Vektorische Ausgleichungen eines ausgemessenen Dreiecks

Von

Richard Schumann

Korr. Mitglied d. Akad. d. Wiss.

(Mit 6 Textfiguren)

(Vorgelegt in der Sitzung am 11. Juli 1929)

I.

Gemessen seien die drei Seiten A', B', C' und die drei Winkel α', β', γ' eines Dreiecks. Da drei unabhängige Stücke zum Zeichnen des Dreiecks genügen, so müssen diese sechs skalaren

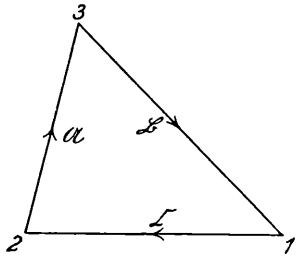

Fig. 1.

Größen drei skalare Bedingungen, und zwar eine Winkel- und zwei Seitenbedingungen, erfüllen. Die Winkelbedingung lautet:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°,$$

wenn α, β, γ ausgeglichene Werte sind; hingegen ist:

$$\alpha' + \beta' + \gamma' = 180° + w. \tag{1}$$

Die skalare Größe w, als arcus zu nehmen, ist bekannt. Die gesuchten Verbesserungen seien $d\alpha'$, $d\beta'$, $d\gamma'$; dann ist weiter:

$$d\alpha' + d\beta' + d\gamma' + w = 0. \tag{2}$$

Die Dreieckseiten, als beobachtete Vektoren aufgefaßt, seien $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$; ihre Beziehung zu den sechs beobachteten Skalaren wird vermittelt durch die Gleichungen:

$$\mathfrak{A}' = A' . \overline{\mathfrak{A}}', \quad \mathfrak{B}' = B' . \overline{\mathfrak{B}}', \quad \mathfrak{C}' = C' . \overline{\mathfrak{C}}', \tag{3}$$

wo die überstrichenen deutschen Buchstaben Einheitsvektoren bedeuten. Die zu ihnen senkrechten Einheitsvektoren (Ergänzungs-

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

vektoren) seien $|\mathfrak{A}'$, $|\mathfrak{B}'$, $|\mathfrak{C}'$; der Übergang von ersteren zu letzteren erfolgt im Uhrzeigersinne. Die ausgeglichenen Vektoren seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$; dann soll sein: $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C} = 0$,

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}' + d\,\mathfrak{A}', \quad \mathfrak{B} = \mathfrak{B}' + d\,\mathfrak{B}', \quad \mathfrak{C} = \mathfrak{C}' + d\,\mathfrak{C}';$$

aus (3) folgt durch Differentiation für die Fehlervektoren:

$$\begin{aligned} d\,\mathfrak{A}' &= d\,A' . \overline{\mathfrak{A}'} + A' \;\; |d\,\overline{\mathfrak{A}'}| \;\; \mathfrak{A}', \\ d\,\mathfrak{B}' &= d\,B' . \overline{\mathfrak{B}'} + B' . |d\,\overline{\mathfrak{B}'}| \;\; \mathfrak{B}', \\ d\,\mathfrak{C}' &= d\,C' . \overline{\mathfrak{C}'} + C' . |d\,\overline{\mathfrak{C}'}| \;\; \mathfrak{C}'. \end{aligned} \tag{4}$$

Hierin sind

$$|d\,\overline{\mathfrak{A}'}|, \;\; |d\,\overline{\mathfrak{B}'}|, \;\; |d\,\overline{\mathfrak{C}'}|$$

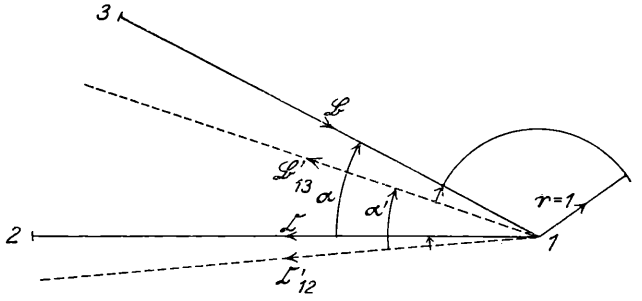

Fig.

die Absolutbeträge der Querverschwenkungen an den Enden der Einheitsvektoren; sie decken sich nach Sinn und Betrag mit den Richtungsverbesserungen r_{23}, r_{31}, r_{12} beim üblichen Ausgleich.

In jeder Ecke wird nach zwei Richtungen gezielt, mithin treten im ganzen sechs Richtungen auf, also auch sechs Vektoren; sie seien $\mathfrak{A}'_{23}$ und $\mathfrak{A}'_{32}$, $\mathfrak{B}'_{31}$ und $\mathfrak{B}'_{13}$, $\mathfrak{C}'_{12}$ und $\mathfrak{C}'_{21}$. Gemäß obenstehender Figur wird:

entsprechend:

$$\left.\begin{aligned} d\,\alpha' &= -|d\,\overline{\mathfrak{C}'_{12}}| + |d\,\overline{\mathfrak{B}'_{13}}|, \\ d\,\beta' &= -|d\,\overline{\mathfrak{A}'_{23}}| + |d\,\overline{\mathfrak{C}'_{21}}|, \\ d\,\gamma' &= -|d\,\overline{\mathfrak{B}'_{31}}| + |d\,\overline{\mathfrak{A}'_{32}}|. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

In jeder Ecke stoßen zwei Vektoren verschiedener Länge zusammen, sie schließen miteinander die Winkel α', β', γ' ein. Zwischen je zwei Ecken bestehen zwei Vektoren gleicher Länge (A', B', C'), ihre Richtungen sind wenig von 180° verschieden, siehe Fig. 3. Mithin ist:

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} &= \mathfrak{A}'_{23} + d\,\mathfrak{A}'_{23} = -\mathfrak{A}'_{32} - d\,\mathfrak{A}'_{32},\\ \mathfrak{B} &= \mathfrak{B}'_{31} + d\,\mathfrak{B}'_{31} = -\mathfrak{B}'_{13} - d\,\mathfrak{B}'_{13},\\ \mathfrak{C} &= \mathfrak{C}'_{12} + d\,\mathfrak{C}'_{12} = -\mathfrak{C}'_{21} - d\,\mathfrak{C}'_{21}.\end{aligned} \tag{6}$$

Durch erlaubtes Parallelverschieben entsteht ein offenes Sechseck (Fig. 4). Aus ihm folgt für den Widerspruchsvektor $\mathfrak{W} = W \cdot \overline{\mathfrak{W}}$ die Gleichung:

$$+\mathfrak{A}'_{23} - \mathfrak{A}'_{32} + \mathfrak{B}'_{31} - \mathfrak{B}'_{13} + \mathfrak{C}'_{12} - \mathfrak{C}'_{21} + \mathfrak{W} = 0; \tag{7}$$

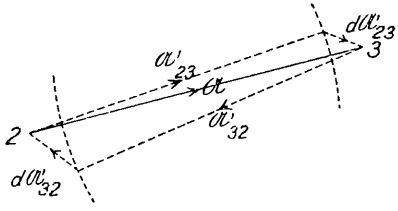

Fig. 3.

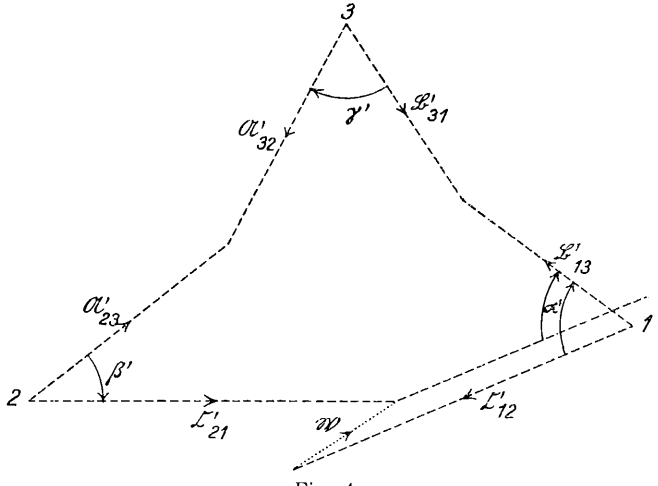

Fig. 4.

W und w sind als kleine Größen zu behandeln. Beachtet man, daß nach Fig. 1

$$2\,\mathfrak{A} + 2\,\mathfrak{B} + 2\,\mathfrak{C} = 0$$

ist, so ergibt sich die Gleichung:

$$+d\,\mathfrak{A}'_{23} - d\,\mathfrak{A}'_{32} + d\,\mathfrak{B}'_{31} - d\,\mathfrak{B}'_{13} + d\,\mathfrak{C}'_{12} - d\,\mathfrak{C}'_{21} - \mathfrak{W} = 0. \tag{8}$$

Neben dieser vektorischen Bedingungsgleichung besteht nach (2) und (5) noch die skalare:

$$-|d\,\mathfrak{A}'_{23}| + |d\,\mathfrak{A}'_{32}| - |d\,\mathfrak{B}'_{31}| + |d\,\mathfrak{B}'_{13}| - |d\,\mathfrak{C}'_{12}| + |d\,\mathfrak{C}'_{21}| + w = 0. \tag{9}$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

vektoren) seien $|\mathfrak{A}'$, $|\mathfrak{B}'$, $|\mathfrak{C}'$; der Übergang von ersteren zu letzteren erfolgt im Uhrzeigersinne. Die ausgeglichenen Vektoren seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$; dann soll sein: $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C} = 0$,

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}' + d\,\mathfrak{A}', \quad \mathfrak{B} = \mathfrak{B}' + d\,\mathfrak{B}', \quad \mathfrak{C} = \mathfrak{C}' + d\,\mathfrak{C}';$$

aus (3) folgt durch Differentiation für die Fehlervektoren:

$$\begin{aligned} d\,\mathfrak{A}' &= d\,A' . \mathfrak{A}' + A' \;|d\,\mathfrak{A}'|\;\; \mathfrak{A}', \\ d\,\mathfrak{B}' &= d\,B' . \mathfrak{B}' + B' \;|d\,\mathfrak{B}'|\;\; \mathfrak{B}', \\ d\,\mathfrak{C}' &= d\,C' . \mathfrak{C}' + C' . |d\,\mathfrak{C}'|\;\; \mathfrak{C}'. \end{aligned} \tag{4}$$

Hierin sind

$$|d\,\mathfrak{A}'|, \quad |d\,\mathfrak{B}'|, \quad |d\,\mathfrak{C}'|$$

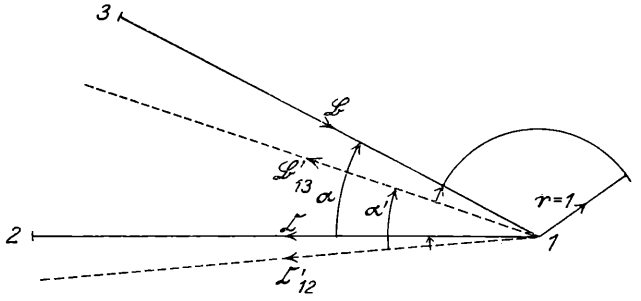

Fig.

die Absolutbeträge der Querverschwenkungen an den Enden der Einheitsvektoren; sie decken sich nach Sinn und Betrag mit den Richtungsverbesserungen r_{23}, r_{31}, r_{12} beim üblichen Ausgleich.

In jeder Ecke wird nach zwei Richtungen gezielt, mithin treten im ganzen sechs Richtungen auf, also auch sechs Vektoren; sie seien $\mathfrak{A}'_{23}$ und $\mathfrak{A}'_{32}$, $\mathfrak{B}'_{31}$ und $\mathfrak{B}'_{13}$, $\mathfrak{C}'_{12}$ und $\mathfrak{C}'_{21}$. Gemäß obenstehender Figur wird:

entsprechend:

$$\left.\begin{aligned} d\,\alpha' &= -|d\,\mathfrak{C}'_{12}| + |d\,\mathfrak{B}'_{13}|, \\ d\,\beta' &= -|d\,\mathfrak{A}'_{23}| + |d\,\mathfrak{C}'_{21}|, \\ d\,\gamma' &= -|d\,\mathfrak{B}'_{31}| + |d\,\mathfrak{A}'_{32}|. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

In jeder Ecke stoßen zwei Vektoren verschiedener Länge zusammen, sie schließen miteinander die Winkel α', β', γ' ein. Zwischen je zwei Ecken bestehen zwei Vektoren gleicher Länge (A', B', C'), ihre Richtungen sind wenig von 180° verschieden, siehe Fig. 3. Mithin ist:

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} &= \mathfrak{A}'_{23} + d\,\mathfrak{A}'_{23} = -\mathfrak{A}'_{32} - d\,\mathfrak{A}'_{32},\\ \mathfrak{B} &= \mathfrak{B}'_{31} + d\,\mathfrak{B}'_{31} = -\mathfrak{B}'_{13} - d\,\mathfrak{B}'_{13},\\ \mathfrak{C} &= \mathfrak{C}'_{12} + d\,\mathfrak{C}'_{12} = -\mathfrak{C}'_{21} - d\,\mathfrak{C}'_{21}.\end{aligned} \tag{6}$$

Durch erlaubtes Parallelverschieben entsteht ein offenes Sechseck (Fig. 4). Aus ihm folgt für den Widerspruchsvektor $\mathfrak{W} = W.\overline{\mathfrak{W}}$ die Gleichung:

$$+\mathfrak{A}'_{23} - \mathfrak{A}'_{32} + \mathfrak{B}'_{31} - \mathfrak{B}'_{13} + \mathfrak{C}'_{12} - \mathfrak{C}'_{21} + \mathfrak{W} = 0; \tag{7}$$

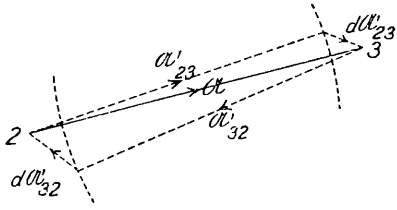

Fig. 3.

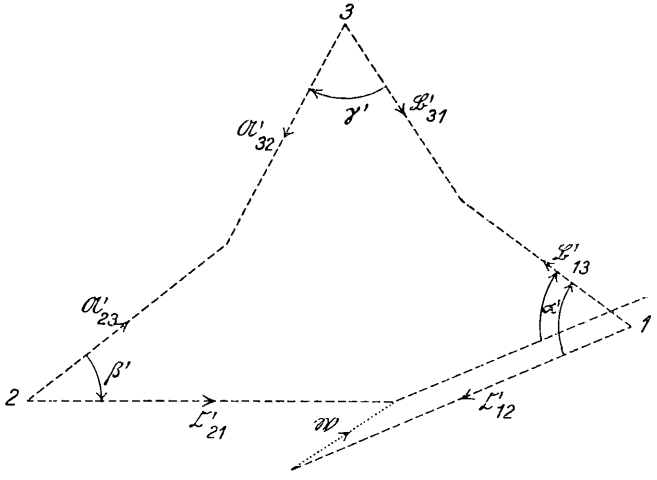

Fig. 4.

W und w sind als kleine Größen zu behandeln. Beachtet man, daß nach Fig. 1

$$2\,\mathfrak{A} + 2\,\mathfrak{B} + 2\,\mathfrak{C} = 0$$

ist, so ergibt sich die Gleichung:

$$+d\,\mathfrak{A}'_{23} - d\,\mathfrak{A}'_{32} + d\,\mathfrak{B}'_{31} - d\,\mathfrak{B}'_{13} + d\,\mathfrak{C}'_{12} - d\,\mathfrak{C}'_{21} - \mathfrak{W} = 0. \tag{8}$$

Neben dieser vektorischen Bedingungsgleichung besteht nach (2) und (5) noch die skalare:

$$-|d\,\mathfrak{A}'_{23}| + |d\,\mathfrak{A}'_{32}| - |d\,\mathfrak{B}'_{31}| + |d\,\mathfrak{B}'_{13}| - |d\,\mathfrak{C}'_{12}| + |d\,\mathfrak{C}'_{21}| + w = 0. \tag{9}$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Die zwei Bedingungsgleichungen (8) und (9) sind notwendig und hinreichend; sie entsprechen drei skalaren Gleichungen.

Der plausible Wunsch, kleinste Fehlervektoren zu erhalten, wird hier ausgedrückt durch die formale Forderung nach der kleinsten Summe ihrer skalaren Quadrate; die erweiterte Minimumsbedingung lautet demnach:

$$[(\!(d\,\mathfrak{A}'_{23},\ d\,\mathfrak{A}'_{23})\!) + (\!(d\,\mathfrak{A}'_{32},\ d\,\mathfrak{A}'_{32})\!)]$$
$$-2.(\!([+d\,\mathfrak{A}'_{23} - d\,\mathfrak{A}'_{32}] - \mathfrak{W}, \mathfrak{L})\!) - \tag{10}$$
$$-2.([-|d\,\overline{\mathfrak{A}}'_{23}| + |d\,\overline{\mathfrak{A}}'_{32}|] + w).l = \text{Minimum}.$$

Die Hohlklammern bedeuten skalare Multiplikation der eingeschlossenen Vektoren, die einfachen eckigen Klammern, wie üblich, Summation über eine gewisse Gruppe von Größen, hier über die drei Ecken. $\mathfrak{L} = L.\overline{\mathfrak{L}}$ und l sind die beiden Korrelaten; L ist erster, l zweiter Dimension. Das Minimum ist zu suchen in bezug auf

$$d\,A',\ d\,B',\ d\,C';\quad |d\,\overline{\mathfrak{A}}'_{23}|,\qquad |d\,\overline{\mathfrak{C}}'_{21}|;\quad \mathfrak{L} \text{ und } l.$$

Zunächst findet man für die drei Streckungen, wenn man die skalaren Multiplikationen ausführt:

$$\begin{aligned} 2\,d\,A' &= L.(\cos(\mathfrak{A}'_{23}\,\mathfrak{L}) - \cos(\mathfrak{A}'_{32}\,\mathfrak{L})),\\ 2\,d\,B' &= L.(\cos(\mathfrak{B}'_{31}\,\mathfrak{L}) - \cos(\mathfrak{B}'_{13}\,\mathfrak{L})),\\ 2\,d\,C' &= L.(\cos(\mathfrak{C}'_{12}\,\mathfrak{L}) - \cos(\mathfrak{C}'_{21}\,\mathfrak{L})). \end{aligned} \tag{11}$$

Für die sechs Querverschwenkungen findet sich:

$$\begin{aligned} A'\ |d\,\overline{\mathfrak{A}}'_{23}| &= +L.\sin(\mathfrak{A}'_{23}\,\mathfrak{L}) - \frac{l}{A'},\\ B'\ |d\,\overline{\mathfrak{B}}'_{31}| &= +L.\sin(\mathfrak{B}'_{31}\,\mathfrak{L}) - \frac{l}{B'},\\ C'\ |d\,\overline{\mathfrak{C}}'_{12}| &= +L.\sin(\mathfrak{C}'_{12}\,\mathfrak{L}) - \frac{l}{C'},\\ A'\ |d\,\overline{\mathfrak{A}}'_{32}| &= -L.\sin(\mathfrak{A}'_{32}\,\mathfrak{L}) + \frac{l}{A'},\\ B'\ |d\,\overline{\mathfrak{B}}'_{13}| &= -L.\sin(\mathfrak{B}'_{13}\,\mathfrak{L}) + \frac{l}{B'},\\ C'\ |d\,\overline{\mathfrak{C}}'_{21}| &= -L.\sin(\mathfrak{C}'_{21}\,\mathfrak{L}) + \frac{l}{C'}. \end{aligned} \tag{12}$$

Die lineare vektorische Normalgleichung für $\mathfrak{L}$ erhält man aus (8)

$$+\frac{L}{2}\cdot[(\cos(\mathfrak{A}'_{23}\mathfrak{L})-\cos(\mathfrak{A}'_{32}\mathfrak{L}))\cdot(\overline{\mathfrak{A}}'_{23}-\overline{\mathfrak{A}}'_{32})]+$$
$$+\left[\left(L.\sin(\mathfrak{A}'_{23}\mathfrak{L})-\frac{l}{A'}\right)\cdot|\mathfrak{A}'_{23}+\right.$$
$$\left.+\left(L.\sin(\mathfrak{A}'_{32}\mathfrak{L})-\frac{l}{A'}\right).|\mathfrak{A}'_{32}\right]-\mathfrak{W}=0.$$

Spaltet man sie vermittelst $\overline{\mathfrak{L}}$ und $|\mathfrak{L}$, so findet man für Betrag und Richtung von $\mathfrak{L}$ die folgenden beiden Gleichungen:

$$+6L-\frac{L}{2}\left[\left(\cos(\mathfrak{A}'_{23}\mathfrak{L})+\cos(\mathfrak{A}'_{32}\mathfrak{L})\right)^2\right]-$$
$$-l.\left[\frac{\sin(\mathfrak{A}'_{23}\mathfrak{L})+\sin(\mathfrak{A}'_{32}\mathfrak{L})}{A'}\right]-W.\cos(\mathfrak{W}\mathfrak{L})=0. \qquad (13)$$

$$+\frac{L}{2}\cdot\left[\left(\sin(\mathfrak{A}'_{23}\mathfrak{L})+\sin(\mathfrak{A}'_{32}\mathfrak{L})\right)\left(\cos(\mathfrak{A}'_{23}\mathfrak{L})+\cos(\mathfrak{A}'_{32}\mathfrak{L})\right)\right]-$$
$$-l.\left[\frac{\cos(\mathfrak{A}'_{23}\mathfrak{L})+\cos(\mathfrak{A}'_{32}\mathfrak{L})}{A'}\right]+W.\sin(\mathfrak{W}\mathfrak{L})=0. \qquad (14)$$

Aus (9) ergibt sich als Normalgleichung für l:

$$-L.\left[\frac{\sin(\mathfrak{A}'_{23}\mathfrak{L})+\sin(\mathfrak{A}'_{32}\mathfrak{L})}{A'}\right]+$$
$$+2l.\left(\frac{1}{A'^2}+\frac{1}{B'^2}+\frac{1}{C'^2}\right)+w=0. \qquad (15)$$

Die in (15) auftretende Summe

$$\frac{1}{A'^2}+\frac{1}{B'^2}+\frac{1}{C'^2}$$

soll weiterhin mit S bezeichnet werden.

Die für Fehlerberechnung und zu Kontrollen wichtige Quadratsumme der Fehlervektoren wird:

$$[(d\mathfrak{A},\ d\mathfrak{A})]=+6L^2-\frac{L^2}{2}\cdot\left[\left(\cos(\mathfrak{A}'_{23}\mathfrak{L})+\cos(\mathfrak{A}'_{32}\mathfrak{L})\right)^2\right]-$$
$$-2L.l.[\sin(\mathfrak{A}'_{23}\mathfrak{L})+\sin(\mathfrak{A}'_{32}\mathfrak{L})]+2l^2.S. \qquad (16)$$

Multipliziert man die aus (10) durch Differentiation nach den drei Streckungen unmittelbar folgenden vektorischen Normalgleichungen der Reihe nach mit dA', dB', dC', jene für die

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$d\,\mathfrak{A}'_{23}|$ folgenden mit $|d\,\mathfrak{A}'_{23}|$. und addiert sämtliche so entstehenden Gleichungen, so erhält man als eine der möglichen Kontrollgleichungen für die Fehlerquadratsumme:

$$[(d\,\mathfrak{A},\ d\,\mathfrak{A})] - (\mathfrak{W},\ \mathfrak{L}) + l \cdot w = 0; \tag{17}$$

sie entspricht einer bekannten Kontrollgleichung beim Ausgleich bedingter Beobachtungen.

II.

Richtungsunterschiede zwischen Sicht- und Gegensicht bei Triangulationen werden nicht gemessen; mit Hilfe der Formeln (13), (14) und (15) könnte ihr Einfluß auf den Ausgleich eines Dreiecks geschätzt werden.[1]

Die Differenz je zweier Winkel: $\sphericalangle\,(\mathfrak{A}'_{23}\,\mathfrak{L})$ und $\sphericalangle\,(\mathfrak{A}'_{32}\,\mathfrak{L})$ unterscheidet sich von 180° nur um eine mäßige Anzahl von Bogensekunden; Summen von der Form:

$$\sin\,(\mathfrak{A}'_{23}\,\mathfrak{L}) + \sin\,(\mathfrak{A}'_{32}\,\mathfrak{L})$$

und

$$\cos\,(\mathfrak{A}'_{23}\,\mathfrak{L}) + \cos\,(\mathfrak{A}'_{32}\,\mathfrak{L})$$

sind demnach Größen von der Ordnung 0, 00001; es ist berechtigt, in den Gleichungen (13) bis (16) die mit eckigen Klammern [ ] multiplizierten Glieder zu vernachlässigen. Dann werden die beiden Korrelaten voneinander unabhängig, es folgt aus (14) zunächst:

$$\sphericalangle\,(\mathfrak{W}\,\mathfrak{L}) = 0, \text{ also } \overline{\mathfrak{L}} = \overline{\mathfrak{W}}$$

und aus (13), (15) und (16):

$$L = -\frac{W}{6} \qquad l = -\frac{w}{2\,S}, \quad |(d\,\mathfrak{A},\ d\,\mathfrak{A})| = +\,6\,L^2 + 2\,l^2 \cdot S. \tag{18}$$

Die gesuchten Unbekannten nehmen die Form an:

$$\begin{aligned}
d\,A' &= -\frac{W}{6} \cdot \cos\,(\mathfrak{A}'_{23}\,\mathfrak{W}) \\
d\,B' &= -\frac{W}{6} \cdot \cos\,(\mathfrak{B}'_{31}\,\mathfrak{W}) \\
d\,C' &= -\frac{W}{6} \cdot \cos\,(\mathfrak{C}'_{12}\,\mathfrak{W}) \\
|d\,\mathfrak{A}'_{23}| &= +\frac{L}{A'} \cdot \sin\,(\mathfrak{A}'_{23}\,\mathfrak{W}) - \frac{l}{A'^2} \\
|d\,\mathfrak{B}'_{31}| &= +\frac{L}{B'} \cdot \sin\,(\mathfrak{B}'_{31}\,\mathfrak{W}) - \frac{l}{B'^2} \\
|d\,\mathfrak{C}'_{12}| &= +\frac{L}{C'} \cdot \sin\,(\mathfrak{C}'_{12}\,\mathfrak{W}) - \frac{l}{C'^2}
\end{aligned} \tag{19}$$

[1] Physische Ursachen für das Nichtzusammenfallen können z. B. sein: Phasen der Ziele infolge wechselnder Beleuchtung, Seitenrefraktion.

$$
\begin{aligned}
|d\,\mathfrak{A}'_{32}| &= +\frac{L}{A'}\,.\sin\,(\mathfrak{A}'_{23}\,\mathfrak{W}) + \frac{l}{A'^2}\\
|d\,\mathfrak{B}'_{31}| &= +\frac{L}{B'}\,.\sin\,(\mathfrak{B}'_{31}\,\mathfrak{W}) + \frac{l}{B'^2}\\
|d\,\mathfrak{C}'_{12}| &= +\frac{L}{C'}\,.\sin\,(\mathfrak{C}'_{12}\,\mathfrak{W}) + \frac{l}{\mathfrak{C}'^2}\,.
\end{aligned}
\qquad \text{(zu 19)}
$$

Die Verbesserungen der beobachteten Winkel werden:

$$
\begin{aligned}
\alpha - \alpha' = d\,\alpha' &= +\frac{L}{B'}\,.\sin\,(\mathfrak{B}'_{31}\,\mathfrak{W}) +\\
&\quad + \frac{l}{B'^2} - \frac{L}{C'}\,.\sin\,(\mathfrak{C}'_{12}\,\mathfrak{W}) + \frac{l}{C'^2}\\
\beta - \beta' = d\,\beta' &= +\frac{L}{C'}\,.\sin\,(\mathfrak{C}'_{12}\,\mathfrak{W}) +\\
&\quad + \frac{l}{C'^2} - \frac{L}{A'}\,.\sin\,(\mathfrak{A}'_{23}\,\mathfrak{W}) + \frac{l}{A'^2}\\
\gamma - \gamma' = d\,\gamma' &= +\frac{L}{A'}\,.\sin\,(\mathfrak{A}'_{23}\,\mathfrak{W}) +\\
&\quad + \frac{l}{A'^2} - \frac{L}{B'}\,.\sin\,(\mathfrak{B}'_{31}\,\mathfrak{W}) + \frac{l}{B'^2}\,.
\end{aligned}
\qquad (20)
$$

Die Berechnung von W und S aus den gegebenen sechs Stücken wird im nächsten Abschnitte gezeigt werden.

Die Ausdrücke (19) und (20) wurden gewonnen unter der Bedingung, daß die Fehlerquadratsumme ein Minimum werde in bezug auf die Richtungsverbesserungen $|d\,\mathfrak{A}'_{23}|$ usw. Es ist wichtig, zu bemerken, daß dieselben Ausdrücke (19) und (20) erhalten werden, wenn man das Minimum sucht in bezug auf die Querverschwenkungen $a'_{23} = A' \,.\, |d\,\mathfrak{A}'_{23}|$ usw.

Durch die Rechnungen der beiden Abschnitte I und II erscheint das vektorische Ausgleichungsprinzip konsequent durchgeführt, und es wird ein Wunsch erfüllt, der in einem interessanten Aufsatz des Herrn Prof. Dr. F. Baeschlin[1] über vektorische Ausgleichung enthalten ist. Ein Wettbewerb in betreff des Aufwandes beim numerischen Ausgleich zwischen der vektorischen und der seit mehr als 100 Jahren geübten, praktisch ausgefeilten klassischen Methode der kleinsten Quadrate wäre zur Zeit wohl noch nicht stichhaltig. Ein Nachweis für die an derselben Stelle[2] geäußerte

[1] Einführung in die Vektorrechnung und die vektorielle Ausgleichung, von Prof. F. Baeschlin; Schweizerische Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik, Jahrgang 26, 1928, s. p. 167.

[2] Ebenda, p. 189.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$d\,\mathfrak{A}'_{23}|$. folgenden mit $|d\,\mathfrak{A}'_{23}|$ und addiert sämtliche so entstehenden Gleichungen, so erhält man als eine der möglichen Kontrollgleichungen für die Fehlerquadratsumme:

$$[(d\,\mathfrak{A},\ d\,\mathfrak{A})] - (\mathfrak{W},\ \mathfrak{L}) + l.w = 0; \tag{17}$$

sie entspricht einer bekannten Kontrollgleichung beim Ausgleich bedingter Beobachtungen.

II.

Richtungsunterschiede zwischen Sicht- und Gegensicht bei Triangulationen werden nicht gemessen; mit Hilfe der Formeln (13), (14) und (15) könnte ihr Einfluß auf den Ausgleich eines Dreiecks geschätzt werden.[1]

Die Differenz je zweier Winkel: $\sphericalangle\,(\mathfrak{A}'_{23}\,\mathfrak{L})$ und $\sphericalangle\,(\mathfrak{A}'_{32}\,\mathfrak{L})$ unterscheidet sich von 180° nur um eine mäßige Anzahl von Bogensekunden; Summen von der Form:

$$\sin\,(\mathfrak{A}'_{23}\,\mathfrak{L}) + \sin\,(\mathfrak{A}'_{32}\,\mathfrak{L})$$

und

$$\cos\,(\mathfrak{A}'_{23}\,\mathfrak{L}) + \cos\,(\mathfrak{A}'_{32}\,\mathfrak{L})$$

sind demnach Größen von der Ordnung 0, 00001; es ist berechtigt, in den Gleichungen (13) bis (16) die mit eckigen Klammern [ ] multiplizierten Glieder zu vernachlässigen. Dann werden die beiden Korrelaten voneinander unabhängig, es folgt aus (14) zunächst:

$$\sphericalangle\,(\mathfrak{W}\,\mathfrak{L}) = 0, \text{ also } \bar{\mathfrak{L}} = \mathfrak{W}$$

und aus (13), (15) und (16):

$$L = \frac{W}{6} \qquad l = -\frac{w}{2\,S}, \qquad |(d\,\mathfrak{A},\ d\,\mathfrak{A})| = +\,6\,L^2 + 2\,l^2.S. \tag{18}$$

Die gesuchten Unbekannten nehmen die Form an:

$$\begin{aligned}
d\,A' &= \frac{W}{6}.\cos\,(\mathfrak{A}'_{23}\,\mathfrak{W}) \\
d\,B' &= \frac{W}{6}.\cos\,(\mathfrak{B}'_{31}\,\mathfrak{W}) \\
d\,C' &= \frac{W}{6}.\cos\,(\mathfrak{C}'_{12}\,\mathfrak{W}) \\
|d\,\mathfrak{A}'_{23}| &= +\frac{L}{A'}.\sin\,(\mathfrak{A}'_{23}\,\mathfrak{W}) - \frac{l}{A'^2} \\
|d\,\mathfrak{B}'_{31}| &= +\frac{L}{B'}.\sin\,(\mathfrak{B}'_{31}\,\mathfrak{W}) - \frac{l}{B'^2} \\
|d\,\mathfrak{C}'_{12}| &= +\frac{L}{C'}.\sin\,(\mathfrak{C}'_{12}\,\mathfrak{W}) - \frac{l}{C'^2}
\end{aligned} \tag{19}$$

[1] Physische Ursachen für das Nichtzusammenfallen können z. B. sein: Phasen der Ziele infolge wechselnder Beleuchtung, Seitenrefraktion.

$$
\begin{aligned}
|d\,\overline{\mathfrak{A}}'_{32}| &= +\frac{L}{A'}\,.\sin\,(\mathfrak{A}'_{23}\,\mathfrak{W}) + \frac{l}{A'^2}\\
|d\,\overline{\mathfrak{B}}'_{31}| &= +\frac{L}{B'}\,.\sin\,(\mathfrak{B}'_{31}\,\mathfrak{W}) + \frac{l}{B'^2}\\
|d\,\overline{\mathfrak{C}}'_{12}| &= +\frac{L}{C'}\,.\sin\,(\mathfrak{C}'_{12}\,\mathfrak{W}) + \frac{l}{\mathfrak{C}'^2}\,.
\end{aligned}
\qquad \text{(zu 19)}
$$

Die Verbesserungen der beobachteten Winkel werden:

$$
\begin{aligned}
\alpha - \alpha' = d\,\alpha' &= +\frac{L}{B'}\,.\sin\,(\mathfrak{B}'_{31}\,\mathfrak{W}) +\\
&\quad +\frac{l}{B'^2} - \frac{L}{C'}\,.\sin\,(\mathfrak{C}'_{12}\,\mathfrak{W}) + \frac{l}{C'^2}\\
\beta - \beta' = d\,\beta' &= +\frac{L}{C'}\,.\sin\,(\mathfrak{C}'_{12}\,\mathfrak{W}) +\\
&\quad +\frac{l}{C'^2} - \frac{L}{A'}\,.\sin\,(\mathfrak{A}'_{23}\,\mathfrak{W}) + \frac{l}{A'^2}\\
\gamma - \gamma' = d\,\gamma' &= +\frac{L}{A'}\,.\sin\,(\mathfrak{A}'_{23}\,\mathfrak{W}) +\\
&\quad +\frac{l}{A'^2} - \frac{L}{B'}\,.\sin\,(\mathfrak{B}'_{31}\,\mathfrak{W}) + \frac{l}{B'^2}\,.
\end{aligned}
\qquad (20)
$$

Die Berechnung von W und S aus den gegebenen sechs Stücken wird im nächsten Abschnitte gezeigt werden.

Die Ausdrücke (19) und (20) wurden gewonnen unter der Bedingung, daß die Fehlerquadratsumme ein Minimum werde in bezug auf die Richtungsverbesserungen $|d\,\overline{\mathfrak{A}}'_{23}|$ usw. Es ist wichtig, zu bemerken, daß dieselben Ausdrücke (19) und (20) erhalten werden, wenn man das Minimum sucht in bezug auf die Querverschwenkungen $a'_{23} = A' \,.\, |d\,\overline{\mathfrak{A}}'_{23}|$ usw.

Durch die Rechnungen der beiden Abschnitte I und II erscheint das vektorische Ausgleichungsprinzip konsequent durchgeführt, und es wird ein Wunsch erfüllt, der in einem interessanten Aufsatz des Herrn Prof. Dr. F. Baeschlin[1] über vektorische Ausgleichung enthalten ist. Ein Wettbewerb in betreff des Aufwandes beim numerischen Ausgleich zwischen der vektorischen und der seit mehr als 100 Jahren geübten, praktisch ausgefeilten klassischen Methode der kleinsten Quadrate wäre zur Zeit wohl noch nicht stichhaltig. Ein Nachweis für die an derselben Stelle[2] geäußerte

[1] Einführung in die Vektorrechnung und die vektorielle Ausgleichung, von Prof. F. Baeschlin; Schweizerische Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik, Jahrgang 26, 1928, s. p. 167.

[2] Ebenda, p. 189.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Behauptung: daß bei allgemeinen geschlossenen Polygonen die vektorische Ausgleichung Vorteil biete, soll in einiger Zeit erbracht werden.

III.

In diesem Abschnitt soll eine Ausgleichung in zwei Teilen durchgeführt werden; es empfiehlt sich, die Bedingung (9) erst allein zu benützen und mit Hilfe der so gewonnenen Teilverbesserungen die Bedingungen für den zweiten Teil des Ausgleichs neu zu bilden. Für den ersten Schritt lautet die erweiterte Minimumsbedingung:

$$[(\!(d\,\mathfrak{A}'_{23},\, d\,\mathfrak{A}'_{23})\!)+(\!(d\,\mathfrak{A}'_{32},\, d\,\mathfrak{A}'_{32})\!)] - \\ -2\,.\,([-|d\,\overline{\mathfrak{A}}'_{23}|+|d\,\overline{\mathfrak{A}}'_{32}|]+w)\,.\,l_1 = \text{Minimum}. \qquad (21)$$

Man erhält, übereinstimmend mit (18):

$$l_1 = \frac{-w}{2\,S} = l$$

und daraus die erste Gruppe von neun Verbesserungen:

$$\begin{array}{llll} d\,A'_1 = 0 & |d\,\overline{\mathfrak{A}}'_{23}|_1 = +\dfrac{w}{2\,A'^2\,.\,S} & |d\,\overline{\mathfrak{A}}'_{32}|_1 = -\dfrac{w}{2\,A'^2\,.\,S} \\ d\,B'_1 = 0 & |d\,\overline{\mathfrak{B}}'_{31}|_1 = +\dfrac{w}{2\,B'^2\,.\,S} & |d\,\overline{\mathfrak{B}}'_{13}|_1 = -\dfrac{w}{2\,B'^2\,.\,S} \\ d\,C'_1 = 0 & |d\,\overline{\mathfrak{C}}'_{12}|_1 = +\dfrac{w}{2\,C'^2\,.\,S} & |d\,\overline{\mathfrak{C}}'_{21}|_1 = -\dfrac{w}{2\,C'^2\,.\,S} \end{array} \qquad (22)$$

Die daraus folgenden Winkelverbesserungen:

$$\begin{aligned} d\,\alpha'_1 &= +|d\,\overline{\mathfrak{B}}'_{13}|_1 - |d\,\overline{\mathfrak{C}}'_{12}|_1 \\ d\,\beta'_1 &= +|d\,\overline{\mathfrak{C}}'_{21}|_1 - |d\,\overline{\mathfrak{A}}'_{23}|_1 \\ d\,\gamma'_1 &= +|d\,\overline{\mathfrak{A}}'_{32}|_1 - |d\,\overline{\mathfrak{B}}'_{31}|_1 \end{aligned} \qquad (23)$$

genügen der Gleichung:

$$d\,\alpha'_1 + d\,\beta'_1 + d\,\gamma'_1 + w = 0,$$

d. h. die drei einmal verbesserten Winkel:

$$\alpha'_1 = \alpha' + d\,\alpha'_1, \quad \beta'_1 = \beta' + d\,\beta'_1, \quad \gamma'_1 = \gamma' + d\,\gamma'_1 \qquad (24)$$

schließen auf 180° und hiedurch ist eine für drei Vektoren fundamentale Bedingung erfüllt, mögen sie fehlerlos oder fehlerfrei sein. Weiter wird damit die zur Aufstellung der Bedingungen dienende Fig. 4 vereinfacht; die zum Zeichnen des Dreiecks erforderlichen Winkel werden:

$$\begin{aligned}
\alpha_1' &= \alpha' - \frac{w}{2\,B'^2 . S} - \frac{w}{2\,C'^2 . S} \\
&= \alpha' - \frac{w}{2} + \frac{w}{2\,A'^2 . S}, \\
\beta_1' &= \beta' - \frac{w}{2} + \frac{w}{2\,B'^2 . S}, \\
\gamma_1' &= \gamma' - \frac{w}{2} + \frac{w}{2\,C'^2 . S}.
\end{aligned} \tag{25}$$

An die Stelle der Fig. 4 tritt nunmehr, und zwar zum Ablesen der Bedingungen für den zweiten Teil des Ausgleichs, die folgende Fig. 5:

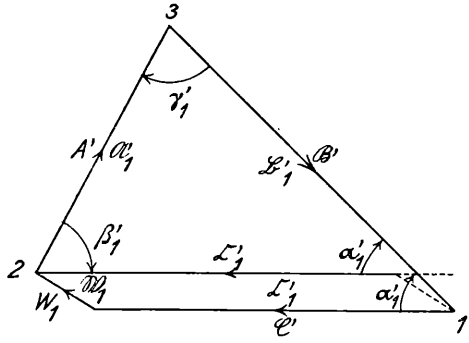

Fig.

Die gesuchten Unbekannten sind jetzt:

$$d\,A_2', \; d\,B_2', \; d\,C_2', \quad |d\,\mathfrak{A}'|_2, \; |d\,\mathfrak{B}'|_2 \text{ und } |d\,\mathfrak{C}'|_2;$$

der untere Index 2 deutet an, daß diese Größen aus dem zweiten Teil des Ausgleichs stammen.

Die neue Bedingung für die Richtungsverbesserungen, (9) entsprechend, lautet:

$$\begin{aligned}
0 &= d\,\alpha_2' + d\,\beta_2' + d\,\gamma_2' = \\
&= -|d\,\mathfrak{C}'|_2 + |d\,\mathfrak{B}'|_2 - |d\,\mathfrak{A}'|_2 + |d\,\mathfrak{C}'|_2 - |d\,\mathfrak{B}'|_2 + |d\,\mathfrak{A}'|_2,
\end{aligned}$$

wo $\alpha_2' = \alpha_1' + d\,\alpha_2'$ usw. ist; sie ist identisch erfüllt und entfällt bei der Differentiation zur Bildung der Normalgleichungen für jene Verbesserungen. Als hinreichend und notwendig bleibt eine vektorische Bedingung übrig:

$$\mathfrak{A}_1' + \mathfrak{B}_1' + \mathfrak{C}_1' + \mathfrak{W}_1 = 0. \tag{26}$$

Der neue Widerspruchsvektor $\mathfrak{W}_1 = W_1 . \overline{\mathfrak{W}_1}$ ist unabhängig von der Wahl der Ausgangsecke, er läßt sich durch Spalten der

Die Berechnung aus den beobachteten Größen dürfte für die Praxis schon genügen.

Die dritten Glieder auf den rechten Seiten von (25) nehmen dadurch die rechnerisch etwas bequemere Gestalt an:

$$+\frac{w.\operatorname{cosec}^2\alpha'}{2.[\operatorname{cosec}^2\alpha']}, \quad +\frac{w\ \operatorname{cosec}^2\beta'}{2.[\operatorname{cosec}^2\alpha']}, \quad +\frac{w.\operatorname{cosec}^2\gamma'}{2.[\operatorname{cosec}^2\alpha']}; \tag{33}$$

beim gleichseitigen Dreieck werden diese Glieder übereinstimmend gleich: $+\frac{w}{6}$, die Winkelverbesserungen nach (25) demnach gleich: $-\frac{w}{3}$.

Die vorstehenden Rechnungen gelten bei Gleichheit der Gewichte für Strecken und Querverschwenkungen; wie der vektorische Ausgleich bei Verschiedenheit der Gewichte verläuft, wurde bereits früher[1] gezeigt.

Zusammenfassung.

I. Es wird das vektorische Prinzip bei dem Ausgleich eines ausgemessenen Dreiecks konsequent durchgeführt.

II. Die geschlossenen Formeln des Abschnittes I werden vereinfacht durch erlaubte Vernachlässigung der nicht gemessenen, schwer erfaßbaren Richtungsunterschiede zwischen Sicht und Gegensicht.

III. Die Ausdrücke für die gesuchten Streckungen und Richtungsverbesserungen werden durch einen Ausgleich »in Teilen« bestätigt.

[1] Sitzungsber. d. Akad. d. Wiss. in Wien, Bd. 136, p. 429, Wien 1927.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1929

Band/Volume: 138_2a

Autor(en)/Author(s): Schumann Richard

Artikel/Article: Vektorische Ausgleichungen eines ausgemessenen Dreiecks. 589-600