Gedruckt mit Unterstützung aus dem Jerome und Margaret Stonborough-Fonds

Über irreduzible Kontinua

Von

Franz Dehmer in Wien

(Vorgelegt in der Sitzung am 29. November 1928)

H. Hahn hat bewiesen,[1] daß zwischen gewissen Teilmengen eines irreduziblen Kontinuums, die er Primteile des irreduziblen Kontinuums nennt, eine Ordnungsrelation besteht. Bezeichnen wir für ein irreduzibles Kontinuum K die Menge aller Punkte, in denen K zusammenhängend im kleinen ist, mit Z, die Menge der übrigen Punkte mit S, so sind die erwähnten Primteile von K die Punkte von Z_i und die Komponenten von S_α[2]. Jeder Primteil ist abgeschlossen, also entweder ein Punkt oder ein Kontinuum. Ein irreduzibles Kontinuum, welches bloß einen Primteil enthält, heißt Primkontinuum.

Für eine andere Klasse von Teilmengen eines zwischen a und b irreduziblen Kontinuums hat C. Kuratowski[3] eine Ordnungsrelation definiert, nämlich für die a enthaltenden regulären Teilkontinua von K. Dabei heißt eine Teilmenge C von K regulär abgeschlossen oder kurz regulär, wenn $\overline{K-\overline{K-C}} = C$ gilt, d. h. wenn C die abgeschlossene Hülle einer in K offenen Menge ist.

Im folgenden sollen nun die Beziehungen untersucht werden, die zwischen den Primteilen und den a enthaltenden regulären Teilkontinua eines irreduziblen Kontinuums und zwischen den Anordnungen dieser beiden Klassen von Mengen bestehen. Zunächst ordnen wir jedem Primteil P von K ein a enthaltendes reguläres Teilkontinuum von K zu auf Grund von

Satz I: *Ist K ein zwischen a und b irreduzibles Kontinuum, P ein a nicht enthaltender Primteil von K, so ist, wenn wir mit A_P die Menge aller Punkte bezeichnen, die mit a durch ein zu P fremdes Teilkontinuum verbindbar sind, die Menge $\bar{A}_P$ ein a enthaltendes reguläres Teilkontinuum von K.*

Die Menge A_P ist eine a enthaltende zusammenhängende Teilmenge von K und enthält, da die abgeschlossene Menge P den Punkt a nicht enthalten soll, auch Punkte außer dem Punkt a. Die Menge $\bar{A}_P$ ist also ein a enthaltendes Teilkontinuum von K. Um zu zeigen, daß die Menge $\bar{A}_P$ regulär ist, weisen wir nach, daß die Menge A_P, deren abgeschlossene Hülle $\bar{A}_P$ ist, offen ist oder,

[1] H. Hahn, Über irreduzible Kontinua. Wiener Ber., Bd. 130.
[2] Hausdorf, Mengenlehre. 2. Aufl., p. 223.
[3] C. Kuratowski, Théorie des continus irréductibles. Fund. math. t. III.

was gleichbedeutend ist, daß das Komplement von A_P abgeschlossen ist. Nun gelten, wenn wir mit B_P die Menge aller Punkte von K bezeichnen, die mit b durch ein zu P fremdes Teilkontinuum von K verbunden sind, folgende Beziehungen:

$$K = A_P + P + B_P \text{ und } \overline{B}_P = B_P + \overline{B}_P . P.$$

Wegen der zweiten Beziehung ist $B_P + P = \overline{B}_P + P$, d. h. die Menge $B_P + P$, welche nach der ersten Beziehung das Komplement von A_P ist, ist gleich der Summe der beiden abgeschlossenen Mengen $\overline{B}_P$ und P, also abgeschlossen, was zu beweisen war.

Ein Teilkontinuum C von K heißt Häufungskontinuum von K, falls $\overline{K - C} = K$ gilt. Wir bezeichnen jene Primteile eines irreduziblen Kontinuums K, welche Häufungskontinua von K oder Punkte sind, als Primteile erster Art, die übrigen Primteile von K als Primteile zweiter Art. Es gilt dann

Satz 2. *Es sei K ein irreduzibles Kontinuum, das nicht Primkontinuum ist, und es sei P ein Primteil erster Art von K. Dann ist ein Kontinuum C, welches der Bedingung genügt $\overline{A}_P < C \leqq A_P + P$, nicht regulär.*

Es gilt in der obigen Bezeichnungsweise $K = A_P + P + B_P$. Da $C \leqq A_P + P$ sein soll, muß einerseits $K - C \geqq B_P$ und daher $\overline{K - C} \geqq \overline{B}_P$ gelten. Da P von erster Art sein soll, gilt $K = \overline{A}_P + \overline{B}_P$, und da $\overline{A}_P < C$ sein soll, gilt anderseits $K - C < \overline{B}_P$ und daher $\overline{K - C} \leqq \overline{B}_P$. Es ist also $\overline{K} - \overline{C} = \overline{B}_P$. Daraus folgt aber, daß die Menge $\overline{K - \overline{K - C}} = \overline{K - \overline{B}_P}$, also $\leqq \overline{A}_P$ ist und daher, da $C > \overline{A}_P$ sein soll, nicht mit C identisch sein kann. Es ist also C nicht regulär, womit Satz 2 bewiesen ist.

Satz 3. *Ist K ein zwischen a und b irreduzibles Kontinuum, welches kein Primkontinuum ist, so existiert zu jedem a enthaltenden Teilkontinuum C von K ein Primteil P_C von K, so daß $\overline{A}_{P_C} \leqq C \leqq \overline{A}_{P_C} + P_C$ gilt.*

Bezeichnet $P(a)$ den den Punkt a enthaltenden Primteil von K und ist ein a enthaltendes Teilkontinuum C von K gegeben, so sind offenbar zwei Fälle möglich: Entweder gilt $C \leqq P(a)$. In diesem Fall setzen wir $P_C = P(a)$. Da $A_{P(a)}$ die leere Menge ist, wird durch diese Wahl von P_C die Relation $\overline{A}_{P_C} \leqq C \leqq \overline{A}_{P_C} + P_C$ erfüllt. Oder es existiert ein von $P(a)$ verschiedener Primteil von K, der mit C Punkte gemein hat, in welchem Falle wegen der Abgeschlossenheit von C auch ein letzter Primteil von K existiert, der mit C Punkte gemein hat.

Wir wollen denselben mit P_C bezeichnen. Dann gilt

$$K = A_{P_C} + P_C + B_{P_C}.$$

Da C den Punkt a und einen Punkt von P_C enthält, hat C mit jedem Primteil $\leqq A_{P_C}$ Punkte gemein. Da K ein irreduzibles Kontinuum ist, muß jeder Primteil, der Teilmenge von A_{P_C} ist, Teilmenge von C sein. Es gilt also $A_{P_C} \leqq C$ und mithin, da C abgeschlossen ist, $\bar{A}_{P_C} \leqq C$. Es besteht also auch in diesem Fall die Beziehung $\bar{A}_{P_C} \leqq C \leqq \bar{A}_{P_C} + P_C$, womit Satz 3 bewiesen ist.

Satz 4. *Wenn alle Primteile von K von erster Art sind, so existiert zu jedem a enthaltenden regulären Teilkontinuum C von K ein Primteil P_C, so daß $C = \bar{A}_{P_C}$ gilt.*

Nach Satz 3 existiert zu jedem a enthaltenden Teilkontinuum C ein Primteil P_C, so daß $\bar{A}_{P_C} \leqq C \leqq \bar{A}_{P_C} + P_C$ gilt. Da nach Voraussetzung alle Primteile von K von erster Art sind, so ist insbesondere P_C von erster Art und da C regulär sein soll, kann also nach Satz 2 nicht $\bar{A}_{P_C} < C$ gelten. Also gilt $\bar{A}_{P_C} = C$, womit Satz 4 bewiesen ist.

Anders liegen die Verhältnisse, wenn K Primteile zweiter Art enthält.

Satz 5. *Ist K ein zwischen a und b irreduzibles Kontinuum und P ein a nicht enthaltender Primteil zweiter Art, so sind die Mengen $\bar{A}_P$ und $\overline{K - \bar{B}_P}$ zwei nicht identische a enthaltende reguläre Teilkontinua von K.*

Wir setzen voraus, daß P ein Primteil zweiter Art von K ist, welcher a nicht enthält. Die Menge $\bar{A}_P$ ist nach Satz 1 ein a enthaltendes reguläres Teilkontinuum von K. Die Menge $K - \bar{B}_P$ ist als Komplement der abgeschlossenen Menge $\bar{B}_P$ offen. Also ist die Menge $\overline{K - \bar{B}_P}$ regulär. Wir zeigen ferner, daß $\bar{A}_P$ und $\overline{K - \bar{B}_P}$ nicht identisch sind. Nach Voraussetzung ist P ein Primteil zweiter Art, also ist $\overline{K - P}$ eine echte Teilmenge von K. Nun ist $K - P = A_P + B_P$. Also ist $\bar{A}_P + \bar{B}_P$ echte Teilmenge von K. Wäre nun $\bar{A}_P = \overline{K - \bar{B}_P}$, so wäre $\overline{K - \bar{B}_P} + \bar{B}_P$ echte Teilmenge von K, und das ist unmöglich, weil sogar $(K - \bar{B}_P) + \bar{B}_P$ mit K indentisch ist. Also gilt $\bar{A}_P \neq \overline{K - \bar{B}_P}$, und zwar ist, wie man leicht zeigt, $\bar{A}_P$ eine echte Teilmenge von $\overline{K - \bar{B}_P}$, so daß also auch die letztere Menge den Punkt a enthält.

Zum Beweis von Satz 5 ist noch zu zeigen, daß die Menge $\overline{K - \bar{B}_P}$ zusammenhängend ist. Wir sehen zunächst, daß

$$K - \bar{B}_P = A_P + (P - \bar{B}_P . P)$$

gilt. Da P als Primteil zweiter Art vorausgesetzt ist, sind $\bar{A}_P$ und $\bar{B}_P$ fremd und es gilt daher weiter

$$A_P+(P-\bar{B}_P.P)=\bar{A}_P+P-(\bar{A}_P.P+\bar{B}_P.P).$$

Setzen wir

$$P-(\bar{A}_P.P+\bar{B}_P.P)=P^*,$$

so gilt also

$$K-\bar{B}_P=\bar{A}_P+P^*,\quad \overline{K-\bar{B}_P}=\bar{A}_P+\bar{P}^*.$$

Ist die Menge $\bar{B}_P$ leer, dann ist $\overline{K-\bar{B}_P}=K$; in diesem Fall ist die Menge $\overline{K-\bar{B}_P}$ sicherlich ein Kontinuum, wie behauptet. Wir können also annehmen, daß $\bar{B}_P$ nicht leer ist. Um die Behauptung, daß $\overline{K-\bar{B}_P}$ zusammenhängend ist, auch in diesem Fall nachzuweisen, genügt es, da $\bar{A}_P$ ein Kontinuum ist, zu zeigen, daß erstens $\bar{P}^*$ mit $\bar{A}_P$ Punkte gemein hat und daß zweitens $\bar{P}^*$ ein Kontinuum ist.

Wäre erstens $\bar{P}^*$ zu $\bar{A}_P$ fremd, so würde K, da $\bar{B}_P$ zu $\bar{A}_P$ ebenfalls fremd ist, durch die Formel

$$K=\bar{A}_P+(\bar{P}^*+\bar{B}_P)$$

als Summe zweier fremder, abgeschlossener, nicht leerer Mengen dargestellt, was unmöglich ist.

Um zweitens einzusehen, daß P^* zusammenhängend ist, entnehmen wir zunächst aus der Definition von P^* durch leichte Umformung

$$P^*=K-(\bar{A}_P+\bar{B}_P).$$

Daraus ergibt sich, daß P^* eine in K offene Menge ist, deren Begrenzung Teil von $\bar{A}_P+\bar{B}_P$ ist. Jede Komponente von $\bar{P}^*$ muß mit der Begrenzung der offenen Menge P^* Punkte gemein haben, d. h. jede Komponente von $\bar{P}^*$ hat entweder mit $\bar{A}_P$ oder mit $\bar{B}_P$ Punkte gemein.

Nehmen wir zunächst den Fall, daß jede Komponente von $\bar{P}^*$ nur mit einer der beiden Mengen $\bar{A}_P$ und $\bar{B}_P$ Punkte gemein hat. Diese Annahme aber führt, wie wir nun zeigen wollen, zu einem Widerspruch. Sei nämlich A^* die Summe aller Komponenten von $\bar{P}^*$, die mit $\bar{A}_P$ Punkte gemein haben, B^* die Summe aller Komponenten von $\bar{P}^*$, welche mit $\bar{B}_P$ Punkte gemein haben. Wenn die Mengen $\bar{A}^*$ und $\bar{B}^*$ einen Punkt p gemein haben, dann gehört p offenbar weder $\bar{A}_P$ noch $\bar{B}_P$ an, ist aber Häufungspunkt einer Folge von Teilkontinua von $\bar{P}^*$, welche Punkte mit $\bar{A}_P$ gemein haben, und Häufungspunkt einer Folge von Teilkontinua von $\bar{P}^*$, welche Punkte mit $\bar{B}_P$ gemein haben. Die Näherungsgrenze der ersten Folge enthält ein p mit $\bar{A}_P$ verbindendes Teilkontinuum von $\bar{P}^*$, die Näherungsgrenze der zweiten Folge enthält ein p mit $\bar{B}_P$ verbindendes Teilkontinuum von $\bar{P}^*$, also enthält $\bar{P}^*$ ein $\bar{A}_P$ und $\bar{B}_P$

verbindendes Kontinuum, entgegen der Annahme. Es sind also die Mengen $\bar{A}^*$ und $\bar{B}^*$ fremd. Dann aber wird K durch die Formel

$$K = (\bar{A}_P + \bar{A}^*) + (\bar{B}^* + \bar{B}_P)$$

als Summe zweier fremder, abgeschlossener, nicht leerer Mengen dargestellt, was unmöglich ist, da K ein Kontinuum ist. Die Annahme, daß jede Komponente von P bloß mit einer der beiden Mengen $\bar{A}_P$ und $\bar{B}_P$ Punkte gemein hat, führt also auf einen Widerspruch. Es muß also eine Komponente C von $\bar{P}^*$ existieren, welche sowohl mit $\bar{A}_P$ als auch mit $\bar{B}_P$ Punkte gemein hat. Dann ist aber $\bar{A}_P + C + \bar{B}_P$ ein a und b enthaltendes Teilkontinuum von K und daher mit K identisch, da K ein zwischen a und b irreduzibles Kontinuum ist. Dann ist aber C mit $\bar{P}^*$ identisch, also ist $\bar{P}^*$ zusammenhängend, wie behauptet. Damit ist Satz 5 in allen Stücken bewiesen.

Satz 4 und Satz 5 ergeben zusammengenommen: Dann und nur dann, wenn alle Primteile eines irreduziblen Kontinuums K von erster Art sind, existiert zu jedem a enthaltenden regulären Teilkontinuum C ein Primteil P_C, so daß $C = \bar{A}_{P_C}$ gilt. Bedenkt man, daß $\bar{A}_P$ abgeschlossene Hülle der Summe aller Primteile vor P ist, so hat man das folgende

Theorem I. *Dann und nur dann, wenn alle Primteile eines irreduziblen Kontinuums K von erster Art sind, existiert zu jedem a enthaltenden regulären Teilkontinuum C von K ein Primteil P_C, so daß C die abgeschlossene Hülle der Summe aller Primteile vor C ist.*

Damit sind die a enthaltenden regulären Teilkontinua von K durch die Primteile von K dargestellt. Wir wollen nun umgekehrt die Primteile durch die regulären Teilkontinua ausdrücken.

Es sei $R(a, K)$ die geordnete Menge der a enthaltenden regulären Teilkontinua von K. Nach einem Resultat von Kuratowski[1] ist die Menge $R(a, K)$ ähnlich einer abgeschlossenen Menge R von reellen Zahlen, so daß also jedes Element von $R(a, K)$ durch eine Zahl von R gekennzeichnet werden kann. Wir bezeichnen das der Zahl r von R entsprechende Element von $R(a, K)$ mit C_r.

Es sei nun eine Zahl r von R gegeben, welche nicht sowohl Anfangs- als auch Endelement eines Sprunges von R ist. Wir ordnen dieser Zahl eine Menge T_r zu durch folgende Festsetzungen:

1. Wenn r weder Anfangs- noch Endelement eines Sprunges von R ist, so setzen wir

$$T_r = \prod_{r' > r} C_{r'} - \sum_{r'' < r} C_{r''}.$$

---

[1] A. O., p. 207.

2. Wenn r Anfangs-, aber nicht Endelement eines Sprunges ist, setzen wir

$$T_r = C_r - \sum_{r'' < r} C_{r''}.$$

3. Wenn r Endelement eines Sprunges (r_1, r), aber nicht Anfangselement eines Sprunges ist, setzen wir

$$T_r = \overline{\prod_{r' > r} C_{r'} - C_{r_1}}.$$

Wir beweisen nun

Satz 6. *Wenn r weder Anfangs- noch Endelement eines Sprunges ist, so besteht T_r entweder aus einem einzigen Punkt oder T_r ist ein Häufungskontinuum von K.*

Wir wählen zu diesem Zweck zwei gegen r im Sinne der Ordnung von R konvergente Folgen von Zahlen der Menge R, eine monoton abnehmende $\{r'_n\}$ und eine monoton wachsende $\{r''_n\}$ $(n = 1, 2, \quad$ ad. inf.). Wir bilden für jedes natürliche n die Menge

$$D_n = C_{r'_n} - C_{r''_n}.$$

Offenbar ist jede der Mengen $\bar{D}_n$ ein Kontinuum; also ist T_r, da die Mengen $\bar{D}_n$ monoton abnehmen und

$$T_r = \prod_{n=1}^{\infty} \bar{D}_n$$

gilt, zusammenhängend, d. h. entweder einpunktig oder ein Kontinuum. Im letzteren Fall ist T_r ein Häufungskontinuum von K; denn, da r keinem Sprung von R angehören soll, ist jeder Punkt von T_r Häufungspunkt entweder von

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_{r''_n} \text{ oder von } K - \sum_{n=1}^{\infty} C_{r'_n},$$

d. h. vom Komplement von T_r.

In derselben Weise (indem man bloß eine monoton wachsende, beziehungsweise bloß eine monoton abnehmende gegen r konvergente Folge von Zahlen aus R betrachtet) kann man auch für die Fälle, daß r Anfangs-, beziehungsweise Endelement eines Sprunges von R ist, zeigen, daß die Menge T_r entweder einpunktig oder ein Häufungskontinuum ist, was wir übrigens im folgenden nicht verwenden.

Einem Satz von Hahn[1] zufolge ist K in jedem Punkt eines Häufungskontinuums nicht zusammenhängend im kleinen. Einem

[1] A. O., p. 224.

Resultat von Kuratowski[1] zufolge ist, falls r Anfangs- oder Endelement eines Sprunges von R ist, jeder Punkt von T_r (diese Menge mag einen oder mehrere Punkte enthalten) in einem unzerlegbaren Teilkontinuum von K, welches nicht Häufungskontinuum von K ist, enthalten. Also ist in diesem Fall die Menge T_r in jedem ihrer Punkte nicht zusammenhängend im kleinen. Es kann mithin höchstens für den Fall, daß r weder Anfangs- noch Endelement eines Sprunges von R ist und die Menge T_r einpunktig ist, K in dem Punkt von T_r zusammenhängend im kleinen sein. In dem Punkt einer einpunktigen Menge T_r, für welche r weder Anfangs- noch Endelement eines Sprunges ist, ist aber K in der Tat zusammenhängend im kleinen. Denn für einen solchen Punkt p stellen die oben definierten Mengen $\{D_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ eine Folge von auf den Punkt sich zusammenziehenden, zusammenhängenden, in K offenen Mengen dar. Wir haben also bewiesen:

Satz 7. *K ist zusammenhängend im kleinen in den Punkten jener Mengen T_r, welche einpunktig sind und Zahlen r entsprechen, weder Anfangs- noch Endelementen eines Sprunges der Menge R zugeordnet sind, und nur in solchen Punkten.*

Bezeichnen wir mit Z die Menge aller Punkte von K, in denen K zusammenhängend im kleinen ist, und setzen wir $S = K - Z$, so ergibt sich als Korollar aus dem bewiesenen Satz:

Dann und nur dann, wenn die Klasse $R(a, K)$ keine Sprungelemente enthält und jede mehrpunktige Menge T_r Komponente von S_a ist, ist jede Menge T_r ein Primteil erster Art von K.

Es sei P ein Primteil von K. Nach Satz 1 gibt es zu P das reguläre a enthaltende Teilkontinuum $\bar{A}_P = C_r$. Es ist T_r nicht fremd zu P, und da T_r, falls es einpunktig, Punkt von Z_i, falls es mehrpunktig, Komponente von S_a ist, so muß $T_r = P$ sein. Jeder Primteil ist also von erster Art. Damit ist nun bewiesen

Theorem II. *Dann und nur dann, wenn die Klasse $R(a, K)$ keine Sprungelemente enthält und jedes mehrpunktige T_r Komponente von S_a ist, gibt es zu jedem Primteil P von K ein reguläres Teilkontinuum C_r, so daß P gleich ist*

$$\prod_{r' > r} C_{r'} - \sum_{r'' < r} C_{r''}.$$

---

[1] A. O, p. 212.