + M(\mathfrak{U} b)^2 + 2 M(\mathfrak{B} a \cdot \mathfrak{U} b),$$

wobei Glieder von höherer als der zweiten Ordnung nach den Fehlern  $a$  und  $b$  hinweggelassen wurden. Bei korrelativer Unabhängigkeit der Fehler  $a$  und  $b$  ist  $M(a \cdot b) = 0$ , daher unter dieser Voraussetzung

$$\mu_{ss}^2 = \mathfrak{B} M(a \cdot a) \mathfrak{B} + \mathfrak{U} M(b \cdot b) \mathfrak{U} = \mathfrak{B} \mathbf{T}_a \mathfrak{B} + \mathfrak{U} \mathbf{T}_b \mathfrak{U}. \quad (15)$$

Jeder der beiden additiven Teile ist von dem einen Faktor des Skalarproduktes und von der Ungenauigkeit des anderen Faktors beeinflusst. Man gewinnt die Quadratwurzel des ersten Teiles durch Multiplikation des in der Richtung von  $\mathfrak{B}$  genommenen mittleren Fehlers von  $\mathfrak{U}$  mit dem Betrag von  $\mathfrak{B}$ , die Quadratwurzel des zweiten Teiles durch Multiplikation des in der Richtung von  $\mathfrak{U}$  genommenen mittleren Fehlers von  $\mathfrak{B}$  mit dem Betrag von  $\mathfrak{U}$ . Man könnte hiezu auch in der in § 4 geschilderten Weise die mittleren Fehlerhyperellipsoide der beiden Vektoren heranziehen.

Durch Einführung der Skalarkomponenten von  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$ ,  $T_{\mathfrak{A}}$  und  $T_{\mathfrak{B}}$  in die Gleichung (15) — übrigens auch durch rein geometrische Überlegungen — kann man sich aber überzeugen, daß man die Vektoren  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  so behandeln kann, als ob sie an die durch  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  gelegte Ebene gebunden wären. Diese Ebene werde als  $xy$ -Ebene gewählt, so daß sämtliche außerhalb dieser Ebene gelegenen Komponenten der Vektoren  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$

$$A_z = A_{\mu} = A_{\nu} = . \quad B_z = B_{\mu} = B_{\nu} = . \quad = 0$$

sind. Es ist somit

$$\begin{aligned} \mu_{ss}^2 = & B_x^2 \mu_{\mathfrak{A},xx}^2 + 2 B_x B_y \mu_{\mathfrak{A},xy}^2 + B_y^2 \mu_{\mathfrak{A},yy}^2 \\ & + A_x^2 \mu_{\mathfrak{B},xx}^2 + 2 A_x A_y \mu_{\mathfrak{B},xy}^2 + A_y^2 \mu_{\mathfrak{B},yy}^2. \end{aligned} \quad (15')$$

Der in der Richtung von  $\mathfrak{B}$  genommene mittlere Fehler von  $\mathfrak{A}$  und der in der Richtung von  $\mathfrak{A}$  genommene mittlere Fehler von  $\mathfrak{B}$  sind dann aus den an Stelle der mittleren Fehlerhyperellipsoide tretenden mittleren Fehlerellipsen der als an die Ebene  $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$  gebunden behandelten Vektoren zu entnehmen.<sup>1</sup> Der in der Richtung von  $\mathfrak{B}$  (bezh.  $\mathfrak{A}$ ) genommene mittlere Fehler von  $\mathfrak{A}$  (bezh.  $\mathfrak{B}$ ) ist der Betrag des aus dem Mittelpunkt der mittleren Fehlerellipse von  $\mathfrak{A}$  (bezh.  $\mathfrak{B}$ ) auf die zu  $\mathfrak{B}$  (bezh.  $\mathfrak{A}$ ) senkrechte Tangente der Ellipse gefällten Lotes. Die möglichen Fehleranteile von  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  — ihre Kleinheit wurde vorausgesetzt —, die außerhalb der durch  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  aufgespannten Ebene liegen, beeinflussen den mittleren Fehler des Skalarproduktes nicht.

## § 8. Das Vektorprodukt im dreidimensionalen Raum.

Die Gesetze der Fehlerübertragung bei der äußeren Produktbildung sollen hier nur für die Fälle des dreidimensionalen Raumes und der Ebene verfolgt werden. Diese Fälle zeichnen sich durch ihre praktische Bedeutung aus und sind die einzigen, bei denen zur Darstellung des äußeren Produktes von Monovektoren durch einen neuen Vektor nicht ein Raum höherer Dimension herangezogen werden muß.

Es sei

$$\mathfrak{F} = [\mathfrak{A} \mathfrak{B}]$$

das äußere Produkt der Vektoren  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  im dreidimensionalen Raum, das in diesem Raum durch das sogenannte Vektorprodukt — also wieder durch einen Vektor — darstellbar ist. Sein Fehler ist bei Vernachlässigung von Gliedern höherer Kleinheitsordnung

$$\mathfrak{f} = [\mathfrak{a} \mathfrak{B}] + [\mathfrak{A} \mathfrak{b}]$$

und sein Fehlertensor

$$T_{\mathfrak{F}} = M(\mathfrak{f}, \mathfrak{f}) = M\{([\mathfrak{a} \mathfrak{B}] + [\mathfrak{A} \mathfrak{b}])([\mathfrak{a} \mathfrak{B}] + [\mathfrak{A} \mathfrak{b}])\}.$$

<sup>1</sup> Die mittleren Fehlerellipsen der Vektoren  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  sind durch die Gleichungen (19), § 10 dargestellt.

Unter der wesentlichen Voraussetzung der korrelativen Unabhängigkeit der Fehler  $\alpha$  und  $\beta$  ist

$$M(\alpha \cdot \beta) = M(\beta \cdot \alpha) = 0$$

und

$$T_{\mathfrak{g}} = - \mathfrak{B} M(\alpha \cdot \alpha) \mathfrak{B} - \mathfrak{A} M(\beta \cdot \beta) \mathfrak{A} = - \mathfrak{B} T_{\mathfrak{a}} \mathfrak{B} - \mathfrak{A} T_{\mathfrak{b}} \mathfrak{A}. \quad (16)$$

Die Unterklammerung des Vektorsymbols  $\mathfrak{A}$ , beziehungsweise  $\mathfrak{B}$  bedeutet, daß dieser Vektor mit einem nachbarlich angeschriebenen auf äußere Art (vektoriell) zu multiplizieren ist.<sup>1</sup> Von den skalaren Komponenten des Tensors  $T_{\mathfrak{g}}$  sei je ein Hauptglied und ein Seitenglied nachstehend angegeben:

$$\left. \begin{aligned} \mu_{\mathfrak{g}, xx}^2 &= B_y^2 \mu_{\mathfrak{a}, zz}^2 - 2 B_y B_z \mu_{\mathfrak{a}, yz}^2 + B_z^2 \mu_{\mathfrak{a}, yy}^2 + \\ &\quad + A_y^2 \mu_{\mathfrak{b}, zz}^2 - 2 A_y A_z \mu_{\mathfrak{b}, yz}^2 + A_z^2 \mu_{\mathfrak{b}, yy}^2 \\ \mu_{\mathfrak{g}, yz}^2 &= B_x B_y \mu_{\mathfrak{a}, xz}^2 - B_y B_z \mu_{\mathfrak{a}, zx}^2 - B_x^2 \mu_{\mathfrak{a}, yz}^2 + B_x B_z \mu_{\mathfrak{a}, xy}^2 + \\ &\quad + A_x A_y \mu_{\mathfrak{b}, xz}^2 - A_y A_z \mu_{\mathfrak{b}, zx}^2 - A_x^2 \mu_{\mathfrak{b}, yz}^2 + A_x A_z \mu_{\mathfrak{b}, xy}^2 \end{aligned} \right\} (16')$$

Die anderen Haupt und Seitenglieder können durch zyklische Permutation der Indizes  $x, y, z$  leicht gewonnen werden.

Von den beiden Summanden des Tensors  $T_{\mathfrak{g}}$  ist der erste nur vom Vektor  $\mathfrak{B}$  und von der Fehlerhaftigkeit des Vektors  $\mathfrak{A}$  beeinflusst. Er ist nichts anderes als der Fehlertensor des durch den als fehlerfrei angesehenen  $\mathfrak{B}$  (sprich: Axiator  $\mathfrak{B}$ ) transformierten Vektors  $\mathfrak{A}$ , denn es ergibt sich, wenn man die Regel (12) über Fehlertensoren affin transformierter Vektoren anwendet und den Tensor  $T_{\mathfrak{a}}$  eines Vektors  $\mathfrak{A}' = \mathfrak{B} \mathfrak{A}$  sucht, wobei man  $\mathfrak{B}$  als fehlerfrei betrachtet,

$$T_{\mathfrak{a}'} = (\mathfrak{B}) T_{\mathfrak{a}} (\mathfrak{B})_c = - \mathfrak{B} T_{\mathfrak{a}} \mathfrak{B}.$$

Das Fehlerellipsoid macht nur die einfache Transformation  $\mathfrak{B}$  durch und wird durch sie, da der Axiator ein ebener Affinor ist, in eine ebene Scheibe umgewandelt. Die Ebene dieser Scheibe steht senkrecht zum Vektor  $\mathfrak{B}$ . Ihre elliptische Umrandung geht aus der in der Richtung  $\mathfrak{B}$  gesehenen Kontur des Fehlerellipsoids hervor, indem diese Kontur zuerst auf die zu  $\mathfrak{B}$  senkrechte Ebene projiziert, dann in dieser Ebene um einen rechten Winkel gedreht und im Verhältnis  $|\mathfrak{B}|:1$  zentrisch gestreckt wird. Aus der elliptischen Umrandung der Scheibe, beziehungsweise aus ihren Projektionen auf die Koordinatenebenen sind in der aus Fig. 1 ersichtlichen Weise die von der Fehlerhaftigkeit von  $\mathfrak{A}$  herrührenden Teile der skalaren Glieder des Tensors  $T_{\mathfrak{g}}$  zu entnehmen. Die von der Fehlerhaftigkeit des Vektors  $\mathfrak{B}$  herrührenden Teile gehen auf gleiche Weise aus

<sup>1</sup> Vgl. J. Spielrein, Lehrbuch der Vektorrechnung. Zweite Auflage, Stuttgart, 1926.

der elliptischen Umrandung einer Scheibe hervor, die durch Projektion der in der Richtung von  $\mathfrak{A}$  gesehenen Kontur des Fehlerellipsoids von  $\mathfrak{B}$  auf die zu  $\mathfrak{A}$  senkrechte Ebene, Drehung dieser Projektion in ihrer Ebene um einen rechten Winkel und zentrische Streckung im Verhältnis  $|\mathfrak{A}|:1$  hervorgeht. Die den gleichen Achsenpaaren entsprechenden skalaren Tensorglieder, die von der Fehlerhaftigkeit der beiden Vektoren herrühren, sind schließlich additiv zu vereinigen. Von der mit den Methoden der darstellenden Geometrie durchführbaren Konstruktion des Fehlerellipsoids des Vektorproduktes sei nach diesen Andeutungen des Ganges der Behandlung hier abgesehen.

### § 9. Der mittlere Fehler des Tripelproduktes.

Der Fehler des als Inhalt eines Spates erscheinenden Tripelproduktes

$$V = \mathfrak{A} \mathfrak{B} \mathfrak{C}$$

kann im Sinne der Vektoralgebra des dreidimensionalen Raumes als inneres Produkt von  $\mathfrak{F} = [\mathfrak{A} \mathfrak{B}]$  und  $\mathfrak{C}$  angesehen werden und besitzt daher — korrelative Unabhängigkeit der Fehler der einzelnen Vektoren voneinander vorausgesetzt — auf Grund der Beziehung (15) das mittlere Fehlerquadrat

$$\mu_V^2 = \mathfrak{C} T_{\mathfrak{F}} \mathfrak{C} + \mathfrak{F} T_{\mathfrak{C}} \mathfrak{F},$$

das bei Berücksichtigung von (16) die nach den drei Vektoren  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$ ,  $\mathfrak{C}$  symmetrische Form annimmt

$$\mu_V^2 = [\mathfrak{B} \mathfrak{C}] T_{\mathfrak{A}} [\mathfrak{B} \mathfrak{C}] + [\mathfrak{C} \mathfrak{A}] T_{\mathfrak{B}} [\mathfrak{C} \mathfrak{A}] + [\mathfrak{A} \mathfrak{B}] T_{\mathfrak{C}} [\mathfrak{A} \mathfrak{B}]. \quad (17)$$

Jeder der drei Summanden ist nur von der Fehlerhaftigkeit des einen der drei Vektoren beeinflusst. Er ist seinem Zahlenwert nach das Quadrat des Inhaltes einer prismatischen Schichte, deren Grundfläche die durch zwei der Vektoren gebildete Seitenfläche des Spates und deren Stärke die halbe, senkrecht zu dieser Seitenfläche gemessene Stärke des Fehlertellipsoids des dritten Vektors ist.

### § 10. Das Vektorprodukt in der Ebene.

In einer anderen Weise als in den Paragraphen 8 und 9 möge nun die Fehlerhaftigkeit des Vektorproduktes zweier an die  $xy$ -Ebene gebundenen, in ihren Fehlern voneinander korrelativ unabhängigen Vektoren  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  oder, was dasselbe bedeutet, die Fehlerhaftigkeit der durch diese beiden Vektoren bestimmten Parallelogrammfläche untersucht werden. Das Vektorprodukt und die Parallelogrammfläche können als Vektor senkrecht zur  $xy$ -Ebene oder auch als Skalar

$$F = A_x B_y - A_y B_x$$

angesehen werden. Der Fehler dieses Ausdruckes ist bei Vernachlässigung von Gliedern höherer Kleinheitsordnung

$$f = a_x B_y - a_y B_x + A_x b_y - A_y b_x$$

und das mittlere Fehlerquadrat bei Berücksichtigung der korrelativen Unabhängigkeit der Fehler  $\alpha$  und  $\beta$

$$\mu_{ff}^2 = B_x^2 \mu_{\mathfrak{A}, yy}^2 - 2 B_x B_y \mu_{\mathfrak{A}, xy}^2 + B_y^2 \mu_{\mathfrak{A}, xx}^2 + A_x^2 \mu_{\mathfrak{B}, yy}^2 - 2 A_x A_y \mu_{\mathfrak{B}, xy}^2 + A_y^2 \mu_{\mathfrak{B}, xx}^2. \quad (18)$$

Nun lauten die Gleichungen der mittleren Fehlerellipsen der Vektoren  $\mathfrak{A}$ , beziehungsweise  $\mathfrak{B}$  (vgl. Gleichung 10)

$$\left. \begin{aligned} \mu_{\mathfrak{A}, yy}^2 x^2 - 2 \mu_{\mathfrak{A}, xy}^2 xy + \mu_{\mathfrak{A}, xx}^2 y^2 &= \mu_{\mathfrak{A}, xx}^2 \mu_{\mathfrak{A}, yy}^2 - \mu_{\mathfrak{A}, xy}^4 = \frac{S_{\mathfrak{A}}^2}{\pi^2} \\ \mu_{\mathfrak{B}, yy}^2 x^2 - 2 \mu_{\mathfrak{B}, xy}^2 xy + \mu_{\mathfrak{B}, xx}^2 y^2 &= \mu_{\mathfrak{B}, xx}^2 \mu_{\mathfrak{B}, yy}^2 - \mu_{\mathfrak{B}, xy}^4 = \frac{S_{\mathfrak{B}}^2}{\pi^2} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

$S_{\mathfrak{A}}$  und  $S_{\mathfrak{B}}$  bedeuten hierbei die Flächeninhalte der beiden mittleren Fehlerellipsen;  $S_{\mathfrak{A}} : \pi$ , beziehungsweise  $S_{\mathfrak{B}} : \pi$ , die Flächeninhalte der von konjugierten Halbmessern dieser Ellipsen gebildeten Parallelogramme. (Siehe Fig. 2.)

Sind  $b_{\mathfrak{A}}$ , beziehungsweise  $a_{\mathfrak{B}}$  die in der Richtung von  $\mathfrak{B}$ , beziehungsweise  $\mathfrak{A}$  gelegenen Halbmesser der mittleren Fehlerellipse von  $\mathfrak{A}$ , beziehungsweise  $\mathfrak{B}$ , so ist

$$\mu_{ff}^2 = \left( \frac{\mathfrak{B}}{b_{\mathfrak{A}}} \right)^2 \frac{S_{\mathfrak{A}}^2}{\pi^2} + \left( \frac{\mathfrak{A}}{a_{\mathfrak{B}}} \right)^2 \frac{S_{\mathfrak{B}}^2}{\pi^2}.$$

Nun ist aber

$$\frac{S_{\mathfrak{A}}}{\pi} : |b_{\mathfrak{A}}| = n_{\mathfrak{B}} \quad \text{und} \quad \frac{S_{\mathfrak{B}}}{\pi} : |a_{\mathfrak{B}}| = n_{\mathfrak{A}}.$$

$n_{\mathfrak{B}}$  und  $n_{\mathfrak{A}}$  sind nichts anderes als die senkrecht zu  $b_{\mathfrak{A}}$ , beziehungsweise  $a_{\mathfrak{B}}$  gemessenen Höhen des Parallelogramms der konjugierten Ellipsenhalbmesser und es ergibt sich

$$\mu_{ff}^2 = (|\mathfrak{B}| n_{\mathfrak{B}})^2 + (|\mathfrak{A}| n_{\mathfrak{A}})^2, \quad (18')$$

d. h. (siehe Fig. 2): das mittlere Fehlerquadrat der Parallelogrammfläche ist gleich der Summe der Quadrate der Inhalte von zwei Flächenstreifen, von denen jeder eine Länge vom Betrag des einen Vektors und als Breite die halbe senkrecht zu diesem Vektor gemessene Stärke der mittleren Fehlerellipse des anderen Vektors besitzt.

Zu dem letzten Ergebnisse wäre man auch durch konsequente Spezialisierung der im § 8 angestellten Betrachtung gelangt.

<sup>1</sup> Der erste Teil des mittleren Fehlerquadrates  $\mu_{ff}^2$

$$B_x^2 \mu_{\mathfrak{A}, yy}^2 - 2 B_x B_y \mu_{\mathfrak{A}, xy}^2 + B_y^2 \mu_{\mathfrak{A}, xx}^2$$

gleichet dem § 8, Gleichung (16') zufolge der  $zz$ -Komponente von  $-\mathfrak{B} T_{\mathfrak{A}} \mathfrak{B}$ . Im zweidimensionalen Raume stimmt  $-\mathfrak{B} \text{ ko } T_{\mathfrak{A}} \mathfrak{B}$  mit  $\mathfrak{B} \text{ ko } T_{\mathfrak{A}} \mathfrak{B}$  überein.

### § 11. Mittlerer Flächenfehler eines Polygonzuges.

Die Eckpunkte  $A_1, A_2, \dots, A_o$  eines Polygonzuges der Ebene mögen die Ortsvektoren  $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_o$  besitzen.

Der doppelte Flächeninhalt des Polygonzuges ist

$$2\mathfrak{F} = \sum_1^o [\mathfrak{A}_o \mathfrak{A}_{o+1},$$

der doppelte Flächenfehler bei Hinweglassung von Fehlergliedern höherer Ordnung

$$2\mathfrak{f} = \sum_1^o [a_o (\mathfrak{A}_{o+1} - \mathfrak{A}_{o-1})]$$

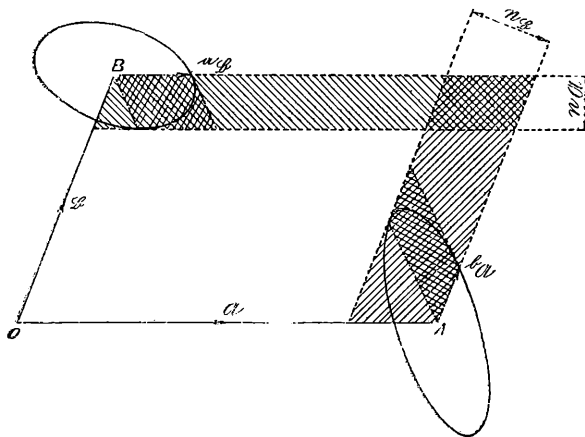


Fig. 2.

(die Addition und Subtraktion im Index ist zyklisch aufzufassen). Das vierfache mittlere Fehlerquadrat des Flächeninhaltes ist sodann bei Annahme korrelativer Unabhängigkeit der Fehler der einzelnen Vektoren

$$\begin{aligned} 4 \mu_{ff}^2 &= - \sum_1^o \underbrace{(\mathfrak{A}_{o+1} - \mathfrak{A}_{o-1})}_{\mathfrak{A}_{o+1} - \mathfrak{A}_{o-1}} \underbrace{T_o (\mathfrak{A}_{o+1} - \mathfrak{A}_{o-1})}_{\mathfrak{A}_{o+1} - \mathfrak{A}_{o-1}} = \\ &= \sum_1^o (\mathfrak{A}_{o+1} - \mathfrak{A}_{o-1}) \text{ ko } T_o (\mathfrak{A}_{o+1} - \mathfrak{A}_{o-1}) = \\ &= \sum_1^o (\mathfrak{A}_{o+1} - \mathfrak{A}_{o-1})^2 n_{o+1}^2 \end{aligned} \quad (20)$$

<sup>1</sup> Betreffs der zweiten Gleichsetzung vergleiche die Fußnote des vorigen Paragraphen.

Hiebei bedeutet  $T_{\omega}$  den mittleren Fehlertensor des Vektors  $\mathfrak{A}_{\omega}$ ,  $n_{\omega}$  die in der Richtung senkrecht zu  $\mathfrak{A}_{\omega+1} - \mathfrak{A}_{\omega-1}$  gemessene halbe Stärke der mittleren Fehlerellipse des Punktes  $A_{\omega}$ .

Das mittlere Fehlerquadrat der Fläche eines Polygonzuges ist somit unter der Voraussetzung, daß die Fehler der Lagenbestimmung der einzelnen Eckpunkte voneinander korrelativ unabhängig sind, gleich dem vierten Teil der Summe der Quadrate der Inhalte von Flächenstreifen, von denen jeder einzelne von der Fehlerhaftigkeit der Lagenbestimmung eines Eckpunktes beeinflußt ist. Die Länge eines solchen Flächenstreifens ist gleich der Verbindungsstrecke der beiden dem Punkte benachbarten Punkte, seine Breite ist gleich der halben, senkrecht zu dieser Strecke gemessenen Stärke der mittleren Fehlerellipse des betreffenden Eckpunktes.

### Zusammenfassung.

Es wird zunächst gezeigt, daß die Fehlerhaftigkeit eines ungenau bestimmten Vektors in einem beliebig dimensionalen Raum durch einen Tensor des betreffenden Raumes, den »Fehlertensor«, gekennzeichnet und geometrisch durch das »mittlere Fehlerhyperellipsoid« beschrieben werden kann. Im Anschluß hieran werden die Fehlerübertragungsgesetze für die vektoralgebraischen Elementaroperationen entwickelt. So wird gezeigt, wie Fehlertensor und Fehlerhyperellipsoid sich bei affiner Transformation eines fehlerhaft bestimmten Vektors ändern, wie sie für eine Linearkombination solcher Vektoren und im dreidimensionalen Raum für das Vektorprodukt zu bestimmen sind. Ebenso wird der mittlere Fehler des Skalarproduktes zweier Vektoren, des Tripelproduktes im dreidimensionalen Raum (Spatinhalt) und der von fehlerhaften Vektoren der Ebene gebildeten Parallelogrammfläche aus den Fehlerellipsoiden, beziehungsweise Fehlerellipsen der Vektorfaktoren bestimmt. Schließlich wird die Regel für den mittleren Flächenfehler eines Polygonzuges mit ungenau bestimmten Eckpunkten angegeben. Die für die üblichen Zahlenrechnungen der Praxis im Falle rein rechnerischer Vorgangsweise notwendigen Skalargleichungen sind, wie an einigen Stellen gezeigt wird, aus den Tensorgleichungen durch Komponentenzerlegung leicht zu gewinnen.

# ZOBODAT - [www.zobodat.at](http://www.zobodat.at)

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse](#)

Jahr/Year: 1928

Band/Volume: [137\\_2a](#)

Autor(en)/Author(s): Basch Alfred

Artikel/Article: [Die Fehlertensoren und das Fehlerübertragungsgesetz der vektoralgebraischen Elementaroperationen. 583-598](#)