©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Anhang.

Mathematische Untersuchung einer in der Lehre von den Farbenempfindungen auftretenden Reihe.

Von R. Schumann in Wien.

Bei einer Untersuchung über die Reihe der Farbenempfindungen wurde Herr R. Ehrlich, München, aufmerksam[1] auf die Analogie mit einer algebraischen Reihe, deren Glieder folgende Eigenschaft besitzen: »Jedes Glied ist gleich der Summe aus seinen beiden Nachbargliedern«.

Herr Ehrlich gab der Gliederfolge die Form:

$$+a,\ +a+b,\ +b,\ -a,\ -(a+b),\ -b,\ +a,$$

sie erschien somit als periodisch bei sechs Gliedern. Weiter stellte Herr Ehrlich die Frage, ob noch andere derartige Reihen bestehen, insbesondere solche aus mehr als zwei Elementen.

1. Zur Beantwortung dieser Frage kann man zunächst die Aufgabe stellen: Welche Funktion $f(x)$ liefert Reihen mit der Grundeigenschaft:

$$f(x) = f(x-\alpha)+f(x+\alpha), \tag{I}$$

wobei drei benachbarte Abszissen angesetzt sind mit der konstanten Differenz α.

Aus (I) folgt für je drei benachbarte Glieder:

$$\begin{aligned} f(x+\alpha) &= f(x) - f(x-\alpha), \\ f(x+2\alpha) &= f(x+\alpha) - f(x), \\ f(x+3\alpha) &= f(x+2\alpha) - f(x+\alpha). \end{aligned}$$

Durch Addition der zweiten und dritten Gleichung ergibt sich:

$$f(x+3\alpha) = -f(x),$$

folglich ist:

$$f(x+6\alpha) = -f(x+3\alpha) = f(x).$$

Die gesuchte Funktion hat somit die Periode 6α, mithin ist $\alpha = \frac{\pi}{3}$, entsprechend 60° alter Teilung.

2. Es soll die Form von f gesucht werden. Wenn $f(x\pm\alpha)$ nach Potenzen von α entwickelbar ist, so folgt durch Addition der beiden Entwicklungen von $f(x+\alpha)$ und $f(x-\alpha)$ nach Taylor:

$$0 = +f(x) + \left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right)_x \cdot \alpha^2 + \frac{1}{12}\left(\frac{d^4 f}{dx^4}\right)_x \cdot \alpha^4 +$$

[1] Über die periodische Reihe der Farbenempfindungen. Diese Sitzungsber., Jahrgang 1929.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Man erkennt, daß diese Gleichung durch die allgemeine Form: $f(x) = A.e^{Bx}$ befriedigt werden wird; durch Einsetzen und Kürzen entsteht:

$$0 = +1 + B^2.\alpha^2 + \frac{1}{12}.B^4.\alpha^4 + \ldots$$

welche Gleichung für reelles B nicht erfüllbar ist. Setzt man $B = \pm i.C$, wo $i = \sqrt{-1}$, so wird nach Multiplikation mit $\frac{1}{2}$ zunächst:

$$0 = +\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ C^2\ \alpha^2 + \frac{1}{24}\cdot C^4.\alpha^4 - .$$

sodann durch Addition von $+\frac{1}{2}$ beiderseits:

$$+\frac{1}{2} = +1 - \frac{1}{1.2}\ (C.\alpha)^2 + \frac{1}{1.2.3.4}\cdot(C.\alpha)^4 - \ldots = \cos(C.\alpha).$$

Also muß sein $(C.\alpha) = \frac{\pi}{3}$, wo C nach obigem gleich 1 gesetzt werden darf. Demnach genügen der Grundbedingung (I) die beiden komplexen Formen für f: $A.e^{+ix}$ und $A.e^{-ix}$, mithin auch die reellen Funktionen $A.\cos x$ und $A.\sin x$.

In der Tat ist:

$$\cos(x - 60°) + \cos(x + 60°) = 2.\cos x.\cos 60° = \cos x.$$

Eine entsprechende Gleichung gilt für $\sin x$.

Setzt man $f(x) = A.e^{Bx}$ unmittelbar in (I) ein, so entsteht nach leichter Rechnung als Bedingung für B:

$$+1 = e^{-B\alpha} + e^{+B\alpha}.$$

Diese Gleichung ist für $e^{+B\alpha}$ quadratisch, die Lösungen sind:

$$e^{B\alpha} = +\frac{1}{2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{3}.$$

Setzt man die rechte Seite gleich: $\cos D \pm i.\sin D$, so folgt: $D = \frac{\pi}{3}$, entsprechend 60° wie oben.

3. Mit Rücksicht hierauf lassen sich die Glieder einer Folge von Gliedern mit der Grundeigenschaft (I) geometrisch zweifach deuten:

erstens als Ordinaten einer Kosinus-(oder Sinus-)kurve bei äquidistanten Abszissen im Abstande $\frac{\pi}{3}$;

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

zweitens als Ordinaten der Ecken eines regelmäßigen Sechsecks und, da letzteres bekanntlich in der Natur eine gewisse Rolle[1] spielt, so sei hierauf etwas näher eingegangen.

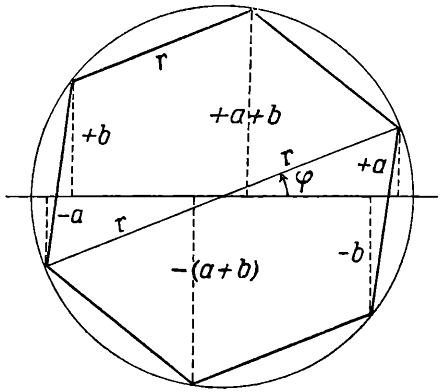

Fig. 1.

Ein regelmäßiges Sechseck liegt im Kreise mit dem Radius r fest, wenn die Amplitude φ einer Ecke gegeben ist; es möge in der Ehrlich'schen Reihe gesetzt werden: $a = f(x-\alpha)$, $b = f(x+\alpha)$, so werden die Ordinaten der sechs Ecken

$$\begin{aligned} r.\sin\varphi &= +a, & r.\sin(\varphi+180) &= -a, \\ r.\sin(\varphi+60) &= +a+b, & r.\sin(\varphi+240) &= -a-b, \\ r\cdot\sin(\varphi+120) &= +b, & r.\sin(\varphi+300) &= -b. \end{aligned} \qquad (\mathrm{II}a)$$

---

[1] Wegen des Vorkommens der Zahl 6 sei auf eine Anzahl einschlägiger Stellen in naturwissenschaftlichen Veröffentlichungen hingewiesen; einige dieser Hinweise verdanke ich Herrn Dr. Tippmann.

Sigmund Exner: Die Physiologie der facettierten Augen von Krebsen und Insekten. 1891, im besonderen p. 172—178, nebenbei p. 42, 113.

Justus Carrière: Die Sehorgane der Tiere. 1885, im besonderen p. 134, nebenbei p. 60, 133 sowie Fig. 96 auf p. 122.

Aus den gesammelten Abhandlungen zur physiologischen Optik von Artur König, Nr. IV: Eine bisher noch nicht bekannte, subjektive Gesichtserscheinung. P. 9 und Tafel I, Fig. 1.

W. Marshall: Naturgeschichte des Tierreiches. P. 460 (Fig. 4), p. 461 und 562.

Aus der Sammlung gemeinverständlicher wissenschaftlicher Vorträge von Virchow-Holtzendorff. Neue Folge, XIV. Serie: Die Augen der Tiere. Von Otto Thilo, 1899, p. 13.

Tierkunde und Menschenkunde. Von Rudolf Bertel, Wien und Leipzig, 1918, p. 96.

Pflanzenphysiologische Wandtafeln von Frank und Tschirch, Tafel XXII.

An diesen Stellen wird das Auftreten von Querschnitten in der Form des Rechteckes, zumeist des regelmäßigen, teils eingehend erörtert, teils erwähnt.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Umgekehrt folgt aus je zwei (mit Ausnahme der nebeneinanderstehenden Paare) gegebenen Gliedern der Reihe zur Zeichnung des Sechsecks

$$r=\frac{2}{3}\sqrt{3}.\sqrt{a^2+ab+b^2},\qquad \operatorname{tg}\varphi=\frac{a.\sqrt{3}}{a+2b} \tag{IIb}$$

Belegt man die Ecken mit gleicher Masse, so folgt, daß das statische Moment jedes Eckpunktes gleich ist der Summe der statischen Momente seiner beiden Nachbareckpunkte, und zwar gilt dies in Bezug auf eine beliebige Achse durch den Mittelpunkt.

4. Die einfachste, in Betracht kommende Folge von Gliedern, die (I) genügen, ist rein mathematisch aufgefaßt:

$$+a,\ +a,\ 0,\ -a,\ -a,\ 0,\ +a,\ \ldots;$$

man erhält sie aus (IIa) für $\varphi=60°$, $b=0$, $r=\frac{2}{3}\sqrt{3}.a$.

Addiert man zu ihr Glied um Glied weitere solche Reihen, beginnend mit einem beliebigen Gliede, so erhält man Reihen von Gliedern aus mehreren Elementen. Ein einfaches Schema hiezu ist:

	1	2	3	4	5	6	7
1	$+a$	0	$-c$	$-d$	0	$+f$	$+g$
2	$+a$	$+b$	0	$-d$	$-e$	0	$+g$
3	0	$+b$	$+c$	0	$-e$	$-f$	0
4	$-a$	0	$+c$	$+d$	0	$-f$	$-g$
5	$-a$	$-b$	0	$+d$	$+e$	0	$-g$
6	0	$-b$	$-c$	0	$+e$	$+f$	0
7	$+a$	0	$-c$	$-d$	0	$+f$	$+g$

Die von Herrn Ehrlich angesetzte Reihe erhält man hieraus durch Addition der Spalten 1 und 2; ebenso findet man aus der 1., 3. und 4. Spalte beispielsweise folgende Reihe aus drei Elementen:

Reihe α:			Reihe β:		
	$+c$			$+c$	$-d$
$-a$	$+c$	$+d$	$-a$	$+c$	
$-a$		$+d$	$-a$		$+d$
	$-c$			$-c$	$+d$
$+a$	$-c$	$-d$	$+a$	$-c$	
$+a$		$-d$	$+a$		$-d$
	$+c$			$+c$	$-d$

Die Glieder der 7. Spalte unterscheiden sich von denen der 1. nur durch den konstanten Faktor $\frac{g}{a}$ usw.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Jede Spalte kann um beliebige Zeilen verschoben werden, ohne daß die Grundeigenschaft (I) verlorengeht; siehe Reihe β.

5. Auf die Lösung der im vorstehenden behandelten Aufgabe läßt sich die der folgenden zurückführen: »Reihen von Gliedern zu bestimmen derart, daß jedes Glied gleich dem Produkt aus seinen beiden Nachbargliedern wird«:

$$g(x) = g(x-\alpha) \, . \, g(x+\alpha). \tag{III}$$

Logarithmiert man diese Gleichung und ersetzt nacheinander x durch $x+\alpha$ und $x+2\alpha$, so erhält man:

$$\begin{aligned}
\lg g(x+\alpha) &= \lg g(x) - \lg g(x-\alpha), \\
\lg g(x+2\alpha) &= \lg g(x+\alpha) - \lg g(x), \\
\lg g(x+3\alpha) &= \lg g(x+2\alpha) - \lg g(x+\alpha);
\end{aligned}$$

mithin ist $g(x+3\alpha) = \frac{1}{gx}$ und weiter $g(x+6\alpha) = g(x)$.

Die Zahl 6 folgt mit Notwendigkeit aus der Grundbedingung (III), wie vorhin aus (I), ebenso wie die Eigenschaft der Periodizität selbst.

Differentiert man (III) und dividiert die so entstehende Gleichung Seite für Seite wieder durch (III), so wird:

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{g'(x+\alpha)}{g(x+\alpha)} + \frac{g'(x-\alpha)}{g(x-\alpha)}.$$

Setzt man $\frac{g'}{g} = F$, so folgt eine Bedingung von der Form I für F, nämlich

$$F(x) = F(x+\alpha) + F(x-\alpha),$$

folglich ist $F(x) = \cos x$ und $g(x) = e^{\sin x}$. Tatsächlich ist

$$e^{\sin x} = e^{\sin(x+60)} \, . \, e^{\sin(x-60)} = e^{2 \, . \sin x \, . \cos 60} = e^{2 \, . \sin x \, . \frac{1}{2}}.$$

6. Folgende Bemerkung über die Grundeigenschaft (I) hatte Herr Kollege Schrutka-Rechtenstamm die Güte beizutragen:

Nennt man die aufeinanderfolgenden Glieder der Ehrlich'schen Reihe $u_1, u_2, .$ so lautet die Grundforderung:

$$+u_{(x+2)} - u_{(x+1)} + u_{(x)} = 0.$$

Dies ist eine linearhomogene Differenzengleichung mit konstanten Koeffizienten.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1929

Band/Volume: 138_2a

Autor(en)/Author(s): Schumann R.

Artikel/Article: Anhang. Mathematische Untersuchung einer in der Lehre von den Farbenempfindungen auftretenden Reihe. 257-261