

# Über parallele ebene Schnitte eines konvexen Körpers

Von

Konrad Zindler in Innsbruck

Wirkl. Mitglied d. Akad. d. Wiss.

(Mit 2 Textfiguren)

(Vorgelegt in der Sitzung am 2. Mai 1929)

## 1. Einleitung.

Wenn auf drei parallelen Ebenen  $\mathfrak{E}'$ ,  $\mathfrak{E}$ ,  $\mathfrak{E}^*$ , von denen  $\mathfrak{E}$  zwischen den beiden anderen liegt, durch einen konvexen Körper  $\mathfrak{R}$  drei Flächenstücke  $\mathfrak{F}'$ ,  $\mathfrak{F}$ ,  $\mathfrak{F}^*$  mit den Inhalten  $F'$ ,  $F$ ,  $F^*$  ausgeschnitten werden und wenn  $\mu:\lambda$  das Abstandsverhältnis  $(\mathfrak{E}'\mathfrak{E}):(\mathfrak{E}\mathfrak{E}^*)$  ist ( $\lambda + \mu = 1$ ), so gilt:

$$\sqrt{F} \geq \lambda \sqrt{F'} + \mu \sqrt{F^*}, \quad (1)$$

wo für  $\lambda \neq 0$ ,  $\mu \neq 0$  das Gleichheitszeichen nur dann zutrifft, wenn  $\mathfrak{F}'$  und  $\mathfrak{F}^*$  perspektiv ähnlich sind und der zwischenliegende Teil von  $\mathfrak{R}$  aus dem verbindenden Kegelstumpf besteht.

Dieser Satz geht im wesentlichen auf H. Brunn (1889) zurück und ist seither wiederholt bewiesen worden.<sup>1</sup> Wir wollen ihn verschärfen, indem wir für die Differenz der linken und rechten Seite von (1) eine untere Schranke suchen;<sup>2</sup>  $F'$  und  $F^*$  werden vorläufig als nicht verschwindend vorausgesetzt.

## 2. Konvexe Polyeder.

Wir gehen von der Gleichung (9) der erwähnten Arbeit [2] aus:

$$f = f' (\lambda + \mu v)^2 + \lambda \mu f'' (\alpha + \beta - 2v). \quad (2)$$

Die Bedeutung der Symbole ist die folgende: In  $\mathfrak{E}'$  liegt das Trapez  $T'$  mit der Mittellinie  $m'$ , der Höhe  $h'$  und der Fläche  $f' = m' h'$ ; in  $\mathfrak{E}^*$  analog das Trapez  $T^*$  mit

$$m^* || m', h^* || h', f^* = m^* h^*.$$

<sup>1</sup> Vgl. etwa die Literaturangaben in Blaschke, Kreis und Kugel, 1916 (besonders p. 40, 41) und in der unter [2] zitierten Abhandlung.

<sup>2</sup> Dabei wird sich zugleich in 8 ein Beweis der Beziehung (1) selbst ergeben, der mir besonders unmittelbar und durchsichtig erscheint, indem er den Begriff des gemischten Flächeninhaltes nicht verwendet und eine Fortsetzung des elementaren Weges ist, den ich in der Math. Zeitschr., 15 (1922) für die konvexen Polyeder eingeschlagen habe. Die dortigen Bezeichnungen sind hier größtenteils beibehalten; auf p. 109, Z. 2, ist dort  $s'$  durch  $s'_i$  zu ersetzen. Der Hilfssatz 1 in 3,  $\gamma$  und die Methode der Zerfällung in Bereiche der Klasse  $p$  in 6 sind vielleicht auch sonst verwendbar.

Ferner ist

$$f^* = v^2 f', \quad h^* = \alpha h', \quad m^* = \beta m', \quad (3)$$

$$\alpha \beta = v^2. \quad (4)$$

Es ist  $f$  die Fläche des Schnittes von  $\mathfrak{C}$  mit dem (i. a. nicht konvexen) »Trapezkörper« [2], der  $T'$  und  $T^*$  verbindet.

Ein konvexes Polyeder  $\mathfrak{B}$  werde von  $\mathfrak{C}'$ ,  $\mathfrak{C}$ ,  $\mathfrak{C}^*$  in den Polygonen  $P'$ ,  $P$ ,  $P^*$  mit den Flächen  $F'$ ,  $F$ ,  $F^*$  geschnitten. Durch alle Ecken von  $P'$ ,  $P^*$  ziehen wir in einer Richtung  $\rho$  der Ebene  $\mathfrak{C}'$  die Sehnen und überlagern die beiden so entstehenden Einteilungen, wie in der erwähnten Arbeit [2] angegeben. Die Polygone  $P'$  und  $P^*$  werden dadurch in je  $n$ -Streifen zerlegt. Verbindet man wie dort jedes Paar entsprechender Streifen durch einen Trapezkörper  $\mathfrak{X}_v$ , so kann man auf jeden der  $n$ -Trapezkörper die Gleichung (2) anwenden. Vervielfältigt man die Symbole  $f, f', m', m^*, h', \alpha, \beta, T', T^*$  durch den Index  $v$  für die verschiedenen  $\mathfrak{X}_v$ , während  $v$  für alle Paare denselben Wert hat, so hat man wegen (4):

$$f_v - f'_v (\lambda + \mu v)^2 = \lambda \mu m'_v h'_v \cdot \frac{(\beta_v - v)^2}{\beta_v}; \quad (v = 1, \quad n). \quad (5)$$

Die Gesamtheit der  $\mathfrak{X}_v$  bilden einen (i. a. nicht konvexen) Körper  $\mathfrak{X}$ , dessen Schnitt mit  $\mathfrak{C}$  die Fläche  $T$  habe. Dann finden wir durch Addition der  $n$  Gleichungen (5):

$$T - F' (\lambda + \mu v)^2 = \lambda \mu \sum_1^n m'_v h'_v \cdot \frac{(\beta_v - v)^2}{\beta_v}. \quad (6)$$

Wird nun der kleinste konvexe Körper  $\mathfrak{R}_0$ , der  $P'$  und  $P^*$  enthält, von  $\mathfrak{C}$  in einem Polygom  $P_0$  mit dem Inhalt  $F_0$  geschnitten, so ist:

$$F \geq F_0, \quad F_0 \geq T, \quad (7)$$

$$\sqrt{F_0} - (\lambda \sqrt{F'} + \mu \sqrt{F^*}) \geq$$

$$\geq \frac{\lambda \mu}{\sqrt{T + \lambda \sqrt{F'} + \mu \sqrt{F^*}}} \cdot \sum_1^n m'_v h'_v \cdot \frac{(\beta_v - v)^2}{\beta_v}. \quad (8)$$

Wenn zwischen  $\mathfrak{C}'$  und  $\mathfrak{C}^*$  ein Punkt  $A_0$  von  $\mathfrak{B}$  liegt, der nicht zu  $\mathfrak{R}_0$  gehört, überzeugt man sich leicht, daß für jeden Querschnitt des Parallelbüschels  $\mathfrak{C}'$ ,  $\mathfrak{C}^*$ , der zwischen diesen beiden Ebenen liegt,  $F$  über  $F_0$  hinausgreift,<sup>3</sup> daß also die Beziehung (8), wenn wir  $F_0$  durch  $F$  ersetzen, um so mehr, und zwar stets mit dem Ungleichheitszeichen gilt.

<sup>3</sup> Wälzt man nämlich eine gemeinsame Stützebene von  $P'$  und  $P^*$  um das Prismatoid  $\mathfrak{R}_0$  herum, so dreht sich ihre Spur mit der durch  $A_0$  gehenden Ebene

Wir bleiben nun bei der Beziehung (8) selbst. Hier gilt das Gleichheitszeichen nur, wenn  $F_0 = T$  ist, d. h. wenn alle Seitenvierecke [2] der  $\mathfrak{L}$ , eben sind; dann fallen aber  $\mathfrak{L}$  und  $\mathfrak{R}_0$  zusammen. Die rechte Seite von (8) verschwindet nur, wenn alle  $\beta_v = v$  (daher auch alle  $\alpha_v = v$ ) sind. Beide Umstände können unabhängig voneinander eintreten (vgl. die Beispiele *a* und *b* in 10). Aber sie treten zugleich nur ein [2], wenn  $P'$  und  $P^*$  perspektivähnlich sind.<sup>4</sup> Nur in diesem Fall gilt also in (1) das Gleichheitszeichen.

Will man auf der rechten Seite von (8) außer  $\lambda, \mu, v$  nur Größen haben, die allein von  $P'$  oder  $P^*$  einzeln abhängen ( $\beta_v$  kann man ja jederzeit durch  $m_v^* : m_v'$  ersetzen), so muß man  $T$  entfernen. Dies kann so geschehen: Wenn die Halbmesser der Hüllkreise<sup>5</sup> von  $P', P^*$  mit  $r', r^*$  bezeichnet werden, so schneidet  $\mathfrak{C}$  den verbindenden Kegelstumpf in einem Kreis vom Halbmesser

$$r = \lambda r' + \mu r^*,$$

der den Schnitt  $\mathfrak{C}, \mathfrak{L}$  ganz enthält. Also ist  $T \leq r^2 \pi$ , und man darf  $\sqrt{T}$  in (8) durch  $(\lambda r' + \mu r^*) \sqrt{\pi}$  ersetzen.

### 3. Hilfssätze.

a) Zwischen zwei parallelen Strecken der Richtung  $\rho$ , nämlich  $AB \geq c > 0$  und  $CD \geq c$  sei ein konvexer Bereich  $\mathfrak{B}$  mit der Fläche  $F$  eingespannt; ihm sei ein Polygon  $P$  eingeschrieben (in Fig. 1 ein Sechseck  $AGHKL B$ ), dessen Fläche ebenfalls  $P$  heiße. Ferner sei

$$F - P \leq \delta, \quad (\delta > 0) \quad (9)$$

und  $\omega$  eine Zahl zwischen Null und Eins. Wir ziehen sowohl in  $\mathfrak{B}$  als in  $P$  je eine Sehne der Richtung  $\rho$ , und zwar mögen diese Sehnen

$$m = MN, \quad m' = M'N'$$

proportionale Teile der betreffenden Flächen, nämlich (von  $AB$  aus gezählt) die Teile  $\omega F$  von  $\mathfrak{B}$  und  $\omega P$  von  $P$  abschneiden. Wir suchen eine obere Schranke für den absoluten Betrag  $k$  des Abstandes  $m, m'$ . Verlängert man  $M'N'$  bis zum Rand des Bereiches  $\mathfrak{B}$ , so daß die

des Büschels  $\mathfrak{C}, \mathfrak{C}^*$  immer im selben Sinne, überdeckt also das Äußere von  $P_0$  doppelt. Daher gehen durch  $A_0$  genau zwei gemeinsame Stützebenen jener Art. Jede von ihnen enthält eine Kante  $k$  von  $\mathfrak{R}_0$ , die eine Ecke von  $P'$  mit einer von  $P^*$  so verbindet, daß das Dreieck  $A_0 k$  (mit Ausnahme von  $k$  selbst) ganz außerhalb  $\mathfrak{R}_0$  liegt usw.

Der Beweis ist mit geringen Änderungen auf den Fall übertragbar, daß an Stelle von  $P'$  und  $P^*$  zwei beliebige ebene konvexe Bereiche treten.

<sup>4</sup> Beim dortigen Beweis wurde angenommen, daß die Richtung  $\rho$  unter den Seiten von  $P'$  und  $P^*$  nicht vorkommt. Diese Voraussetzung kann entbehrt werden; nur muß man dann schon an einer früheren Stelle des Beweises, nämlich unmittelbar nach den dortigen Gleichungen (19), die Annahme einführen, daß die Seitenvierecke aller  $\mathfrak{L}_v$  eben sind.

<sup>5</sup> Das sind die kleinsten Kreise, die  $P'$ , beziehungsweise  $P^*$  enthalten.

Sehne  $UV$  desselben entsteht, so habe der Streifen  $\mathfrak{S}$  von  $\mathfrak{B}$  zwischen  $UV$  und  $MN$  die Fläche  $\sigma$ . Das Stück von  $\mathfrak{B}$ , das durch  $UV$  abgeschnitten wird, hat die Fläche  $\omega P + \delta_1$ , wobei

$$0 \leq \delta_1 \leq \delta \quad (10)$$

ist. Also hat man

$$|\sigma| = |\omega(F-P) - \delta_1| \quad (11)$$

und wegen (9):

$$0 < \omega(F-P) < \delta.$$

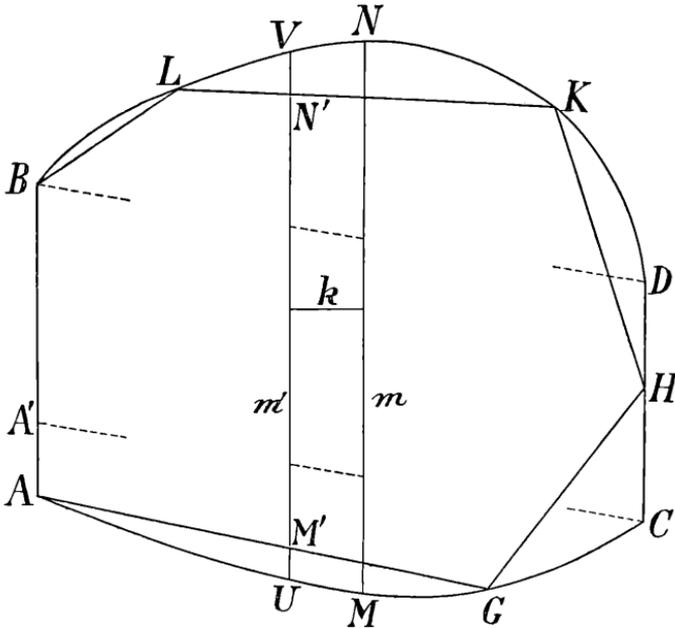


Fig. 1.

Also ist wegen (10) auch:

$$|\sigma| < \delta. \quad (12)$$

Da aber ein Spatheck mit zwei Gegenseiten der Länge  $c$  jedenfalls in  $\mathfrak{B}$  enthalten ist (z. B.  $A' C D B$  in Fig. 1) und von  $\mathfrak{S}$  in einem eben solchen Spatheck überschritten wird, ist:

$$k < \frac{\delta}{c}. \quad (13)$$

$\beta$ ) Wir verlegen die  $Y$ -Achse eines rechtwinkligen Systems nach  $AB$  und richten die  $X$ -Achse so, daß die Abszissen der Punkte von  $CD$  einen positiven Betrag  $b$  haben: er ist zugleich die Breite von  $\mathfrak{B}$  in der  $X$ -Richtung.

Seien  $y_1 = f_1(x)$ ,  $y_2 = f_2(x)$  die Funktionen, die den oberen Rand  $BD$  und den unteren Rand  $AC$  von  $\mathfrak{B}$  darstellen;  $s(x)$  sei die Länge der Sehnen der Richtung  $\rho$  (parallel zur  $Y$ -Achse), dann ist

$$s(x) = f_1(x) - f_2(x)$$

im Intervall<sup>6</sup>  $[0, b]$  gleichmäßig stetig. Es gibt also zu einem gegebenen  $\eta > 0$  eine Größe  $h > 0$ , so daß

$$|s(x_2) - s(x_1)| < \eta, \text{ wenn } |x_2 - x_1| < h. \quad (14)$$

Wir wählen die Polygone  $P$ , die wir  $\mathfrak{B}$  einschreiben wollen, von nun an stets so, daß sie durch eine Anzahl Sehnen  $s_1, s_2, \dots, s_{n-1}$  der Richtung  $\rho$  bestimmt sind, die zwischen  $AB$  und  $CD$  eingeschaltet werden, so daß also  $AB$  mit  $s_1$ , ferner  $s_1$  mit  $s_2$  usw. ein Trapez bestimmt; die Gesamtheit dieser  $n$  Trapeze bildet  $P$ . Wählen wir die Breiten  $b_1, b_2, \dots, b_n$  aller dieser Trapeze (in der  $X$ -Richtung) kleiner als  $h$  und überdies so klein, daß auch  $\delta : c < h$  ist, so ist wegen (13) auch

$$k < h. \quad (15)$$

Wenn  $p(x)$  die Länge der Polygonsehne der Richtung  $\rho$  mit der Abszisse  $x$  bedeutet, so gilt überall

$$0 \leq s(x) - p(x) < \eta, \quad (16)$$

weil  $p(x)$  auch unter den  $s$ -Werten desselben Intervalls  $b$ , vorkommt.<sup>7</sup>

$\gamma$ ) Die in  $\alpha$  eingeführten Größen  $m, m'$  können wir als Funktionen von  $\omega$  auffassen. Es ist

$$|m(\omega) - m'(\omega)| = |(m - UV) + (UV - m')|$$

und wegen (15) und (14)

$$|m - UV| < \eta,$$

wegen (16)

$$|UV - m'| < \eta,$$

daher

$$|m(\omega) - m'(\omega)| < 2\eta. \quad (17)$$

Wenn man nun dem Bereich  $\mathfrak{B}$  nicht nur ein einzelnes Polygon einschreiben, sondern ihn durch eine unbegrenzte Reihe eingeschriebener Polygone  $P_i$  approximieren will, so kann man eine gegen Null limitierende Reihe positiver Größen  $\eta_i$  vorgeben, zu deren jeder, wie unter  $\beta$  auseinandergesetzt wurde, ein  $h_i$  und ein  $\delta_i$  (statt des dortigen  $h$  und  $\delta$ ) und demgemäß ein  $P_i$  existiert. Die zugehörige

<sup>6</sup> Durch eckige Klammern sei stets ein abgeschlossenes Intervall bezeichnet.

Es ändern sich nämlich  $p(x)$  und  $s(x)$  zwischen denselben Grenzen  $s_{v-1}$  und  $s_v$  in  $b_v$  stetig, und zwar  $p(x)$  monoton, wobei  $s_0 = AB$ ,  $s_n = CD$  ist.

#### 4. Andere Gleichungen für gewisse konvexe Polyeder.

Es wird den in 5 folgenden Grenzübergang erleichtern, wenn wir schon die in (6) und (8) auftretende aus endlich vielen Gliedern bestehende Summe

$$\sum_1^n m'_v h'_v \frac{(\beta_v - v)^2}{\beta_v} = \sum_1^n h'_v \frac{(m_v^* - v m'_v)^2}{m_v^*} \quad (22)$$

durch ein Integral ersetzen. Hiezu beziehen wir das Polygon  $P'$  in 2 auf ein  $X, Y$ -System wie in 3,  $\beta$  und das Polygon  $P^*$  auf ein paralleles  $\xi, \eta$ -System wie in 3,  $\varepsilon$ ; es seien wie dort  $m'(x)$  und  $m^*(\xi)$  entsprechende Sehnen der Richtung  $\rho$ . Da aber hiedurch  $\xi$  eindeutige Funktion von  $x$  ist, können wir  $m^*$  auch als Funktion von  $x$  auffassen und schreiben, indem wir  $m^*$  nicht als Operations-, sondern als Wertesymbol auffassen,  $m^*(x)$ . Ferner setzen wir:

$$\frac{m^*(x)}{m'(x)} = \beta(x),$$

$$m'(x) \cdot \frac{[\beta(x) - v]^2}{\beta(x)} = \frac{[m^*(x) - v m'(x)]^2}{m^*(x)} = \bar{f}(x). \quad (23)$$

Es gibt im Intervall<sup>9</sup>  $h'_v$  einen Wert  $x_v$ , für den

$$\beta(x_v) = \beta_v = m_v^* : m'_v$$

wird; denn  $\beta_v$  liegt zwischen den beiden Werten, die  $\beta(x)$  an den Enden des Intervalles  $h'_v$  annimmt (wenn diese Werte voneinander verschieden sind). Also können wir die Summe (22) identisch so umformen:

$$\sum_1^n (m'_v - m'(x_v)) \cdot \frac{[\beta(x_v) - v]^2}{\beta(x_v)} \cdot h'_v + \sum_1^n \bar{f}(x_v) \cdot h'_v. \quad (24)$$

Damit  $\bar{f}(x)$  und  $\beta(x)$  nirgends unendlich werden, wollen wir vorläufig voraussetzen, die Polygone  $P'$  und  $P^*$  mögen in der Richtung  $\rho$  je zwei Stützlinsen haben, in die je eine Polygonseite hineinfällt.<sup>10</sup> Nun wollen wir für die erste Summe in (24) eine obere Schranke angeben: Wenn nämlich  $d_v$  der absolute Betrag der Differenz der zwei parallelen Seiten der Richtung  $\rho$  des Trapezes  $T'_v$  (vgl. 2) ist und  $\tau$  der größte Wert, der unter den  $d_v$  vorkommt, so ist

$$|m'_v - m'(x_v)| < \tau \text{ für alle } v;$$

<sup>9</sup> Wir können die Höhen  $h'_v$  der Trapeze, in die  $P'$  in 2 zerlegt wurde, als Bestandteile der  $X$ -Achse auffassen, demnach von Intervallen  $h'_v$  auf der  $X$ -Achse sprechen.

<sup>10</sup> Wir nennen künftig einen konvexen ebenen Bereich »bezüglich  $\rho$  von der Klasse  $p\ast$ , wenn die beiden Stützlinsen der Richtung  $\rho$  mit seinem Rand von Null verschiedene Strecken gemein haben.

ferner hat  $\beta(x)$  in  $B_0 = [0, b]$  eine positive untere Grenze  $g$  und  $|\beta(x) - v|$  hat eine obere Grenze  $G$ . Dann ist

$$S = \frac{G^2}{g}$$

eine obere Schranke für den Bruch in der ersten Summe in (24). Also ist der absolute Betrag dieser Summe kleiner als  $\tau S b$ .

Die Polygone  $P'$  und  $P^*$  wurden in  $n$  Streifen zerlegt, wobei diese Zahl eine durch das Verfahren in 2 bestimmte Minimalzahl ist. Es hindert uns aber nichts, jeden Streifen (ohne  $P'$  und  $P^*$  selbst zu ändern) wieder in mehrere zu zerlegen, indem wir in den entsprechenden Trapezen  $T'_v$  und  $T_v^*$  solche Sehnen der Richtung  $\rho$  ziehen, die von ihnen proportionale Teile abschneiden. Die wesentlichen Eigenschaften der Einteilung von  $P'$  und  $P^*$ , auf denen die Formel (8) beruht, bleiben dabei erhalten. Oder (was auf dasselbe hinauskommt): Man kann in den Seiten der Polygone  $P'$  und  $P^*$  Punkte annehmen, die man als neue eingeschaltete Polygonecken betrachtet. Daß nun zwei benachbarte Seiten eventuell auf derselben Geraden liegen, stört die Anwendbarkeit unseres Verfahrens der Überlagerung der Einteilungen und seine Ergebnisse nicht. Setzt man nun für jede Einteilung einer unendlichen Folge von Einteilungen eine obere Schranke  $H_i$  für die Breite der Streifen in  $P'$  (das ist für die Zahlen  $h'_v$ ) fest und läßt  $H_i$  für  $i \rightarrow \infty$  gegen Null limitieren, so ist auch  $\lim \tau = 0$ , während  $S$  ungeändert bleibt und die zweite Summe in (24) bei wachsender Gliederzahl ihre Form beibehält, durch die sie unmittelbar unter die Summen subsumiert wird, die beim Riemannschen Integralbegriff dem Grenzübergang unterworfen werden. Machen wir also mit (24) den Grenzübergang  $i \rightarrow \infty$ , so kommt:

$$\lim \sum_1^n m'_v h'_v \frac{(\beta_v - v)^2}{\beta_v} = \int_0^b \bar{f}(x) dx = \int_0^b m'(x) \frac{[\beta(x) - v]^2}{\beta(x)} dx. \quad (25)$$

Dieses Ergebnis wenden wir auf die Gleichungen (6) und (8) an. Wenn unter den Seitenvierecken der  $\mathfrak{L}_v$  windschiefe vorkommen, wird an Stelle eines Stückes eines hyperbolischen Paraboloides, das einem solchen Viereck eingespannt ist [2], bei Fortsetzung der Einteilung ein Aggregat von Stückchen verschiedener Paraboloiden treten. Durch den Grenzübergang entsteht schließlich eine Regelfläche, die, auch bei beliebigen konvexen Bereichen  $\mathfrak{F}'$ ,  $\mathfrak{F}^*$  (mit positiven Inhalten) in  $\mathfrak{G}'$ ,  $\mathfrak{G}^*$ , so definiert ist: Man durchlaufe zwei entsprechende Sehnen der Richtung  $\rho$  gleichsinnig und verbinde sowohl die beiden Anfangspunkte als auch die beiden Endpunkte geradlinig. Die Gesamtheit dieser Geraden bildet eine Regelfläche  $\mathfrak{R}$ . Zu ihr rechnen wir auch die Teile der Oberfläche von  $\mathfrak{R}_0$ , die in den gemeinsamen zu  $\rho$  parallelen Stützebenen von  $\mathfrak{F}'$  und  $\mathfrak{F}^*$  liegen, so daß  $\mathfrak{R}$  ein geschlossenes Band zwischen  $\mathfrak{F}'$  und  $\mathfrak{F}^*$  bildet und mit diesen Ebenenstücken zusammen einen (i. a. nicht konvexen) Körper  $\mathfrak{R}$ ,

begrenzt. Der Schnitt dieses Körpers mit  $\mathfrak{E}$  habe die Fläche  $T_r$ ; dann werden durch den Grenzübergang aus den Gleichungen (6) und (8), wenn man

$$\int_0^b m'(x) \frac{[\beta(x) - v]^2}{\beta(x)} dx = \int_0^b \frac{[m^*(x) - v m'(x)]^2}{m^*(x)} dx = J \quad (26)$$

bezeichnet, die Gleichungen:<sup>11</sup>

$$T_r - F'(\lambda + \mu \cdot v)^2 = \lambda \mu \cdot J, \quad (27)$$

$$\sqrt{F_0} - (\lambda \sqrt{F'} + \mu \sqrt{F^*}) \geq \frac{\lambda \mu \cdot J}{\sqrt{T_r + \lambda \sqrt{F'} + \mu \sqrt{F^*}}}. \quad (28)$$

Da  $\mathfrak{R}$ , wenn  $P'$  und  $P^*$  zu unebenen Seitenvierecken Anlaß geben, windschiefe Teile enthält, so sind bei (28) die Bedingungen für das Gleichheitszeichen und für das Verschwinden der rechten Seite dieselben wie bei (8).

### 5. Konvexe Körper mit Schnittpaaren der Klasse $p$ .

Wir setzen zunächst voraus, der Körper werde von den Ebenen  $\mathfrak{E}'$  und  $\mathfrak{E}^*$  in zwei Bereichen  $\mathfrak{F}'$  und  $\mathfrak{F}^*$  der Klasse  $p$  [10] mit derselben ausgezeichneten Richtung  $\rho$  geschnitten. Dann können wir die Ränder von  $\mathfrak{F}'$  und  $\mathfrak{F}^*$  durch je eine unendliche Folge eingeschriebener Polygone approximieren (wie unter 3,  $\gamma$  angegeben) und dürfen hiezu beidemal dieselbe Reihe der  $\eta_i$  verwenden. Die gleichvielten Polygone der beiden Folgen bilden ein Paar  $P'_i, P_i^*$ , auf das wir die Gleichungen (26), (27) anwenden dürfen, wobei wir jetzt die Symbole, die vom gewählten Paar abhängen, durch den Index  $i$  vervielfältigen:

$$J_i = \int_0^b \frac{[m_i^*(x) - v_i m_i'(x)]^2}{m_i^*(x)} dx, \quad (29)$$

$$T_{r,i} - F'_i(\lambda + \mu \cdot v_i)^2 = \lambda \mu \cdot J_i. \quad (30)$$

Wenn wir nun die früheren Symbole ohne den Index  $i$  den Bereichen  $\mathfrak{F}'$ ,  $\mathfrak{F}^*$  vorbehalten, wobei  $v = \sqrt{F^* : F'}$  ist, so konvergieren bei  $i \rightarrow \infty$  die Funktionenreihen  $m'_i, m_i^*$  in  $B_0 = [0, b]$  gleichmäßig (3,  $\delta$ ) gegen  $m'(x), m^*(x)$ , und die  $v_i$  können als eine Reihe von Funktionen betrachtet werden, deren jede sich auf eine Konstante reduziert. Nach Hilfssatz 3 konvergieren also die Integranden von (29) in  $B_0$  gleichmäßig gegen den der folgenden Gleichung (31). Es ist daher die Vertauschung der beiden Grenzübergänge gestattet, die in (31) liegt.<sup>12</sup>

<sup>11</sup> In (28) kann  $T_r$  ebenso entfernt werden, wie  $T$  in (8).

<sup>12</sup> Vgl. z. B. Carathéodory, Vorl. über reelle Funktionen, p. 465.

$$\lim_{i \rightarrow \infty} J_i = J = \int_0^b \frac{[m^*(x) - v m'(x)]^2}{m^*(x)} dx. \quad (31)$$

Aus (30) erhalten wir durch diesen Grenzübergang die Gleichung (27), daher auch (28) in allgemeinerer Bedeutung wieder, nämlich jetzt für zwei beliebige konvexe Bereiche der Klasse  $p$  gültig.

## 6. Beliebige konvexe Körper.

Wir wollen uns nun von der Beschränkung befreien, daß  $\mathfrak{F}'$ ,  $\mathfrak{F}^*$  der Klasse  $p$  angehören und halten nur noch daran fest, daß ihre Flächen  $F'$ ,  $F^*$  von Null verschieden sind. Wir teilen die in  $\mathfrak{G}'$ ,  $\mathfrak{G}^*$  liegenden Bereiche  $\mathfrak{F}'$ ,  $\mathfrak{F}^*$  durch zwei Scharen paralleler Sehnen derselben Richtung  $\rho$  in unendlich viele Streifenpaare der Klasse  $p$ , so daß die Streifen desselben Paares beiderseits durch entsprechende  $(3, \varepsilon)$  Sehnen begrenzt werden, daher in konstantem Verhältnis  $v$  stehen. Um die Vorstellungen zu fixieren, wollen wir das Verfahren, das sich natürlich mannigfach abändern ließe, in concreto so definieren: Wir hälften zunächst sowohl  $\mathfrak{F}'$  als  $\mathfrak{F}^*$  durch je eine Sehne  $s'$ ,  $s^*$  der Richtung  $\rho$ ; jedes der vier Stücke hälften wir wieder durch eine Sehne der Richtung  $\rho$ , lassen dann die vier Stücke, die an  $s'$  oder an  $s^*$  anliegen (die »inneren Stücke«), die schon der Klasse  $p$  angehören, ungeteilt, hälften aber wieder die vier äußeren Stücke, so daß von diesen abermals vier Stücke der Klasse  $p$  abgetrennt werden usw. Die Reihen der Paare setzen sich von den Mittellinien  $s'$ ,  $s^*$  beiderseits unbegrenzt fort<sup>13</sup> und erschöpfen dadurch allmählich die Bereiche. Auf jedes Paar kann man (27) anwenden; durch Addition aller dieser Gleichungen (die Reihen konvergieren ihrer Entstehungsweise nach) geht hervor, daß (27) auch für beliebige von Null verschiedene konvexe Bereiche besteht. Das gleiche gilt also auch für (28).

Der Integrand in (26) kann an den Grenzen unendlich werden, aber man kann unmittelbar bestätigen, daß das entsprechende uneigentliche Integral endlich bleibt. Der ungünstigste Fall ist der, wo  $\mathfrak{F}^*$  etwa in der linken Stützlinie  $\xi = 0$  (Achsenysteme und Bezeichnungen wie in 3,  $\varepsilon$ ) eine Ecke hat, dagegen  $\mathfrak{F}'$  in  $x = 0$  eine endliche Stützstrecke  $k_1$ . Wenn nun alle Symbole  $k$ , positive Konstante bedeuten und alle  $\psi$  stetige Funktionen, die mit dem Argument zugleich verschwinden, so haben  $m'$  und  $m^*$  die Formen.

$$m' = k_1 + \psi_1(x), \quad m^* = k_2 \xi + \psi_2(\xi), \quad (32)$$

wobei  $\psi_2$  nicht positiv sein kann und

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\psi_2}{\xi} = 0 \quad (33)$$

<sup>13</sup> Natürlich kann es unter Umständen genügen, das Verfahren nur nach der einen Seite hin fortzusetzen.

ist.<sup>14</sup> Die Flächen  $f'$ ,  $f^*$ , die durch entsprechende Sehnen der Richtung  $\rho$  abgeschnitten werden, haben also die Form:

$$f' = k_1 x + \psi_3, \quad f^* = \frac{1}{2} k_2 \xi^2 + \int_0^\xi \psi_2 \cdot d\xi, \quad (34)$$

wobei auch das Integral in der letzten Zeile nicht positiv sein kann. Aus (33) kann man leicht schließen, daß sein absoluter Betrag bei hinreichend kleiner Wahl von  $\xi$  unter  $\frac{1}{2} k_3 \xi^2$  bleibt, wobei  $k_3$  beliebig klein, also auch kleiner als  $k_2$  angenommen werden darf. Setzt man  $k_2 - k_3 = k_4$ , so hat man also

$$\frac{1}{2} k_4 \xi^2 < f^* \leq \frac{1}{2} k_2 \xi^2 \quad (35)$$

für eine hinreichend kleine Nachbarschaft des Nullpunktes. Für eine solche gilt aber anderseits

$$k_5 x < f' < k_6 x, \quad (36)$$

wenn  $k_5$  kleiner und  $k_6$  größer als  $k_1$  ist. Die Beziehung zwischen  $x$  und  $\xi$  wird durch

$$f^* = v^2 f'$$

definiert, woraus nun für hinreichend kleine  $x$  folgt:

$$k_2 \xi^2 > 2 v^2 k_5 x, \quad k_4 \xi^2 < 2 v^2 k_6 x$$

und schließlich

$$k_7 \sqrt{x} < \xi < k_8 \sqrt{x}, \quad (37)$$

$$m^* > k_4 \xi > k_4 k_7 \sqrt{x}. \quad (38)$$

Hiermit ist das Ziel erreicht, da der Integrand in der Nähe des Nullpunktes kleiner als  $k_8 \cdot (k_4 k_7 \sqrt{x})^{-1}$  bleibt.

Es ist  $T_r$  in (27) die Fläche des Schnittes von  $\mathfrak{R}_r$  mit  $\mathfrak{C}$  und  $F_0$  in (28) die Fläche des Schnittes von  $\mathfrak{R}_0$  mit  $\mathfrak{C}$ ; also gilt in (28), da  $\mathfrak{R}_r$  in  $\mathfrak{R}_0$  jedenfalls enthalten ist, das Gleichheitszeichen nur, wenn  $\mathfrak{R}_r$  mit  $\mathfrak{R}_0$  identisch ist (vgl. auch Anmerkung 3); die rechte Seite verschwindet nur, wenn überall

$$m^*(x) = v m'(x) \quad (39)$$

ist, d. h. wenn die Bereiche  $\mathfrak{F}'$ ,  $\mathfrak{F}^*$  »ähnlich gestreckt« in der Richtung  $\rho$  sind.<sup>15</sup>

<sup>14</sup> Es ist nämlich  $k_2 \xi$  die Länge einer Sehne, die zwischen den Halbtangenten der Ecke eingespannt ist.

<sup>15</sup> Die Formel (28) ist gewissen Gleichungen in der Theorie des gemischten Flächeninhaltes analog, die Minkowski in Nr. 27 seiner Abhandlung »Volumen und Oberfläche« (Math. Ann., 57 oder Ges. W., II) abgeleitet hat.

Ferner kann man in (28)  $T_r$  durch  $F_0$  ersetzen. Gilt das Gleichheitszeichen, so wird hiedurch nichts geändert, andernfalls wird die rechte Seite weiter verkleinert.

### 7. Die Dachkörper.

Es wird genügen, von den Fällen, wo die Flächen der Schnitte mit  $\mathfrak{G}'$ ,  $\mathfrak{G}^*$  nicht mehr beide von Null verschieden sind, denjenigen zu behandeln, wo  $\mathfrak{F}'$  ein beliebiger konvexer Bereich mit  $F' > 0$  bleibt, dagegen  $\mathfrak{F}^*$  sich auf eine Strecke  $s$  der Länge  $c > 0$  reduziert. Der kleinste konvexe Körper, der  $\mathfrak{F}'$  mit  $s$  verbindet, ist dann ein »Dachkörper«. Um für ihn eine Gleichung abzuleiten, die an Stelle von (28) treten kann, genügt es, zu bemerken, daß die Verbindung von  $\mathfrak{F}'$  mit einem Punkte von  $s$ , etwa einem Endpunkte  $A$  von  $s$ , einen Kegel ergibt, der von  $\mathfrak{G}$  in einer Fläche des Inhaltes  $\lambda^2 F'$  geschnitten wird. Der übrige Teil von  $F_0$  wird überstrichen, indem man diese Fläche in der Richtung  $s$  um die Strecke  $\mu c$  verschiebt, wie es einer Wanderung der Kegelspitze längs  $s$  entsprechen würde. Die Figur  $\mathfrak{F}$  in  $\mathfrak{G}$  ist von der Klasse  $p$ ; legt man nämlich durch  $s$  die beiden Stützebenen an  $\mathfrak{F}'$ , die mit dem Rande von  $\mathfrak{F}'$  die Strecken  $c'_1$  und  $c'_2$  gemein haben mögen, so kommen im Rand von  $\mathfrak{F}$  die zu  $s$  parallelen Strecken

$$\lambda c'_1 + \mu c \quad \text{und} \quad \lambda c'_2 + \mu c$$

vor. Die ersten Anteile dieser Summen stammen von der Zentralprojektion von  $\mathfrak{F}'$  aus  $A$ , die anderen Anteile aus der Verschiebung; es können  $c'_1, c'_2$  auch Null sein. Also ist

$$F_0 = \lambda^2 F' + \lambda \mu c d,$$

wenn  $d$  der Abstand von  $c'_1, c'_2$  ist. Daher tritt an Stelle von (28):

$$\sqrt{F_0} - \lambda \sqrt{F'} = \frac{\lambda \mu c d}{\sqrt{F_0} + \lambda \sqrt{F'}}. \quad (40)$$

### 8. Die Ergänzung zum Satz von Brunn.<sup>16</sup>

Es genügt, da der Fall der Dachkörper 7 und weitergehende Sonderfälle von vornherein durchsichtig sind, vorauszusetzen, daß  $F'$  und  $F^*$  nicht verschwinden. Dann gilt in (1) das Gleichheitszeichen nur, wenn in (28) das Gleichheitszeichen gilt und zugleich die rechte Seite verschwindet. Die Bedeutung dieser beiden Vorkommnisse wurde aber schon am Schluß von 6 angegeben. Es handelt sich also nur noch darum, zu beweisen, daß, wenn für zwei ähnlich gestreckte Bereiche  $\mathfrak{F}', \mathfrak{F}^*$  der in 4 definierte Körper  $\mathfrak{R}_r$  mit dem

<sup>16</sup> So pflegt man die Ermittlung der Bedingungen zu nennen, unter denen in (1) und in den analogen Gleichungen für mehrdimensionale Gebilde das Gleichheitszeichen zutrifft; vgl. Blaschke, Kreis und Kugel, p. 100.

kleinsten verbindenden konvexen Körper  $\mathfrak{R}_0$  identisch ist, die Bereiche  $\mathfrak{F}'$ ,  $\mathfrak{F}^*$  perspektiv ähnlich sind.

Wir schicken einige Bemerkungen über die in 4 definierte Regelfläche  $\mathfrak{R}$  und die »Huffläche«  $\mathfrak{H}$  voraus, die  $\mathfrak{R}_0$  (neben  $\mathfrak{F}'$  und  $\mathfrak{F}^*$ ) begrenzt. Die letztere wird von einer Ebene  $E$  eingehüllt, die sich als gemeinsame Stützebene von  $\mathfrak{F}'$  und  $\mathfrak{F}^*$  um diese beiden Bereiche so herumwälzt, daß diese stets auf derselben Seite von  $E$  bleiben. Die Schnitte von  $E$  mit  $\mathfrak{C}'$ ,  $\mathfrak{C}^*$  sind zwei stets parallele Gerade  $g'$ ,  $g^*$ , die sich gleichzeitig als Stützlinien an  $\mathfrak{F}'$ ,  $\mathfrak{F}^*$  herumwälzen. Ihre Stützpunkte  $S'$ ,  $S^*$  sind eindeutig definiert, solange sie keine geraden Stücke der Ränder von  $\mathfrak{F}'$ ,  $\mathfrak{F}^*$  passieren. In letzterem Fall ist, wenn dies für  $S'$ ,  $S^*$  gleichzeitig geschieht, das ganze verbindende Trapez  $\mathfrak{H}$  zuzurechnen, und seine parallelen Gegenseiten können nach einem beliebigen Gesetz gleichzeitig von  $S'$ ,  $S^*$  durchlaufen gedacht werden, damit die Verbindungsstrecke  $S'S^*$  überall eindeutig definiert ist und so  $\mathfrak{H}$  durchaus als Regelfläche aufgefaßt werden kann.<sup>17</sup> Solange  $S'$  und  $S^*$  keine Ecken und auch keine geraden Strecken durchschreiten, ist die Zuordnung zwischen ihnen gegenseitig eindeutig. Wenn etwa  $S'$  eine Ecke durchschreitet und  $S^*$  nicht, so bleibt  $S'$  als Spitze eines Kegelstückes stationär, das  $\mathfrak{H}$  angehört. Wenn  $S'$  und  $S^*$  gleichzeitig Ecken durchschreiten, wird nur dann kein Kegelstück in  $\mathfrak{H}$  auftreten, wenn in diesen Ecken beide Paare von Halbtangenten parallel sind.<sup>18</sup>

Andererseits entsteht die Regelfläche  $\mathfrak{R}$  durch Verbindung der Anfangspunkte  $A'$ ,  $A^*$  und der Endpunkte<sup>19</sup>  $B'$ ,  $B^*$  gleichsinnig durchlaufener entsprechender Sehnen (der Richtung  $\rho$ ) von  $\mathfrak{F}'$ ,  $\mathfrak{F}^*$ . Es kann also  $\mathfrak{R}$  keine Kegelstücke, auch keine Stücke von Strahlbüscheln [17] enthalten,<sup>20</sup> da jeder Änderung der in 3,  $\alpha$  eingeführten Zahl  $\omega$  eine Verschiebung beider Sehnen entspricht. Wir erhalten also für den Fall, daß  $\mathfrak{R}$  und  $\mathfrak{H}$  identisch sein sollen, den

Hilfssatz 4: Wenn  $\mathfrak{R}_r$  und  $\mathfrak{R}_0$  identisch sind, können etwaige Ecken in den Rändern von  $\mathfrak{F}'$ ,  $\mathfrak{F}^*$  nur gleichzeitig in entsprechenden Punkten der Ränder, und zwar nur so auftreten, daß beide Paare der Halbtangenten der Ecken parallel sind. Die Punkte der Ränder

<sup>17</sup> Wenn sich das Trapez auf ein Dreieck reduziert, enthält  $\mathfrak{H}$  ein Stück eines ebenen Strahlbüschels.

<sup>18</sup> Nach Jensen, Acta matem., 30, haben die Ränder konvexer Bereiche überall bestimmte Halbtangenten; aber die Ecken können überall dicht in Teilen des Randes oder sogar im ganzen Rand auftreten. Denn Jensen hat mit Hilfe der Methode der Verdichtung der Singularitäten konvexe Funktionen von  $x$  konstruiert, bei denen Ecken in einem gewissen Intervall für  $x$  überall dicht auftreten, also auch in einem gewissen Intervall der bei einer konvexen Funktion immer vorhandenen Bogenlänge der entsprechenden Kurve. Aus solchen Stücken kann man nun den ganzen Rand zusammensetzen. Unsere Beweise sind überall so geführt, daß auch solche Vorkommnisse umfaßt werden.

<sup>19</sup> Wir nennen sowohl  $A'$ ,  $A^*$  als  $B'$ ,  $B^*$  entsprechende Punkte der Ränder von  $\mathfrak{F}'$ ,  $\mathfrak{F}^*$ . Etwaige Strecken der Richtung  $\rho$ , die in den Rändern vorkommen, sind in diese Zuordnung nicht einbezogen.

<sup>20</sup> Außer daß etwa die in den gemeinsamen zu  $\rho$  parallelen Stützebenen liegenden Stücke der Begrenzung von  $\mathfrak{R}_r$  als solche aufgefaßt werden könnten.

von  $\mathfrak{F}'$ ,  $\mathfrak{F}^*$  sind, soweit sie nicht in etwaige Stützstrecken der Richtung  $\rho$  fallen, gegenseitig eindeutig zugeordnet. Entsprechende Punkte haben, soweit sie keine Ecken sind, parallele Volltangenten.

Wenn in zwei parallelen Ebenen (oder in derselben Ebene) zwei rechtwinkelige Systeme  $X, Y$  und  $\xi, \eta$  mit parallelen Achsen liegen und  $v > 0$  eine Konstante ist, so wird durch

$$\xi = v x, \quad \eta = v y$$

eine perspektive Ähnlichkeitstransformation definiert, deren Zentrum auf der Verbindungsgeraden der beiden Anfangspunkte liegt. Einer Kurve  $y = \varphi(x)$  des ersten Systems entspricht dabei die Kurve

$$\eta = v \varphi\left(\frac{\xi}{v}\right) \quad (41)$$

des zweiten.

Wir beziehen nun  $\mathfrak{F}'$ , wie in  $\mathfrak{3}, \beta, \epsilon$ , auf ein  $X, Y$ -System in  $\mathfrak{C}'$ , so daß die  $Y$ -Achse eine linke Stützlinie ist; der Ursprung falle in den Stützpunkt oder falls eine Stützstrecke vorhanden ist, in den unteren Endpunkt derselben. Die Symbole  $f_1, f_2, b$  sollen dieselbe Bedeutung haben, wie dort. Ganz ebenso beziehen wir  $\mathfrak{F}^*$  auf ein  $\xi, \eta$ -System in  $\mathfrak{C}^*$ . An Stelle von  $f_1, f_2, b$  treten  $F_1, F_2, B$ . Dann ist

$$m'(x) = f_1(x) - f_2(x), \quad m^*(\xi) = F_1(\xi) - F_2(\xi). \quad (42)$$

Wenn  $m', m^*$  entsprechende Sehnen sein sollen, wird die Beziehung zwischen  $x$  und  $\xi$  durch (20) gegeben. Wir differenzieren diese Gleichung (nach links oder nach rechts) nach  $x$  und dürfen dabei auf der linken Seite nach Hilfssatz 2 die Kettenregel anwenden:

$$m^*(\xi) \cdot \frac{d\xi}{dx} = v^2 m'(x).$$

Da aber  $\mathfrak{F}'$  und  $\mathfrak{F}^*$  ähnlich gestreckt sind, gilt (39), das jetzt

$$m^*(\xi) = v m'(x) \quad (43)$$

zu schreiben ist. Hieraus folgt

$$\frac{d\xi}{dx} = v,$$

und da  $x$  und  $\xi$  gleichzeitig verschwinden,

$$\xi = v x. \quad (44)$$

Führen wir in (42) und (43) überall  $x$  ein, so erhalten wir

$$F_1(vx) - F_2(vx) = v [f_1(x) - f_2(x)]. \quad (45)$$

Wir setzen:

$$F_1(vx) - v f_1(x) = F_2(vx) - v f_2(x) = \psi(x). \quad (46)$$

Nun sind aber im ganzen Innern des Intervalls  $(0, b)$  für die Funktionen  $f_1, f_2$  und im ganzen Innern des Intervalls  $(0, B)$  für die Funktionen  $F_1, F_2$  überall endliche rechte und linke Ableitungen vorhanden [18] und nach Hilfssatz 4 sind die gleichnamigen Ableitungen für entsprechende Punkte [19] der oberen Ränder einander gleich, ebenso für die unteren Ränder. Bilden wir also in (46) die rechte oder die linke Ableitung und bezeichnen sie mit Strichen, so verschwinden die folgenden eckigen Klammern in (47)

$$v [F'_1(vx) - f'_1(x)] = v [F'_2(vx) - f'_2(x)] = \psi'(x), \quad (47)$$

und  $\psi$  ist eine Konstante, die nach (46) Null ist, weil  $f_2$  und  $F_2$  im Ursprung verschwinden. Wir haben also aus (46):

$$F_1(vx) = v f_1(x) \quad (48)$$

und können daher die Gleichung des oberen Randes von  $\mathfrak{F}^*$ , nämlich  $\eta = F_1(\xi)$  jetzt in der Form schreiben:

$$\eta = v f_1 \left( \frac{\xi}{v} \right),$$

wodurch die für die Ähnlichkeit mit  $y = f_1(x)$  charakteristische Beziehung für das ganze Innere von  $(0, b)$  bewiesen ist. Ebenso sind im selben Bereich die unteren Ränder ähnlich, und die etwaigen Stützstrecken für  $x = 0$  oder  $b$  fügen sich vermöge (43) und der Stetigkeit der Funktionen  $f, F$  in diese Ähnlichkeit ein.

## 9. Eine besondere Klasse konvexer Körper.

Wir befassen uns mit dem Fall, daß in (28) das Gleichheitszeichen gilt, ohne daß die rechte Seite verschwindet. Dies geschieht, wenn die Regelflächen  $\mathfrak{R}$  und  $\mathfrak{S}$  (Nr. 4 und 8) identisch sind (also  $T_r = F_0$ ), ohne daß  $\mathfrak{F}'$  und  $\mathfrak{F}^*$  ähnlich gestreckt sind. Es ist leicht, Polyeder dieser Klasse anzugeben (Beispiel  $a$  in 10); aber interessanter sind die Fälle, wo  $\mathfrak{F}'$  und  $\mathfrak{F}^*$  (ganz oder teilweise) von krummen Linien begrenzt sind. Um solche Beispiele zu finden, machen wir folgenden Ansatz: es sei durch

$$x = f(t), \quad y = g(t) \quad (49)$$

eine Kurve  $C'$  mit folgenden Eigenschaften gegeben: Für ein Intervall  $0 \rightarrow t_0$  des Parameters  $t$ , wobei  $t_0 > 0$  sei, verlaufe  $C'$  im ersten Quadranten und sei nach oben konvex. Der Bereich  $\mathfrak{F}'$  werde durch die Ordinate des Kurvenpunktes überstrichen, wenn  $t$  dieses Intervall  $T$  durchläuft. Es möge  $f$  in  $T$  eine vollständige Ableitung haben, während dies von  $g$  nicht vorausgesetzt wird, damit möglichst allgemeine konvexe Bögen umfaßt werden [18]. Endlich sei

$$f(0) = 0, \quad g(0) \geq 0, \quad f'(t) > 0 \text{ in } T. \quad (50)$$

Wir suchen eine Kurve  $C^*$  mit den Gleichungen

$$\xi = \varphi(t), \quad \eta = \psi(t), \quad (51)$$

die in  $T$  ebenfalls im ersten Quadranten ihres  $\xi, \eta$ -Systems verläuft, so daß

$$\varphi(0) = 0, \quad \psi(0) \geq 0 \quad (52)$$

und die Kurve nach oben konvex ist;  $\mathfrak{F}^*$  ist dadurch definiert, daß es von der Ordinate eines Punktes der Kurve  $C^*$  überstrichen wird, während  $t$  das Intervall  $T$  durchläuft. Die Richtung  $\rho$  fällt in die gemeinsame Richtung der  $Y$ - und der  $\eta$ -Achse. Wenn dann entsprechende Sehnen ( $\mathfrak{B}, \varepsilon$ ) beider Bereiche demselben Wert  $t$  entsprechen, so wird das durch die Gleichung

$$\int_0^t \psi \varphi' dt = v^2 \int_0^t g f' dt \quad (\text{für alle } t \text{ in } T) \quad (53)$$

ausgedrückt, wobei die Striche im folgenden immer gleichartige (entweder rechte oder linke) Ableitungen bedeuten. Sollen in entsprechenden Punkten [19] beider Kurven die Tangenten (oder entsprechenden Halbtangenten) parallel sein, so hat man

$$\text{Aus (53) folgt} \quad g' \varphi' = f' \psi'. \quad (54)$$

$$\text{und vermöge (54)} \quad \psi \varphi' = v^2 g f'$$

$$\varphi \psi' = v^2 g' f', \quad (55)$$

$$\varphi = v \sqrt{g^2 + c}, \quad (56)$$

endlich hieraus und aus (54):

$$\varphi = v \int_0^t \frac{g f'}{\sqrt{g^2 + c}} dt. \quad (57)$$

In der Lösung kommt nur eine willkürliche Integrationskonstante  $c$  vor, deren Wahl dadurch eingeschränkt ist, daß in  $T$  der Radikand von (56) nicht negativ werden darf. Natürlich erhält man auch (und zwar für  $c=0$ ) einen zu  $\mathfrak{F}'$  ähnlich perspektiven Bereich; die übrigen Werte  $c$  geben Lösungen unserer Aufgabe. Denn zufolge unseren Voraussetzungen, namentlich (50), wächst  $\varphi$  stets mit  $t$ ; es sind also die Punkte von  $C^*$  nicht nur  $t$ , sondern auch den Abszissenwerten  $\xi$  eindeutig zugeordnet. Also muß  $C^*$  wegen der parallelen Tangenten in entsprechenden Punkten ebenfalls nach oben konvex sein.

Hat man zwei solche Bereiche  $\mathfrak{F}'$ ,  $\mathfrak{F}^*$  gefunden, so läßt sich das Beispiel durch Spiegelung an der  $X$ - und  $\xi$ -Achse, eventuell

auch an den Endordinaten, erweitern; auch kann man Bereiche mit verschiedenen Randkurven, aber demselben  $v$  passend zusammensetzen.

### 10. Beispiele.

In allen folgenden Beispielen bedeutet  $F_0$  die Fläche des Mittelschnittes des konvexen Körpers  $\mathfrak{R}_0$ , d. h. des Schnittes derjenigen Ebene  $\mathfrak{E}$ , die zwischen  $\mathfrak{E}'$  und  $\mathfrak{E}^*$  in der Mitte liegt;  $T_r$  bedeutet den Schnitt von  $\mathfrak{R}_r$  (vgl. 4) mit  $\mathfrak{E}$ . Es ist also stets  $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$

in (27), (28) zu setzen. Die Richtung  $\rho$  fällt stets in die  $Y$ -Richtung.

a) Ein Quadrat  $Q$  mit der Seitenlänge eins habe je eine Seite in der positiven  $X$ - und  $Y$ -Halbachse. Wir ziehen die durch den Ursprung gehende Diagonale; die an der  $X$ -Achse liegende<sup>21</sup> Hälfte von  $Q$  sei  $\mathfrak{F}^*$ . Indem wir an  $Q$  noch das in der  $Y$ -Richtung um eins verschobene  $\mathfrak{F}^*$  ansetzen, erhalten wir  $\mathfrak{F}'$ . Es ist  $v = 1 \sqrt{3}$ . Da die Seitenvierecke eben sind, gilt in (27) und (28) das Gleichheitszeichen. Es ist (Bezeichnungen von 3,  $\epsilon$ ):

$$m'(x) = 1 + x, \quad m^*(\xi) = \xi.$$

Die Beziehung zwischen den Abszissen  $x$  und  $\xi$  zweier entsprechenden Sehnen ist:  $3\xi^2 = 2x + x^2$ .

Nach (26) findet man:

$$\begin{aligned} J &= \int_0^1 \left[ m^*(x) - 2v m'(x) + v^2 \frac{m'(x)^2}{m^*(x)} \right] dx = \\ &= \int_0^1 \sqrt{\frac{2x+x^2}{3}} \cdot dx - \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^1 (1+x) dx + \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^1 \frac{(x+1)^2}{\sqrt{2x+x^2}} dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \int_1^2 \sqrt{z^2-1} \cdot dz - \sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} \int_1^2 \frac{z^2}{\sqrt{z^2-1}} \cdot dz = \\ &= 2 - \sqrt{3}, \end{aligned}$$

also aus (27), da  $F' = \frac{3}{2}$  und  $F_0$  mit  $T_r$  identisch ist:

$$F_0 = 1,$$

was natürlich auch unmittelbar ersichtlich ist. Der verbindende Körper  $\mathfrak{R}_0$  wird außer von  $\mathfrak{F}'$  und  $\mathfrak{F}^*$  noch von einem Dreieck, einem Trapez, einem Rechteck und einem schiefen Spatheck begrenzt.

<sup>21</sup> Wir beziehen auch  $\mathfrak{F}^*$  der bequemerer Ausdrucksweise halber zunächst auf dasselbe  $X, Y$ -System wie  $\mathfrak{F}'$ . Die endgültige Lage ergibt sich, indem wir  $\mathfrak{F}^*$  (samt seinem  $\xi, \eta$ -System) in der  $Z$ -Richtung um eine beliebige Strecke verschieben.

b) Der Bereich  $\mathfrak{F}^*$  sei derselbe wie im vorigen Beispiel [21] und  $\mathfrak{F}'$  entstehe dadurch, daß man  $Q$  durch die andere Diagonale teilt und diejenige Hälfte nimmt, die den Ursprung nicht enthält. Die Bereiche  $\mathfrak{F}'$  und  $\mathfrak{F}^*$  sind gleich gestreckt, also ist  $J=0$ . Da sie aber nicht perspektiv ähnlich sind, gilt in (28) das Ungleichheitszeichen, was man leicht unmittelbar bestätigen kann: Es ist nämlich  $v=1$ , und immer wenn dies zutrifft, reduziert sich (27) auf

$$T_r - F' = \lambda \mu J, \quad (58)$$

und (28) auf

$$\sqrt{F_0} - \sqrt{F'} \geq \frac{\lambda \mu J}{\sqrt{T_r} + \sqrt{F'}} \quad (59)$$

Der Mittelschnitt  $F_0$  ist ein Fünfeck mit der Fläche  $\frac{3}{4}$  und  $F' = \frac{1}{2}$ .

c) Sei  $\mathfrak{F}'$  durch

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0$$

und  $\mathfrak{F}^*$  durch

$$\frac{\xi^2}{b^2} + \frac{\eta^2}{a^2} \leq 1, \quad \xi \geq 0, \quad \eta \geq 0$$

definiert,<sup>22</sup> wobei  $a > b > 0$  sein möge. Es ist

$$v = 1, \quad m'(x) = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}, \quad m^*(\xi) = \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - \xi^2}.$$

Die Ellipsen lassen sich durch zwei solche spezielle Affinitäten ineinander transformieren [21], die in einer Multiplikation aller Abstände von einer Achse mit einer Konstanten bestehen. Daher teilen entsprechende Sehnen die auf der  $X$ -Achse, beziehungsweise  $\xi$ -Achse liegenden Achsen der Ellipsen proportional:

$$\frac{\xi}{b} = \frac{x}{a}, \quad (60)$$

daher

$$m^*(x) = \sqrt{a^2 - x^2}, \quad m^*(x) - v m'(x) = \frac{a-b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

und nach (26):

$$J = \int_0^a \left( \frac{a-b}{a} \right)^2 \sqrt{a^2 - x^2} \cdot dx = \frac{\pi}{4} (a-b)^2.$$

<sup>22</sup> Man könnte ebenso gut die Volellipsen zugrunde legen.

Man sieht durch Vergleich mit (60), daß in den Darstellungen

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t \quad (61)$$

$$\xi = b \cos t, \quad \eta = a \sin t \quad (62)$$

entsprechende Punkte [19] der Ellipsenquadranten zum selben Wert  $t$  gehören; verbindet man sie, so erhält man Strecken auf der Regelfläche  $\mathfrak{R}$ , deren Mittelpunkte auf einem Kreis vom Halbmesser  $\frac{1}{2}(a+b)$  liegen. Also ist  $T_r$  als Kreisquadrant

$$T_r = \frac{\pi}{16} (a+b)^2.$$

Denselben Wert erhält man aus (58), indem  $F' = \frac{1}{4} a b \pi$  ist.

Aber  $F_0$  greift über  $T_r$  hinaus, da die Tangenten der Ellipsen in entsprechenden Punkten nicht parallel sind, daher  $\mathfrak{R}_0$  und  $\mathfrak{R}_r$  nicht identisch sind. Wir haben also ein Beispiel des Falles, daß in (28) das Ungleichheitszeichen gilt und die rechte Seite von Null verschieden ist.

Will man die Punkte der Ellipsen nach parallelen Tangenten einander zuordnen, so schreibe man die zweite Ellipse mit einem anderen Parameter

$$\xi = b \cos \tau, \quad \eta = a \sin \tau$$

und findet dann

$$b^2 \operatorname{tg} \tau = a^2 \operatorname{tg} t \quad (63)$$

als Beziehung zwischen den Parametern der Punkte, die eine auf der Huffläche (vgl. 8) liegende »Hufstrecke« begrenzen. Die Mittelpunkte der Hufstrecken liegen auf der Kurve:

$$X = \frac{\cos t}{2} \left( a + \frac{b^3}{w} \right), \quad Y = \frac{\sin t}{2} \left( b + \frac{a^3}{w} \right), \quad (64)$$

wobei

$$w^2 = a^4 \sin^2 t + b^4 \cos^2 t.$$

d) Anknüpfend an 9 wählen wir (die Quadratwurzeln sind immer positiv zu nehmen) in (49):

$$x = f(t) = t, \quad y = g(t) = \sqrt{a+t}, \quad a > 0.$$

Dann wird nach (56) und (57):

$$\psi = v \sqrt{a+t+c}, \quad \varphi = v \int \sqrt{\frac{a+t}{a+t+c}} \cdot dt. \quad (65)$$

Um ein möglichst einfaches Beispiel zu haben, setzen wir  $c = -a$  und finden:

$$\begin{aligned} \psi &= v \sqrt{t}, \quad \varphi = v \int \sqrt{\frac{a+t}{t}} \cdot dt = \\ &= v \left[ \sqrt{t(a+t)} - \frac{a}{2} \log \text{nat} \frac{a+2t-2\sqrt{t(a+t)}}{a} \right], \quad (66) \end{aligned}$$

wobei die Integrationskonstante so gewählt ist, daß  $\varphi(0) = 0$  wird. Auch der zweite Teil der eckigen Klammer ist positiv, weil das Argument des Logarithmus stets zwischen Null und Eins liegt. Für

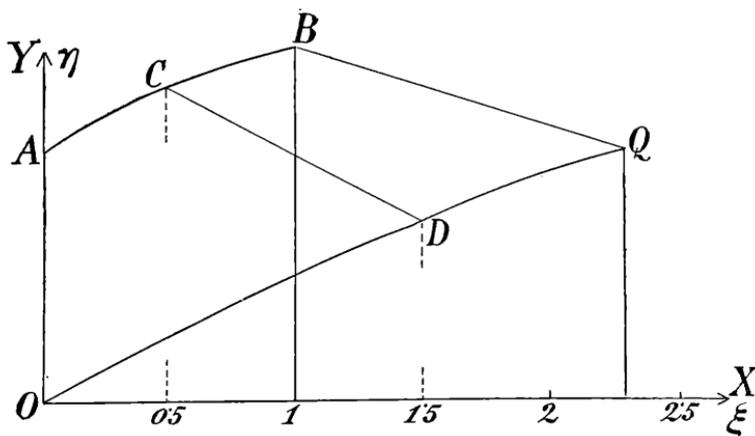


Fig. 2.

den Endpunkt  $t_0$  des Intervalls  $T$  kann noch eine beliebige positive Zahl angenommen werden, da die Voraussetzungen, die in 9 gemacht wurden, immer erfüllt bleiben.

Die Fig. 2 stellt den Fall

$$v = a = t_0 = 1$$

dar. Die Kurve  $C'$  ist der Parabelbogen  $AB$ , die Kurve  $C^*$  der Bogen  $OQ$  mit den Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \sqrt{t(1+t)} - \frac{1}{2} l [1+2t-2\sqrt{t(1+t)}] \\ \eta &= \sqrt{t} \end{aligned} \right\}, \quad (67)$$

dessen Endpunkt die Koordinaten

$$\xi_0 = \sqrt{2} - \frac{1}{2} l (3-2\sqrt{2}) = 2.296. \quad \eta_0 = 1$$

hat. Es wurde noch die Hufstrecke  $CD$  berechnet und gezeichnet, die dem Wert  $t = \frac{1}{2}$  entspricht;

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = 1.524\dots$$

Hier ist wegen  $x \equiv t$

$$J = \int_0^1 \frac{[\psi(t) - g(t)]^2}{\psi(t)} \cdot dt = \frac{14 - 8\sqrt{2}}{3}, \quad (68)$$

und da

$$F' = \frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1),$$

findet man aus (58):

$$T_r = F_0 = \frac{1}{2} + \frac{2}{3}\sqrt{2}.$$

Derselbe Wert ergibt sich aus

$$F_0 = \int_0^1 \frac{g + \psi}{2} \cdot \frac{f' + \varphi'}{2} dt.$$

Die Kurve  $C^*$  beginnt im Ursprung mit der Krümmung Null.

## Inhalt.

1. Einleitung.
  2. Konvexe Polyeder.
  3. Hilfssätze.
  4. Andere Gleichungen für gewisse konvexe Polyeder.
  5. Konvexe Körper mit Schnittpaaren der Klasse  $p$ .
  6. Beliebige konvexe Körper.
  7. Die Dachkörper.
  8. Die Ergänzung zum Satz von Brunn.
  9. Eine besondere Klasse konvexer Körper.
  10. Beispiele.
-

# ZOBODAT - [www.zobodat.at](http://www.zobodat.at)

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften  
mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse](#)

Jahr/Year: 1929

Band/Volume: [138\\_2a](#)

Autor(en)/Author(s): Zindler Konrad

Artikel/Article: [Über parallele ebene Schnitte eines konvexen Körpers. 289-310](#)