Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum

Kiepert'sche Karte von Süd-Amerika aus dem geographischen Institute in Weimar 1849, Mafsstab 1 : 15,000.000. Exemplare von beiden sind nun ebenfalls zur beliebigen Benützung an die Herren von Martius und Sturz gesandt worden. Nach einer freundlichen Mittheilung des Ersteren dürfen wir noch eine weitere Arbeit, mit Zugrundelegung der neuen Karte von einem talentvollen jüngern Forscher, Herrn Dr. Pfaff in Erlangen, erwarten. Dieser hatte bereits auf Exemplare, die uns von Herrn v. Martius zukamen, einige Theile, namentlich das östliche Brasilien geologisch colorirt. Auf einem der Exemplare hatte auch Herr Prof. Cotta die Ergebnisse der d'Orbigny'schen Reise eingetragen.

Sulle proprietà delle funzioni algebriche conjugate.

Memoria presentata all' I. R. Accademia delle Scienze di Vienna

dal Membro effettivo **Francesco Carlini.**

(Con una tavola.)

1. Le applicazioni che i matematici fecero dell'analisi alla trigonometria (che in origine era stata trattata soltanto con metodi geometrici) furono cagione che nell' analisi stessa s' introducesse la considerazione delle funzioni che chiameremo „conjugate", cioè di quelle le cui principali proprietà vengono alternativamente rappresentate l'una per l'altra, come appunto succede nelle formule appartenenti ai seni e coseni.

Apertosi così un nuovo campo alle indagini analitiche, si estese il principio delle funzioni conjugate ad altre espressioni più elevate, e in modo assai rimarchevole se ne valse il celebre Abel nelle sue ricerche sulle trascendenti ellittiche.

Mi parve perciò pregio dell'opera il fare un passo indietro per indagare se le funzioni circolari siano realmente le più semplici fra quelle alle quali può applicarsi il principio suddetto, ed ho facilmente riconosciuto che fra le espressioni algebriche molte se ne trovano di tal natura; alcune delle quali conducono a formule pregevoli per la loro semplicità ed appropriate alla soluzione di diversi problemi per la quale si erano fin qui adoperate senza bisogno le funzioni trascendenti.

Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum

2. Allorchè una persona, che venga nuovamente iniziata nelle matematiche, impara a risolvere le equazioni di terzo grado per mezzo della trisezione dell'angolo e delle tavole trigonometriche, può facilmente prendere equivoco ed immaginarsi che le radici di quelle equazioni, anche fuori del caso irreduttibile, siano quantità trascendenti; mentre si deve riflettere che le funzioni circolari si prestano a quella soluzione solo in virtù della relazione

$$sin^3 x - \frac{3}{4} sin x + \frac{1}{4} sin 3x = 0$$

indipendentemente dalla incommensurabilità fra il seno e l'arco.

Spero perciò che le indagini che ho intraprese sulle proprietà di due funzioni conjugate puramente algebriche, ancorchè non presentino un vero progresso della scienza, possano servire a rettificare le idee dei principianti ed a procurare nell' insegnamento una più regolare e continuata concatenazione.

3. Fra le varie funzioni algebriche conjungate che si potrebbero prendere in considerazione mi parve che le due $x - \frac{1}{x}$, $x + \frac{1}{x}$ siano delle più semplici, e siano nello stesso tempo rimarchevoli per le facili relazioni che presentano e per l'analogia che serbano colle funzioni circolari. Esprimeremo queste due funzioni con due simboli che terremo invariati in tutto il presente scritto e faremo

$$x - \frac{1}{x} = f(x), \; x + \frac{1}{x} = \varphi(x).$$

4. Le prime relazioni, che queste due formule ci somministrano, sono $f(x) + \varphi(x) = 2x, \; \varphi(x) - f(x) = \frac{2}{x}.$

Facciamo in appresso il prodotto delle due funzioni, ed avremo

$$f(x) \times \varphi(x) = x^2 - \frac{1}{x^2} = f(x^2).$$

Formiamo i quadrati delle due funzioni, e troveremo

$$f^2(x) = \varphi(x^2) - 2, \quad \varphi^2(x) = \varphi(x^2) + 2,$$

e quindi

$$f^2(x) + \varphi^2(x) = 2\varphi(x^2), \quad f^2(x) - \varphi^2(x) = -4.$$

Eleviamole per ultimo al cubo, e sarà

$$^3(x) = f(x^3) - 3f(x), \quad \varphi^3(x) = \varphi(x^3) + 3\varphi(x),$$

Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum

onde combinando le due equazioni

$$f^3(x)+\varphi^3(x)=f(x^3)+\varphi(x^3)+3\left(\varphi(x)-f(x)\right)=2x^3+\frac{6}{x}$$

$$\varphi^3(x)-f^3(x)=\varphi(x^3)-3f(x^3)+3\left(\varphi(x)+f(x)\right)=\frac{2}{x^3}+6x.$$

5. Se si dividono reciprocamente l'una per l'altra le due funzioni e si aggiungono i due quozienti, si ottiene

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)}+\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{\varphi^2(x)+f^2(x)}{f(x)\,\varphi(x)}$$

e sostituendo i valori già trovati del numeratore e del denominatore

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)}+\frac{f(x)}{\varphi(x)}=2\frac{\varphi(x^2)}{f(x^2)}.$$

Si avrà del pari

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)}-\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{4}{f(x^2)}.$$

6. Formiamo i prodotti di $f(x)$ per $\varphi(y)$ e di $f(y)$ per $\varphi(x)$, ed avremo

$$f(x)\,\varphi(y)=xy-\frac{y}{x}+\frac{x}{y}-\frac{1}{xy}$$

$$f(y)\,\varphi(x)=xy+\frac{y}{x}-\frac{x}{y}-\frac{1}{xy}.$$

La somma di queste due equazioni dà

$$f(x)\,\varphi(y)+f(y)\,\varphi(x)=2xy-\frac{2}{xy}=2f(xy)$$

$$f(x)\,\varphi(y)-f(y)\,\varphi(x)=2\frac{y}{x}-2\frac{x}{y}=2f\left(\frac{y}{x}\right)=-2f\left(\frac{x}{y}\right).$$

Le funzioni della somma e della differenza di due variabli non presentano espressioni tanto semplici quanto quelle che si hanno dai seni e dai coseni: esse sono della forma

$$f(x+y)=f(x)+y\frac{\varphi(x)+y}{x+y},\quad f(x-y)=f(x)-y\frac{\varphi(x)-y}{x-y},$$

$$\varphi(x+y)=f(x)+y\frac{f(x)+y}{x+y},\quad \varphi(x-y)=\varphi(x)-y\frac{f(x)-y}{x-y}.$$

7. Sia x un radicale, eguale a $\sqrt{z}$, sostituendo questo valore nell' equazione $f^2(x)=\varphi(x^2)-2$, sarà $f(\sqrt{z})=\sqrt{\varphi(z)-2}$, come pure $\varphi(\sqrt{z})=\sqrt{\varphi(z)+2}$. Se poi z fosse una radice immaginaria eguale a $b\sqrt{-1}$, si trova subito

$$f(b\sqrt{-1})=b\sqrt{-1}-\frac{1}{b\sqrt{-1}}=\sqrt{-1}\left(b+\frac{1}{b}\right)=\sqrt{-1}\,\varphi(b),$$

$$\varphi(b\sqrt{-1})=b\sqrt{-1}+\frac{1}{b\sqrt{-1}}=\sqrt{-1}\left(b-\frac{1}{b}\right)=\sqrt{-1}\,f(b).$$

Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum

8. Sia ora x composta di quantità reali e d'immaginarie, ossia della forma $a + b\sqrt{-1}$, sarà $\frac{1}{x} = \frac{a-b\sqrt{-1}}{a^2+b^2}$, e quindi

$$f(x) = a\left(1 - \frac{1}{a^2+b^2}\right) + b\sqrt{-1}\left(1 + \frac{1}{a^2+b^2}\right);$$

$$\varphi(x) = a\left(1 + \frac{1}{a^2+b^2}\right) + b\sqrt{-1}\left(1 - \frac{1}{a^2+b^2}\right).$$

Facciasi $\sqrt{a^2+b^2} = c$ e sarà

$$f(x) = \frac{a}{c} f(c) + \frac{b\sqrt{-1}}{c}\varphi(c), \quad \varphi(x) = \frac{a}{c}\varphi(c) + \frac{b\sqrt{-1}}{c} f(c)$$

e nel caso particolare di $b = \sqrt{1-a^2}$

$$f(x) = 2b\sqrt{-1}, \quad \varphi(x) = 2a.$$

9. Facciamo nel caso generale b negativo ed indichiamo con x il valore che prende x, sarà

$$f(x') = \frac{a}{c} f(c) - \frac{b}{c}\sqrt{-1}\,\varphi(c),$$

$$\varphi(x') = \frac{a}{c}\varphi(c) - \frac{b}{c}\sqrt{-1}\, f(c).$$

e combinando queste equazioni colle precedenti

$$f(x) + f(x') = 2\frac{a}{c} f(c) \qquad \varphi(x) + \varphi(x') = 2\frac{a}{c}\varphi(c)$$

$$f(x) - f(x') = 2\frac{b}{c}\sqrt{-1}\,\varphi(c) = \frac{b}{a}\sqrt{-1}\left(\varphi(x) + \varphi(x')\right)$$

$$\varphi(x) - \varphi(x') = 2\frac{b}{c}\sqrt{-1}\, f(c) = \frac{b}{a}\sqrt{-1}\left(f(x) + f(x')\right).$$

10. Ora introdurremo due nuovi simboli, $f[x]$, $\varphi[x]$ i quali rappresentino rispettivamente i valori di x nelle equazioni $f(x) = z$, $\varphi(x) = z$, sarà

$$f[z] = \frac{2 \pm \sqrt{z^2+4}}{2}, \quad \varphi[z] = \frac{z \pm \sqrt{z^2-4}}{2},$$

d'onde risulta $f^2[z] + \varphi^2[z] = z\,(f[z] + \varphi[z])$.

Se poi z fosse quantità immaginaria $= b\sqrt{-1}$, si troverebbe

$$f[b\sqrt{-1}] = \sqrt{-1}\,\varphi[b], \quad \varphi[b\sqrt{-1}] = \sqrt{-1}\, f[b].$$

11. Rappresentiamo ancora la variabile col seno d'un angolo, e sia $x = \sin z$, avremo facilmente

$$f(\sin z) = \sin z - \frac{1}{\sin z} = -\frac{\cos^2 z}{\sin z} = -\frac{\cos z}{\tang. z},$$

$$\varphi(\sin z) = \sin z + \frac{1}{\sin z} = \frac{\sin z^2 + 1}{\sin z}.$$

Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum

Facciamo successivamente, $x = \cos z$, $x = \tang z$, ed otterremo

$$f(\cos z) = -\tang z \sin z\,, \quad f(\sin z)\, f \cos z = \frac{1}{2} \sin 2z\,,$$

$$f(\tang z) = -f(\cot z) = -\cot 2z.$$

12. Nella funzione inversa $f[z]$ facciasi $z = 2 \tang y$, sarà

$$f[z] = \tang y \pm \sqrt{1+\tang^2 y} = \tang y \pm \frac{1}{\cos y} = \frac{\sin y \pm 1}{\cos y}.$$

Nella funzione inversa $\varphi[z]$ facciasi $z = 2 \sin y$, sarà

$$\varphi[z] = \sin y \pm \sqrt{-1} \cos y = e^{\pm y\sqrt{-1}}\,.$$

13. Per trovare altre proprietà delle funzioni conjugate consideriamo le funzioni di funzioni, ossia le espressioni $f(fx)$, $\varphi(\varphi x)$, $f(\varphi x)$, $\varphi(fx)$; avremo in primo luogo

$$f(fx) = x - \frac{1}{x} - \frac{1}{x-\frac{1}{x}} = \frac{x^2-3+\frac{1}{x^2}}{x-\frac{1}{x}} = \frac{\varphi(x^2)-3}{f(x)}$$

e collo stesso processo

$$\varphi(\varphi x) = \frac{\varphi(x^2)+3}{\varphi(x)}, \quad f(\varphi x) = \frac{\varphi(x^2)+1}{\varphi(x)}, \quad \varphi(fx) = \frac{\varphi(x^2)-1}{f(x)},$$

ove si vede che, nelle funzioni che contempliamo, alternando i due simboli f e φ si ottengono valori differenti fra loro.

Formando la serie $f(x)$, $f(fx)$, $f(ffx)$ ecc. ed indicando con $F(n)$ il termine n-esimo, si avrebbe per determinarne il valore da risolvere l' equazione a differenze finite $\Delta F(n) = -\frac{1}{F(n)}$ e cambiando soltanto il segno si avrebbe l' equazione relativa alla funzione φ.

14. Il differenziale primo di ciascuna delle due funzioni $f(x)$, $\varphi(x)$ viene facilmente rappresentato per mezzo della funzione conjugata; i differenziali secondi poi risultano eguali e di segno contrario; in fatti si ha

$$\frac{df(x)}{dx} = 1 + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x}\,\varphi(x)\,,$$

$$\frac{d\varphi x}{dx} = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x}\,f(x)\,,$$

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \frac{-1}{x^2}\Big(\varphi(x) - f(x)\Big) = -\frac{2}{x^3}\,,$$

$$\frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} = \frac{1}{x^2}\Big(\varphi(x) - f(x)\Big) = +\frac{2}{x^3}.$$

Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum

Per le funzioni inverse si ha

$$\frac{df[z]}{dz} = \frac{f^2[z]}{f^2[z]-1}, \quad \frac{d\varphi[z]}{dz} = \frac{\varphi^2[z]}{\varphi^2[z]-1}.$$

15. I differenziali di $f(x)$ e $\varphi(x)$ danno subito i massimi e minimi di queste due funzioni. Fatto $\frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{x}\varphi(x) = 0$ si ha $\varphi(x) = 0$, oppure $x = \infty$; ma $\varphi(x)$ non è mai zero, dunque $f(x)$ non ha nè massimo nè minimo. Fatto $\frac{d\varphi(x)}{dx} = \frac{1}{x} f(x) = 0$ dovrà essere $f(x) = 0$, od $x = \infty$. Ora $f(x) = 0$ quando $x = +1$ e quando $x = -1$, dunque $\varphi(x)$ avrà un minimo positivo quando $x = +1$ ed un minimo negativo quando $x = -1$, il primo $= +2$ ed il secondo $= -2$.

16. Il Du Sejour e dopo di lui il Cagnoli insegnarono il modo con cui si possono risolvere le equazioni algebriche di secondo grado mediante l'uso delle tavole dei seni. In verità la formule dirette che danno le radici di queste equazioni sono tanto semplici che sembrerebbe cosa superflua il ricorrere alle tavole delle funzioni circolari. Il Cagnoli suddetto fa però osservare che „se i coefficienti delle „equazioni sono grandi, oppure frazionarj, il calcolo diretto divien „lungo e laborioso, mentre la trigonometria porge i mezzi di renderlo „facile e breve". Ma un obbiezione più forte contro il metodo trigonometrico è quella che abbiamo accennata da principio, di far dipendere la determinazione di quantità algebriche dalle funzioni circolari; le quali sono inoltre di un uso incomodo nella pratica per dover calcolare gli archi sul sistema sessagesimale non ancora bandito dalle moderne tavole e per dover porre attenzione al quadrante nel quale gli archi stessi devono essere presi. Ora questa scelta richiede diverse regole, nell'esposizion delle quali il citato autore impiega più di tre pagine della sua opera in quarto.

17. Tutte queste difficoltà non sussisterebbero se si usassero invece le funzioni $f(x)$, $\varphi(x)$, ma bisognerebbe che di esse fossero già calcolate le tavole. Ora per mostrare con alcuni esempj l'uso che se ne potrebbe fare ho aggiunto a questa memoria un frammento di esse esteso da $x = 1{,}060$ ad $x = 1{,}300$ per ogni parte millesima dell'argomento, e con sei cifre decimali come nelle tavole logaritmiche di Ursinus e di Bremiker.

18. Tornando alle equazioni di secondo grado, sia data l'equazione generale $p^2 - ap = b$; facciasi $p = x\sqrt{b}$, e sarà $bx^2 - a\sqrt{b}\,x = b$,

Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum

ossia $x^2 - \frac{ax}{\sqrt{b}} = 1$, o finalmente $x - \frac{1}{x} = \frac{a}{\sqrt{b}}$. Si troverà dunque x cercando il numero che nella tavola corrisponde a $f(x) = \frac{a}{\sqrt{}}$, ossia la funzione inversa che abbiamo rappresentata con $f\left[\frac{a}{\sqrt{b}}\right]$, e moltiplicando questo numero per $\sqrt{b}$ si avrà il valore di p; l'altra radice poi sarà $= a - p$.

Sia per un esempio $a = \frac{6}{7}$, $b = 4$, sarà $f(x) = \frac{a}{\sqrt{b}} = 0{,}428571$, a cui corrisponde nella tavola $x = 1{,}236987$. Di qui si deduce la radice cercata $p = x\sqrt{b} = 2{,}473974$.

Se il coefficiente a fosse positivo, invece della funzione f si farebbe uso della funzione φ.

19. Si osserverà senza dubbio che questo processo non dispensa al calcolo d'una radice quadrata, e che perciò non presenta un deciso vantaggio sulla soluzione diretta. Ma noi l'abbiamo qui esposto al solo intento di mostrare che quando fossero costrutte le necessarie tavole, sarebbe preferibile al processo trigonometrico del Cagnoli. Questa dichiarazione vale anche per la soluzione delle equazione di terzo grado che passiamo ad esporre.

20. Sia data a risolvere l'equazione cubica mancante del secondo termine $p^3 + ap = b$; facciasi $p = q\sqrt{\frac{a}{3}}$, sarà $q^3\left(\frac{a}{3}\right)^{\frac{3}{2}} + a\sqrt{\frac{a}{3}}q = b$, ossia $q^3 + 3q = \left(\frac{3}{a}\right)^{\frac{3}{2}} b$.

Paragonando quest' equazione coll' altra, trovata al Nro. 4, $f^3(x) + 3f(x) = f(x^3)$, si vede subito che devesi cercare nella tavola della funzione $f(x)$ quel valore di x che corrisponde ad $f(x) = \left(\frac{3}{a}\right)^{\frac{3}{2}} b$. Questo valore sarà realmente quello di x^3, onde estraendo la radice terza si avrà quello di x e successivamente $q = f(x)$ e $p = q\sqrt{\frac{a}{3}}$.

21. Sia data, per un caso particolare, l'equazione $p^3 + \frac{3}{4}p = \frac{1}{19}$, fatto $p = \frac{q}{2}$, verrà trasformata in $q^3 + 3q = 0{,}421053$. Cercando nella tavola di $f(x)$ il valore di x che corrisponde a questo numero, si trova la cifra $1{,}232446$ che rappresenta x^3. Estraendo la radice terza si ha $x = 1{,}072151$, a cui corrisponde nella tavola $f(x) = q = 0{,}139445$, d'onde si deduce finalmente $p = \frac{q}{2} = 0{,}069725$.

Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum

Se si fossero cercate le funzioni f nella parte della tavola che corrisponde agli argomenti negativi, si sarebbe trovato, per $f(x) = 0{,}421053$, $x^3 = -0{,}811394$, $x = -0{,}932705$, ma per $f(x)$ sarebbe risultato lo stesso valore $0{,}139445$. L'equazione ha inoltre altre due radici immaginarie.

Qui noteremo che nel caso particolare dell'equazione cubica la quale dà l'anomalia vera nel moto parabolico delle comete in funzione del tempo, si risparmia la sostituzione di $q\sqrt{\frac{a}{3}}$ a p, essendo essa già della forma $p^3 + 3p = b$.

22. Quando nell'equazione da risolversi il coefficiente a è negativo, si farà uso della formula $\varphi^3(x) - 3\varphi(x) = \varphi(x^3)$ trovata nel Nro. 4, e si opererà come nel caso precedente. É però da avvertirsi che la funzione $\varphi(x)$, come si è detto al Nro. 15, non potendo mai esser minore di ± 2, essa non può più servire alla soluzione dell' equazione quando $\left(\frac{3}{a}\right)^{\frac{3}{2}} b < 2$. È poi facile riconoscere che allora l'equazione proposta cade appunto nel caso irreduttibile.

23. Il metodo trigonometrico, oltre al valere anche per questo caso, sembra avere sul nostro il vantaggio di richiedere la trisezione d'un numero in luogo dell'estrazione d'una radice terza; ma da questo lato sarebbero pareggiate le partite quando in vece d'una tavola delle funzioni f e φ si costruissero quelle dei loro logaritmi, come si è fatto pei seni e coseni. Del resto (se non fosse una vista d'economia di mezzi che consiglia di servirsi di tavole già costrutte e che servono al tempo stesso ad altri usi) potendosi, come si è veduto, un equazione generale di terzo grado mancante del secondo termine ridurre ad un'altra che abbia per coefficiente del terzo termine un numero determinato, per esempio ± 3, le suddette equazioni si protrebbero risolver tutte, senza un giro d'operazioni, con due tavole, inverse per rispetto ai valori delle radici della data equazione, le quali dassero immediatamente quelli delle due funzioni $q^3 - 3q$ e $q^3 + 3q$.

24. Dalla considerazione delle funzioni $f(x)$, $\varphi(x)$ si passa facilmente a quella dei seni e coseni iperbolici trattati per la prima volta e ridotti in tavole dal celebre Lambert, nell' opera *Beiträge zum Gebrauche der Mathematik.* Basta supporre che nelle prime in vece della quantità x si sia preso per argomento il logaritmo iperbolico di x che indicheremo con y. Si ha allora $x = e^y$, e

Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum

quidin $\frac{1}{2} f(x) = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$, $\frac{1}{2} \varphi(x) = \frac{e^y + e^{-y}}{2}$. Il valente calcolatore Gudermann di Cleves in una Dissertazione inserita nel „Giornale di Crelle“ ha più estesamente trattato di queste, ch'egli chiama *Potential-Functionen*, e ne ha date delle ampie tavole. Finalmente di queste medesime funzioni ha recentemente trattato il Prof. Mossotti in un articolo inserito nel fascicolo di ottobre dell'anno 1851 del giornale che si pubblica a Roma dal Sig^r. Tortolini.

I seni e coseni iperbolici ossia le Funzioni potenziali si cambiano, come è noto, in seni e coseni circolari quando lo variabile y è della forma $h\sqrt{-1}$. Si rileva da ciò che, per progredire gradatamente nell'istruzione analitica, si sarebbe dovuto cominciare dalla considerazione delle funzioni che abbiamo disegnate sotto i simboli f e φ, indi passare ai seni e coseni iperbolici e da questi ai seni e coseni circolari; ma la stretta relazione che questi ultimi hanno colla geometria è stata cagione che si venisse alla loro trattazione senza seguire una via progressiva.

25. Esamineremo ora la natura delle curve che hanno per equazione $z = x - \frac{1}{x}$, $z = x + \frac{1}{x}$ e le relazioni che fra esse sustistono.

Sia AB l'asse delle ascisse comune ad entrambe, DE quello delle ordinate, $Cn = CN$ la linea che si prende per unità; la curva che rappresenta la prima delle succenate equazioni avrà i due rami fnf', FNF' e taglierà l'asse delle ascisse nei punti n ed N. L'asse delle ordinate sarà un assintoto dei due rami, e l'altro assintoto sarà una retta ϖCH inclinata al primo di 45°. Infatti l'ordinata PH della retta, corrispondente all'ascissa $CP = x$ è evidentemente eguale ad x, dunque la distanza MH sarà eguale a $-\frac{1}{x}$, e diverrà nulla quando $x = \infty$. E siccome l'equazione proposta è di secondo grado, la curva da essa rappresentata sarà necessariamente un' Iperbola, il cui asse sarà inclinato a quello delle ascisse di 22° 30′.

26. Le coordinate dei vertici v, V dell'iperbola si avranno facendo $z = x \; tang \; 22^0 \, 30'$, ossia $x - \frac{1}{x} = x(\sqrt{2-1})$, dalla quale equazione si deduce l'ascissa $x = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$, e l'ordinata $z = \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt[4]{2}}$. Le distanze poi dei vertici suddetti dall'origine delle coordinate, ossia i semmiassi maggiori $Cv = CV$, saranno $= \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{2(\sqrt{2}-1)}$.

Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum

Sia l'ascissa $C\Pi$ (presa sull'assintoto $\varpi C\Pi$) $= t$ e l'ordinata ΠM parallela all'altro assintoto $= u$, si avrà, per ciò che si è detto, $u = -\frac{1}{x}$, ed essendo $t = x\sqrt{2}$, verrà l'equazione $tu = -\sqrt{2}$.

27. Gli stessi processi applicati ai rami $\varphi\varphi^1$ $\Phi\Phi^1$ dell' altra iperbola rappresentata dall'equazione $\varphi(x) = z$, ci fanno conoscere che gli assintoti sono i medesimi della curva già considerata, cioè l'asse delle ordinate ed una retta ad esso inclinata di 45^0.

Le ordinate dei vertici si hanno ponendo $x + \frac{1}{x} = x\, tang\, 67^0 30'$ $= x\,(\sqrt{2}+1)$, onde risulta $x = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$. Si vede adunque che i vertici delle due iperbole hanno le medesime ascisse. L'ordinata z sarà $= \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt[4]{2}}$, e quindi la reciproca distanza dei vertici $= 2\sqrt[4]{2}$. Finalmente il semiasse maggiore risulterà $= \sqrt{2(\sqrt{2}+1)}$.

L'equazione riferita agli assintoti sarà per la secondo curva, $tu = +\sqrt{2}$, onde si vede che nelle due curve l'asse delle ascisse preso sull' assintoto essendo il medesimo, le ordinate riescono eguali ma di segno contrario.

Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum

Frammento della Tavola.

x	$f(x)$	differ.	$\varphi(x)$	differ.
1·060	0·116604	+ 1889	2·003396	+ 111
1·061	0·118493	1887	2·003507	113
1·062	0·120380	1886	2·003620	114
1·063	0·122266	1884	2·003734	116
1·064	0·124150	1883	2·003850	117
1·065	0·126033	1881	2·003967	119
1·066	0·127914	1879	2·004086	121
1·067	0·129793	1877	2·004207	123
1·068	0·131670	1876	2·004330	124
1·069	0·133546	1875	2·004454	125
1·070	0·135421	1872	2·004579	128
1·071	0·137293	1871	2·004707	129
1·072	0·139164	1870	2·004836	130
1·073	0·141034	1867	2·004966	133
1·074	0·142901	1866	2·005099	134
1·075	0·144767	1865	2·005233	135
1·076	0·146632	1863	2·005368	137
1·077	0·148495	1861	2·005505	139
1·078	0·150356	1860	2·005644	140
1·079	0·152216	1858	2·005784	142
1·080	0·154074	1857	2·005926	143
1·081	0·155931	1855	2·006069	145
1·082	0·157786	1853	2·006214	147
1·083	0·159639	1852	2·006361	148
1·084	0·161491	1850	2·006509	150
1·085	0·163341	1849	2·006659	151
1·086	0·165190	1847	2 006810	153
1·087	0·167037	1845	2·006963	155
1·088	0·168882	1844	2·007118	156
1·089	0·170726	1843	2·007274	157
1·090	0·172569		2·007431	

Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum

x	$f(x)$	differ.	$\varphi(x)$	differ.
1·090	0·172569	+ 1841	2·007431	+ 159
1·091	0·174410	1839	2·007590	161
1·092	0·176249	1838	2 007751	162
1·093	0·178087	1836	2·007913	164
1·094	0·179923	1835	2·008077	165
1·095	0·181758	1833	2·008242	167
1·096	0·183591	1832	2·008409	168
1·097	0·185423	1830	2·08577	170
1·098	0·189082	1829	2·008747	171
1·099	0·189082	1827	2·008918	173
1·100	0·190909	1826	2·009091	174
1·101	0·192735	1824	2 009265	176
1·102	0·194559	1823	2·009441	177
1·103	0 196382	1821	2·009618	179
1·104	0·198203	1820	2·009797	180
1·105	0·200023	1818	2·009977	182
1·106	0·201841	1817	2·010159	183
1·107	0·203658	1815	2·010342	185
1·108	0·205473	1814	2·010527	186
1·109	0·207287	1812	2·010713	188
1·110	0·209099	1811	2·010901	189
1·111	0·210910	1809	2·011090	191
1·112	0·212719	1808	2·011281	192
1·113	0·214527	1807	2·011473	193
1·114	0·216334	1805	2·011666	195
1·115	0·218139	1804	2·011861	196
1·116	0·219943	1802	2·012057	198
1·117	0·221745	1801	2·012255	199
1·118	0·223546	1799	2·012454	201
1·119	0·225345	1798	2·012655	202
1·120	0·227143		2·012857	

Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum

x	$f(x)$	differ.	$\varphi(x)$	differ.
1·120	0·227143	+ 1796	2·012857	+ 204
1·121	0·228939	1795	2·013061	205
1·122	0·230734	1794	2·013266	206
1·123	0·232528	1792	2·013472	208
1·124	0·234320	1791	2·013680	209
1·125	0·236111	1789	2·013889	210
1·126	0·237900	1788	2·014099	212
1·127	0·239688	1787	2·014311	214
1·128	0·241475	1785	2·014525	215
1·129	0·243260	1784	2·014740	216
1·130	0·245044	1783	2·014956	217
1·131	0·246827	1781	2·015173	219
1·132	0·248608	1779	2·015392	221
1·133	0·250387	1779	2·015613	221
1·134	0 252166	1777	2·015834	223
1·135	0 253943	1776	2·016057	225
1·136	0·255719	1774	2·016282	226
1·137	0·257493	1773	2·016508	227
1·138	0·259266	1771	2·016735	228
1·139	0·261037	1770	2 016963	230
1·140	0·262807	1769	2·017193	231
1·141	0·264576	1767	2 017424	233
1·142	0·266343	1766	2·017657	234
1·143	0·268109	1765	2·017891	235
1·144	0·169874	1763	2·018126	236
1·145	0·271637	1762	2·018362	238
1·146	0·273399	1761	2·018600	239
1·147	0·275160	1760	2·018839	241
1·148	0·276920	1758	2·019080	242
1·149	0 278678	1757	2·019322	243
1·150	0·280435		2 019565	

Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum

x	$f(x)$	differ.	$\varphi(x)$	differ.
1·150	0·280435	+ 1755	2·019565	+ 245
1·151	0·282190	1754	2·019810	246
1·152	0·283944	1753	2·020056	247
1·153	0·285697	1752	2·020303	248
1·154	0·287449	1750	2·020551	250
1·155	0·289199	1749	2·020801	251
1·156	0·290948	1748	2·021052	252
1·157	0·292696	1746	2·021304	254
1·158	0·294442	1745	2·021558	255
1·159	0·296187	1744	2·021813	256
1·160	0·297931	1743	2·022069	257
1·161	0·299674	1741	2·022326	259
1·162	0·301415	1740	2·022585	260
1·163	0·303155	1738	2·022845	262
1·164	0·304893	1738	2·023107	262
1·165	0·306631	1736	2·023369	264
1·166	0·308367	1735	2·023633	265
1·167	0·310102	1734	2·023898	266
1·168	0·311836	1732	2·024164	268
1·169	0·313568	1731	2·024432	269
1·170	0·315299	1730	2·024701	270
1·171	0·317029	1729	2·024971	271
1·172	0·318758	1727	2·025242	273
1·173	0·320485	1726	2·025515	274
1·174	0·322211	1725	2·025789	275
1·175	0·323936	1724	2·026064	276
1·176	0·325660	1722	2·026340	278
1·177	0·327382	1722	2·026618	278
1·178	0·329104	1720	2·026896	280
1·179	0·330824	1718	2·027176	282
1·180	0·332542		2·027458	

Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum

x	$f(x)$	differ.	$\varphi(x)$	differ.
1·180	0·332542	+ 1718	2·027458	+ 282
1·181	0·334260	1716	2·027740	284
1·182	0·335976	1716	2·028024	284
1·183	0·337692	1714	2·028308	286
1·184	0·339406	1712	2·028594	288
1·185	0·341118	1712	2·028882	288
1·186	0·342830	1710	2·029170	290
1·187	0·344540	1709	2·029460	291
1·188	0·346249	1708	2·029751	292
1·189	0·347957	1707	2·030043	293
1·190	0·349664	1760	2·030336	294
1·191	0·351370	1704	2·030630	296
1·192	0·353074	1703	2·030926	297
1·193	0·354777	1702	2·031223	298
1·194	0·356479	1701	2·031521	299
1·195	0·358180	1700	2·031820	300
1·196	0·359880	1698	2·032120	302
1·197	0·361578	1698	2·032422	302
1·198	0·363276	1696	2·032724	304
1·199	0·364972	1695	2·033028	305
1·200	0·366667	1694	2·033333	306
1·201	0·368361	1692	2·033639	308
1·202	0·370053	1692	2·033947	308
1·203	0·376745	1690	2·034255	310
1·204	0·373435	1689	2·034565	311
1·205	0·375124	1688	2·034876	312
1·206	0·376812	1687	2·035188	313
1·207	0·378499	1686	2·035501	314
1·208	0·380185	1685	2·035815	315
1·209	0·381870	1684	2·036130	316
1·210	0·383554		2·036446	

Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum

x	$f(x)$	differ.	$\varphi(x)$	differ.
1·210	0·383554	+ 1682	2·036446	+ 318
1·211	0·385236	1682	2·036764	318
1·212	0·386918	1680	2·037082	320
1·213	0·388598	1679	2·037402	321
1·214	0·390277	1678	2·037723	322
1·215	0·391955	1677	2·038045	323
1·216	0·393632	1675	2·038368	325
1·217	0·395307	1675	2·038693	325
1·218	0·396982	1673	2·039018	327
1·219	0·398655	1673	2·039345	327
1·220	0·400328	1671	2·039672	329
1·221	0·401999	1671	2·040001	329
1·222	0·403670	1669	2·040330	331
1·223	0·405339	1668	2·040661	332
1·224	0·407007	1666	2·040993	334
1·225	0·408673	1666	2·041327	334
1·226	0·410339	1665	2·041661	335
1·227	0·412004	1664	2·041996	336
1·228	0·413668	1662	2·042332	338
1·229	0·415330	1662	2·042670	338
1·230	0·416992	1660	2·043008	340
1·231	0·418652	1660	2·043348	340
1·232	0·420312	1658	2·043688	342
1·233	0·421970	1657	2·044030	343
1·234	0·423627	1656	2·044373	344
1·235	0·425283	1655	2·044717	345
1·236	0·426938	1654	2·045062	346
1·237	0·428592	1653	2·045408	347
1·238	0·430245	1652	2·045755	348
1·239	0·431897	1651	2·046103	349
1·240	0·433548		2·046452	

Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum

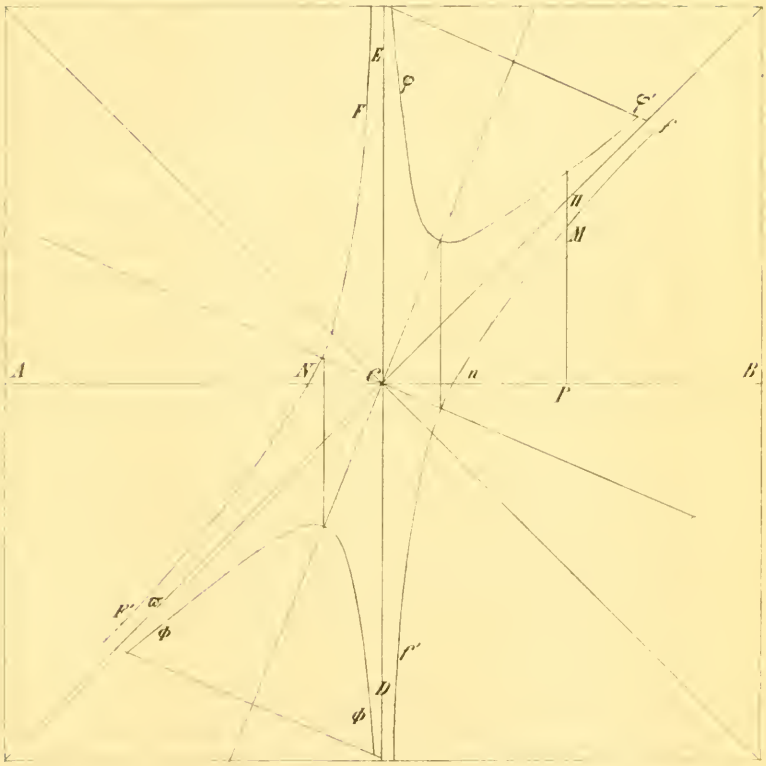
x	$f(x)$	differ.	$\varphi(x)$	differ.
1·240	0·433548	+ 1650	2·046452	+ 350
1·241	0·435198	1649	2·046802	351
1·242	0·436847	1648	2·047153	352
1·243	0·438495	1647	2·047505	353
1·244	0·440142	1645	2·047858	355
1·245	0·441787	1645	2·048213	355
1·246	0·443432	1643	2·048568	357
1·247	0·445075	1643	2·048925	357
1·248	0·446718	1641	2·049282	359
1·249	0·448359	1641	2·049641	359
1·250	0·450000	1640	2·050000	360
1·251	0·451640	1638	2·050360	362
1·252	0·453278	1637	2·050722	363
1·253	0·454915	1637	2·051085	363
1·254	0·456552	1635	2·051448	365
1·255	0·458187	1635	2·051813	365
1·256	0·459822	1633	2·052178	367
1·257	0·461455	1632	2·052545	368
1·258	0·463087	1632	2·052913	368
1·259	0·464719	1630	2·053281	370
1·260	0·466349	1630	2·053651	370
1·261	0·467979	1628	2·054021	372
1·262	0·469607	1627	2·054393	373
1·263	0·471234	1627	2·054766	373
1·264	0·472861	1625	2·055139	375
1·265	0·474486	1625	2·055514	375
1·266	0·476111	1623	2·055889	377
1·267	0·477734	1622	2·056266	378
1·268	0·479356	1622	2·056644	378
1·269	0·480978	1620	2·057022	380
1·270	0·482598		2·057402	

Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum

x	$f(x)$	differ.	$\varphi(x)$	differ.
1·270	0·482598	+ 1620	2·057402	+ 380
1·271	0·484218	1618	2·057782	382
1·272	0·485836	1618	2·058164	382
1·273	0·487454	1617	2·058546	383
1·274	0·489071	1615	2·058929	385
1·275	0·490686	1615	2·059314	385
1·276	0·492301	1614	2·059699	386
1·277	0·493915	1612	2·060085	388
1·278	0·495527	1612	2·060473	388
1·279	0·497139	1611	2·060861	389
1·280	0·498750	1610	2·061250	390
1·281	0·500360	1609	2·061640	391
1·282	0·501969	1608	2·062031	392
1·283	0·503577	1607	2·062423	393
1·284	0·505184	1606	2·062816	394
1·285	0·506790	1605	2·063210	395
1·286	0·518395	1604	2·063605	396
1·287	0·509999	1604	2·064001	396
1·288	0·501603	1602	2·064397	398
1·289	0·513205	1601	2·064795	399
1·290	0·514806	1601	2·965194	399
1·291	0·516407	1599	2·065593	401
1·292	0·518006	1599	2·065994	401
1·293	0·519605	1597	2·066395	403
1·294	0·521202	1597	2·066798	403
1 295	0·522799	1596	2·067201	404
1·296	0·524395	1595	2·067605	405
1·297	0·525990	1594	2·068010	406
1·298	0·527584	1593	2·068416	407
1·299	0·529177	1592	2·068823	408
1·300	0·530769		2·069231	

Download from The Biodiversity Heritage Library http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum

Carlini Sulle proprietà delle funzioni algebriche coniugate



Aus d. k. k. Hof- u. Staatsdruckerei.

Sitzungsb. d. k. Akad. d. W. math. naturw. Cl. XIII Bd. 2 Heft. 1854.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1854

Band/Volume: 13

Autor(en)/Author(s): Carlini Francesco

Artikel/Article: Sulle proprieta delle funzioni algebriche conjugale. (Con ona tavola.) 357-374