

Die Ermittlung der Spannungen in beliebig begrenzten Scheiben

Von

Prof. Dr. techn. Robert Bortsch in Graz

(Mit 14 Textfiguren)

(Vorgelegt in der Sitzung am 28. Februar 1929)

A. Allgemeines über die Berechnung von Scheiben, bekannte Verfahren.

Wir verstehen unter Scheiben solche plattenförmige Körper, die von Kräften beansprucht werden, welche in deren Mittelebene wirken. In der Bautechnik kommen Scheiben als hohe Träger, Wälzgelenke bei Bogenbrücken, Schwergewichtsspermauern, Pfeiler bei Sperrmauern in aufgelöster Bauweise usw. vor, und das Bedürfnis, diese Konstruktionen genauer als bisher zu berechnen, wächst mit den immer größer werdenden Abmessungen derselben. Aber auch andere bisher nicht gelöste Fragen, wie die mitwirkende Plattenbreite bei Plattenbalken und Rahmenecken lassen sich als Scheibenprobleme behandeln.

Für Scheiben unendlicher Ausdehnung und für Halbscheiben sind die Lösungen bekannt¹, falls der Baustoff als homogen und isotrop angenommen wird. Wenn eine Scheibe auch in der dritten Richtung erhebliche Abmessungen hat, wie etwa eine lange, massige Mauer, können die Verschiebungen nach dieser Richtung Null gesetzt werden, alle Verschiebungen vollziehen sich in Ebenen normal zu dieser und wir sprechen vom ebenen Formänderungszustande, bei welchem auch Spannungen parallel zur dritten Koordinate auftreten. Bei dünnen Scheiben hingegen verschwinden diese Spannungen, aber es treten Verschiebungen senkrecht zu den beiden Parallelebenen auf, so daß dieselben uneben werden. In diesem Falle liegt der ebene Spannungszustand vor. Beide Probleme führen auf dieselbe Differentialgleichung, welche lautet:

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + \frac{2 \partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} = 0. \quad (1)$$

Hierin bedeuten z die Ordinaten der Airy'schen Spannungsfunktion, aus welcher die Spannungen in der Scheibe durch folgende Gleichungen gefunden werden:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \\ \sigma_y &= -\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \\ \tau &= \frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Die Lösung der Gleichung 1 führt bei unendlich ausgedehnten Scheiben und Halbscheiben zu einwandfreien Ergebnissen, erweist sich aber als nicht möglich, wenn die Scheiben allseits begrenzt und überdies an den Rändern unstetig belastet sind. Föppl berechnete z. B. die Spannungen in einem hohen Parallelträger¹, wobei Oberflächenspannungen an den Stirnseiten übrig blieben und die durch die äußeren Kräfte hervorgerufenen Spannungsstörungen nicht berücksichtigt werden konnten. Die erstere Unvollkommenheit tritt auch bei der Lösung derselben Aufgabe von Bleich auf.² Wyß³ ermittelte den Spannungsverlauf in ebenen Scheiben durch zahlreiche Versuche. Ohne Versuche findet er das mutmaßliche Bild der Spannungstrajektorien in allseits begrenzten Scheiben durch bloße Überlegungen, wobei der Vergleich mit bekannten Kraftfeldern ein wichtiges Hilfsmittel ist. Akira Miura⁴ nimmt in hohen Trägern die Spannungen, wie sich dieselben nach der Navier'schen Theorie ergeben, an und korrigiert sie durch die von den äußeren Kräften herrührenden Spannungsstörungen, eine Lösung, welche wohl nicht einwandfrei ist. In keilförmigen Kragträgern, welche durch Einzelasten an der Spitze oder auch gleichförmig belastet sind, ermittelt er rechnerisch die Spannungen, wobei aber die am schwierigsten zu behandelnden Stellen in der Nähe des Einspannungsquerschnittes außer Betracht blieben.

Riedel ersetzt die Scheibe durch ein engmaschiges, quadratisches Fachwerk, berechnet die von den äußeren Kräften verursachten Formänderungen und Spannungen der einzelnen Stäbe und findet hieraus die Spannungen in der homogenen Scheibe. Die Ergebnisse sind aber nach einer Zuschrift von C. Weber nicht als einwandfrei anzusehen.⁵

Von großer Bedeutung bleiben immer die experimentellen Spannungsprüfungen, von denen die optische Methode mit Zuhilfenahme des polarisierten Lichtes zur Ermittlung der Spannungen in Scheiben besonders aussichtsreich ist, aber für ihre Durchführung eine komplizierte Apparatur erfordert.

¹ Föppl, Drang und Zwang.

² Der Bauingenieur, 1923.

³ Wyß, Die Kraftfelder in festen elastischen Körpern.

⁴ Akira Miura, Spannungskurven in rechteckigen und keilförmigen Körpern.

⁵ Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, 1927 und 1928.

Der Gleichung (1) ist die Differentialgleichung einer auf Biegung beanspruchten Platte analog gebaut, welche lautet:

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} = \frac{p}{N}. \quad (3)$$

Hierin bedeutet:

p die spezifische Belastung der Platte,
 z ihre Durchbiegung und

$$N = \frac{m^2}{m^2 - 1} EJ. \quad m \text{ die Poisson'sche Konstante.}$$

Wenn $p = 0$ gesetzt und die Platte nur an ihren Rändern durch Momente beansprucht wird, werden die Gleichungen (1) und (3) identisch und die Biegungsordinaten z der Platte stellen dann die Ordinaten der Spannungsfunktion der Scheibe dar.

Auf Grund dieser Überlegung versuchte Wieghardt experimentell die Spannungen von Scheiben mit komplizierter Begrenzung zu ermitteln.¹ Es wurden die Ränder eines 1·5 mm starken Messingbleches entsprechend der äußeren Spannungsfunktion

verbogen, durch Spiegelung die Größen $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$ gemessen und

hieraus z und die Spannungen ermittelt. Dieser Versuch, welcher eine nicht einfache Einrichtung erfordert, ist mit Fehlern behaftet, auf welche Wieghardt hinweist. Zu diesen treten aber noch Fehler, welche aus der ungleichmäßigen Stärke des Versuchsbleches hervorgehen. Ich ließ ein Messingblech, 45:45 cm groß, diagonal zerschneiden und es zeigte sich, daß die Blechränder in der Walzrichtung schwächer waren als der mittlere Streifen. Die Blechstärken bewegten sich von 1·49 bis 1·53 mm so daß die Trägheitsmomente sich bis 8% unterschieden. Nachdem die Blechstärken sich stetig ändern, sind die hieraus entstehenden Fehler nicht feststellbar. Es dürften daher direkte Versuche an der Scheibe mit Dehnungsmessungen vorzuziehen sein.

B. Die Verwendung von Differenzgleichungen zur Scheibenberechnung.

Nachdem heute die Berechnung der biegsamen Platten weit ausgebildet ist, soll im folgenden versucht werden, die Spannungsfunktion der Scheiben aus der Durchbiegung der Platten auf rechnerischem Wege zu ermitteln, wobei die Gleichung (1) in eine dreizehngliedrige Differenzgleichung umgewandelt wird, weil mit dieser die Randbedingungen selbst bei unregelmäßiger Gestalt der

¹ Mitteilungen über Forschungsarbeiten. Heft 49.

Scheibe spielend erfüllt werden können. Meines Wissens wurde bisher dieses Verfahren noch nicht zur Ermittlung der Spannungen in Scheiben herangezogen.

Setzen wir in Gleichung (1) (Fig. 1)

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} = \frac{1}{e_x^4} [z_9 - 4z_1 + 6z_0 - 4z_2 + z_{10}]$$

$$\frac{\partial^4 z}{\partial y^4} = \frac{1}{e_y^4} [z_{11} - 4z_3 + 6z_0 - 4z_4 + z_{12}]$$

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{1}{e_x^2 \cdot e_y^2} [4z_0 - 2(z_1 + z_2 + z_3 + z_4) + z_5 + z_6 + z_7 + z_8]$$

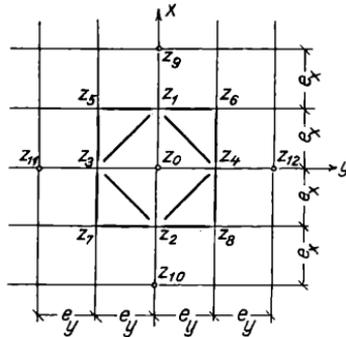


Fig. 1.

und wählen wir $e_x = e_y$ so erhalten wir:

$$20z_0 - 8[z_1 + z_2 + z_3 + z_4] + 2[z_5 + z_6 + z_7 + z_8] + [z_9 + z_{10} + z_{11} + z_{12}] = 0. \quad (4)$$

Diese wichtige Gleichung beschreibt die Umgebung des Punktes z_0 und ist nur eine andere Form der Gleichung (1). Sie wird auf jeden unbekanntem Netzpunkt angewendet und enthält auch Konstante, welche von den bekannten Ordinaten der äußeren Spannungsfunktion an den Scheibenrändern herrühren. Man erhält so viele Gleichungen, als unbekannte Ordinaten vorhanden sind. Die Auflösung des Gleichungssystems ist durch Iteration möglich, wie an einem Beispiele gezeigt werden soll.

Die Gleichungen (2) gehen über in:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{z_4 - 2z_0 + z_3}{e^2} \\ \sigma_y &= -\frac{z_1 - 2z_0 + z_2}{e^2} \\ \tau &= \frac{z_5 + z_8 - z_6 - z_7}{4e^2} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Die Spannungen σ ergeben sich hiebei aus drei aufeinanderfolgenden Ordinaten und es tritt bei weiten Netzmaschen ein ungenauer, verschwommener Verlauf der Spannungskurven auf. Genauer kann man die σ , welche im wesentlichen die Krümmungen der Spannungsfunktion darstellen, dadurch erhalten, daß man durch fünf aufeinanderfolgende Punkte eine Kurve legt. Aus der Taylor'schen Reihe ergibt sich dann für die Stelle z_0 :

$$\sigma_x = \frac{1}{12 e_y^2} \left[-z_{12} + 16 z_4 - 30 z_0 + 16 z_3 - z_{11} \right] \quad (6)$$

C. Die äußere Spannungsfunktion.

Den äußeren Kräften, welche an dem Scheibenrande angreifen, läßt sich auch eine Spannungsfunktion zuordnen, die äußere Spannungsfunktion, welche die Eigenschaft besitzt, daß sie durch zweimaliges Differenzieren die angreifenden Kräfte σ_x , σ_y und τ nach

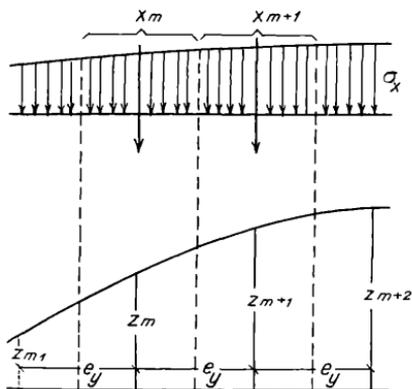


Fig. 2.

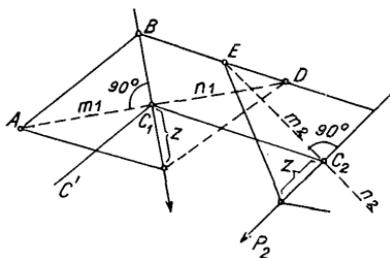


Fig. 3.

den Gleichungen (2) oder (5) liefert. Sind die äußeren Kräfte Einzelkräfte, so erhält man dieselben gleichfalls aus der Spannungsfunktion. Es ist:

$$\sigma_x = - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = - \frac{z_{m+1} - 2 z_m + z_{m-1}}{e_y^2}$$

$$e_y \cdot \sigma_x = X_m = - \left[\frac{z_{m+1} - z_m}{e_y} - \frac{z_m - z_{m-1}}{e_y} \right]. \quad (7)$$

Die Einzelkraft ist sohin der Unterschied der Differenzenquotienten in einem Schritte normal zur Kraft.¹

Als Belastung einer Scheibe kommt nur ein ebenes Kräftesystem in Frage, welches sich im Gleichgewichte befindet. Zu einem solchen lassen sich unendlich viele Spannungsfunktionsflächen an-

¹ Näheres in: Dr. Paul Funk, Die linearen Differenzgleichungen.

geben, welche invariant sind. Die räumliche Darstellung derselben erfolgt am klarsten durch einen Schichtenplan mit eingetragenen Höhenkoten. Bei Einzelkräften besteht die Spannungsfunktion, kurz auch Spannungsfäche genannt, aus Ebenen, welche sich dachartig verschneiden, bei stetig verlaufenden Lasten ist auch die Spannungsfunktion eine stetig gekrümmte Fläche.

Das Aufsuchen der Spannungsfäche zu einer gegebenen Kräftegruppe kann in folgender, schon bekannten Art geschehen. (Fig. 3).

Die Spur der ersten Spannungsfäche mit der Projektionsebene AB wird beliebig gewählt und trägt die Kote Null. Die Spur der nächsten Ebene CD muß so bestimmt werden, daß der Unterschied der Differenzenquotienten beider Flächen in einem Schnitte, normal zur Richtung P_1 , gleich P_1 wird. Das durch den Normalschnitt entstehende Dreieck ADS mit der klein zu denkenden Höhe z wurde in die Projektionsebene umgeklappt. Auch die Höhe kann, zweckmäßig mit einer runden Zahl, beliebig gewählt werden.

$$P_1 = \frac{z}{m_1} + \frac{z}{n_1} = z \left[\frac{1}{m_1} + \frac{1}{n_1} \right]$$

$$n_1 = \frac{1}{\frac{P_1}{z} - \frac{1}{m_1}} \quad (8)$$

Hiemit ist D gefunden. Durch C wird die Schichtenlinie CC_2 parallel zu BD gezogen. Für die Kraft P_2 wird mit dem gleichen z die nächste Spur ermittelt. Die Spur der letzten Ebene muß dann wieder mit AB zusammenfallen.

An Stelle dieses ziemlich langwierigen Verfahrens, bei dem sich überdies die endgültige Gestalt der Spannungsfäche nicht abschätzen läßt, soll das folgende, wahrscheinlich noch nicht bekannte Verfahren gesetzt werden.

Satz: »Für drei im Gleichgewichte stehende Kräfte mit gemeinsamem Angriffspunkte ist ein beliebiges Dreieck, dessen Ecken auf den Wirkungslinien liegen, die Basis einer richtigen, von einer dreiseitigen Pyramide dargestellten Spannungsfunktion.«

Beweis: In Fig. 4 a wurde das Dreieck mit den Ecken ABC auf den Wirkungslinien der Kräfte P_1, P_2 und P_3 , sonst aber beliebig, angenommen. Mit den in der Abbildung ersichtlichen Bezeichnungen ergibt sich:

$$P'_2 = z \left[\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \right]$$

$$SA = u, SB = v, SC = w$$

P'_2 sei die durch die Spannungsfunktion dargestellte Kraft, P_2 die gegebene Kraft.

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{v \operatorname{tg} \mu} + \frac{1}{v \operatorname{tg} \lambda} = \frac{1}{v} (\operatorname{cotg} \mu + \operatorname{cotg} \lambda) = \frac{1}{v} \frac{\sin(\mu + \lambda)}{\sin \mu \cdot \sin \lambda}$$

$$P'_1 : P'_2 = \frac{\sin(\varphi + \psi)}{u \sin \varphi} \cdot \frac{\sin(\mu + \lambda)}{v \sin \mu \cdot \sin \lambda}$$

$$v : u = \sin \psi : \sin \mu, \quad v \sin \mu = u \sin \psi$$

$$P'_1 : P'_2 = \frac{\sin(\varphi + \psi)}{\sin \varphi} \cdot \frac{\sin(\mu + \lambda)}{\sin \lambda}$$

$$\sin(\varphi + \psi) : \sin(\mu + \lambda) = a : b$$

$$P'_1 : P'_2 = \frac{a}{\sin \varphi} \cdot \frac{b}{\sin \lambda}.$$

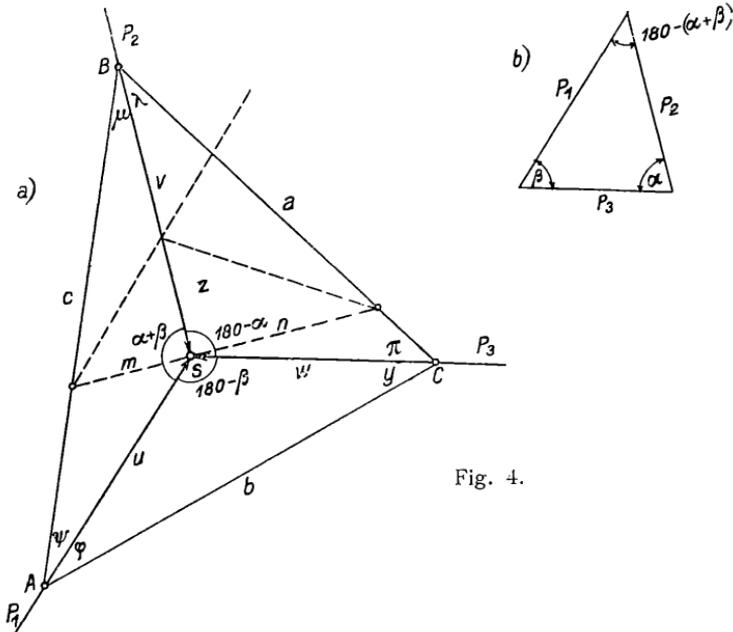


Fig. 4.

Aus den Dreiecken $A S C$ und $B S C$ ergibt sich:

$$b \cdot n = \sin \beta \cdot \sin \varphi$$

$$\frac{a \cdot n}{a} = \frac{\sin \alpha \cdot \sin \lambda}{\sin \beta \cdot \sin \varphi}$$

$$\frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{\sin \alpha \cdot \sin \lambda}{\sin \beta \cdot \sin \varphi}$$

oder $a : b = \sin \alpha \cdot \sin \varphi : \sin \beta \cdot \sin \lambda$.

$$P'_1 : P'_2 = \sin \alpha : \sin \beta.$$

Aus dem Kräfteplan $+ b$ ergibt sich:

$$P_1 : P_2 = \sin \alpha : \sin \beta$$

und es ist daher

$$\frac{P'_1}{P_1} = \frac{P'_2}{P_2} \text{ und auch } = \frac{P'_3}{P_3}.$$

Wählt man

$$z = \frac{P_2}{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}},$$

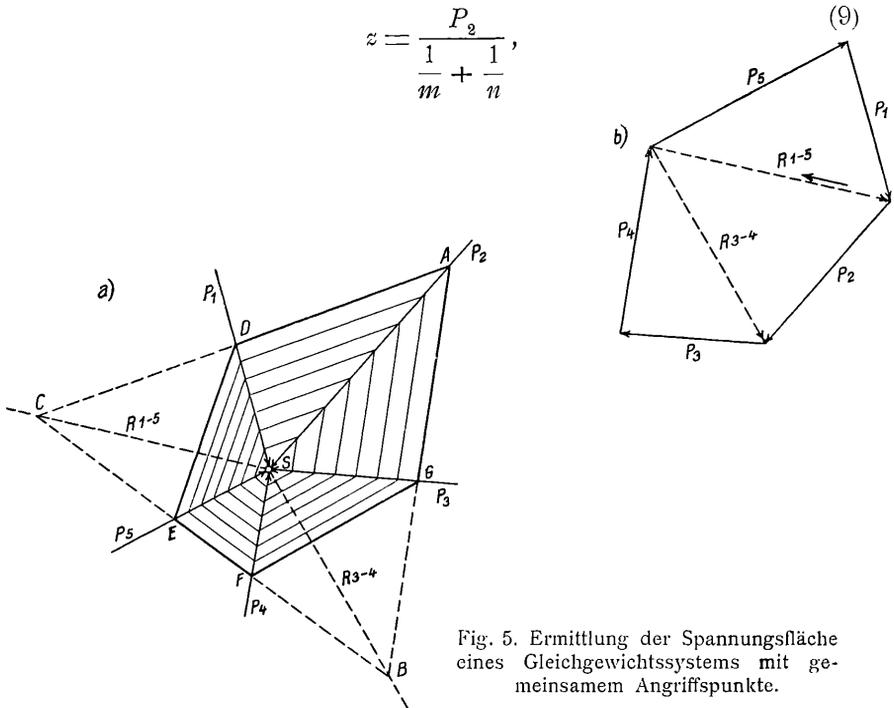


Fig. 5. Ermittlung der Spannungsfäche eines Gleichgewichtssystems mit gemeinsamem Angriffspunkte.

so wird

$$P'_1 = P_1, P'_2 = P_2, P'_3 = P_3,$$

d. h. die Spannungsfunktion ergibt die gegebenen Kräfte und ist daher richtig.

Um z zu einer runden Zahl zu machen, zeichnet man zu ABC ein ähnliches Dreieck

$$kz = \frac{P_2}{\frac{1}{km} + \frac{1}{kn}}$$

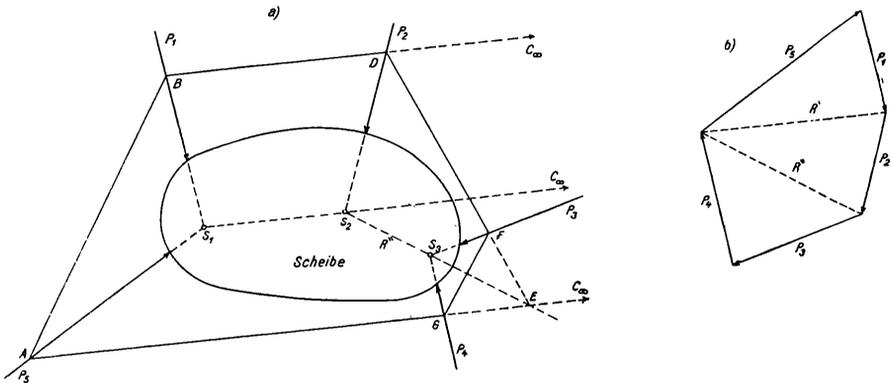
Ermittlung der Spannungsfunktion mehrerer Kräfte mit gemeinsamem Angriffspunkte.

Aus dem Kräfteplan, Fig. 5 b, wird ein Kräftedreieck ausgewählt, z. B. P_2, R_{3-4}, R_{1-5} , worauf in Fig. 5 a die hiezu gehörigen Wirkungslinien eingezeichnet werden. Das Grunddreieck ABC der die Spannungsfunktion dieser drei Kräfte darstellenden Pyramide wird beliebig gewählt und ihre Höhe nach Formel 9 gerechnet. Um den

Übergang auf vier Kräfte zu finden, denken wir uns in Fig. 4 *b* die Kraft R_{1-5} umgekehrt und diese bildet dann mit P_1 und P_5 ein Gleichgewichtssystem. Zu diesem gehört in Fig. 4 *a* die Pyramide $CDES$ als Spannungsfunktion mit der neuen Ebene DES . Ebenso tritt, wenn R_{3-4} durch P_3 und P_4 ersetzt wird, eine weitere Ebene FGS zur Spannungsfunktion hinzu. Es ist ersichtlich, daß die Basis der Spannungsfunktion ein zur gegebenen Kräftegruppe gehöriges Seileck ist.

Ermittlung der Spannungsfunktion mehrerer Kräfte mit nicht gemeinsamem Angriffspunkte.

Wir gehen wieder von einem Kräfdreiecke aus (Fig. 6 *b*), z. B. von $P_5 P_1 R'$. Hiezu gehört ein beliebig angenommenes Grunddreieck (Fig. 6 *a*) ABC , dessen Eck C im [Unendlichen gewählt



6. Ermittlung der Spannungsfäche eines Gleichgewichtssystemes mit nicht gemeinsamem Angriffspunkte.

wurde. R' wird ersetzt durch P_2 und R'' , wodurch die Basisseite DE auftritt. Schließlich wird R'' ersetzt durch P_3 und P_4 und es tritt hiedurch noch die Basisseite FG hinzu. Die endgültige, dachförmige Spannungsfäche hat die durch ein Seileck dargestellte Basis $ABDFGA$ und die Spitzen S_1, S_2 und S_3 , welche durch Grate verbunden sind und drei innerhalb der zu untersuchenden Scheibe liegen, mithin wieder verschwinden. Wenn auf den Scheibenrand stetig verlaufende Kräfte wirken, werden diese zuerst zu Einzelkräften zusammengefaßt, worauf mit denselben die Spannungsfunktion ermittelt wird. Die endgültige Spannungsfunktion erhält man dann durch Ausrundung der Kanten, entsprechend dem Verlaufe der stetigen Belastung, und die Schichtenlinien gehen in Kurven über.

Die innere Spannungsfunktion erstreckt sich über die zu untersuchende Scheibe und wird durch eine biegsame Platte dargestellt, welche über den Scheibenrändern tangentiell in die äußere Spannungsfunktion übergeht. Um sie aufzusuchen, legt man über die Scheibe ein Netz mit rechteckigen Maschen, welches sich in den Bereich der äußeren Spannungsfunktion fortsetzt und dort bekannte Ordinaten

der letzteren aufweist. Die unbekanntes Ordinaten der inneren Spannungsfunktion werden ermittelt, indem man die Gleichung (4) oder bei rechteckigen Maschen eine aus den vor derselben stehenden Ausdrücken gebildeten analogen Gleichung, auf jeden der Netzpunkte mit unbekannter Ordinate anwendet. Man erhält so ein System dreizehngliedriger Gleichungen, aus welchen die unbekanntes Ordinaten ermittelt werden. Die Spannungen in den einzelnen Punkten werden dann nach den Gleichungen (5) bestimmt.

Naturgemäß ist das Verfahren nicht an ein rechtwinkeliges Koordinatensystem gebunden. Je nach der Form der zu untersuchenden Scheibe können auch Polarkoordinaten oder auf ein schiefwinkeliges Achsenkreuz bezogene Koordinaten vorteilhafter sein.

D. Beispiel.

Eine quadratische Scheibe wird durch zwei entgegengesetzt wirkende Streckenlasten beansprucht. Es sind die im Innern auftretenden Spannungen zu ermitteln. Hierbei wird vorausgesetzt, daß die angreifenden Kräfte am Scheibenrande keine Reibungskräfte hervorrufen.

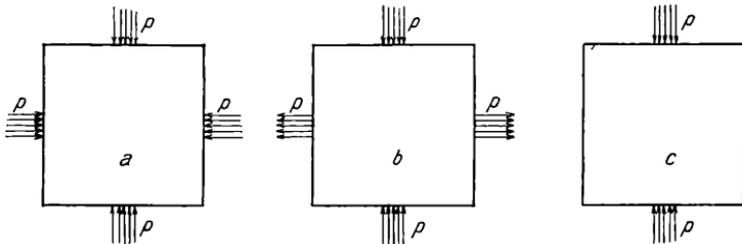


Fig. 7.

Um die Zahl der zur Berechnung der Spannungsfunktion erforderlichen Gleichungen zu verringern, belasten wir nach dem BU-Verfahren¹ die Scheibe zuerst nach 7 *a*, dann nach 7 *b* und erhalten die endgültige Belastung 7 *c* als arithmetisches Mittel der beiden ersteren Belastungsfälle.

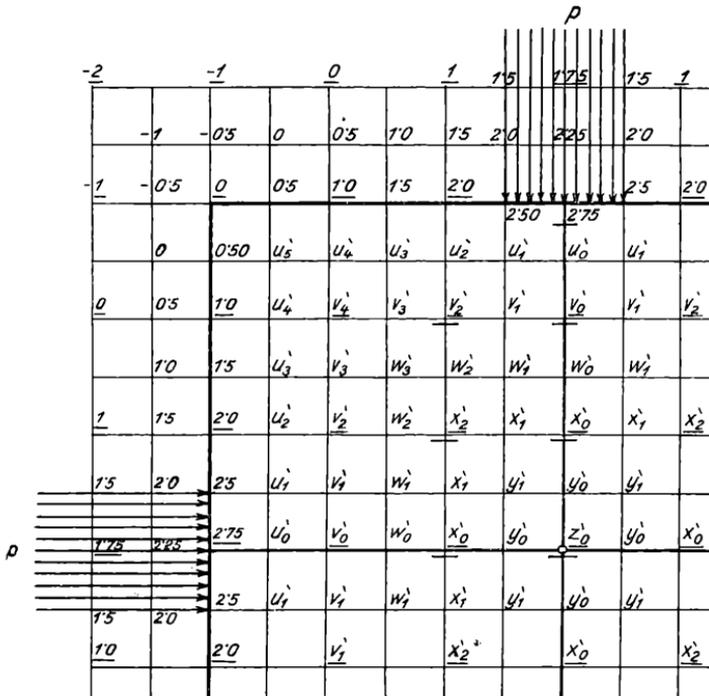
Belastungsfall *a*.

Die äußere Spannungsfäche ist eine Pyramide mit quadratischer Basis nach Fig. 8, doch sind die Kanten durch parabolische Zylinderflächen ausgerundet. Um die Ordinaten *u* bis *z* der inneren Spannungsfäche zu berechnen, teilen wir die Scheibe in quadratische Felder, und zwar zunächst in solche mit doppelt so großen Seiten, als die in Fig. 8 dargestellten, so daß vorläufig nur die unterstrichenen Netzpunkte gelten. Aus Symmetriegründen treten

¹ Belastungs-Umordnungs-Verfahren.

nur sechs Ordinaten als Unbekannte auf, welche durch folgende Gleichungen verknüpft sind:

$$\left. \begin{aligned}
 20 v'_0 - 8(2 v'_2 + x'_0 + 2 \cdot 75) + 4(x'_2 + 2 \cdot 0) + (z'_0 + 1 \cdot 75 + 2 v'_4) &= 0 \\
 20 v'_2 - 8(v'_0 + v'_4 + x'_2 + 2 \cdot 0) + 2(x'_0 + v'_2 + 2 \cdot 75 + 1 \cdot 0) + \\
 &+ (v'_2 + 1 \cdot 0 + x'_0 + 1 \cdot 0) = 0 \\
 20 v'_4 - 8(2 + 2 v'_2) + 2(0 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + x'_2) + 2(0 + v'_0) &= 0 \\
 20 x'_0 - 8(v'_0 + z'_0 + 2 x'_2) + 4(v'_2 + x'_0) + (2 \cdot 75 + x'_0 + 2 v'_2) &= 0 \\
 20 x'_2 - 8(2 v'_2 + 2 x'_0) + 2(v'_4 + 2 v'_0 + z'_0) + 2(2 \cdot 0 + x'_2) &= 0 \\
 20 z'_0 - 8(4 x'_0) + 2(4 x'_2) + 4 v'_0 &= 0
 \end{aligned} \right\} (10)$$



Belastungsfall a

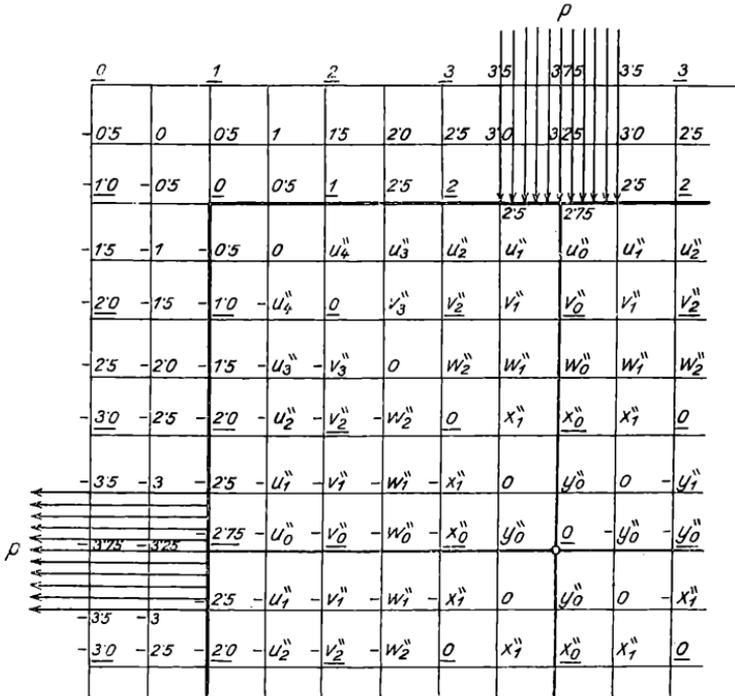
Fig. 8.

Die Auflösung dieser Gleichungen mit Zuhilfenahme der Rechenmaschine bereitet keine Schwierigkeiten. Man erhält:

$$\left. \begin{aligned}
 v'_0 &= 3 \cdot 286540 \\
 v'_2 &= 2 \cdot 835587 \\
 v'_4 &= 1 \cdot 998862 \\
 x'_0 &= 3 \cdot 733852 \\
 x'_2 &= 3 \cdot 459589 \\
 z'_0 &= 3 \cdot 933018
 \end{aligned} \right\} (11)$$

Hiebei wurde der Beiwert η , der Höhenunterschied der Schichtenlinien, weggelassen. Mit diesen Werten lassen sich nach Gleichung (5) die Spannungen berechnen, doch sind diese zu ungenau, und es muß eine engere Teilung, wie in Fig. 8 dargestellt, durchgeführt werden.

An die Stelle der Gleichungen (10) treten nunmehr 21 Gleichungen mit ebensoviel Unbekannten, wobei auch die bereits berechneten Ordinaten 11 nur rohe Annäherungen darstellen. Die Auflösung dieser vielen Gleichungen erfolgte durch Iteration. Zuerst



Belastungsfall b

Fig. 9.

werden mit Zuhilfenahme der Werte 11 möglichst gute Interpolationswerte für die restlichen 15 Ordinaten aufgesucht. Die den Gleichungen 10 analogen Gleichungen werden nun in folgender Form angeschrieben (z. B. für den Netzpunkt v_3'):

$$20 v_3' = 8 [u_3' + w_3' + v_4' + v_2'] - 2 [u_4' + u_2' + v_3' + w_2'] - [1.5 + w_2' + u_4' + v_1']$$

Der Wert v_3' wird als Unbekannte aufgefaßt, welche aus den rechts vom Gleichheitszeichen stehenden Näherungswerten zu berechnen ist. Von letzteren besitzt ein jeder einen Fehler, welcher positiv oder negativ sein kann. Bei den vielen Größen ist es ganz

unwahrscheinlich, daß sich alle diese Fehler in einem Sinne auswirken können, es wird im Gegenteil ein teilweiser Ausgleich eintreten, so daß die Unbekannte v'_3 mit einem verbesserten Näherungswert gewonnen wird. Günstig wirkt ferner, daß v'_3 einen größeren Faktor als die Größen auf der rechten Seite hat.

Man beginnt in der Nähe der Ränder, und zwar mit den größeren Ordinaten u'_0, u'_1 . und schreitet gegen die Mitte bis z'_0 vor. Man erhält auf diese Art ein System verbesserter Werte, mit welchem man einen zweiten Rechnungsgang durchführt usw. Die Ergebnisse sind nach drei bis vier Rechnungsgängen dann genügend genau, wenn sich die Werte einer jeden Unbekannten aus den beiden letzten Rechnungsgängen in der dritten Dezimale höchstens um zwei bis drei Einheiten unterscheiden.

Die berechneten Ordinaten der Spannungsfläche für den Belastungsfall *a* sind in der Tabelle 1 enthalten.

Belastungsfall *b*.

Die Darstellung der äußeren Spannungsfunktion erfolgte in Fig. 9, in welche auch die Ordinatenbezeichnung der inneren Spannungsfunktion eingetragen wurde. Zuerst wurden wieder die durch Unterstreichen hervorgehobenen Ordinaten des weiten Netzes aus drei Gleichungen berechnet, wobei sich folgende Werte ergaben:

$$\left. \begin{aligned} v''_0 &= 1 \cdot 394716 \\ v''_2 &= 0 \cdot 908952 \\ x''_0 &= 0 \cdot 387637 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Für das engmaschige Netz wurden 15 Gleichungen aufgestellt, welche die in der Tabelle I ersichtlichen Ergebnisse lieferten.

Belastungsfall *c*.

Von der zeichnerischen Darstellung der beiden Spannungsfunktionen für diesen Belastungsfall wurde Abstand genommen. Alle Ordinaten ergeben sich als die arithmetischen Mittel der Zahlenwerte, welche bei den Belastungsfällen *a* und *b* gewonnen wurden. Die äußere Spannungsfunktion zeigt in der Zeichnung am linken und rechten Rande vertikal verlaufende Schichtenlinien mit den Knoten 0, $-0 \cdot 5$ und $-1 \cdot 0$. Die Bezeichnungen der Ordinaten der inneren Spannungsfunktion sind in der Fig. 12 enthalten und ihre Zahlenwerte in der Tabelle I.

Die Berechnung der Normalspannungen.

Die in der Zeichnung lotrechten Spannungen

$$\sigma_x = - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Tabelle 1.
Ordinaten der inneren Spannungsfunktionen.

Belastungsfall							Belastungsfall						
a		b		c			a		b		c		
u_0'	3·037	u_0''	2·060	u_0	2·549	1	x_0'	3·751	x_0''	0·388	x_0	2·069	1
u_1'	2·854	u_1''	1·879	u_1	2·337		x_1'	3·676	x_1''	0·285	x_1	1·981	1·980
u_2'	2·455	u_2''	1·467	u_2	1·961		x_2'	3·473	\ominus	0·000	x_2	1·736	1·737
u_3'	1·993	u_3''	0·933	u_3	1·493		w_2'	3·189	$-w_2''$	-0·420	x_3	1·385	
u_4'	1·510	u_4''	0·500	u_4	1·005	1·004	v_2'	2·846	$-v_2''$	-0·924	x_4	0·961	0·962
u_5'	1·011	\ominus	0·000	u_5	0·506	0·505	u_2'	2·455	$--u_2''$	-1·467	x_5	0·493	
v_0'	3·306	v_0''	1·402	v_0	2·354		y_0'	3·892	y_0''	0·100	y_0	1·996	
v_1'	3·169	v_1''	1·266	v_1	2·217		y_1'	3·834	\ominus	0·000	y_1	1·917	
v_2'	2·846	v_2''	0·924	v_2	1·885		x_1'	3·676	$-x_1''$	-0·285	y_2	1·696	1·697
v_3'	2·442	v_3''	0·484	v_3	1·463		w_1'	3·447	$-w_1''$	-0·721	y_3	1·363	1·364
v_4'	1·993	\ominus	0·000	v_4	0·996		v_1'	3·169	$-v_1''$	-1·266	y_4	0·952	
u_4'	1·510	$-u_4''$	-0·500	v_5	0·505	0·504	u_1'	2·854	$--u_1''$	-1·879	y_5	0·488	0·490
w_0'	3·549	w_0''	0·834	w_0	2·192		z_0'	3·943	\ominus	0·000	z_0	1·972	1·971
w_1'	3·447	w_1''	0·721	w_1	2·084		y_0'	3·892	$-y_0''$	-0·100	z_1	1·896	1·897
w_2'	3·189	w_2''	0·420	w_2	1·804		x_0'	3·751	$-x_0''$	-0·388	z_2	1·687	1·684
w_3'	2·845	\ominus	0·000	w_3	1·423	1·422	w_0'	3·549	$-w_0''$	-0·835	z_3	1·357	1·358
v_3'	2·442	$-v_3''$	-0·484	w_4	0·979	0·980	v_0'	3·306	$-v_0''$	-1·403	z_4	0·952	0·950
u_3'	1·993	$-u_3''$	-0·993		0·500	0·499	u_0'	3·037	$-u_0''$	-2·060	z_5	0·489	

¹ Durch nochmalige Iteration berichtigte Werte.

Am Rande unter der Belastung gilt:

$$\sigma_x = - \frac{2 \cdot 50 - 2 \cdot 2 \cdot 75 + 2 \cdot 50}{e^2} \quad \eta = \frac{0 \cdot 5}{e^2} \quad \eta = p$$

$$\frac{\eta}{e^2} = 2 p. \tag{13}$$

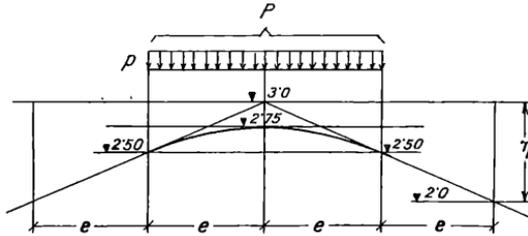


Fig. 10.

An einer anderen Stelle, z. B. für den Punkt w_3 (Fig. 12) gilt analog:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= - \frac{w_2 - 2 w_3 + w_4}{e^2} & \eta &= - 2 (w_2 - 2 w_3 + w_4) p \\ \sigma_y &= - 2 (v_3 - 2 w_3 + x_3) p. \end{aligned} \right\} \tag{14}$$

Am Rande der Scheibe muß die innere Spannungsfunktion tangentiell an die äußere anschließen (Fig. 11). Würde man die

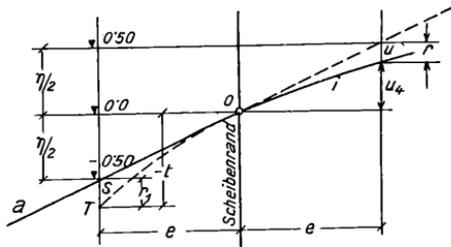


Fig. 11.

a = äußere Spannungsfunktion.
 i = innere Spannungsfunktion.

durch U und O gehende innere Spannungsfläche durch S weitergehen lassen, so entstünde bei O kein tangentieller Anschluß, weil e nicht unendlich klein ist. Derselbe wird aber erreicht, wenn man sich die innere Spannungsfunktion über O nach T fortgeführt denkt, wobei $r_1 = r$ sein muß (Parabel).

$$\sigma_x = - 2 [u_5 - 2 \cdot 0 - t] p$$

$$t = \frac{\eta}{2} + r_1 = \frac{\eta}{2} + \left(\frac{\eta}{2} - u_5 \right).$$

$$\sigma_x = -4 \left[u_5 - \frac{\eta}{2} \right]$$

oder, da η weggelassen wurde,

$$\sigma_x = -4 [u_5 - 0.5] \quad (15)$$

Die bildliche Darstellung der Spannungen σ_x und σ_y , erfolgte in Fig. 13. In Schnitten, parallel zur Krafrichtung, treten sowohl

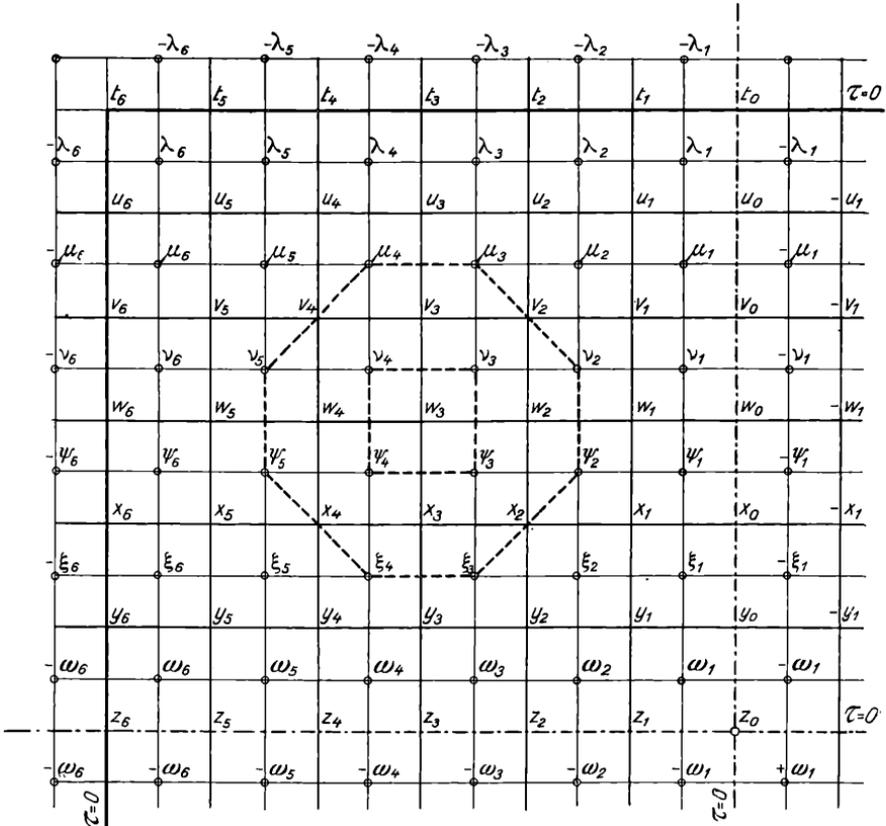


Fig. 12.

u, v, w = Ordinaten der Spannungsfläche.
 λ, μ, ν = Schubspannungen.

Druck- als auch Zugspannungen auf, und es sind die letzteren, welche bei Druckversuchen an Betonkörpern die Zerstörung derselben einleiten. Ihre Größe ist:

$$\sigma_y \doteq -0.1 p \doteq -0.1 \frac{P}{2e} \doteq -0.6 \frac{P}{a},$$

wenn a die Quadratseite der Scheibe bedeutet. Die gesamte Zugkraft Z beträgt:

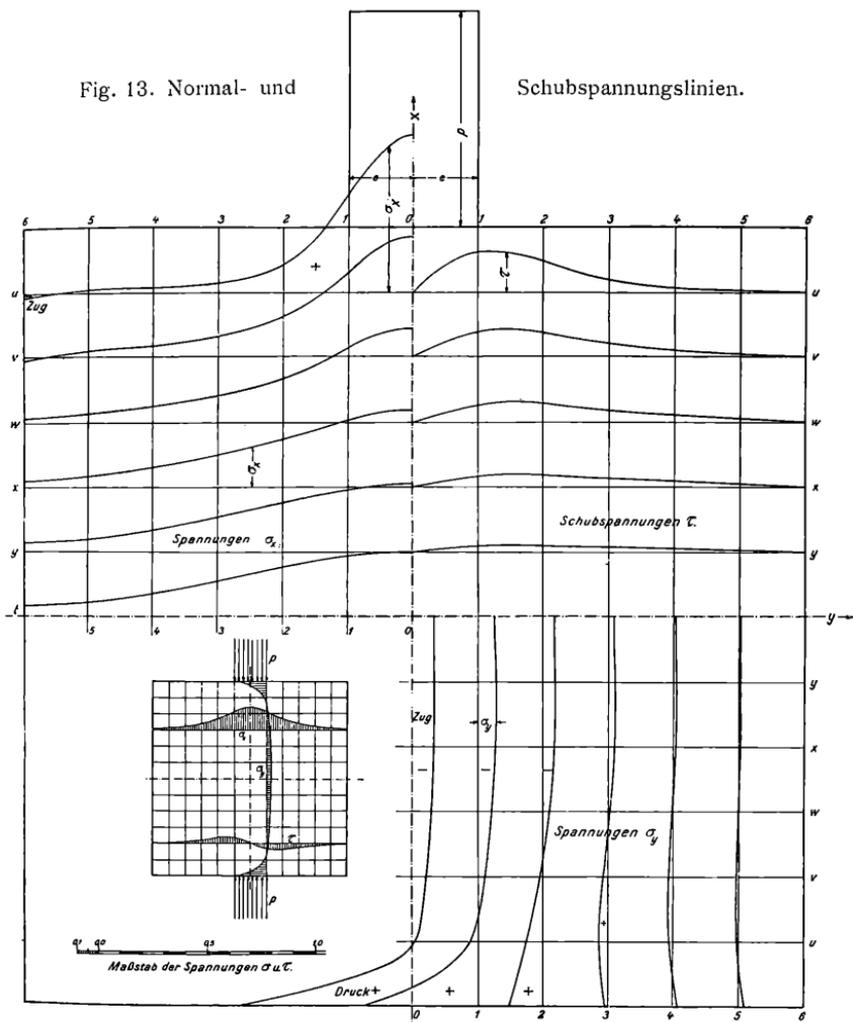
$$Z \doteq -0.4 P. \quad (16)$$

Die größte Druckspannung σ_y tritt unter der Belastung auf, und sie beträgt nach der Rechnung $\sigma_y = 0.806 p$. In diesem Bereiche sollte das Netz nochmals unterteilt werden, denn es ist eine Annäherung der Spannung σ_y an p zu erwarten.

Die Spannungen σ_x zeigen einen regelmäßigen, durchaus wahrscheinlichen Verlauf. Am Rande der Scheibe werden sie in den

Fig. 13. Normal- und

Schubspannungslinien.



Reihen u und v negativ. Prof. Schüle¹ unterzog Scheiben, 48 cm breit und 50 cm hoch, dem Druckversuche, wobei die Belastungsbreite $2e = 12$ cm betrug. Die σ_x -Kurven zeigen eine gute Übereinstimmung mit jenen nach Fig. 13, nur ergaben sich in allen wagrechten Schnitten am Rande Zugspannungen, und zwar merk-

¹ Mitteilungen der Eidgenössischen Materialprüfungsanstalt, Heft 13.

lich größere. Diese Abweichung kann aber leicht erklärt werden. Wenn die Scheibe infolge der Zugspannungen in lotrechter Richtung reißt, so sind die beiden verbleibenden Scheibenhälften ausmittig beansprucht und zeigen an den Außenrändern große Zugbeanspruchungen. Die Scheibe aus Beton ähnelt aber schon vor Eintritt eines Risses diesem Zustand, weil sie sich infolge des kleinen E hinsichtlich Zug in der wagrechten Richtung stärker ausdehnt, als eine Scheibe aus isotropem Material, welches bei der rechnerischen Untersuchung vorausgesetzt wurde.

Berechnung der Schubspannungen.

Die Schubspannungen ergeben sich aus der Formel 2

$$\tau = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

und z. B. für den Punkt w_3 (Fig. 12)

$$\tau_{w_3} = \frac{1}{2e} \left[\frac{v_2 - v_4}{2e} - \frac{x_2 - x_4}{2e} \right] \eta = \frac{v_2 + x_4 - v_4 - x_2}{4e^2} \eta.$$

$$\frac{\eta}{e^2} = 2p$$

$$\tau_{w_3} = (v_2 + x_4 - v_4 - x_2) \frac{p}{2}.$$

Diese Formel gibt zu ungenaue Werte, weil in ihr die dem Punkte w_3 näher liegenden Ordinaten der v_3 , w_4 , w_2 und x_3 nicht vorkommen. Zu genaueren Werten kommt man auf einem Umwege, indem man die Schubspannungen der Mittelpunkte der einzelnen quadratischen Maschen benützt. Für den Mittelpunkt v_4 der Masche v_3 , v_4 , w_3 , w_4 ist:

$$\tau_{v_4} = v_4 = \frac{1}{e} \left[\frac{v_3 - v_4}{e} - \frac{w_3 - w_4}{e} \right] \eta \quad \frac{\eta}{e^2} = 2p$$

$$v_4 = 2p (v_3 + w_4 - v_4 - w_3). \quad (17)$$

Dieser Wert wird kurz mit v_4 bezeichnet. Nach der Formel 17 wurden die Schubspannungen in allen mit griechischen Buchstaben bezeichneten Punkten berechnet.

Aus der Taylor'schen Reihe läßt sich folgende Interpolationsformel ableiten:

$$32 \tau_{w_3} = 10 [v_3 + v_4 + \psi_4 + \psi_3] - [v_2 + \mu_3 + \mu_4 + v_5 + \psi_5 + \xi_4 + \xi_3 + \psi_2]. \quad (18)$$

Die hiemit genügend genau berechneten Schubspannungen sind in der Tabelle 2 enthalten. In der Fig. 13 wurde der Verlauf derselben zeichnerisch zur Darstellung gebracht.

Tabelle 2. Normal-, Schub- und Hauptspannungen.

	6	5	4	3	2	1	0	
σ_x	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	+ 1·0000	t
σ_y	\emptyset	- 0·0220	- 0·0197	+ 0·0180	+ 0·1559	+ 0·5340	+ 0·8060	
τ	\emptyset							
$\operatorname{tg} 2\alpha$	\emptyset							
α	\emptyset							
max. τ	\emptyset	$\pm 0\cdot0110$	$\pm 0\cdot0099$	$\pm 0\cdot0090$	$\pm 0\cdot0780$	$\pm 0\cdot2670$	$\pm 0\cdot0970$	
max. σ	\emptyset	\emptyset	\emptyset	+ 0·0180	+ 0·1559	+ 0·5340	+ 1·0000	
min. σ	\emptyset	- 0·0220	- 0·0197	\emptyset	\emptyset	\emptyset	+ 0·8060	
σ_x	- 0·0190	+ 0·0125	+ 0·0164	+ 0·0413	+ 0·1245	+ 0·4470	+ 0·7279	u
σ_y	\emptyset	+ 0·0107	+ 0·0203	+ 0·0472	+ 0·0739	+ 0·0317	- 0·0146	
τ	\emptyset	0·0114	0·0197	0·0575	0·1466	0·1827	\emptyset	
$\operatorname{tg} 2\alpha$	\emptyset	- 12·800	- 9·950	- 19·500	+ 5·795	+ 3·160	\emptyset	
α	\emptyset	47° 15'	47° 50'	46° 28'	40° 5'	36° 15'	\emptyset	
max. τ	$\pm 0\cdot0095$	$\pm 0\cdot0115$	$\pm 0\cdot0198$	$\pm 0\cdot0185$	$\pm 0\cdot1490$	$\pm 0\cdot2768$	$\pm 0\cdot3572$	
max. σ	\emptyset	+ 0·0231	+ 0·0392	+ 0·0628	+ 0·2532	+ 0·5162	+ 0·7285	
min. σ	- 0·0190	+ 0·0001	- 0·0014	+ 0·0258	- 0·0448	- 0·0374	- 0·0141	
σ_x	- 0·0166	+ 0·0239	+ 0·0492	+ 0·0890	+ 0·1800	+ 0·3900	0·5485	v
σ_y	\emptyset	+ 0·0082	+ 0·0164	+ 0·0211	+ 0·0096	- 0·0320	- 0·0637	
τ	\emptyset	0·0114	0·0299	0·0665	0·1129	0·1105	\emptyset	
$\operatorname{tg} 2\alpha$	\emptyset	+ 1·445	+ 1·823	+ 1·962	+ 1·322	+ 0·523	\emptyset	
α	\emptyset	27° 40'	30° 37'	31° 30'	26° 25'	13° 50'	\emptyset	
max. τ	$\pm 0\cdot0083$	$\pm 0\cdot0139$	$\pm 0\cdot0342$	$\pm 0\cdot0748$	$\pm 0\cdot1416$	$\pm 0\cdot2381$	$\pm 0\cdot3064$	
max. σ	\emptyset	+ 0·0299	+ 0·0670	+ 0·1299	+ 0·2364	+ 0·4171	+ 0·5488	
min. σ	- 0·0166	+ 0·0021	- 0·0014	- 0·0197	- 0·0468	- 0·0591	- 0·0637	
σ_x	+ 0·0022	+ 0·0386	+ 0·0752	+ 0·1206	+ 0·2055	0·3428	+ 0·4324	w
σ_y	\emptyset	+ 0·0037	+ 0·0013	- 0·0086	- 0·0276	- 0·0589	- 0·0792	
τ	\emptyset	0·0185	0·0334	0·0570	0·0842	0·0748	\emptyset	
$\operatorname{tg} 2\alpha$	\emptyset	+ 1·056	+ 0·904	+ 0·883	+ 0·723	+ 0·372	\emptyset	
α	\emptyset	23° 15'	21° 4'	20° 50'	17° 55'	10° 13'	\emptyset	
max. τ	$\pm 0\cdot0011$	$\pm 0\cdot0355$	$\pm 0\cdot0498$	$\pm 0\cdot0864$	$\pm 0\cdot1440$	$\pm 0\cdot2142$	$\pm 0\cdot2558$	
max. σ	+ 0·0022	+ 0·0567	+ 0·0881	+ 0·1424	+ 0·2330	+ 0·3562	+ 0·4322	
min. σ	\emptyset	- 0·0143	- 0·0116	- 0·0304	- 0·0551	- 0·0723	- 0·0794	
σ_x	+ 0·0282	+ 0·0474	+ 0·0916	+ 0·1437	+ 0·2173	+ 0·3075	+ 0·3568	x
σ_y	\emptyset	- 0·0073	- 0·0148	- 0·0293	- 0·0542	- 0·0808	- 0·0997	
τ	\emptyset	0·0145	0·0256	0·0401	0·0574	0·0448	\emptyset	
$\operatorname{tg} 2\alpha$	\emptyset	+ 0·530	+ 0·482	+ 0·464	+ 0·424	+ 0·231	\emptyset	
α	\emptyset	14° 0'	12° 50'	12° 25'	11° 30'	6° 30'	\emptyset	
max. τ	$\pm 0\cdot0141$	$\pm 0\cdot0390$	$\pm 0\cdot0590$	$\pm 0\cdot0953$	$\pm 0\cdot1478$	$\pm 0\cdot1983$	$\pm 0\cdot2283$	
max. σ	+ 0·0282	+ 0·0590	+ 0·0974	+ 0·1525	+ 0·2294	+ 0·3117	+ 0·3568	
min. σ	\emptyset	- 0·0190	- 0·0206	- 0·0381	- 0·0663	- 0·0850	- 0·0997	
σ_x	+ 0·0396	+ 0·0560	+ 0·1010	+ 0·1566	+ 0·2272	+ 0·2810	+ 0·3167	y
σ_y	\emptyset	- 0·0042	- 0·0150	- 0·0314	- 0·0536	- 0·0883	- 0·0975	
τ	\emptyset	0·0067	0·0125	0·0207	0·0287	0·0246	\emptyset	
$\operatorname{tg} 2\alpha$	\emptyset	+ 0·223	+ 0·216	+ 0·220	+ 0·204	+ 0·133	\emptyset	
α	\emptyset	6° 18'	6° 5'	6° 13'	5° 45'	3° 50'	\emptyset	
max. τ	$\pm 0\cdot0198$	$\pm 0\cdot0383$	$\pm 0\cdot0631$	$\pm 0\cdot1033$	$\pm 0\cdot1518$	$\pm 0\cdot1916$	$\pm 0\cdot2071$	
max. σ	+ 0·0396	+ 0·0642	+ 0·1061	+ 0·1659	+ 0·2386	+ 0·2880	+ 0·3167	
min. σ	\emptyset	- 0·0124	- 0·0201	- 0·0407	- 0·0650	- 0·0953	- 0·0975	
σ_x	+ 0·0427	+ 0·0580	+ 0·1048	+ 0·1636	+ 0·2248	+ 0·2800	+ 0·2949	z
σ_y	\emptyset	- 0·0030	- 0·0101	- 0·0247	- 0·0533	- 0·0770	- 0·0988	
τ	\emptyset							
$\operatorname{tg} 2\alpha$	\emptyset							
α	\emptyset							
max. τ	$\pm 0\cdot0214$	$\pm 0\cdot0305$	$\pm 0\cdot0575$	$\pm 0\cdot0942$	$\pm 0\cdot1391$	$\pm 0\cdot1785$	$\pm 0\cdot1969$	
max. σ	+ 0·0427	+ 0·0580	+ 0·1048	+ 0·1636	+ 0·2248	+ 0·2800	+ 0·2949	
min. σ	\emptyset	- 0·0030	- 0·0101	- 0·0247	- 0·0533	- 0·0770	- 0·0988	

Ermittlung der Hauptspannungen und der Spannungstrajektorien.

Hiefür gelten die bekannten Formeln:

$$\left. \begin{aligned} \max. \sigma \} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2} \\ \min. \sigma \} & \\ \max. \tau \} &= \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2} \\ \min. \tau \} & \\ \operatorname{tg} 2 \alpha &= \frac{2 \tau}{\sigma_x - \sigma_y} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

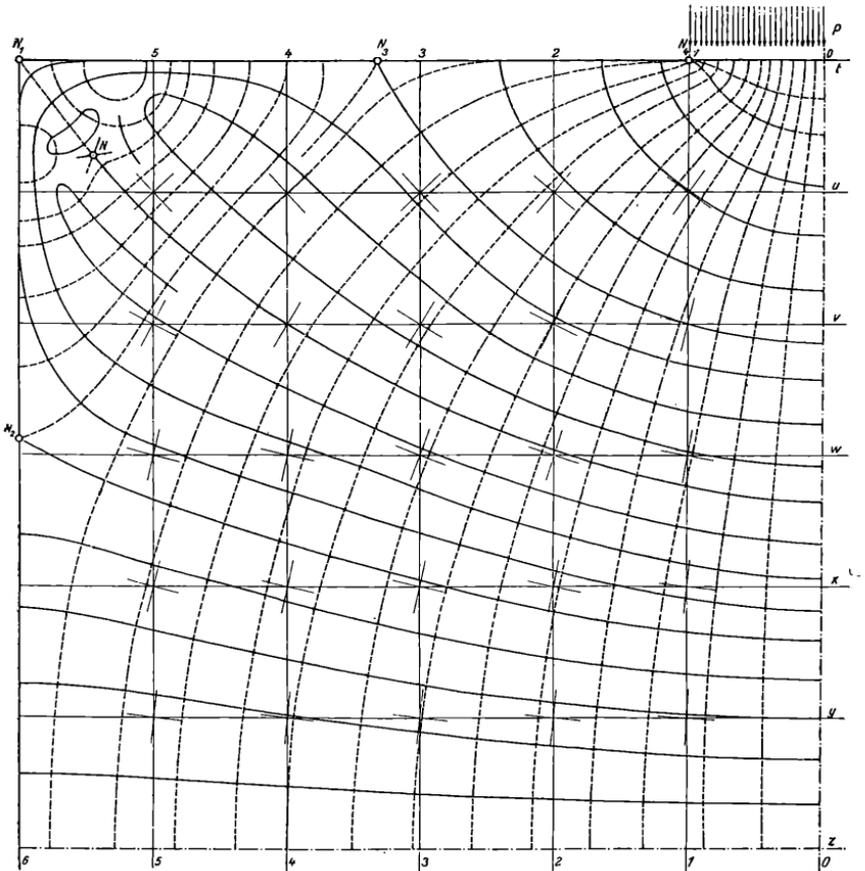


Fig. 14. Spannungstrajektorien.

N_1 bis N_4 singuläre Punkte. — Zugtrajektorien.

Drucktrajektorien.

Die Spannungstrajektorien für Zug und Druck nach Fig. 14 zeigen im allgemeinen einen regelmäßigen Verlauf. Im Bereiche des Kraftangriffes bildet sich ein Druckkern heraus. Die Ränder des Eckes N_1-N_2 , N_1-N_3 weisen Zugspannungen auf. Die Lage

des singulären Punktes N ist ungenau und daher auch der Verlauf der benachbarten Trajektorien. Bei engerer Teilung des Netzes im Eck könnten diese Ungenauigkeiten beseitigt und wahrscheinlich noch weitere singuläre Punkte aufgefunden werden. Nachdem aber die Spannungen in diesem Gebiete sehr klein sind, wurde hievon Abstand genommen.

Die Dehnungen in der Mitte ergeben sich aus der Formel:

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E_b} \left(\sigma_y - \frac{\sigma_x}{m} \right) \quad m = 6$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E_b} \left(-0.0988 - \frac{0.2949}{6} \right) p = -\frac{p}{E_b} \cdot 0.1479.$$

Ein an dieser Stelle eingelegter schwacher Eisenstab erhält dann eine Spannung von $E_e \cdot \varepsilon_y$.

$$\frac{E_e}{E_b} = 15.$$

$$\sigma_e = -15 \cdot 0.1479 = 2.22 p.$$

Für $p = 100 \text{ kg/cm}^2$ wäre dann

$$\sigma_e = -222 \text{ kg/cm}^2 \text{ (Zug).}$$

Diese geringe Eisenspannung vermag den Beton in seiner Zugbeanspruchung nicht allzuviel zu entlasten und die Bildung von Zugrissen zu verzögern, eine Erscheinung, die bei den Versuchen Schüle's klar zutage trat.

Bei Brückenwalgelenken wäre es naheliegend, statt der geraden Querbewehrungsseisen solche von gekrümmter Form, entsprechend dem Verlaufe der Zugtrajektorien, anzuordnen, doch soll diese Frage in einem späteren Aufsätze behandelt werden.

Zusammenfassung.

Die Berechnung der Spannungen in Scheiben wird auf Basis der Airy'schen Spannungsfunktionen in der Art durchgeführt, daß die die innere Spannungsfunktion darstellende biegsame Platte an die äußere Spannungsfunktion der Lasten tangentiell angeschlossen wird. Für die graphische Ermittlung der letzteren wird ein Verfahren abgeleitet. Die Differentialgleichung der innern Spannungsfunktion wird durch ein System dreizehngliedriger Differenzgleichungen ersetzt, welche durch Iteration aufgelöst werden. Das Verfahren wird an einer durch Streckenlasten beanspruchten, quadratischen Scheibe erläutert, für welche die Spannungsbilder und der Verlauf der Spannungstrajektorien ermittelt werden.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse](#)

Jahr/Year: 1929

Band/Volume: [138_2a](#)

Autor(en)/Author(s): Bortsch Robert

Artikel/Article: [Die Ermittlung der Spannungen in beliebig begrenzten Scheiben. 63-83](#)