Differentialgeometrie des isotropen Raumes, I

Theorie der Raumkurven

Von

Karl Strubecker in Wien

korr. Mitglied d. Akad. d. Wiss.

(Vorgelegt in der Sitzung am 23. Jänner 1941)

Einleitung.

Die algebraische und die Differentialgeometrie der isotropen Ebene sind durch E. Study,[1] H. Beck[2] und den Verfasser[3] sehr eingehend entwickelt worden. Über die wesentlich anziehendere Geometrie des isotropen Raumes hat aber bisher nur der Verfasser[4] eine Reihe von Untersuchungen vorerst algebraischer Natur mitgeteilt. Diese Untersuchungen sollen nun in einigen Arbeiten nach der Seite der (reellen) Differentialgeometrie[5] ergänzt werden, wobei zweckmäßig die Theorie der Raumkurven[6] an die Spitze gestellt wird.

Ein linearer Teilraum I_3 des euklidischen R_4 wird als isotrop bezeichnet, wenn er die quadratische Maßfläche des R_4 berührt, d. h. wenn er die im Fernraume des R_4 befindliche nullteilige absolute Fläche nach einem Kegelschnitte schneidet, der in ein Geradenpaar zerfällt. Auf dieses sich schneidende Geradenpaar als absolutes Gebilde gründet sich die Metrik des isotropen Raumes und diese Metrik wird reguliert durch eine komplexe quadratische Differentialform, deren Rang bloß zwei ist. Die zehngliedrige Gruppe der Bewegungen G_{10} des euklidischen R_4 induziert in

---

[1] E. Study, Zur Differentialgeometrie der analytischen Kurven, Trans. Amer. Math. Soc., *10* (1909), S. 1—49.

[2] H. Beck, Zur Geometrie in der Minimalebene, Sitz.-Ber. Berl. Math. Ges., *12* (1912), S. 14—30.

[3] K. Strubecker, Über die Lie'schen Abbildungen der Linienelemente der Ebene auf die Punkte des Raumes, Monatshefte f. Math. u. Phys., *42* (1935), S. 309—376.

[4] K. Strubecker, Beiträge zur Geometrie des isotropen Raumes, Journ. f. reine u. angew. Math., *178* (1938), S. 135—173.

[5] Darüber hat Verfasser schon in einem Vortrage in Hamburg am 4. März 1941 berichtet.

[6] Über sie referierte Verfasser auch am 21. März 1941 in der Wiener Mathematischen Gesellschaft.

dem isotropen Teilraume die G_7 seiner allgemeinen Bewegungen. Auf eine darin invariant enthaltene G_6 werden sich unsere Untersuchungen stützen.

Ein so definierter isotroper Raum I_3 ist natürlich stets komplex.

Um nun zu reellen Figuren zu kommen, sehen wir von dieser Herkunft ab und definieren fortan als einen „isotropen Raum" einen solchen reellen Raum, dessen Metrik von einem konjugiert-komplexen Paare von Geraden der Fernebene reguliert wird.

Wir wählen günstig das Paar

$$t = 0, \quad x^2+y^2 = 0,$$

so daß die z-Richtung eine reelle Nullrichtung, nämlich die „vollisotrope Richtung" wird. Das positiv-definite Bogenelement ds des isotropen Raumes wird dann nämlich die Form haben:

$$ds^2 = dx^2+dy^2.$$

Der Rang des Bogenelements ist also bloß zwei. Und dieser im Vergleich zur euklidischen Raumgeometrie vorhandene Rangverlust verleiht der Metrik des isotropen Raumes einen einfach-singulären Charakter, der auch das Interesse begründet, das unsere Betrachtungen im Hinblick auf bekannte Arbeiten von J. Lense[7] verdienen, in welchen im Wesen Mannigfaltigkeiten V_m eines euklidischen R_n untersucht werden, deren Bogenelement ds von einem Range $r < m$, vorzüglich aber vom Range $r = 0$ ist. Als eine solche Mannigfaltigkeit V_3 aus einem euklidischen (oder aus Realitätsgründen: pseudoeuklidischen) R_4 kann ja auch unser „isotroper Raum" (den J. Lense einen „einfach-isotropen linearen R_3 des euklidischen R_4" nennen würde) aufgefaßt werden.

Es wird sich zeigen, daß man die Differentialgeometrie des isotropen Raumes trotz der Singularität des Bogenelementes in einer staunenswert weitgehenden Analogie zur Differentialgeometrie des euklidischen Raumes aufbauen kann. Diese Analogie umfaßt, um nur zwei Beispiele zu nennen, ebensosehr die Theorie der Bertrand-Kurven wie die Theorie der Flächen konstanter (geeignet definierter) Krümmung. Sie wird anderseits, wie im Zeichen der Rangerniedrigung des Bogen-

[7] Vgl. J. Lense, Über die Ableitungsgleichungen der ametrischen Mannigfaltigkeiten, Math. Zeitschrift, *34* (1932), S. 721—736, und die dort angeführten älteren Schriften. Ferner: Über Kurven mit isotropen Normalen, Math. Ann., *112* (1935), S. 139—154, insbesondere § 6. Über isotrope Mannigfaltigkeiten, Math. Ann., *116* (1939), S. 297—309.

elementes nicht anders zu erwarten ist, auch des öftern abbrechen oder trivial werden, z. B. meist dort, wo die hier identisch verschwindende Gaussische oder absolute Krümmung des Bogenelementes der Flächen ins Spiel kommt.

Der tiefere Grund für die erwähnte überraschende Analogie zwischen der euklidischen und der isotropen Differentialgeometrie ist aber wohl der, daß man sich in beiden Fällen auf sechsgliedrige Bewegungsgruppen ihrer Räume stützen kann, deren differentielle Invariantentheorien in einem gewissen Umfange analog entwickelt werden können.

I. Metrik und Bewegungen des isotropen Raumes.

1. Wir verstehen unter einem isotropen Raum I_3 einen solchen kartesischen Raum, dessen Metrik reguliert wird von einem Maßkegelschnitte, der in ein schneidendes Geradenpaar (i_1, i_2) zerfallen ist. Für die Zwecke der Differentialgeometrie ist es günstig, sich dieses Geradenpaar in der Fernebene ω

$$\omega \ldots x_0 = 0 \qquad (1, 1)$$

des Raums zu denken, die wir auch als absolute Ebene bezeichnen, und sie durch die beiden konjugiert-komplexen Geraden

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= 0 \\ x_1 + ix_2 &= 0 \end{aligned}\right\} i_1, \qquad \left.\begin{aligned} x_0 &= 0 \\ x_1 - ix_2 &= 0 \end{aligned}\right\} i_2 \qquad (1, 2)$$

zu realisieren. Dieses absolute Geradenpaar schneidet sich im absoluten Punkte U des isotropen Raumes

$$U = (0, 0, 0, 1). \qquad (1, 3)$$

Die gewählten Koordinaten denken wir uns kartesisch und setzen bei eigentlichen Punkten

$$x_0 \quad x_1 \quad x_2 \quad x_3 = 1 \quad x \quad y \quad z. \qquad (1, 4)$$

Wegen des selbstdualen Charakters des Maßgebildes ist auch die Metrik des isotropen Raumes in sich dual.

Wir bezeichnen eine eigentliche komplexe Gerade, die nur eine der beiden absoluten Geraden trifft, als isotrop. Eine eigentliche Gerade, die beide absoluten Geraden i_1 und i_2 schneidet, also z-parallel ist und den absoluten Punkt U enthält, nennen wir dagegen vollisotrop. Metrisch dual zu vollisotropen Geraden sind jene Ferngeraden, die nicht durch U laufen. Die durch U gehenden Ferngeraden stehen sich selbst dual gegenüber. Eine weder isotrope noch vollisotrope eigentliche Gerade wird als nichtisotrop bezeichnet.

Zwei eigentliche Punkte, deren Verbindungsgerade vollisotrop ist, nennen wir parallel. Metrisch dual hiezu sind nämlich zwei solche parallele Ebenen, deren gemeinsame Ferngerade nicht durch den absoluten Punkt geht.

Eine Ebene $\varepsilon \neq \omega$, welche den absoluten Punkt U, aber keine der beiden absoluten Geraden enthält, nennen wir isotrop. Metrisch dual dazu sind die Fernpunkte, welche nicht den absoluten Geraden angehören. Eigentliche Ebenen durch eine der absoluten Geraden heißen vollisotrop. Metrisch dual zu ihnen sind die Punkte der beiden absoluten Geraden, soweit sie vom absoluten Punkte U verschieden sind. Dual zur Fernebene ω ist der absolute Punkt U.

2. Das absolute Geradenpaar (2) gestattet eine achtgliedrige Gruppe G_8 von kollinearen Automorphien, die wir als die Ähnlichkeiten des isotropen Raumes bezeichnen. Ihre Darstellung ist:

$$\left.\begin{aligned} x' &= a+h_1x-h_2y \\ y' &= b+h_2x+h_1y \\ z' &= c+c_1x+c_2y+c_3z \end{aligned}\right\}\ldots G_8. \tag{1, 5}$$

In G_8 ist für $h_1^2+h_2^2=1$, $c_3=1$ eine ausgezeichnete Untergruppe G_6 enthalten, deren Transformationen wir als die Bewegungen des isotropen Raumes, kürzer oft als isotrope Bewegungen bezeichnen wollen.[8] Wir können sie so beschreiben:

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= a+\cos\varphi\,.\,x-\sin\varphi\,.\,y \\ y' &= b+\sin\varphi\,.\,x+\cos\varphi\,.\,y \\ z' &= c+\quad c_1\,.\,x+\quad c_2\,.\,y+z \end{aligned}}\ldots G_6. \tag{1, 6}$$

Wir werden den Normalriß einer Figur auf die Ebene $z=0$ in Hinkunft gerne als ihren „Grundriß“ bezeichnen. Die Ebene $z=0$ soll daher als die „Grundrißebene“ benannt werden. Dann folgt aus den beiden ersten Gleichungen (6) der grundlegende Satz:

---

[8] In der von mir früher [4] geprägten Terminologie sind es genauer die „unimodularen“ Bewegungen von I_3. Es sind dies Sonderfälle der „modularen Bewegungen“, welche nämlich lediglich das Bogenelement, nicht aber auch die Rauminhalte unverändert lassen. Für sie wäre in (5) nur $h_1^2+h_2^2=1$ zu nehmen. Sie bilden eine schon in der Einleitung erwähnte G_7, in der unsere auch volumstreue G_6 invariant enthalten ist.

Eine Bewegung des isotropen Raumes äußert sich im Grundrisse als gewöhnliche ebene euklidische Bewegung.

3. Gegenüber Bewegungen (6) des isotropen Raumes haben die beiden nichtparallelen Punkte $P = (x, y, z)$ und $P^* = (x^*, y^*, z^*)$ mit $(x, y) \neq (x^*, y^*)$ eine Invariante, nämlich ihren Abstand d, definiert durch

$$d^2 = (x^* - x)^2 + (y^* - y)^2. \tag{1, 7}$$

Falls sie aber parallel sind, d. h. $(x, y) = (x^*, y^*)$ ist, verschwindet ihr Abstand d identisch. Als Ersatz existiert aber dann eine Invariante s, die sogar rational ist, nämlich

$$s = z^* - z, \tag{1, 8}$$

die wir als die Spanne der beiden parallelen Punkte bezeichnen.

Dual hiezu haben die beiden nichtisotropen Ebenen

$$\left.\begin{aligned} z &= ux + vy + w \\ z &= u^* y + v^* y + w^*, \end{aligned}\right\}$$

falls sie nicht parallel sind, d. h. $(u, v) \neq (u^*, v^*)$ ist, als Invariante einen Winkel ϑ, definiert durch

$$\vartheta^2 = (u^* - u)^2 + (v^* - v)^2. \tag{1, 9}$$

Falls sie parallel sind, d. h. $(u, v) = (u^*, v^*)$ ist und ihr Winkel ϑ also identisch verschwindet, existiert wieder als Ersatz, eine sogar rationale Invariante, nämlich ihr Parallelabstand σ:

$$\sigma = w^* - w. \tag{1, 10}$$

4. Wie man leicht nachweist, führt das Nullsystem $\mathfrak{N}$

$$z - Z = X y - Y x, \tag{1, 11}$$

welches das absolute Gebilde des isotropen Raumes in sich transformiert, zwei nichtparallele Punkte in zwei nichtparallele Ebenen und zwei parallele Punkte in zwei parallele Ebenen über, wobei die Werte korrespondierender Invarianten (7) und (9), bzw. (8) und (10) ungeändert bleiben.

Durch das Nullsystem (11) wird jeder Raumfigur f eine duale Figur F zugeordnet, wobei die Invarianten dualistischer Elementenpaare wertegleich sind. Man kann sagen, f und F seien dualkongruente Figuren.

Analoges gilt, wenn man an die Stelle des Nullsystems $\mathfrak{N}$ die Polarität $\mathfrak{P}$ des Paraboloides

$$z = \frac{1}{2}(x^2+y^2) \tag{1, 12}$$

setzt. Jedoch ändern dann die Invarianten paralleler Elemente die Vorzeichen ihrer Werte.

5. Als elementargeometrische Deutung des Abstandes d zweier nichtparalleler Punkte P und P^* erhält man nach (7) einfach den gewöhnlichen Abstand ihrer Grundrisse. Der Winkel ϑ, den zwei nichtparallele und nichtisotrope Ebenen nach (9) bestimmen, läßt u. a. folgende elementare Deutung zu: Die Normalen, welche man aus dem Punkte $R = (0, 0, 1)$ auf die beiden Ebenen fällen kann, treffen die Grundrißebene π

$$\pi \ldots z = 0 \tag{1, 13}$$

in zwei Punkten, deren gewöhnlicher Abstand gleich ist dem Winkel der Ebenen.

6. In der metrischen Dualität entsprechen sich auch die Invarianten zweier nichtparallelen isotropen Ebenen ι_1, ι_2 und — dual — zweier nichtparalleler Fernpunkte C_1, C_2, d. h. solcher, deren Verbindungsgerade nicht durch den absoluten Punkt U des isotropen Raumes geht. Sind nämlich L_1 und L_2 die beiden im Büschel (γ_1, γ_2) enthaltenen vollisotropen Ebenen, bzw. J_1 und J_2 die beiden Schnittpunkte der Punktreihe (C_1, C_2) mit den absoluten Geraden i_1, i_2 (2), so kann man als Winkel $\varkappa$ der beiden nichtparallelen isotropen Ebenen definieren:

$$\varkappa = \frac{i}{2} \ln DV(\gamma_1 \gamma_2 \iota_1 \iota_2) \tag{1, 14}$$

und als Abstand k der beiden nichtparallelen Fernpunkte:

$$k = \frac{i}{2} \ln DV(C_1 C_2 J_1 J_2). \tag{1, 15}$$

Sind aber die beiden isotropen Ebenen γ_1 und γ_2 parallel und sind auch — dual — die beiden Fernpunkte C_1 und C_2 parallel, d. h. enthält ihre Verbindungsgerade den absoluten Punkt U (3), so kann man sie durch folgende normierte Gleichungen, bzw. Koordinaten darstellen:

$$\left.\begin{aligned} \gamma_1 \ldots -\sin\varphi \,.\, x + \cos\varphi \,.\, y + h_1 = 0, \\ \gamma_2 \ldots -\sin\varphi \,.\, x + \cos\varphi \,.\, y + h_2 = 0, \end{aligned}\right\} \tag{1, 16}$$

und

$$\left.\begin{aligned} C_1 = (0 \quad \cos\varphi \quad \sin\varphi \quad h_1), \\ C_2 = (0 \quad \cos\varphi \quad \sin\varphi \quad h_2). \end{aligned}\right\} \tag{1, 17}$$

Die Bezeichnung ist dabei so gewählt, daß sich die beiden Elementenpaare im Nullsysteme $\mathfrak{N}$ (11) entsprechen. Die Bewegungsinvarianten der Elementenpaare (16) bzw. (17) sind also wertegleich, nämlich gleich $h_2—h_1$. Dabei bezeichnen wir

$$\lambda = h_2 - h_1 \tag{1, 18}$$

als die Entfernung der beiden parallelen isotropen Ebenen (16), bzw.

$$l = h_2 - h_1 \tag{1, 19}$$

als die Sperrung (oder Öffnung) der beiden parallelen Fernpunkte (17).

Zur elementaren Deutung dieser beiden Invarianten sei bemerkt, daß die Entfernung λ zweier parallelen isotropen Ebenen γ_1 und γ_2 übereinstimmt mit ihrem gewöhnlichen euklidischen Normalabstand. Die Sperrung oder Öffnung der beiden parallelen Fernpunkte C_1 und C_2 aber kann man elementar u. a. so erhalten: Man verbinde diese Fernpunkte etwa mit dem Ursprung O und schneide die Verbindungsgeraden mit dem Einheitszylinder $x^2+y^2=1$. Die entstehenden Schnittpunkte $C_1' = (\cos\varphi, \sin\varphi, h_1)$ und $C_2' = (\cos\varphi, \sin\varphi, h_2)$ haben dann die Spanne l.

7. Eine wichtige Anwendung erfahren diese metrischen Grundbegriffe bei der Definition der beiden Bewegungsinvarianten zweier Geraden c_1 und c_2 des isotropen Raumes, die wir gleich der Einfachheit halber als nicht parallel voraussetzen. Je nachdem ihre Fernpunkte C_1 und C_2 dann nicht parallel oder parallel sind, haben wir zwei wesensverschiedene Fälle zu unterscheiden:

α) Zwei Geraden c_1 und c_2 mit nichtparallelen Fernpunkten C_1 und C_2 lassen sich mit dem absoluten Punkte U (3) durch zwei nichtparallele isotrope Ebenen γ_1, γ_2 verbinden und deren vollisotrope Schnittgerade n übernimmt die Rolle des Gemeinlotes der beiden Geraden. Man erklärt nun als Winkel der Geraden den nach (14) definierten Winkel $\varkappa$ der beiden isotropen Ebenen γ_1, γ_2. Man kann ihn in elementarer Weise aus dem Grundrisse ablesen. Ferner erklärt man als Lotspanne der beiden Geraden die nach (8) definierte Spanne s der beiden vom Gemeinlot n auf ihnen bestimmten parallelen Punkte.

β) Zwei Geraden c_1 und c_2 mit parallelen Fernpunkten C_1, C_2 lassen sich mit dem absoluten Punkte U durch zwei parallele isotrope Ebenen γ_1, γ_2 verbinden. Ihr Gemeinlot rückt in die

Fernebene. Man erklärt als **Abstand** der Geraden die durch (18) definierte Entfernung λ der beiden parallelen isotropen Ebenen und als ihre **Sperrung** die nach (19) definierte Sperrung l ihrer parallelen Fernpunkte.

Man zeigt leicht, daß durch seine beiden Invarianten ein Geradenpaar bis auf Bewegungen des isotropen Raumes festgelegt ist. Natürlich sind diese Invarianten paarweise dual.

Es folgt, daß die in einem festen Punkte P auf eine nichtisotrope Gerade a errichteten **Normalen** b sämtlich in einer isotropen Ebene liegen. Diese **isotrope Normalebene** ist zum Grundrisse a' von a euklidisch senkrecht.

Es folgt weiter, daß **zu einer nichtisotropen Ebene lediglich die vollisotropen Geraden normal sind.**

8. Wir benötigen noch die Invariante, welche einer nichtisotropen **Geraden** g und einer ebensolchen sie schneidenden **Ebene** ρ zukommt. Wir legen durch g die isotrope Ebene und schneiden sie mit ρ, wodurch die nichtisotrope Gerade h entsteht. Dann soll die nach Nr. 7β) definierte Sperrung der beiden schneidenden Geraden g und h als die bewegungsinvariante „**Böschung**" oder „**Neigung**" der **Geraden** gegen die **Ebene** bezeichnet werden.

Dual hiezu ist der **Abstand** eines eigentlichen **Punktes** P von einer nichtisotropen **Geraden** g. Er äußert sich als euklidischer Abstand der Grundrisse dieser beiden Figuren.

Metrisch dual zu einer *Böschungstorse* ist also im isotropen Raume eine Kurve auf einem *Drehzylinder* mit vollisotroper Achsenrichtung.

9. Die durch die Bewegungsgruppe G_6 des isotropen Raumes in einer beliebigen **nichtisotropen Ebene** induzierte Geometrie ist nach obigen Betrachtungen jene **parabolische** Geometrie, welche durch die beiden verschiedenen konjugiert-komplexen Schnittpunkte J_1 und J_2 der Ebene mit den absoluten Geraden (2) als absolutes Punktepaar regiert wird. Sie ist daher im Grundrisse identisch mit der gewöhnlichen euklidischen Geometrie und auch die von G_6 in ihr induzierte Bewegungsgruppe G_3 äußert sich (vgl. Nr. 3) im Grundrisse als jene der euklidischen ebenen Bewegungen.

Insbesondere ist die Differentialgeometrie einer ebenen Kurve, falls die Kurvenebene eigentlich und nichtisotrop ist, identisch mit der gewöhnlichen euklidischen Differentialgeometrie des Kurvengrundrisses.

10. Ist die Ebene aber isotrop, so sind die nach (7) erklärten Winkel ihrer (eigentlichen) Geraden stets Null. Irgend zwei nichtparallele Geraden c_1, c_2 haben dann nach Nr. 7 β) eine invariante Sperrung, bzw. — falls sie parallel sind — eine in vollisotroper Richtung zu messende Spanne.

Einen Einblick in die Geometrie, insbesondere in die sehr einfache Differentialgeometrie einer *isotropen Ebene* erhält man, wenn man die Wirkung untersucht, die jene Untergruppe unserer Bewegungsgruppe G_6 des Gesamtraumes, die sie festläßt, in ihr hervorruft. Als diese isotrope Ebene wollen wir, was wegen der Bewegungsinvarianz der Betrachtung kein Verlust an Allgemeinheit ist, etwa die Ebene

$$y = 0 \tag{1, 20}$$

nehmen. In ihr induziert aber die Gruppe G_6 zufolge (6) die dreigliedrige Gruppe G_3:

$$\left.\begin{aligned} x' &= a + x \\ z' &= c + c_1 x + y, \end{aligned}\right\} \ldots G_3 \tag{1, 21}$$

die man in der Geometrie der isotropen Ebene nach H. Beck[2] als ihre „*Grenzgruppe*" von Bewegungen bezeichnet.

Das Bogenelement hat dann die Form

$$ds = dx. \tag{1, 22}$$

Ist nun das Paar der nichtisotropen Geraden

$$\left.\begin{aligned} y &= h_1 x + n_1 \\ y &= h_2 x + n_2 \end{aligned}\right\} \tag{1, 23}$$

gegeben, so lautet ihre Sperrung nach Nr. 7 β) und Formel (19)

$$l = h_2 - h_1 \tag{1, 24}$$

und ist weiter

$$z = f(x) \tag{1, 25}$$

eine beliebige ableitbare Kurve in der isotropen Ebene, so wird man als eine Art „*Krümmung*" definieren den Quotienten aus Kontingenzsperrung und Bogenelement, also den Ausdruck

$$\boxed{\varkappa^* = \lim_{dx \to 0} \frac{f'(x+dx) - f'(x)}{dx} = f''(x).} \tag{1, 26}$$

H. Beck[2] hat diese Krümmungsgröße als „*Abweichung*" der Kurve (von einer Geraden) bezeichnet. Sie ist konstant, etwa

$$\varkappa^* = 2\,A = \text{konst.}, \tag{1, 27}$$

für die Parabeln vollisotroper Durchmesserrichtung

$$z = A\,x^2 + B\,x + C, \tag{1, 28}$$

die man sinngemäß (weil ihre in U zusammenfallenden Fernpunkte dem absoluten Gebilde angehören) mit E. Study als „parabolische Kreise" oder als Kreise der isotropen Ebene bezeichnen wird. Für den elementargeometrischen Parameter M dieser Parabel und seinen Zusammenhang mit der Abweichung findet man

$$p = \frac{1}{2\,A} = \frac{1}{\varkappa^*}. \tag{1, 29}$$

Übrigens sind die Kurven der isotropen Ebene durch ihre „natürliche Gleichung" $\varkappa^* = \varkappa^*(s)$ bis auf Grenzbewegungen (21) eindeutig bestimmt.

Eine Diskussion der Geometrie in den (komplexen) vollisotropen Ebenen kann vorerst an dieser Stelle unterbleiben. Da ihr Bogenelement identisch verschwindet, handelt es sich bei ihnen um ametrische Ebenen im Sinne J. Lense's.[7])

11. Wir bezeichnen als *Kreise* des isotropen Raumes jene Kegelschnitte, welche beide absoluten Geraden schneiden. Sie enthalten also die absoluten Punkte ihrer Ebene, sind daher für nichtisotrope Ebenen Ellipsen mit kreisförmigem Grundrisse und für isotrope Ebenen, wie schon erwähnt, Parabeln vollisotroper Durchmesserrichtung.

Als *Kugeln* bezeichnen wir die regulären Flächen zweiter Ordnung, welche die beiden absoluten Geraden i_1 und i_2 (2) enthalten, also die Drehparaboloide vollisotroper, d. i. z-paralleler Durchmesserrichtung:

$$2\,pz = (x^2 + y^2) + 2\,a\,x + 2\,b\,y + c. \tag{1, 30}$$

Die Größe p ist auch eine isotrope Bewegungsinvariante, die wir den Parameter der Kugel nennen. Jede Kugel gestattet eine dreigliedrige Gruppe von Bewegungen in sich. Jeder Durchmesser bestimmt nämlich eine eingliedrige Gruppe von Drehungen der Kugel.

Ein (singulärer) Grenzfall davon sind die Drehzylinder vollisotroper Achsenrichtung. Sie sind auch im Sinne der Geometrie des isotropen Raumes Drehzylinder, gestatten nämlich alle Bewegungen des isotropen Raumes, welche ihre vollisotrope Achse a festlassen, worunter auch die Drehungen um diese Hauptachse a vorkommen.

Ein Kegelschnitt der Fernebene, der die absoluten Geraden berührt, wird als „Fernkreis" und die Berührungssehne als seine „Achse" bezeichnet. Fernkreise und Drehzylinder sind metrisch dual.

12. Es ist von Vorteil und erleichtert die Einsicht in die *Struktur der Bewegungsgruppe* G_6 des isotropen Raumes, die möglichen Typen eingliedriger Bewegungsgruppen zu kennen. Faßt man im Sinne von G_6 äquivalente Bewegungen zu Klassen zusammen, so gibt es sieben solche Bewegungstypen, die wir im folgenden kurz beschreiben und durch je einen anschaulichen Vertreter repräsentieren.

Im Grundriß auf die Ebene $z = 0$ stellen sich die Typen I und II als gewöhnliche Drehungen, die Typen III, IV und V als Schiebungen und die Typen VI und VII als Identität dar.

Typ I: „Schraubungen". Es existieren zwei invariante Achsen, eine eigentliche, vollisotrope Hauptachse a und eine dazu windschiefe uneigentliche Nebenachse $\bar{a}$ und beide können unabhängig voneinander gewählt werden. Ihre *Bahnkurven*, die wir „Schraublinien" nennen, liegen auf Drehzylindern der gemeinsamen Achse a und ihre Bahntangenten sind gegen die parallelen Ebenen durch die Nebenachse $\bar{a}$ unter fester Böschung (Nr. 8) geneigt. Sie sind das einfachste Beispiel von Böschungslinien und überdies metrisch sich selbst dual. Die Bahnen der Fernpunkte sind Fernkreise der gemeinsamen Achse $\bar{a}$.

Als anschaulicher Vertreter dient die gewöhnliche euklidische Schraubung um die z-Achse.

Typ II: „Drehungen". Wie vorhin existiert eine eigentliche vollisotrope Hauptachse a und eine dazu windschiefe uneigentliche Nebenachse $\bar{a}$ und beide können unabhängig voneinander gewählt werden. Die Hauptachse ist punktweise, die Nebenachse ebenenweise fest. Die *Bahnkurven* sind konzentrische Kreise in den parallelen invarianten Ebenen, deren Mitten auf der Hauptachse liegen.

Einfachster Vertreter ist die gewöhnliche euklidische Drehung um die z-Achse.

Die weiteren fünf Typen entstammen einer in der Bewegungsgruppe G_6 (6) invariant enthaltenen fünfgliedrigen Untergruppe G_5, welcher für die Geometrie des isotropen Raumes eine aus verschiedenen Gründen hervorragende Bedeutung zukommt. Es ist dies jene Gruppe G_5, deren Transformationen sich im Grundrisse entweder als reine *Translationen* oder als *Identität darstellen* und die wir als „*Grenzbewegungen*" bezeichnen. Die Darstellung dieser „*Grenzgruppe*" von Bewegungen ergibt sich aus (6), wenn man dort $\varphi = 0$ setzt; sie lautet:

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= a + x \\ y' &= b \quad . + y \\ z' &= c + c_1 x + c_2 y + z. \end{aligned}} \ldots . G_5. \qquad (1, 31)$$

Für ihre eingliedrigen Untergruppen findet man leicht die folgende Darstellung, wobei $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ den Ausgangspunkt der betreffenden Bahnkurve bedeutet:

$$\left.\begin{aligned} x &= at + \bar{x} \\ y &= bt + \bar{y} \\ z &= (ac_1 + bc_2)\frac{t^2}{2} + (c + c_1\bar{x} + c_2\bar{y})\,t + \bar{z}. \end{aligned}\right\} \qquad (1, 32)$$

Folgendes sind die fünf Beiträge der Grenzgruppe zu unserer Klassifizierung der eingliedrigen Bewegungstypen des isotropen Raumes:

Typ III: $ac_1 + bc_2 \neq 0$. „Parabolische Drehungen oder „allgemeine Grenzdrehungen", die im Grundrisse als Translationen erscheinen. Ihre Bahnkurven sind nach (32) kongruente parabolische Kreise in parallelen isotropen Ebenen. Verschiebt man eine isotrope Kugel (30) in vollisotroper Richtung und schneidet man die entstehende „konzentrische Kugelschar" mit einem Büschel paralleler isotroper Ebenen, so erhält man die Bahnkurven einer solchen parabolischen Drehung.

Typ IV: $ac_1 + bc_2 = 0$, aber $(a, b) \neq (0, 0)$ und $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$. „Windschiefe Schiebungen, die im Grundrisse als Translationen erscheinen. Bei ihnen beschreiben die Raumpunkte windschiefe Bahngeraden, die zusammen ein parabolisches Strahlnetz erfüllen, dessen Leitgerade in der Fernebene liegt und durch den absoluten Punkt geht.

Typ V: $c_1 = c_2 = 0$, aber $(a, b) \neq (0, 0)$. „Allgemeine Translationen“ mit nicht isotroper Schiebungsrichtung.

Typ VI: $a = b = 0$, aber $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$. „Isotrope Grenzdrehungen“, die im Grundrisse als Identität erscheinen. Bei ihnen bleibt die Ebene $c + c_1 x + c_2 y = 0$ punktweise fest und die einzelnen Raumpunkte scheren längs ihr, d. h. werden proportional ihren Abständen von dieser festen Ebene in vollisotroper Richtung verschoben.

Typ VII: $a = b = 0$, $c_1 = c_2 = 0$, $c \neq 0$. „Vollisotrope Translation“. Schiebung in vollisotroper Richtung, die im Grundriß als Identität erscheinen.

Von diesen sieben Typen sind alle zu sich selbst metrisch dual bis auf die Typen V und VI, die zueinander dual sind.

13. Für unsere differentialgeometrischen Untersuchungen werden neben den *Drehungen des Ursprungsbündels* der Darstellung

$$\left.\begin{aligned} x' &= x \cos \varphi - y \sin \varphi \\ y' &= x \sin \varphi + y \cos \varphi \\ z' &= c_1 x + c_2 y + z, \end{aligned}\right\} \quad D_3 \qquad (1, 33)$$

welche eine dreigliedrige Gruppe bilden, vor allem die erwähnten *Grenzbewegungen* von besonderer Bedeutung sein. Wie ich schon früher[4] nachgewiesen habe, kann nämlich diese Grenzgruppe (31) dargestellt werden als das kommutative Produkt zweier reziproker einfachtransitiver dreigliedriger Gruppen von Grenzbewegungen des Typs IV, die wir darum als *Schiebungsgruppen* bezeichnen und die sich nach der eingliedrigen Gruppe der vollisotropen Schiebungen durchdringen. Man kann diese dreigliedrigen Gruppen durch die Bezeichnungen *Links-* und *Rechtsschiebungen* unterscheiden und so ansetzen:

Linksschiebungen:

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= a + x \\ y' &= b + y \\ z' &= c - b x + a y + z \end{aligned}} \;\ldots\; S_3^l \qquad (1, 34)$$

Rechtsschiebungen:

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= \alpha + x \\ y' &= \beta + y \\ z' &= \gamma + \beta x - \alpha y + z \end{aligned}} \;\ldots\; S_3^r \qquad (1, 35)$$

Aus dieser Möglichkeit der Zerspaltung der Grenzgruppe G_5

$$G_5 = S_3^l . S_3^r = S_3^r . S_3^l \tag{1, 36}$$

in zwei einfachtransitive und reziproke kommutative Schiebungsgruppen erhellt die Analogie der Grenzbewegungen des isotropen Raumes zu den Bewegungen eines elliptischen Raumes. *In der Tat kann die Geometrie des isotropen Raumes, wenigstens soweit sie sich nur auf diese Grenzgruppe G_5 stützt, aufgefaßt werden als ein letzter Grenzfall der elliptischen Raumgeometrie. Das Übergangsglied wird dabei von W. Blaschkes bekannter „quasielliptischer Geometrie"* [9] *gebildet.*

In diesem Sinne fungieren also die Links- und Rechtsschiebungen des isotropen Raumes als ein gewisser Grenzfall der bekannten Cliffordschen Schiebungen des elliptischen Raumes und man ist in der Lage, deren sehr weit ausgebaute Theorie auf den isotropen Raum zu übertragen.[4]) So gibt es z. B. auch für die Schiebungen (34) und (35) einfache Darstellungen durch hyperkomplexe Zahlen (nämlich durch einen gewissen Grenzfall der Hamiltonschen Quaternionen) oder das Analogon der bekannten Studyschen Abbildung der Bewegungen des elliptischen Raumes auf die simultanen Drehungen zweier Bündel und der damit verknüpften Übertragung der Liniengeometrie auf die Geometrie zweier Bündel. Freilich bestehen im isotropen Raume für diese Abbildungen gewisse Bindungen, die sich aus der besonderen Struktur seiner beiden Schiebungsgruppen ergeben.

II. Die Elemente der Kurventheorie. Bogen. Krümmung und Windung. Freuet'sche Formeln. Natürliche Gleichungen.

14. Projiziert man den „Raumvektor"

$$\mathfrak{x} = (x, y, z) \tag{2, 1}$$

normal auf die Ebene $z = 0$, so erhält man seinen „Grundrißvektor"

$$\bar{\mathfrak{x}} = (x, y). \tag{2, 2}$$

Nach (1, 7) ist das Längenquadrat beider Vektoren

$$\bar{\mathfrak{x}}^2 = x^2 + y^2. \tag{2, 3}$$

Sind ferner $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$ zwei (geordnete) Einheitsvektoren im Raume, also $\bar{\mathfrak{x}}_1^2 = \bar{\mathfrak{x}}_2^2 = 1$, so gilt für ihren (mod. 2π) bestimmten Winkel nach Nr. 7 α

[9] Vgl. W. Blaschke, Ebene Kinematik, Leipzig-Berlin 1938.

$$\left.\begin{aligned} \cos\varphi &= \bar{\mathfrak{x}}_1 . \bar{\mathfrak{x}}_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2 \\ \sin\varphi &= [\bar{\mathfrak{x}}_1 \bar{\mathfrak{x}}_2] = x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{aligned}\right\} \qquad (2,\ 4)$$

Es kann aber sein, daß die Einheitsvektoren $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$ eine isotrope Ebene aufspannen. Dann ist

$$[\bar{\mathfrak{x}}_1 \bar{\mathfrak{x}}_2] = 0 \qquad (2,\ 5)$$

und man kann annehmen, daß $\bar{\mathfrak{x}}_1 . \bar{\mathfrak{x}}_2 > 0$, d. h. daß $\bar{\mathfrak{x}}_1$ und $\bar{\mathfrak{x}}_2$ gleichorientiert seien. Der Winkel φ verschwindet in diesem Falle, und man zieht die durch (1, 19) und Nr. 7 β) definierte Sperrung

$$l = z_2 - z_1 \qquad (2,\ 6)$$

als Invariante heran.

15. Es sei nun

$$\mathfrak{x}(t) = \{x(t),\ y(t),\ z(t)\} \qquad (2,\ 7)$$

der Ortsvektor einer Raumkurve, die wir als genügend oft stetig differenzierbar voraussetzen. Wir nehmen an, daß der Tangentenvektor $\dot{\mathfrak{x}}(t)$ nirgends isotrop oder vollisotrop sei, daß also sein Längenquadrat

$$\dot{\mathfrak{x}}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 \neq 0 \qquad (2,\ 8)$$

sei. Der Punkt bedeutet dabei Ableitung nach t.

Gegenüber Bewegungen des isotropen Raumes (1, 6) und Parameteränderungen besitzt die Raumkurve folgende drei Differentialinvarianten niedrigster Ordnung:

$$\left.\begin{aligned} J_1 &= (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)\, dt^2 = \dot{\mathfrak{x}}^2\, dt^2 \\ J_2 &= (\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y})\, dt^3 = [\dot{\mathfrak{x}}\ddot{\mathfrak{x}}]\, dt^3 \\ J_3 &= \begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \\ \dddot{x} & \dddot{y} & \dddot{z} \end{vmatrix} dt^6 = [\dot{\mathfrak{x}}\ddot{\mathfrak{x}}\dddot{\mathfrak{x}}]\, dt^6 \end{aligned}\right\} \qquad (2,\ 9)$$

Deren erste liefert das Bogenelement ds der Raumkurve. In der Tat ist auch nach (1, 7)

$$ds^2 = \dot{\mathfrak{x}}^2\, dt^2. \qquad (2,\ 10)$$

Der Bogen s einer Kurve des isotropen Raumes ist also gleich dem euklidischen Bogen ihres Grundrisses.

Wir werden den Bogen s meist als „natürlichen" Parameter der Darstellung der Raumkurve zugrunde legen, also schreiben

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(s), \tag{2, 11}$$

und Ableitungen nach ihm, wie üblich, durch Striche kennzeichnen. Es gilt dann für alle s

$$\bar{\mathfrak{x}}'^2 \equiv 1. \tag{2, 12}$$

Aus den Differentialinvarianten (9) bilden wir weiter die beiden grundlegenden *Bewegungsinvarianten* der Raumkurve:

$$\boxed{\begin{aligned} \varkappa^2 &= \frac{[\dot{\bar{\mathfrak{x}}}\ddot{\bar{\mathfrak{x}}}]^2}{(\dot{\bar{\mathfrak{x}}}^2)^3} = [\bar{\mathfrak{x}}'\bar{\mathfrak{x}}'']^2 \\ \tau &= \frac{[\dot{\mathfrak{x}}\ddot{\mathfrak{x}}\dddot{\mathfrak{x}}]}{[\dot{\bar{\mathfrak{x}}}\ddot{\bar{\mathfrak{x}}}]^2} = \frac{[\mathfrak{x}'\mathfrak{x}''\mathfrak{x}''']}{[\bar{\mathfrak{x}}'\bar{\mathfrak{x}}'']^2} \end{aligned}}\;. \tag{2, 13}$$

Wir bezeichnen $\varkappa$ als die „*Krümmung*", τ als die „*Windung*" oder „*Torsion*" der Kurve des isotropen Raumes.

Die Krümmung $\varkappa$ einer Raumkurve ist danach gleich der elementaren euklidischen Krümmung ihres Grundrisses. Man kann sie, wie aus der Differentialgeometrie der Ebene bekannt ist, durch eine Orientierungsübereinkunft sogar in rationaler Weise definieren durch

$$\boxed{\varkappa = [\bar{\mathfrak{x}}'\bar{\mathfrak{x}}''].} \tag{2, 14}$$

Aus (13) folgt noch

$$[\mathfrak{x}'\,\mathfrak{x}''\,\mathfrak{x}'''] = \varkappa^2\tau. \tag{2, 15}$$

Wir führen noch die Reziprokwerte ein:

$$\mathrm{K} = \frac{1}{\varkappa}, \qquad \mathrm{T} = \frac{1}{\tau} \tag{2, 16}$$

und nennen K den „Krümmungsradius", T den „Torsionsradius" der Raumkurve.

16. Beispiel 1. Für die Kurve

$$x = a\,e^{\lambda\varphi}\cos\varphi, \qquad y = a\,e^{\lambda\varphi}\sin\varphi, \qquad z = \frac{a^2}{2\,p}\,e^{2\lambda\varphi}, \tag{2, 17}$$

die auf der Kugel des isotropen Raumes

$$x^2 + y^2 = 2\,pz \tag{2, 18}$$

vom Parameter p liegt und deren Grundriß eine logarithmische Spirale mit dem Ursprung als Auge ist, findet man

$$\dot{\bar{\mathfrak{x}}}^2 = a^2 (1+\lambda^2)\, e^{2\lambda\varphi}, \qquad [\dot{\mathfrak{x}}\ddot{\mathfrak{x}}] = a^2 (1+\lambda^2)\, e^{2\lambda\varphi},$$

$$[\dot{\mathfrak{x}}\ddot{\mathfrak{x}}\dddot{\mathfrak{x}}] = \frac{a^4\lambda}{p} (1+\lambda^2)^2\, e^{4\lambda\varphi} \tag{2, 19}$$

Zählt man den Bogen vom Wickelpunkt ($\varphi = -\infty$) weg, so findet man

$$s = \int\limits_{-\infty}^{\varphi} \sqrt{\dot{\bar{\mathfrak{x}}}^2}\, d\varphi = \frac{a}{\lambda} \sqrt{1+\lambda^2} \,.\, e^{\lambda\varphi}, \tag{2, 20}$$

und damit folgt aus (13) und (14)

$$\varkappa = \frac{1}{\lambda s}, \qquad \tau = \frac{\lambda}{p}. \tag{2, 21}$$

Die Torsion τ der Kurve (17) ist also konstant.

17. Zur Erstellung eines begleitenden Dreibeins und des Analogons der Frenetschen Ableitungsgleichungen beziehen wir in Hinkunft die Raumkurve auf ihren Bogen s als Parameter:

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(s). \tag{2, 22}$$

Dann ist also der Tangentenvektor $\mathfrak{t}$

$$\mathfrak{t} = \mathfrak{x}'(s) \tag{2, 23}$$

wegen

$$\bar{\mathfrak{t}}^2 = \bar{\mathfrak{x}}'^2 = 1 \tag{2, 24}$$

überall ein Einheitsvektor und es folgt durch Ableitung

$$\bar{\mathfrak{t}}\,.\,\bar{\mathfrak{t}}' = \bar{\mathfrak{x}}'\,.\,\bar{\mathfrak{x}}'' = x'x''+y'y'' = 0, \tag{2, 25}$$

d. h. der Vektor $\mathfrak{t}' = \mathfrak{x}''$, der in der Schmiegebene der Kurve liegt, ist überall normal zum Tangentenvektor $\mathfrak{t}$. Wir sagen, er gehöre der Hauptnormalen der Kurve an. Ist diese Hauptnormale nicht vollisotrop, d. h. ist $\bar{\mathfrak{x}}''$ kein Nullvektor:

$$\bar{\mathfrak{x}}'' \neq \bar{\mathfrak{o}}, \tag{2, 26}$$

so existiert auf der Hauptnormalen ein Einheitsvektor $\mathfrak{h}$ so, daß mit Rücksicht auf

$$\bar{\mathfrak{x}}''^2 = [\bar{\mathfrak{x}}'\,\bar{\mathfrak{x}}'']^2 = \varkappa^2 \tag{2, 27}$$

und

$$\bar{\mathfrak{h}}^2 = 1 \tag{2, 28}$$

$$\mathfrak{t}' = \mathfrak{x}'' = \varkappa\mathfrak{h} \tag{2, 29}$$

gesetzt werden kann. Wir bezeichnen $\mathfrak{h}$ in Hinkunft als den (normierten) „Hauptnormalenvektor".

18. Nach ihrer Definition und nach (25) fällt die Hauptnormale, wenn sie nicht vollisotrop ist, im Grundriß mit der Normalen des Kurvengrundrisses zusammen.

Die Raumkurve und ihr Grundriß haben darum außer der *Bogenlänge* s auch die *Krümmung* $\varkappa$ gemeinsam.

Dies folgte schon aus der gemeinsamen Formel (14) für die Krümmung, aus der man übrigens in Verbindung mit (25) die beiden Ableitungsgleichungen des Kurvengrundrisses erschließt:

$$\boxed{\begin{aligned} x'' &= \; * \; - \varkappa y' \\ y'' &= \varkappa x' \quad * \end{aligned}} \, . \tag{2, 30}$$

Sie besagen, daß der Grundriß $\bar{\mathfrak{h}}$ des Hauptnormalenvektors $\mathfrak{h}$ aus dem Grundriß $\bar{\mathfrak{t}}$ des Tangentenvektors $\mathfrak{t}$ durch eine positive Vierteldrehung entsteht.

Wie aus der Differentialgeometrie der euklidischen Ebene bekannt ist, legt die „natürliche Gleichung"

$$\varkappa = \varkappa(s) \tag{2, 31}$$

den Grundriß der Raumkurve (22) bis auf ebene Bewegungen fest. Bedeutet nämlich

$$\vartheta(s) = \vartheta_0 + \int_{s_0}^{s} \varkappa(s) . ds \tag{2, 32}$$

den Neigungswinkel der Tangente des Kurvengrundrisses gegen eine feste x-Richtung, so ist

$$x = x_0 + \int_{s_0}^{s} \cos\vartheta(s)\, ds, \quad y = y_0 + \int_{s_0}^{s} \sin\vartheta(s)\, ds \tag{2, 33}$$

eine explizite Darstellung dieser Grundrißkurve. Die Konstanten ϑ_0, x_0, y_0 des Anfangselementes kennzeichnen die drei möglichen Freiheitsgrade für die Lage des Grundrisses.

Die Innen- und Außenprodukte der Grundrißvektoren $\bar{\mathfrak{x}}'$, $\bar{\mathfrak{x}}''$, $\bar{\mathfrak{x}}'''$, ... sind als Invarianten durch die Krümmung $\varkappa(s)$ und ihre Ableitungen ausdrückbar. Dabei gelten für späteren häufigen Gebrauch folgende Produkttafeln:

Tafel der Innenprodukte $\bar{\mathfrak{x}}^{(i)}.\bar{\mathfrak{x}}^{(k)}$:

	$\bar{\mathfrak{x}}'$	$\bar{\mathfrak{x}}''$	$\bar{\mathfrak{x}}'''$	$\bar{\mathfrak{x}}^{\mathrm{IV}}$
$\bar{\mathfrak{x}}'$	1	0	$-\varkappa^2$	$-3\varkappa\varkappa'$
$\bar{\mathfrak{x}}''$	0	$\varkappa^2$	$\varkappa\varkappa'$	$\varkappa\varkappa''-\varkappa^4$
$\bar{\mathfrak{x}}'''$	$-\varkappa^2$	$\varkappa\varkappa'$	$\varkappa^4+\varkappa'^2$	$2\varkappa^3\varkappa'+\varkappa'\varkappa''$
$\bar{\mathfrak{x}}^{\mathrm{IV}}$	$-3\varkappa\varkappa'$	$\varkappa\varkappa''-\varkappa^4$	$2\varkappa^3\varkappa'+\varkappa'\varkappa''$	$(\varkappa''-\varkappa^3)^2+9\varkappa^2\varkappa'^2$

(2, 34)

Tafel der Außenprodukte $[\mathfrak{x}^{(i)}\,\mathfrak{x}^{(k)}]$:

	$\bar{\mathfrak{x}}']$	$\bar{\mathfrak{x}}'']$	$\bar{\mathfrak{x}}''']$	$\bar{\mathfrak{x}}^{\mathrm{IV}}]$
$[\bar{\mathfrak{x}}'$	0	$\varkappa$	$\varkappa'$	$\varkappa''-\varkappa^3$
$[\bar{\mathfrak{x}}''$	$-\varkappa$	0	$\varkappa^3$	$3\varkappa^2\varkappa'$
$[\bar{\mathfrak{x}}'''$	$-\varkappa'$	$-\varkappa^3$	0	$3\varkappa\varkappa'^2+\varkappa^2(\varkappa^3-\varkappa'')$
$[\bar{\mathfrak{x}}^{\mathrm{IV}}$	$-\varkappa''+\varkappa^3$	$-3\varkappa^2\varkappa'$	$(\varkappa''-\varkappa^3)\varkappa^2-3\varkappa\varkappa'^2$	0

(2, 35)

19. Die Tangente $\mathfrak{t}$ und Hauptnormale $\mathfrak{h}$ ergänzen wir zu einem orthogonalen begleitenden Dreibein durch eine ebenfalls mit der Kurve gegen isotrope Bewegungen invariant verbundene Binormale $\mathfrak{b}$, nämlich durch den konstanten vollisotropen Vektor

$$\mathfrak{b} = (0, 0, 1) \tag{2, 36}$$

der Spanne eins. In der Tat sind nach der Endbemerkung in Nr. 7 lediglich die vollisotropen Vektoren auf der wegen (26) nichtisotropen Schmiegebene, d. h. zugleich auf Tangente und Hauptnormale normal.

Man kann jeden Vektor

$$\mathfrak{a} = (a, b, c) \tag{2, 37}$$

mit Hilfe von $\mathfrak{b}$ in seinen Grundrißvektor $\bar{\mathfrak{a}}$ und seine vollisotrope Komponente aufspalten:

$$\mathfrak{a} = \bar{\mathfrak{a}}+c.\mathfrak{b}. \tag{2, 38}$$

Es gelten dann für Raum- und Grundrißvektoren einige einfache Rechenregeln. Davon interessieren uns nur diese:

$$\bar{\mathfrak{m}}.\mathfrak{n} = \bar{\mathfrak{m}}.\bar{\mathfrak{n}} \tag{2, 39}$$

$$[\mathfrak{m}\,\mathfrak{n}\,\mathfrak{b}] = [\overline{\mathfrak{m}}\,\overline{\mathfrak{n}}]. \tag{2, 40}$$

Es bilden nach ihrer Definition die Vektoren $\overline{\mathfrak{t}}$, $\overline{\mathfrak{h}}$, $\mathfrak{b}$ ein im euklidischen Sinne orthogonales positives Dreibein von Einheitsvektoren. Also ist

$$[\mathfrak{t}\,\mathfrak{h}\,\mathfrak{b}] = \left[\overline{\mathfrak{t}}+z'\,\mathfrak{b},\ \overline{\mathfrak{h}}+\frac{z''}{\varkappa}\,\mathfrak{b},\,\mathfrak{b}\right] = [\overline{\mathfrak{t}}\,\overline{\mathfrak{h}}\,\mathfrak{b}] = +1. \tag{2, 41}$$

Ferner gilt für die euklidischen Außenproduktvektoren

$$\left.\begin{aligned} [\mathfrak{h}\,\mathfrak{b}] &= [\overline{\mathfrak{h}}\,\mathfrak{b}] = \overline{\mathfrak{t}} \\ [\mathfrak{b}\,\mathfrak{t}] &= [\mathfrak{b}\,\overline{\mathfrak{t}}] = \overline{\mathfrak{h}} \end{aligned}\right\}. \tag{2, 42}$$

20. Wir suchen nun die abgeleiteten Vektoren $\mathfrak{t}'$, $\mathfrak{h}'$ und $\mathfrak{b}'$ durch $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{b}$ linear auszudrücken und erhalten das Analogon der Frenet'schen Formeln.

Zunächst folgt aus der Konstanz des Binormalenvektors

$$\mathfrak{b}' = \mathfrak{o} = \text{Nullvektor}. \tag{2, 43}$$

Ferner war schon nach (29)

$$\mathfrak{t}' = \mathfrak{x}'' = \varkappa\mathfrak{h}, \tag{2, 44}$$

also

$$\mathfrak{h} = \frac{\mathfrak{x}''}{\varkappa}. \tag{2, 45}$$

Daraus folgt durch Ableitung, daß

$$\mathfrak{h}' = \frac{\varkappa\mathfrak{x}''' - \varkappa'\mathfrak{x}''}{\varkappa^2} \tag{2, 46}$$

bereits von $\mathfrak{x}'''$ abhängt.

Wir stellen daher zunächst fest, wie $\mathfrak{x}'''$ von $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{x}''$, $\mathfrak{b}$ abhängt, und benutzen dazu die bekannte Identität zwischen vier Raumvektoren, nämlich:

$$[\mathfrak{x}'\mathfrak{x}''\mathfrak{x}''']\,\mathfrak{b} - [\mathfrak{x}''\mathfrak{x}'''\mathfrak{b}]\,\mathfrak{x}' + [\mathfrak{x}'\mathfrak{x}'''\mathfrak{b}]\,\mathfrak{x}'' - [\mathfrak{x}'\mathfrak{x}''\mathfrak{b}]\,\mathfrak{x}''' \qquad \mathfrak{o}. \tag{2, 47}$$

Nach Regel (40) kann man dafür schreiben

$$[\mathfrak{x}'\mathfrak{x}'\mathfrak{x}'']\,\mathfrak{b} - [\overline{\mathfrak{x}}'\overline{\mathfrak{x}}''']\,\mathfrak{x}' + [\overline{\mathfrak{x}}'\overline{\mathfrak{x}}'']\,\mathfrak{x}'' - [\overline{\mathfrak{x}}'\overline{\mathfrak{x}}'']\,\mathfrak{x}''' \qquad \mathfrak{o}. \tag{2, 48}$$

Wegen (15) und (35) lautet die gesuchte Identität

$$\boxed{\varkappa^2\tau\,.\,\mathfrak{b} - \varkappa^3\mathfrak{x}' + \varkappa'\,.\,\mathfrak{x}'' - \varkappa\mathfrak{x}''' \equiv \mathfrak{o}} \tag{2, 49}$$

Aus ihr folgt sofort, wenn man wieder $\mathfrak{t}$ an Stelle von $\mathfrak{x}'$ schreibt

$$\mathfrak{h}' = \frac{\varkappa\mathfrak{x}''' - \varkappa'\mathfrak{x}''}{\varkappa^2} = -\varkappa . \mathfrak{t} + \tau . \mathfrak{b}. \tag{2, 50}$$

Zusammenfassend gelten also im isotropen Raume für die Kurventheorie die folgenden Analoga der Frenet'schen Formeln:

$$\boxed{\begin{array}{rlll} \mathfrak{t}' = & & \varkappa\mathfrak{h} & \\ \mathfrak{h}' = & -\varkappa\mathfrak{t} & & +\tau\mathfrak{b} \\ \mathfrak{b}' = & & \mathfrak{o} & \end{array}} \tag{2, 51}$$

21. Aus (2, 49) und den Frenetformeln ergeben sich die „kanonischen" Zerlegungen der abgeleiteten Vektoren:

$$\left.\begin{array}{rl} \mathfrak{x}' & = \mathfrak{t} \\ \mathfrak{x}'' & = \varkappa\mathfrak{h} \\ \mathfrak{x}''' & = -\varkappa^2\mathfrak{t} + \varkappa'\mathfrak{h} + \varkappa\tau\mathfrak{b} \\ \mathfrak{x}^{\mathrm{IV}} & = -3\varkappa\varkappa'\mathfrak{t} + (\varkappa'' - \varkappa^3)\mathfrak{h} + (2\varkappa'\tau + \varkappa\tau')\mathfrak{b} \end{array}\right\} \tag{2, 52}$$

Mit ihrer Hilfe wieder erhält man in bekannter Weise die sogenannte „kanonische Entwicklung" der Raumkurve, etwa für die Stelle $s_0 = 0$ und die x-, y-, z-Achse als ihre Tangente, Haupt- und Binormale:

$$\left.\begin{array}{l} x = s - \dfrac{\varkappa_0^2}{3!}s^3 - \dfrac{3\varkappa_0\varkappa_0'}{4!}s^4 + \ldots \\[2ex] y = +\dfrac{\varkappa_0}{2!}s^2 + \dfrac{\varkappa_0'}{3!}s^3 + \dfrac{\varkappa_0'' - \varkappa_0^3}{4!}s^4 + \ldots \\[2ex] z = +\dfrac{\varkappa_0\tau_0}{3!}s^3 + \dfrac{2\varkappa_0'\tau_0 + \varkappa_0\tau_0'}{4!}s^4 + \end{array}\right\} \tag{2, 53}$$

22. Es erübrigt eine Bemerkung über jene Stellen der Raumkurve, deren Hauptnormale $\mathfrak{x}''$ vollisotrop ist und daher mit der Binormalen zusammenfällt. Für sie ist nach (26)

$$\bar{\mathfrak{x}}'' = \bar{\mathfrak{o}}, \tag{2, 54}$$

Nullvektor, also

$$\mathfrak{x}'' = z''\mathfrak{b}. \tag{2, 55}$$

An solchen Stellen ist, falls kein Wendepunkt vorliegt, d. h.

$$\mathfrak{x}'' \neq \mathfrak{o} \text{ oder } z'' \neq 0 \qquad (2,\ 56)$$

ist, die Schmiegebene isotrop. Ihre bisher definierte Krümmung $\varkappa$ wäre nach (14) stets Null und muß, wie in Nr. 10 bei den Kurven einer isotropen Ebene durch die dort definierte „Abweichung“ $\varkappa^*$ (von der Tangente in vollisotroper Richtung) ersetzt werden, deren Wert sich nach (1, 26) als

$$\boxed{\varkappa^* = z''} \qquad (2,\ 57)$$

ergibt.

Ist schließlich sogar für alle Werte s

$$\bar{\mathfrak{x}}'' \equiv \bar{\mathfrak{o}}, \qquad (2,\ 58)$$

also

$$\varkappa \equiv 0, \qquad (2,\ 59)$$

so ist dadurch eine Kurve in einer isotropen Ebene charakterisiert. Denn es folgt sofort

$$\bar{\mathfrak{x}} = \bar{\mathfrak{k}} s + \bar{\mathfrak{l}} \qquad \bar{\mathfrak{k}}^2 = 1,$$

mit konstanten Vektoren $\bar{\mathfrak{k}}$ und $\bar{\mathfrak{l}}$, d. h. ihr Grundriß ist geradlinig und sie selbst von der erwähnten Art.

Wir bemerken noch: Die Stellen mit

$$\mathfrak{x}'' = \mathfrak{o} \qquad (2,\ 60)$$

sind (falls $\mathfrak{x}''' \neq \mathfrak{o}$ ist) Wendepunkte der Kurve. Für sie ist

$$\varkappa = \varkappa^* = \tau = 0. \qquad (2,\ 61)$$

Die Gleichung

$$\mathfrak{x}'' \equiv \mathfrak{o} \qquad (2,\ 62)$$

oder das Gleichungssystem

$$\varkappa \equiv 0, \quad \varkappa^* \equiv 0, \quad \tau \equiv 0 \qquad (2,\ 63)$$

kennzeichnet schließlich die (weder isotropen noch vollisotropen) Geraden.

23. Die beiden Invarianten $\varkappa(s)$ und $\tau(s)$ bilden ein vollständiges Invariantensystem der Kurve des isotropen Raumes. Das heißt, jede weitere isotrope Bewegungsinvariante ist eine Funktion dieser beiden Grundinvarianten. Es folgt dies daraus, daß durch die beiden „*natürlichen Gleichungen*“

$$\varkappa = \varkappa(s), \qquad \tau = \tau(s) \qquad (2,\ 64)$$

eine Kurve bis auf die Bewegungen der G_6 (1, 6) des isotropen Raumes festgelegt ist.

In der Tat bestimmt zunächst nach Nr. 18 die Gleichung $\varkappa = \varkappa(s)$ den Grundriß $\bar{\mathfrak{x}}(s)$ der Kurve bis auf ebene Bewegungen. D. h. mit einer etwa mittels (33) bestimmten Grundlösung

$$x = X(s), \qquad y = Y(s) \tag{2, 65}$$

hängen alle anderen Kurven $\varkappa = \varkappa(s)$ so zusammen:

$$\left.\begin{aligned} x &= a + X(s).\cos\varphi - Y(s).\sin\varphi, \\ y &= b + X(s).\sin\varphi + Y(s).\cos\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{2, 66}$$

Es bleibt also noch zu zeigen, daß aus $\tau = \tau(s)$ das z der Kurve sich bis auf den durch die dritte Gleichung von (1, 6) gegebenen Freiheitsgrad eindeutig berechnen läßt. Nun folgt aus (15), nämlich aus

$$\varkappa^2(s).\tau(s) = [\mathfrak{x}'\mathfrak{x}''\mathfrak{x}'''] = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix} \tag{2, 67}$$

durch Eintragen der vermöge (66) durch $\varkappa(s)$ und s ausgedrückten Werte von x und y (und ihrer Ableitungen) für z die lineare inhomogene Differentialgleichung dritter Ordnung

$$\begin{vmatrix} X' & Y' & z' \\ X'' & Y'' & z'' \\ X''' & Y''' & z''' \end{vmatrix} = \varkappa^2(s).\tau(s), \tag{2, 68}$$

deren explizite Ausführung mittels (35) übrigens nichts anderes als den z-Teil der Identität (49) ergibt:

$$\boxed{\varkappa . z''' - \varkappa' z'' + \varkappa^3 z' = \varkappa^2 \tau}\,. \tag{2, 69}$$

Deren homogener Teil, Det. $= 0$, hat ersichtlich die von drei Integrationskonstanten abhängige allgemeine Lösung:

$$z_h = c + c_1 X(s) + c_2 Y(s). \tag{2, 70}$$

Ist noch

$$z_p = Z(s) \tag{2, 71}$$

irgendein partikuläres Integral von (68), so haben wir die allgemeine Lösung unserer zweiten natürlichen Gleichung (67):

$$z = c + c_1 X(s) + c_2 Y(s) + Z(s). \tag{2, 72}$$

Die allgemeinste zu den natürlichen Gleichungen (64) gehörige Raumkurve ist also durch (66) und (72) gegeben. Sie geht, wie ein Vergleich mit (1, 6) zeigt, in der Tat aus einer bestimmten Lösungskurve

$$x = X(s), \quad y = Y(s), \quad z = Z(s) \tag{2, 73}$$

durch isotrope Bewegung hervor, d. h. die beiden natürlichen Gleichungen bestimmen wirklich, und zwar bis auf isotrope Bewegungen eindeutig, unsere Raumkurve.

24. Dieser Beweis, insbesondere die Gleichung (70), zeigt auch, daß durch

$$\varkappa \not\equiv 0, \qquad \tau \equiv 0 \tag{2, 74}$$

die Kurven in nichtisotropen Ebenen gekennzeichnet sind.

In der Tat erfüllen die Koordinaten dann nach (70) eine lineare Relation

$$z = c + c_1 x + c_2 y \tag{2, 75}$$

mit konstanten Koeffizienten, also die Gleichung einer nichtisotropen Ebene.

In Nr. 22 wurde schon erwähnt, daß durch

$$\varkappa \equiv 0, \quad \tau \equiv 0 \tag{2, 76}$$

die Kurven in isotropen Ebenen gekennzeichnet sind.

Und zwar liegen für

$$\varkappa \equiv 0, \quad \tau \equiv 0, \quad \varkappa^* \not\equiv 0 \tag{2, 77}$$

krumme Linie in isotropen Ebenen vor, während

$$\varkappa \equiv 0, \; \tau \equiv 0, \; \varkappa^* \equiv 0 \tag{2, 78}$$

die (weder isotropen noch vollisotropen) Geraden kennzeichnet. Vgl. hiezu Nr. 10.

III. Einige besondere Raumkurven: Kurven konstanter Krümmung und Windung. Böschungslinien. Bertrand'sche Kurven.

25. Die Kurven fester, nicht verschwindender Krümmung $\varkappa_0 \neq 0$ und Windung $\tau_0 \neq 0$ sind *Schraublinien* des isotropen Raumes.

Ihre natürlichen Gleichungen

$$\varkappa = \varkappa_0, \quad \tau = \tau_0 \tag{3, 1}$$

können nach den Methoden der Nr. 23 zur Bestimmung der allgemeinsten solchen Kurve dienen. Es genügt, eine davon zu ermitteln, die anderen gehen durch Lagenänderung vermöge G_6 daraus hervor.

Grundriß einer solchen Kurve fester Krümmung $\varkappa_0$ ist aber der Ursprungskreis vom Radius

$$a = \frac{1}{\varkappa_0}, \tag{3, 2}$$

so daß also die Kurve unter Verwendung des Bogens s als Parameter so geschrieben werden kann:

$$x = \frac{1}{\varkappa_0} \cos \varkappa_0 s, \qquad y = \frac{1}{\varkappa_0} \sin \varkappa_0 s, \qquad z = z(s). \tag{3, 3}$$

Nach (2, 69) lautet dann die Differentialgleichung für z:

$$z''' + \varkappa_0^2 z' = \varkappa_0 . \tau_0, \tag{3, 4}$$

von der

$$z = z(s) = \frac{\tau_0}{\varkappa_0} \; s \tag{3, 5}$$

ein (uns genügendes) partikuläres Integral ist. Setzt man es in (3) ein, so ergibt sich in der Tat eine Schraublinie des isotropen Raumes. Damit ist aber alles bewiesen, denn die Richtigkeit der Umkehrung läßt sich unmittelbar bestätigen.

26. *Böschungslinien* nennen wir jene Kurven des isotropen Raumes, deren Tangenten gegen eine feste nichtisotrope Ebene ε konstante Neigung (im Sinne von Nr. 8) haben.

Um die Form ihrer natürlichen Gleichung zu ermitteln, bringen wir die feste nichtisotrope Ebene in die Lage der Grundrißebene

$$z = 0. \tag{3, 6}$$

Die Horizontalneigung ν der Kurve

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(s) \tag{3, 7}$$

ist aber nach Nr. 8 und (1, 19) gleich der Sperrung der Vektoren $\mathfrak{x}'$ und $\overline{\mathfrak{x}}'$, also

$$\nu = z'. \tag{3, 8}$$

Aus der Forderung konstanter Neigung

$$z' \equiv \nu_0 = \text{konst.} \tag{3, 9}$$

folgt

$$z'' \equiv z''' \equiv 0. \tag{3, 10}$$

Ziehen wir die Formel (2, 15) = (2, 67) heran, so ergibt sich

$$\varkappa^2 . \tau = \begin{vmatrix} x' & y' & \nu_0 \\ x'' & y'' & 0 \\ x''' & y''' & 0 \end{vmatrix} = \nu_0 [\bar{\mathfrak{x}}'' \bar{\mathfrak{x}}'''] \tag{3, 11}$$

und nach (2, 35)

$$\boxed{\frac{\tau}{\varkappa} = \nu_0.} \tag{3, 12}$$

Für Böschungslinien des isotropen Raumes ist also *notwendig* das Verhältnis von Windung und Krümmung konstant.

Diese Bedingung ist aber zur Kennzeichnung einer Böschungslinie auch *hinreichend.*

Ist nämlich für eine Kurve (7) umgekehrt das Verhältnis

$$\frac{\tau}{\varkappa} = \nu_0 = \text{konst.}, \tag{3, 13}$$

so folgt, wenn wir durch die Gleichung

$$\mathfrak{x}' - \mathfrak{c} = \nu_0 \mathfrak{b} \tag{3, 14}$$

einen Hilfsvektor $\mathfrak{c}$ einführen,

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{x}' - \nu_0 \mathfrak{b} = \mathfrak{t} - \frac{\tau}{\varkappa} \mathfrak{b} = -\frac{1}{\varkappa} \mathfrak{h}', \tag{3, 15}$$

der gegen die Kurventangente $\mathfrak{x}'$ unter der konstanten Sperrung ν_0 geneigt ist, durch Ableitung von (15)

$$\mathfrak{c}' = \mathfrak{x}'', \qquad \mathfrak{c}'' = \mathfrak{x}''' \tag{3, 16}$$

und daraus unter Beachtung von (2, 15) und (2, 35)

$$\begin{aligned} [\mathfrak{c}\mathfrak{c}'\mathfrak{c}''] &= [\mathfrak{x}'\mathfrak{x}''\mathfrak{x}'''] - \nu_0 [\mathfrak{b}\mathfrak{x}''\mathfrak{x}'''] \\ &= \varkappa^2\tau - \nu_0 [\bar{\mathfrak{x}}''\bar{\mathfrak{x}}'''] \\ &= \varkappa^2 . \tau - \frac{\tau}{\varkappa} . \varkappa^3 \equiv 0. \end{aligned}$$

$$[\mathfrak{c}\mathfrak{c}'\mathfrak{c}''] \equiv 0 \tag{3, 17}$$

ist aber die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß der Ortsvektor $\mathfrak{c}(s)$ in einer festen Ebene ε durch den Koordinatenursprung O bleibt. Und gegen diese feste Ebene ε sind nach (14) die Tangenten $\mathfrak{x}'$ der Kurve unter konstanter Sperrung ν_0 geneigt. Also ist diese Kurve in der Tat eine Böschungslinie. W. z. b. w.

Aus (3, 15) folgert man noch leicht, daß für Böschungslinien und nur für sie gilt:

$$[\mathfrak{h}' \mathfrak{h}'' \mathfrak{h}'''] = \varkappa^3 [\mathfrak{c}\, \mathfrak{c}'\, \mathfrak{c}''] \equiv 0. \tag{3, 18}$$

27. Beispiel 2. Die Kurven der natürlichen Gleichungen

$$\varkappa = \frac{A}{\sqrt{s}}, \qquad \tau = \frac{B}{\sqrt{s}} \tag{3, 19}$$

sind wegen

$$\frac{\tau}{\varkappa} = \frac{B}{A} \tag{3, 20}$$

Böschungslinien. Setzen wir

$$A = \frac{1}{\sqrt{2a}}, \tag{3, 21}$$

so lautet die erste der natürlichen Gleichungen (19), die uns den Kurvengrundriß liefert:

$$\varkappa^2 = \frac{1}{2as} \tag{3, 22}$$

Dies ist aber die bekannte natürliche Gleichung der Evolventen des Kreises vom Radius a.[10] Den Grundriß der Raumkurve (19) kann man als Kreisevolvente daher so ansetzen:

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos\varphi + a\varphi\sin\varphi \\ y &= a\sin\varphi - a\varphi\cos\varphi, \end{aligned}\right\} \tag{3, 23}$$

wobei der Wälzungswinkel φ der erzeugenden Kreistangente und die Bogenlänge s der Evolvente durch

$$s = \frac{a\varphi^2}{2} \tag{3, 24}$$

zusammenhängen.

Die Differentialgleichung (2, 69) für die z-Koordinate der Böschungslinie (19) lautet:

$$+\frac{1}{2} z'' + A^2 z' = AB. \tag{3, 25}$$

Offenbar hat sie ein lineares partikuläres Integral, z. B.

$$z = \frac{B}{A}\left(\frac{a}{2} + s\right) \tag{3, 26}$$

[10] Vgl. H. Wieleitner, Spezielle ebene Kurven, Leipzig 1908, S. 176, 197.

Man kann es, wenn noch

$$\frac{B}{A} = \frac{a}{p} \tag{3, 27}$$

gesetzt wird, unter Beachtung von (22) und (23) in die Form bringen:

$$z = \frac{1}{2p}(x^2+y^2). \tag{3, 28}$$

Durch die natürlichen Gleichungen (19) sind also die *Böschungslinien* auf *Kugeln* des isotropen Raumes charakterisiert.

28. *Bertrand'sehe Kurvenpaare* nennen wir zwei Kurven $\mathfrak{x}(s)$ und $\mathfrak{x}^*(s^*)$, welche dieselben Hauptnormalen besitzen, für die also gilt:

$$\mathfrak{h} = \pm \mathfrak{h}^*. \tag{3, 29}$$

Ist s der Bogen der Kurve $\mathfrak{x}$ und ist $\mathfrak{h}$ ihr Hauptnormalenvektor, so gilt, die Existenz Bertrand'scher Paare vorausgesetzt, für $\mathfrak{x}^*$ die Darstellung:

$$\mathfrak{x}^* = \mathfrak{x}(s)+a.\mathfrak{h}(s). \tag{3, 30}$$

Hierin ist nun a notwendig konstant! Denn der Tangentenvektor von $\mathfrak{x}^*$

$$\begin{aligned}\frac{d\mathfrak{x}^*}{ds} &= \mathfrak{x}'+a'\mathfrak{h}+a\mathfrak{h}' \\ &= \mathfrak{t}+a'\mathfrak{h}+a(-\varkappa\mathfrak{t}+\tau\mathfrak{b}) \\ &= (1-a\varkappa)\,\mathfrak{t}+a'\mathfrak{h}+a\tau\mathfrak{b}\end{aligned} \tag{3, 31}$$

ist nach Definition von $\mathfrak{x}^*$ normal zu $\mathfrak{h}$, also ist

$$\frac{d\bar{\mathfrak{x}}^*}{ds}\,.\,\bar{\mathfrak{h}} = a' = 0,$$

und wirklich $a =$ konst.

Es folgt daraus der auch direkt leicht einzusehende Satz:

Die Grundrisse Bertrand'scher Kurvenpaare sind füreinander Parallelkurven, also Evolventen derselben Evolute.

Aus

$$\frac{d\mathfrak{x}^*}{ds} = (1-a\varkappa)\,\mathfrak{t}+a\tau\mathfrak{b} \tag{3, 32}$$

folgt, wenn s^* den Bogen auf $\mathfrak{x}^*$ bezeichnet, daß der Vektor $\dfrac{d\mathfrak{x}^*}{ds^*}$ die Form hat:

$$\frac{d\mathfrak{x}^*}{ds^*} = \mathfrak{t}^* = \alpha\mathfrak{t}+\beta\mathfrak{b}, \tag{3, 33}$$

und weil $\mathfrak{t}^*$ ein Einheitsvektor ist, folgt weiter $\alpha = \pm 1$. Bei geeignetem Sinne der Bogenzählung auf $\mathfrak{x}^*$ kann man sogar $\alpha = +1$ setzen und hat

$$\mathfrak{t}^* = \mathfrak{t}+\beta.\mathfrak{b}. \tag{3, 34}$$

Daraus folgt durch Ableitung nach s:

$$\frac{d\mathfrak{t}^*}{ds^*}\cdot\frac{ds^*}{ds} = \mathfrak{t}'+\beta'.\mathfrak{b}$$

und nach den Frenet'schen Formeln (2, 51) weiter:

$$\varkappa^*\mathfrak{h}^*\ \frac{ds^*}{ds} = \varkappa.\mathfrak{h}+\beta'.\mathfrak{b}.$$

Wegen (29) muß hierin $\beta' = 0$, also $\beta = b =$ konst. sein, so daß man endgültig hat:

$$\mathfrak{t}^* = \mathfrak{t}+b.\mathfrak{b}. \tag{3, 35}$$

Also in Worten: Korrespondierende Tangenten zweier Bertrandkurven des isotropen Raumes sind gegeneinander unter *konstanter Sperrung b* geneigt.

29. Aus der Proportionalität der Vektoren $\mathfrak{t}^*$ in (35) und $\dfrac{d\mathfrak{x}^*}{ds}$ in (32) folgt

$$\begin{vmatrix} 1 & b \\ 1-a\varkappa & a\tau \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$a\varkappa+\frac{a}{b}\tau = 1. \tag{3, 36}$$

Es folgt: Zwischen Krümmung und Windung einer Bertrand'schen Kurve des isotropen Raumes besteht notwendig eine lineare Relation mit konstanten Koeffizienten:

$$\boxed{A.\varkappa+B.\tau = 1}\,. \tag{3, 37}$$

Korrespondierende Punkte zweier zugeordneten Bertrandkurven begrenzen auf den gemeinsamen Hauptnormalen Strecken von konstanter Länge $a = A$ und ihre Tangenten sind gegeneinander unter der konstanten Sperrung $b = \frac{A}{B}$ geneigt.

Wir zeigen nun: Die Bedingung (37) ist für die Bertrandsche Eigenschaft einer Kurve auch hinreichend.

Nehmen wir nämlich für die Kurve $\mathfrak{x}(s)$ (36) als erfüllt an, so hätten wir nur zu zeigen, daß es zu ihr eine Kurve $\mathfrak{x}^*$ der Form (30) gibt, welche mit ihr dieselben Hauptnormalen hat.

Für den Tangentenvektor von $\mathfrak{x}^*$ gilt dann (32) oder wegen (36)

$$\frac{d\mathfrak{x}^*}{ds} = \frac{a}{b}\tau\,(\mathfrak{t}+b\,\mathfrak{b}). \qquad (3,\ 38)$$

Nun ist aber

$$\frac{d\mathfrak{x}^*}{ds^*} = \frac{d\mathfrak{x}^*}{ds}\;\frac{ds}{ds^*}$$

oder

$$\mathfrak{t}^* = \frac{a\tau}{b}(\mathfrak{t}+b\mathfrak{b})\,\frac{ds}{ds^*}, \qquad (3,\ 39)$$

also im Grundrisse

$$\bar{\mathfrak{t}}^* = \frac{a\tau}{b}\,\frac{ds}{ds^*}\;\bar{\mathfrak{t}} \qquad (3,\ 40)$$

und nach skalarer Quadrierung, da $\mathfrak{t}^*$ und $\mathfrak{t}$ Einheitsvektoren sind:

$$1 = \left(\frac{a\tau}{b}\right)^2 \left(\frac{ds}{ds^*}\right)^2,$$

und daraus, nach Verfügung über den Sinn der Bogenzählung auf $\mathfrak{x}^*$,

$$\frac{ds}{ds^*} = \frac{b}{a\tau}, \qquad (3,\ 41)$$

woraus sich übrigens folgern ließe:

$$s^* = \frac{a}{b}\int \tau(s)\,ds. \qquad (3,\ 42)$$

Aus (39) schließt man wieder über (41)

$$\mathfrak{t}^* = \mathfrak{t}+b\mathfrak{b}. \qquad (3,\ 43)$$

Leiten wir dies, um die Hauptnormalen $\mathfrak{h}^*$ und $\mathfrak{h}$ vergleichen zu können, nach s^* ab:

$$\frac{d\mathfrak{t}^*}{ds^*} = \frac{d\mathfrak{t}}{ds} \quad \frac{ds}{ds^*},$$

so ergibt sich nach den Frenet'schen Formeln (2, 51)

$$\varkappa^* \mathfrak{h}^* = \varkappa \mathfrak{h} \quad \frac{ds}{ds^*}, \tag{3, 44}$$

was die behauptete Identität der Hauptnormalen der beiden Kurven beweist. Damit ist unser Satz aber in vollem Umfange bewiesen.

Das einfachste Beispiel einer doppeltgekrümmten Bertrandkurve ist auch im isotropen Raume die Schraublinie.

30. Wir ziehen noch einige Folgerungen. Nach (43) und (44) wird

$$[\mathfrak{t}^* \mathfrak{h}^* \mathfrak{b}^*] = \frac{\varkappa}{\varkappa^*} \quad \frac{ds}{ds^*} [\mathfrak{t} \mathfrak{h} \mathfrak{b}],$$

also, da die Vektorprodukte nach (2, 41) den Wert eins haben,

$$\varkappa^* = \varkappa \quad \frac{ds}{ds^*} \tag{3, 45}$$

und wegen (44)

$$\mathfrak{h}^* = \mathfrak{h}. \tag{3, 46}$$

Aus (45) folgt weiter wegen (41)

$$\boxed{\varkappa^* = \frac{b}{a} \quad \frac{\varkappa}{\tau}}. \tag{3, 47}$$

Ferner ist nach (46)

$$\frac{d\mathfrak{h}^*}{ds^*} = \frac{d\mathfrak{h}}{ds^*} = \frac{d\mathfrak{h}}{ds} \quad \frac{ds}{ds^*},$$

also nach Frenet (2, 51)

$$-\varkappa^* \mathfrak{t}^* + \tau^* \mathfrak{b} = (-\varkappa \mathfrak{t} + \tau \mathfrak{b}) \quad \frac{b}{a\tau}$$

und nach (43)

$$-\varkappa^* \mathfrak{t} + (\tau^* - \varkappa^* b)\, \mathfrak{b} = -\frac{b}{a} \quad \frac{\varkappa}{\tau} \mathfrak{t} + \frac{b}{a} \mathfrak{b},$$

woraus durch Koeffizientenvergleich außer (47) noch folgt:

$$\tau^* - \varkappa^* b = \frac{b}{a}$$

oder, wenn wir nach (47) eintragen:

$$\tau^* = \frac{b^2}{a} \frac{\varkappa}{\tau} + \frac{b}{a}, \tag{3, 48}$$

oder

$$\tau\tau^* = \frac{b}{a}(b\varkappa + \tau)$$

und nach (36) schließlich:

$$\boxed{\tau\tau^* = \left(\frac{b}{a}\right)^2}. \tag{3, 49}$$

„Das *Produkt der Torsionen* in korrespondierenden Punkten eines *Bertrandschen Kurvenpaares* des isotropen Raumes ist positiv-*konstant*."

31. Jede *Bertrand'sehe Kurve C* ist mit einer Kurve C_1 *konstanter Torsion* verknüpft und *umgekehrt* ist mit einer Kurve C_1 konstanter Torsion eine Schar von ∞^1 Bertrandkurven C verbunden. Diese Kurven C und C_1 haben *denselben Grundriß* und sind dadurch *bogen-* und *krümmungstreu* so aufeinander bezogen, daß korrespondierende *Tangenten* gegeneinander unter *fester Sperrung* geneigt und ihre zugehörigen *Hauptnormalen parallel* sind.

Es sei in der Tat

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(s) \tag{3, 50}$$

eine Bertrandkurve, für die mit konstantem A, B gilt:

$$A\varkappa + B\tau = 1. \tag{3, 51}$$

Wir ordnen ihr zu die Kurve

$$\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{x}(s) + \frac{A}{B} s\mathfrak{b}, \tag{3, 52}$$

deren Grundriß und damit auch Bogen s_1 dieselben wie für $\mathfrak{x}(s)$ sind. Wir können zeigen, daß diese zugeordnete Kurve (52) die konstante Torsion $\tau_1 = \dfrac{1}{B}$ hat.

Leitet man nämlich unter Rücksicht auf

$$s_1 = s \tag{3, 53}$$

die Gleichung (52) zweimal ab, so erhält man zunächst

$$\mathfrak{t}_1 = \mathfrak{t} + \frac{A}{B}\mathfrak{b} \tag{3, 54}$$

$$\mathfrak{t}_1' = \mathfrak{t}'$$

oder

$$\varkappa_1 \mathfrak{h}_1 = \varkappa \mathfrak{h}, \tag{3, 55}$$

also mit Rücksicht auf die Identität der Grundrisse

$$\varkappa_1 = \varkappa, \quad \mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h}, \tag{3, 56}$$

woraus die Krümmungstreue und Parallelität der Hauptnormalen der beiden Kurven zu entnehmen ist. Ferner folgt durch Ableitung

$$\mathfrak{h}_1' = \mathfrak{h}'$$

oder nach den Frenet'schen Formeln (2, 51) wegen $\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{b}$

$$-\varkappa_1 \mathfrak{t}_1 + \tau_1 \mathfrak{b} = -\varkappa \mathfrak{t} + \tau \mathfrak{b},$$

also wegen (56) und (54)

$$-\varkappa\left(\mathfrak{t} + \frac{A}{B}\mathfrak{b}\right) + \tau_1 \mathfrak{b} = -\varkappa \mathfrak{t} + \tau \mathfrak{b},$$

oder

$$\tau_1 = \frac{A}{B}\varkappa + \tau,$$

und endlich wegen (51) in der Tat

$$\tau_1 = \frac{1}{B} = \text{konst.} \tag{3, 57}$$

Kennt man umgekehrt eine Kurve

$$\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{x}_1(s_1) \tag{3, 58}$$

der konstanten Torsion $\tau_1 = \frac{1}{B}$, und ist A eine willkürliche Konstante, so stellt, wie ebenso leicht zu zeigen ist,

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_1(s_1) - \frac{A}{B} s_1 \mathfrak{b} \tag{3, 59}$$

eine Bertrandkurve mit der charakteristischen Relation (51) dar.

Es wird uns in Nr. 44 gelingen, alle Kurven konstanter Torsion anzugeben. Damit werden also auch alle Bertrandkurven bekannt sein.

IV. Schmiegkreis und Schmiegkugel. Sphärische Kurven.

32. Der Schmiegkreis einer Kurve des isotropen Raumes liegt in der Schmiegebene und berührt die Kurve dreipunktig. Ist die Schmiegebene zunächst nichtisotrop, so erscheint der Schmiegkreis im Grundriß als Oskulationskreis des Kurvengrundrisses. Die Schmiegkreismitte $\mathfrak{z}$ liegt also auf der Hauptnormalen in der Entfernung

$$R = \frac{1}{\varkappa}, \tag{4, 1}$$

also ist

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{x} + \frac{1}{\varkappa}\mathfrak{h} \tag{4, 2}$$

oder

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{x}(s) + \frac{1}{\varkappa^2}\ \mathfrak{x}''(s). \tag{4, 3}$$

Ist die Schmiegebene der Kurve jedoch an einer Stelle

$$\mathfrak{x}_0 = \mathfrak{x}(s_0) \tag{4, 4}$$

isotrop, d. h. gilt

$$\overline{\mathfrak{x}}_0'' = \overline{\mathfrak{o}}, \text{ aber } \mathfrak{x}_0'' = z_0''\mathfrak{b} \neq \mathfrak{o}, \tag{4, 5}$$

so ist der Schmiegkreis dort parabolisch und hat dieselbe Abweichung

$$\varkappa^* = z_0'' \tag{4, 6}$$

wie die Kurve. Seine genaue Lage und Darstellung ergibt sich dann aus der Taylorentwicklung der Kurve an der Stelle s_0:

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0 + (s - s_0)\,\mathfrak{x}_0' + \frac{(s-s_0)^2}{2!}\,\mathfrak{x}_0'' + \ldots \tag{4, 7}$$

durch Abbruch mit den Gliedern zweiter Ordnung. Mit Rücksicht auf (6) hat man also für ihn die Darstellung:

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{x}_0 + (s - s_0)\,\mathfrak{x}_0' + \frac{(s-s_0)^2}{2}\,z_0''.\mathfrak{b}. \tag{4, 8}$$

Man kann übrigens die Abweichung der Kurve an einer Stelle mit isotroper Schmiegebene auch durch eine direkte Vektorformel [zum Unterschied von der Koordinatenformel (6)] darstellen. In der Tat hat man wegen (5) und (2, 35)

$$\varkappa^* = -\frac{1}{\varkappa_0'}[\mathfrak{x}_0' \mathfrak{x}_0'' \mathfrak{x}_0''']. \tag{4, 9}$$

33. Als Schmiegkugel einer Kurve $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(s)$ an der Stelle $\mathfrak{x}_0 = \mathfrak{x}(s_0)$ bezeichnen wir jene Kugel des Büschels durch den Schmiegkreis, welche die Kurve vierpunktig berührt. Ihre Gleichung ist von der Form:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+u(x-x_0)+v(y-y_0)+w(z-z_0) = 0. \tag{4, 10}$$

Sie kann, wenn wir günstig (zur knapperen Schreibung und Rechnung insbesondere in den linearen Gliedern) die Symbolik der euklidischen Vektorrechnung hilfsweise heranziehen und den Vektor

$$\mathfrak{u} = (u, v, w) \tag{4, 11}$$

einführen, so geschrieben werden:

$$(\bar{\mathfrak{x}}-\bar{\mathfrak{x}}_0)^2+\mathfrak{u}.(\mathfrak{x}-\mathfrak{x}_0) = 0. \tag{4, 12}$$

Die Kurve $\mathfrak{x}(s)$ wird nun von der Kugel (12) an der Stelle $\mathfrak{x}_0$ vierpunktig, d. h. von dritter Ordnung berührt, wenn ihre Taylorentwicklung daselbst

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0+\mathfrak{x}_0' ds + \frac{\mathfrak{x}_0''}{2!} ds^2 + \frac{\mathfrak{x}_0'''}{3!} ds^3+\ldots \tag{4, 13}$$

bis auf Glieder vierter und höherer Ordnung in ds der Gleichung (12) genügt. Es muß also, wenn wir eintragen,

$$\left(\bar{\mathfrak{x}}_0' ds + \frac{\bar{\mathfrak{x}}_0''}{2!} ds^2+\ldots\right)^2+\mathfrak{u}\,.\left(\mathfrak{x}_0' ds + \frac{\mathfrak{x}_0''}{2!} ds^2+\frac{\mathfrak{x}_0'''}{3!} ds^3+\ldots\right) = 0, \tag{4, 14}$$

bis einschließlich ds^3 eine Identität in den ds entstehen. Daraus folgen die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{u}.\mathfrak{x}_0' &= 0 \\ \bar{\mathfrak{x}}_0'^2 + \frac{1}{2}\mathfrak{u}.\mathfrak{x}_0'' &= 0 \\ \bar{\mathfrak{x}}_0'.\bar{\mathfrak{x}}_0'' + \frac{1}{6}\mathfrak{u}.\mathfrak{x}_0''' &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{4, 15}$$

oder wegen (2, 35)

$$\mathfrak{u}\,.\,\mathfrak{x}_0' = 0, \qquad 1 + \frac{1}{2}\,\mathfrak{u}\,.\,\mathfrak{x}_0'' = 0, \qquad \mathfrak{u}\,.\,\mathfrak{x}_0''' = 0. \tag{4, 16}$$

Aus der ersten und letzten dieser drei gewöhnlichen Vektorgleichungen folgt

$$\mathfrak{u} = \lambda\,[\mathfrak{x}_0'\,\mathfrak{x}_0'''] \tag{4, 17}$$

und λ ergibt sich aus der mittleren Gleichung zu

$$\lambda = \frac{2}{[\mathfrak{x}_0'\mathfrak{x}_0''\mathfrak{x}_0''']}\,. \tag{4, 18}$$

Tragen wir die Resultate aus (17) und (18) in (12) ein und schaffen wir die Nenner weg, so lautet die Schmiegkugel endgültig

$$\boxed{[\mathfrak{x}_0'\mathfrak{x}_0''\mathfrak{x}_0'''] \,(\bar{\mathfrak{x}}-\bar{\mathfrak{x}}_0)^2 + 2\,[\mathfrak{x}-\mathfrak{x}_0,\, \mathfrak{x}_0',\, \mathfrak{x}_0'''] = 0,} \tag{4, 19}$$

und zwar auch in dem Falle, wo der Nenner in (18) verschwindet, d. h. die Schmiegebene der Kurve

$$[\mathfrak{x}-\mathfrak{x}_0,\, \mathfrak{x}_0',\, \mathfrak{x}_0''] = 0 \tag{4, 20}$$

stationär ist. Dann fällt, wie leicht zu sehen ist, die gesuchte Schmiegkugel mit der stationären Schmiegebene zusammen.

Im allgemeinen, d. h. im Falle einer nichtstationären Schmiegebene sind zwei Möglichkeiten vorhanden:

1) Die Schmiegebene der Kurve im Punkte $\mathfrak{x}_0$ ist nichtisotrop. Dann kann man wegen (2, 15) die Gleichung (19) der Schmiegkugel auch so schreiben:

$$\varkappa_0^2\tau_0\,(\bar{\mathfrak{x}}-\bar{\mathfrak{x}}_0)^2 + 2\,[\mathfrak{x}-\mathfrak{x}_0,\, \mathfrak{x}_0',\, \mathfrak{x}_0'''] = 0. \tag{4, 21}$$

Um hier wirklich eine reguläre Schmiegkugel zu erhalten, darf der Koeffizient von $(z-z_0)$ in der Entwicklung der Determinante, nämlich $[\bar{\mathfrak{x}}_0'\bar{\mathfrak{x}}_0'''] = \varkappa_0'$, nicht verschwinden. Es ist dann natürlich auch der Parameter p der Schmiegkugel:

$$p = -\frac{\varkappa_0'}{\varkappa_0^2\tau_0} = -\frac{[\bar{\mathfrak{x}}_0'\bar{\mathfrak{x}}_0''']}{[\mathfrak{x}_0'\mathfrak{x}_0''\mathfrak{x}_0''']} \tag{4, 22}$$

nicht Null.

Im Gegenfalle, wo $p = 0$ oder $\varkappa_0' = 0$, also $\varkappa$ stationär ist, erhielte man einen Drehzylinder als singulären Fall einer Schmiegkugel.

2) Die Schmiegebene der Kurve im Punkte $\mathfrak{x}_0$ ist isotrop. Nach (9) kann man dann die Schmiegkugel so ansetzen:

$$\varkappa_0^* \varkappa_0' (\overline{\mathfrak{x}} - \overline{\mathfrak{x}}_0)^2 - 2\,[\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0, \mathfrak{x}_0', \mathfrak{x}_0'''] = 0. \qquad (4,\ 23)$$

34. Sphärische Kurven heißen jene, welche auf einer festen Kugel liegen. Diese ist die gemeinsame Schmiegkugel aller Kurvenpunkte.

Man kann die Gleichung (19) der Schmiegkugel ausführlicher so schreiben:

$$\overline{\mathfrak{x}}^2 - 2\,\overline{\mathfrak{x}}\,.\,\overline{\mathfrak{x}}_0 + \overline{\mathfrak{x}}_0^2 + 2\,\frac{[\mathfrak{x}\mathfrak{x}_0'\mathfrak{x}_0'''] - [\mathfrak{x}_0\mathfrak{x}_0'\mathfrak{x}_0''']}{[\mathfrak{x}_0'\mathfrak{x}_0''\mathfrak{x}_0''']} = 0 \qquad (4,\ 24)$$

und sie noch so zusammenfassen:

$$\overline{\mathfrak{x}}^2 - 2\,\mathfrak{x}\left(\overline{\mathfrak{x}}_0 - \frac{[\mathfrak{x}_0'\mathfrak{x}_0''']}{[\mathfrak{x}_0'\mathfrak{x}_0''\mathfrak{x}_0''']}\right) + 2\left\{\frac{1}{2}\,\overline{\mathfrak{x}}_0^2 - \frac{[\mathfrak{x}_0\mathfrak{x}_0'\mathfrak{x}_0''']}{[\mathfrak{x}_0'\mathfrak{x}_0''\mathfrak{x}_0''']}\right\} = 0. \qquad (4,\ 25)$$

Hier stellt die erste der beiden Klammern einen Vektor $\mathfrak{v}$, die zweite einen Skalar v dar, die wir mit sinngemäßer Unterdrückung des Index Null aufschreiben:

$$\mathfrak{v} = \overline{\mathfrak{x}} - \frac{(\mathfrak{x}'\mathfrak{x}''')}{[\mathfrak{x}'\mathfrak{x}''\mathfrak{x}''']} \qquad (4,\ 26)$$

$$v = \frac{1}{2}\,\overline{\mathfrak{x}}^2 - \frac{[\mathfrak{x}\mathfrak{x}'\mathfrak{x}_0''']}{[\mathfrak{x}'\mathfrak{x}''\mathfrak{x}''']}\,. \qquad (4,\ 27)$$

Soll die Schmiegkugel *fest* sein, so müssen $\mathfrak{v}$ und v von s unabhängig sein, d. h. ihre Ableitungen nach s müssen identisch verschwinden. Man hat so diese notwendigen und hinreichenden Bedingungen für sphärische Kurven:

$$\mathfrak{v}' = \overline{\mathfrak{x}}' - \frac{[\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}''\mathfrak{x}''']\,([\mathfrak{x}''\mathfrak{x}'''] + [\mathfrak{x}'\mathfrak{x}^{\mathrm{IV}}]) - [\mathfrak{x}'\mathfrak{x}''\mathfrak{x}^{\mathrm{IV}}]\,[\mathfrak{x}'\mathfrak{x}''']}{[\mathfrak{x}'\mathfrak{x}''\mathfrak{x}''']^2} \qquad \mathfrak{o}$$

$$(4,\ 28)$$

$$v' = \overline{\mathfrak{x}}\,.\,\overline{\mathfrak{x}}' - \frac{[\mathfrak{x}'\mathfrak{x}''\mathfrak{x}''']\,([\mathfrak{x}\mathfrak{x}''\mathfrak{x}'''] + [\mathfrak{x}\mathfrak{x}'\mathfrak{x}^{\mathrm{IV}}]) - [\mathfrak{x}'\mathfrak{x}''\mathfrak{x}^{\mathrm{IV}}]\,[\mathfrak{x}\mathfrak{x}'\mathfrak{x}''']}{[\mathfrak{x}'\mathfrak{x}''\mathfrak{x}''']^2} \equiv 0.$$

Ersichtlich ist hier

$$v' = \mathfrak{x}\,.\,\mathfrak{v}', \qquad (4,\ 29)$$

also ist die zweite der Forderungen (28) in der ersten enthalten. Der Vektor $\mathfrak{v}'$ verschwindet aber dann und nur dann identisch, wenn seine Innenprodukte mit drei linear unabhängigen Vektoren verschwinden. Solche drei Vektoren sind nun $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{x}''$ und $\mathfrak{x}'''$, falls, wie wir annehmen, die Kurve nicht eben ist. Man errechnet nun leicht, daß von den drei Gleichungen

$$\mathfrak{v}' . \mathfrak{x}' = 0, \quad \mathfrak{v}' . \mathfrak{x}'' = 0, \quad \mathfrak{v}' . \mathfrak{x}''' = 0 \tag{4, 30}$$

die beiden ersten stets identisch erfüllt sind. Die dritte aber gibt

$$\bar{\mathfrak{x}}' . \bar{\mathfrak{x}}''' + \frac{[\mathfrak{x}' \mathfrak{x}''' \mathfrak{x}^{\mathrm{IV}}]}{[\mathfrak{x}' \mathfrak{x}'' \mathfrak{x}''']} = 0 \tag{4. 31}$$

oder mit Rücksicht auf (2, 15), (2, 34) und (2, 52):

$$\boxed{2\,\varkappa'^2 \tau + \varkappa \varkappa' \tau' - \varkappa \varkappa'' \tau = 0} \tag{4, 32}$$

als notwendige und hinreichende Bedingung für sphärische Kurven.

Zieht man hier den Krümmungsradius $K = \frac{1}{\varkappa}$ und Torsionsradius $T = \frac{1}{\tau}$ der Kurve heran, so kann man für (32) schreiben:

$$R'\; T + R' T' = 0, \tag{4, 33}$$

d. h. es ist längs sphärischer Kurven

$$p = R' . T = \text{konst.} \tag{4, 34}$$

Dies p ist, wie ein Blick auf (22) lehrt, einfach der Parameter der Schmiegkugel. Seine Konstanz ist also kennzeichnend, d. h. notwendig und hinreichend für sphärische Kurven.

35. Beispiel 3. Für die Böschungslinien auf der Kugel ist nach Nr. 26 $\frac{}{\varkappa} = \text{konst.}$, also:

$$\varkappa \tau' - \varkappa' \tau = 0, \tag{4, 35}$$

ferner gilt (32):

$$2\,\varkappa'^2 \tau + \varkappa \varkappa' \tau' - \varkappa \varkappa'' \tau = 0. \tag{4, 36}$$

Tragen wir hierin für $\varkappa \tau'$ aus (35) den Wert $\varkappa' \tau$ ein, so findet man für die Böschungslinien der Kugel:

$$(3\,\varkappa'^2 - \varkappa \varkappa'') . \tau = 0, \tag{4, 37}$$

also, da für unebene Kurven $\tau \neq 0$ ist,

$$3 \frac{\varkappa'}{\varkappa} = \frac{\varkappa''}{\varkappa'} \tag{4, 38}$$

mit dem Integral

$$\varkappa^2 = \frac{1}{2as+b} \tag{4, 39}$$

Hier kann noch durch geeignete Bogenzählung $b = 0$ erreicht werden und man findet

$$\varkappa^2 = \frac{1}{2as} \tag{4, 40}$$

in Übereinstimmung mit Nr. 27 als natürliche Gleichung des Grundrisses der Böschungslinien auf den Kugeln des isotropen Raumes (*Kreisevolventen*).

V. Die begleitenden Bilder der Raumkurve: Tangentenbild und Hauptnormalenbild. Sphärisches Bild. Richtungsbild. Nullpolare Begleiterin. Kurven konstanter Torsion.

36. Ähnlich wie in der gewöhnlichen Differentialgeometrie kann man auch im isotropen Raume für eine Kurve $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(s)$ ein *Tangentenbild* und ein *Hauptnormalenbild* durch

$$\mathfrak{t} = \mathfrak{t}(s), \tag{5, 1}$$

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{h}(s) \tag{5, 2}$$

definieren. Diese Bilder liegen wegen $\bar{\mathfrak{t}}^2 = \bar{\mathfrak{h}}^2 = 1$ auf dem „*Einheitszylinder*"

$$x^2+y^2 = 1. \tag{5, 3}$$

Sonst läuft ihre Theorie der euklidischen sehr parallel und kann darum hier übergangen werden.

Das Binormalenbild ist im isotropen Raume wegen der Konstanz der Binormalen $\mathfrak{b}$ ausgeartet. Als Ersatz stehen uns jedoch die folgenden beiden Bilder zur Verfügung, die beide gewisse Analoga des euklidischen sphärischen Bildes sind.

37. Das *sphärische Bild* einer Raumkurve $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(s)$ wird günstig so definiert: Wir legen an die „*Einheitskugel*"

$$z = \frac{1}{2}(x^2+y^2), \tag{5, 4}$$

deren Parameter $p = 1$ ist,[11] parallel zur Schmiegebene σ der Kurve

$$[\mathfrak{y}-\mathfrak{x}, \mathfrak{x}', \mathfrak{x}''] = 0, \tag{5, 5}$$

die wir als nicht isotrop voraussetzen:

$$\bar{\mathfrak{x}}'' \neq \bar{\mathfrak{o}}, \tag{5, 6}$$

die eindeutig bestimmte Tangentialebene und ermitteln ihren Berührpunkt $\mathfrak{X}_\sigma = \mathfrak{X}_\sigma(s)$. Dieser „sphärische Bildpunkt" beschreibt das „sphärische Bild" der Raumkurve. Man findet dafür leicht die folgende Darstellung seines Ortsvektors $\mathfrak{X}_\sigma = (X_\sigma, Y_\sigma, Z_\sigma)$:

$$\left.\begin{aligned}
X_\sigma &= \frac{\begin{vmatrix} z' & y' \\ z'' & y'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} z' & y' \\ z'' & y'' \end{vmatrix}}{\varkappa} \\
Y_\sigma &= \frac{\begin{vmatrix} x' & z' \\ x'' & z'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} x' & z' \\ x'' & z'' \end{vmatrix}}{\varkappa} \\
Z_\sigma &= \frac{X_\sigma^2 + Y_\sigma^2}{2} = \frac{\varkappa^2 z'^2 + z''^2}{2\varkappa^2},
\end{aligned}\right\} \ldots \mathfrak{X}_\sigma \tag{5, 7}$$

oder vektoriell geschrieben:

$$\mathfrak{X}_\sigma = \bar{\mathfrak{X}}_\sigma + \frac{\bar{\mathfrak{X}}_\sigma^2}{2}\,\mathfrak{b}, \tag{5, 8}$$

wobei

$$\bar{\mathfrak{X}}_\sigma = \mathfrak{b} - \frac{1}{\varkappa}[\mathfrak{x}'\mathfrak{x}''] = \mathfrak{b} - [\mathfrak{t}\mathfrak{h}] \tag{5, 9}$$

den Grundrißvektor von $\mathfrak{X}_\sigma$ bedeutet.

38. Da sich zwei benachbarte Schmiegebenen der Kurve $\mathfrak{x}(s)$ nach einer Tangente $\mathfrak{t}$ schneiden, muß auch die Schnittgerade der

---

[11] Für manche Zwecke der Flächentheorie empfiehlt es sich jedoch, als Einheitskugel das Paraboloid

$$z = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2) \tag{5, 4*}$$

des Parameters $p = -1$ zu nehmen.

Tangentialebenen der Einheitskugel in Nachbarpunkten des sphärischen Bildes diese Richtung haben. Die Tangentenrichtung des sphärischen Bildes $\mathfrak{X}_\sigma$ ist auf der Kugel (4) hierzu konjugiert, d. h. normal, und somit parallel zur Hauptnormalen $\mathfrak{h}$ der Raumkurve $\mathfrak{x}(s)$.

Zur Ermittlung des genauen Zusammenhanges leiten wir (9) nach s ab und erhalten

$$\mathfrak{X}'_\sigma = \tau\,[\mathfrak{b}\,\mathfrak{t}] \tag{5, 10}$$

oder wegen (2, 42),

$$\bar{\mathfrak{X}}'_\sigma = \tau\,\bar{\mathfrak{h}} \tag{5, 11}$$

und daraus folgt nach obiger geometrischer Bemerkung über die Richtung der Tangente $\mathfrak{X}'_\sigma(s)$ des sphärischen Bildes

$$\mathfrak{X}'_\sigma = \tau\,\mathfrak{h}. \tag{5, 12}$$

Man kann direkt auch so rechnen: für (11) kann man wegen (2, 44) schreiben

$$\bar{\mathfrak{X}}'_\sigma = \frac{\tau}{\varkappa}\,\bar{\mathfrak{x}}''. \tag{5, 13}$$

Nach (9) ist weiter wegen (2, 41)

$$\begin{aligned}\bar{\mathfrak{X}}_\sigma^2 &= \mathfrak{b}^2 - 2\,[\mathfrak{t}\mathfrak{h}]\,\mathfrak{b} + [\mathfrak{t}\mathfrak{h}]^2\\ &= 1 - 2 + [\mathfrak{t}\mathfrak{h}]^2\end{aligned}$$

woraus durch nochmalige Ableitung unter Beachtung der Frenet'schen Formeln (2, 51) folgt:

$$\begin{aligned}\bar{\mathfrak{X}}_\sigma . \bar{\mathfrak{X}}'_\sigma &= [\mathfrak{t}\mathfrak{h}] . ([\mathfrak{t}'\mathfrak{h}] + [\mathfrak{t}\mathfrak{h}'])\\ &= \tau\,[\mathfrak{t}\mathfrak{h}] . [\mathfrak{t}\mathfrak{b}] = \frac{\tau}{\varkappa}\,[\mathfrak{x}'\mathfrak{x}''] . [\mathfrak{x}'\mathfrak{b}]\\ &= \frac{\tau}{\varkappa} \begin{vmatrix} \bar{\mathfrak{x}}'^2 + z'^2 & \\ \bar{\mathfrak{x}}' . \mathfrak{x}'' + z'z'' & z'' \end{vmatrix}\\ &=\end{aligned} \tag{5, 14}$$

Nun erhält man durch Ableitung von (8)

$$\mathfrak{X}'_\sigma = \bar{\mathfrak{X}}'_\sigma + \bar{\mathfrak{X}}_\sigma . \bar{\mathfrak{X}}'_\sigma\,\mathfrak{b}, \tag{5, 15}$$

woraus durch Eintragen von (13) und (14) für die Tangente $\mathfrak{X}'_\sigma$ des sphärischen Bildes jetzt direkt folgt

$$\mathfrak{X}'_\sigma = \frac{\tau}{\varkappa}\,(\mathfrak{x}'' + z''\,\mathfrak{b}) = \frac{\tau}{\varkappa}\,\mathfrak{x}'', \tag{5, 16}$$

d. h. wie oben

$$\mathfrak{X}'_\sigma = \tau\,\mathfrak{h}. \tag{5, 12}$$

39. Wir ermitteln noch eine einfache geometrische Deutung für die Windung $\tau(s)$ der Raumkurve $\mathfrak{x}(s)$ sowie die Werte der Krümmung $\varkappa_3$ und Windung τ_3 des sphärischen Bildes $\mathfrak{X}_3(s)$.

Aus (11) folgt durch Quadrierung

$$\overline{\mathfrak{X}}_3'^2 = \tau^2 \tag{5, 17}$$

und daraus bei geeigneter Zählung für den Bogen S des sphärischen Bildes wegen (2, 10)

$$\frac{dS}{ds} = \tau(s). \tag{5, 18}$$

Daraus folgt die einfache geometrische Deutung der Windung $\tau(s)$ einer Kurve des isotropen Raumes als Verhältnis der Bogenelemente dS des sphärischen Bildes und ds der Urkurve.

Zur Berechnung der Krümmung $\varkappa_3$ und Windung τ_3 des sphärischen Bildes $\mathfrak{X}_3(s)$ berechnen wir unter Rücksicht auf (18)

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\mathfrak{X}_3}{dS} &= \frac{1}{\tau}\,\mathfrak{X}_3' = \mathfrak{h} \\ \frac{d^2\mathfrak{X}_3}{dS^2} &= -\frac{\varkappa}{\tau}\,\mathfrak{t}+\mathfrak{b} \\ \frac{d^3\mathfrak{X}_3}{dS^3} &= -\frac{1}{\tau}\left\{\left(\frac{\varkappa}{\tau}\right)'\mathfrak{t}+\frac{\varkappa^2}{\tau}\,\mathfrak{h}\right\} \end{aligned}\right\}. \tag{5, 19}$$

Daraus findet man

$$\varkappa_3 = \left[\frac{d\overline{\mathfrak{X}}_3}{dS}, \frac{d^2\overline{\mathfrak{X}}_3}{dS^2}\right] = \frac{\varkappa}{\tau} \tag{5, 20}$$

$$\tau_3 = \frac{\left[\dfrac{d\mathfrak{X}_3}{dS}, \dfrac{d^2\mathfrak{X}_3}{dS^2}, \dfrac{d^3\mathfrak{X}_3}{dS^3}\right]}{\varkappa_3^2} = \frac{\varkappa\tau'-\tau\varkappa'}{\varkappa^2\tau} \tag{5, 21}$$

oder einfacher

$$\tau_3 = \frac{1}{\tau}\left(\frac{\tau}{\varkappa}\right)'. \tag{5, 22}$$

Das sphärische Bild einer Böschungslinie ist also wegen Nr. 26 und 24 ein Kreis auf der Einheitskugel, wie ja auch geometrisch klar ist.

40. *Das Richtungsbild einer Raumkurve.* Die euklidische Kurventheorie ersetzt gerne die sphärischen Bilder durch die ihnen im Durchmesserbündel der Einheitskugel entsprechenden Figuren („Richtungsbilder"). Auch in der Differentialgeometrie des isotropen Raumes ist dies sehr zweckmäßig. Das Durchmesserbündel der Einheitskugel (4) besteht dabei aus den z-parallelen, d. h. vollisotropen Geraden und wird günstig ersetzt durch seine Spur auf der Grundrißebene $z = 0$. Das entstehende „*Richtungsbild*" $\mathfrak{X}_r(s) = (X_r, Y_r)$ *ist also einfach der Grundriß* $\overline{\mathfrak{X}}_3(s)$ *des sphärischen Bildes* $\mathfrak{X}_3(s)$. Beide haben daher auch dieselbe Bogenlänge S und dieselbe Krümmung. Also gelten wegen (7), (11), (18) und (20) die Formeln:

$$\left.\begin{aligned} X_r &= \frac{\begin{vmatrix} z' & y' \\ z'' & y'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} z' & y' \\ z'' & y'' \end{vmatrix}}{\varkappa} \\ Y_r &= \frac{\begin{vmatrix} x' & z' \\ x'' & z'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} x' & \\ x'' & z'' \end{vmatrix}}{\varkappa} \end{aligned}\right\} \ldots \mathfrak{X}_r(s) \qquad (5,\ 23)$$

$$\mathfrak{X}_r' = \tau\overline{\mathfrak{h}} \qquad (5,\ 24)$$

$$\frac{dS}{ds} = \tau \qquad (5,\ 25)$$

$$\varkappa_r = \frac{\varkappa}{\tau}. \qquad (5,\ 26)$$

Eine elementargeometrische Konstruktion des Richtungsbildes einer Raumkurve kann auf Grund einer bekannten Brennpunktseigenschaft der Einheitskugel (4) so beschrieben werden: Man lege durch den Punkt $R = (0, 0, 1)$ die euklidische Normale n auf die Schmiegebene der Kurve und schneide sie mit der Grundrißebene $z = 0$ in einem Punkte $\mathfrak{X}_r$, dem gesuchten Richtungsbilde des Kurvenpunktes.

41. Es gibt noch eine andere Deutung für das Richtungsbild $\mathfrak{X}_r$. Man kann nämlich die Raumkurve $\mathfrak{x}(s)$ an der Einheitskugel (4) polarisieren und erhält eine „polare Begleiterin“ oder „Polarkurve“ $\mathfrak{X}_p(s)$, die nach Nr. 4 mit der Ausgangskurve gleiche, nur dual vertauschte metrische Invarianten hat, wobei noch die Spannen (1, 8) paralleler Punkte und die Abstände (1, 10) paralleler Ebenen im Vorzeichen geändert sind. Eine elementare Eigenschaft der Polarität der Einheitskugel beweist nun, daß das Richtungsbild einer Raumkurve auch als Grundriß ihrer Polarkurve aufgefaßt werden kann.

42. Wegen der eben genannten Vorzeichenänderung ist es jedoch vorteilhafter, nicht die obige polare Begleiterin der Raumkurve einzuführen, sondern vielmehr jene zur Raumkurve $\mathfrak{x}(s)$ *nullpolare Begleiterin* $\mathfrak{X}_n(s)$, die aus ihr durch die Reziprozität des Nullsystems $\mathfrak{N}$ (1, 10) mit der Darstellung

$$z - Z = Xy - Yx \tag{5, 27}$$

entsteht. Man erhält für die Koordinaten (X_n, Y_n, Z_n) der Punkte von $\mathfrak{X}_n(s)$ leicht:

$$\left.\begin{aligned} X_n &= \frac{\begin{vmatrix} x' & \\ x'' & z'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}}, \\ Y_n &= \frac{\begin{vmatrix} y & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}}, \\ Z_n &= \frac{\begin{vmatrix} x & y & \\ & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}} \end{aligned}\right\} \ldots \mathfrak{X}_n(s). \tag{5, 28}$$

Der Grundriß dieses nullpolaren Bildes geht aus dem Richtungsbilde der Raumkurve durch positive Vierteldrehung um den Koordinatenursprung hervor. Dies entnimmt man leicht einer elementaren Erzeugungsweise des Nullsystems.

Daraus folgt, daß Richtungsbild und nullpolare Begleiterin einer Raumkurve dieselbe Bogenlänge S und dieselbe Krümmung haben. Also ist wegen (25) und (26)

$$\frac{dS}{ds} = \tau \tag{5, 29}$$

$$\varkappa_n = \frac{\varkappa}{\tau} \tag{5, 30}$$

Nach der letzten Formel sind z. B. in der Tat metrisch dual zu den Böschungslinien $\frac{\tau}{\varkappa} =$ konst. die auf Drehzylindern gelegenen Kurven $\varkappa_n =$ const. Vgl. Nr. 8.

Da weiter nach Nr. 4 durch das Nullsystem $\mathfrak{N}$ Abstände und Winkel unter Invarianz ihrer Größe vertauscht werden, gilt für die Bogenelemente ds und dS und für die Kontingenzwinkel der Schmiegebenen $d\varphi$ und $d\Phi$ der Kurve $\mathfrak{x}(s)$ und ihrer nullpolaren Begleiterin $\mathfrak{X}_n(s)$

$$ds = d\Phi, \quad d\varphi = dS. \tag{5, 31}$$

Also gilt wegen (29)

$$\boxed{\frac{d\varphi}{ds} = \tau,} \tag{5, 32}$$

worin die elementare und direkte Deutung der Windung einer Raumkurve als Verhältnis von Kontingenzwinkel $d\varphi$ der Schmiegebenen und Bogenelement ds enthalten ist.

Für die Windung τ_n der nullpolaren Begleiterin findet man

$$\tau_n = \frac{d\Phi}{dS} = \frac{ds}{d\varphi} = \frac{1}{\tau}. \tag{5, 33}$$

Zusammenfassend gilt also: Zwischen den Krümmungen $\varkappa$, $\varkappa_n$ und den Windungen τ, τ_n einer Kurve und ihrer nullpolaren Begleiterin bestehen die involutorischen Beziehungen:

$$\varkappa_n = \frac{\varkappa}{\tau}, \quad \tau_n = \frac{1}{\tau}. \qquad \varkappa = \frac{\varkappa_n}{\tau_n}, \quad \tau = \frac{1}{\tau_n}. \tag{5, 34}$$

Die Invarianten $\varkappa_n$ und τ_n sind den Invarianten $\varkappa$ und τ der Raumkurve in der metrischen Dualität des isotropen Raumes zugeordnet. Für die Invariante $\varkappa_n = \frac{\varkappa}{\tau}$ hat sich der Name konische Krümmung der Kurve eingebürgert. Man kann sie (dual zur Krümmung) definieren als das Verhältnis der Kontingenzwinkel der Kurventangenten und der Schmiegebenen.

Also: Metrisch dual zu einer Kurve der festen Windung τ ist wieder eine Kurve fester Windung $\frac{1}{\tau}$.

Man bestätigt übrigens leicht, daß zwischen den Tangentenvektoren $\mathfrak{x}' = \frac{d\mathfrak{x}}{ds} = (x', y', z')$ und $\dot{\mathfrak{X}}_n = \frac{d\mathfrak{X}_n}{ds} = (\dot{X}_n, \dot{Y}_n, \dot{Z}_n)$ der beiden nullpolaren Kurven $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{X}_n$ die Beziehungen bestehen:

$$\dot{X} = \tau x', \quad \dot{Y} = \tau y', \quad \dot{Z} = \tau (x y' - x' y). \qquad (5, 35)$$

43. Von besonderem Interesse sind nun jene Kurven $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(s)$, die dem Nullsysteme $\mathfrak{N}$ (27) angehören. Sie fallen nämlich mit ihren nullpolaren Begleiterinnen $\mathfrak{X}_n(s)$ zusammen. Also gilt für sie $\varkappa_n = \varkappa$, $\tau_n = \tau$ und aus (34) bzw. (35) folgt $\tau = +1$.

„Die im Gewinde

$$dz = x\,dy - y\,dx \qquad (5, 36)$$

des Nullsystems $\mathfrak{N}$ (27) enthaltenen Kurven haben die konstante Windung $\tau = +1$."

Es ist dies nur ein Sonderfall des allgemeinen Satzes:

Alle Kurven des Gewindes

$$dz = C.(x\,dy - y\,dx) \qquad (5, 37)$$

haben die konstante Windung $\tau = C$.

Man kann dies ebenso leicht rechnerisch bestätigen, wie aus obigem Sonderfalle ableiten.

44. Um die allgemeinste Kurve konstanter Windung $\tau = C$ zu erhalten, hat man die natürlichen Gleichungen

$$\varkappa = \varkappa(s), \qquad \tau = C, \qquad (5, 38)$$

nach den Verfahren der Nr. 23 zu lösen. Die erste dieser Gleichungen legt den Grundriß der gesuchten Kurve bis auf Bewegungen fest. Man kann nun über jedem gegebenen Grundrisse eine Kurve des Gewindes (37) errichten. Also gilt:

Die Kurven der festen Windung $\tau = C$ stimmen überein mit den Kurven des Gewindes (37) und den aus ihnen durch Bewegungen des isotropen Raumes entstehenden. Da die Gewinde (37) eine G_4 von Bewegungen gestatten, genügen übrigens bereits die Translationen in horizontaler Richtung.

Natürlich könnte man ebensogut die Gewinde (37) selbst in dieser Art verschieben, wodurch man die Gewinde eines (von den Parametern A und B abhängigen) Bündels

$$dz = A\,dx + B\,dy + C\,(x\,dy - y\,dx) \qquad \mathfrak{G} \qquad (5,\ 39)$$

erhält. Es gilt also das einfache Theorem:

„*Alle in den Gewinden des Bündels* (39) *enthaltenen Kurven, und nur sie, haben die feste Torsion* $\tau = C$.“

45. Unter diesen Kurven konstanter Torsion kommt jenen eine ausgezeichnete Bedeutung innerhalb der isotropen Raumgeometrie zu, deren Torsion $\tau = \pm 1$ ist. Die sie enthaltenden Gewinde mögen als „Rechtsgewinde“ und „Linksgewinde“ unterschieden werden, so daß gilt:

„*Kurven der festen Torsion* $\tau = +1$ *sind alle jene, und nur jene, welche in den Rechtsgewinden*

$$dz = A\,dx + B\,dy + (x\,dy - y\,dx) \ldots \mathfrak{G}_r \qquad (5,\ 40)$$

enthalten sind.

Kurven der festen Torsion $\tau = -1$ *sind alle jene, und nur jene, die den Linksgewinden*

$$dz = A\,dx + B\,dy - (x\,dy - y\,dx) \qquad \mathfrak{G}_l \qquad (5,\ 41)$$

entnommen sind.

Das Bündel der Rechtsgewinde und jenes der Linksgewinde liegen involutorisch.“

Jedes der Gewinde (39) gestattet eine G_4 von Bewegungen (1, 6) des isotropen Raumes, insonderlich auch eine G_3 von Grenzbewegungen der Darstellung:

$$\left.\begin{aligned} x' &= a + x \\ y' &= b \qquad + y \\ z' &= c - b\,Cx + a\,Cy + z \end{aligned}\right\} \ldots G_3. \qquad (5,\ 42)$$

Für $C = +1$ ist dies genau die Gruppe S_3^l der Linksschiebungen (1, 34), für $C = -1$ aber jene der Rechtsschiebungen S_3^r (1, 35). Und darin drückt sich auch am besten die Sonderstellung aus, die den Kurven mit der festen Torsion $\tau = \pm 1$ unter den Kurven aller anderen festen Torsionen und den mit ihnen verbundenen Rechts- und Linksgewinden (40) und (41) unter den allgemeinen Gewinden (39) zukommt. Diese Sonderstellung läßt sich kurz so fassen:

„*Die Rechtsgewinde* $\mathfrak{G}_r$ *und nur sie, unter den Gewinden* (39) *gestatten sämtliche Linksschiebungen* S_3^l. *Ebenso gestatten die Linksgewinde* $\mathfrak{G}_l$ *und nur sie, alle Rechtsschiebungen* S_3^r *des isotropen Raumes.*“

Es sei bemerkt, daß analoge Theoreme auch im elliptischen Raume (der Krümmung eins) und im quasielliptischen Raume W. Blaschkes gelten, was freilich noch nirgends ausgesprochen zu sein scheint. Der engen Beziehungen zwischen den Geometrien des elliptischen, quasielliptischen und isotropen Raumes wurde ja schon in Nr. 13 gedacht.

Dieser Beziehungen und der dargelegten Theorie der Kurven konstanter Torsion des isotropen Raumes werden wir uns in der Flächentheorie insbesondere beim Studium der Flächen konstanter Relativkrümmung zu erinnern haben.

46. Sind uns so auch alle Kurven konstanter Windung als Kurven einer zweifachen Translationsschar von Gewinden (eines speziellen Gewindebündels) bekannt, so kommt doch auch dem folgenden Satze, der die Kurven konstanter Krümmung und jene konstanter Windung verknüpft, einiges Interesse zu; wir können uns dabei auf die Krümmung und Windung eins beschränken:

Ist $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(s)$ eine auf dem Einheitszylinder $x^2 + y^2 = 1$ gelegene Kurve der Krümmung $\varkappa = 1$ und Windung $\tau = \tau(s)$, so ist

$$\mathfrak{y} = \int \tau(s)\, \mathfrak{x}'(s)\, ds \tag{5, 43}$$

eine zu ihr tangentenparallele Kurve mit der festen Windung $\tau_0 = 1$ und der Krümmung $\varkappa_0 = \frac{1}{\tau(s)}$.

Es folgt, daß man so (stets bis auf isotrope Bewegungen) alle Kurven $\mathfrak{y}$ der festen Windung eins erhalten kann. In der Tat ist wegen (43)

$$\begin{aligned}
\mathfrak{y}' &= \tau\mathfrak{x}' \\
\mathfrak{y}'' &= \tau\mathfrak{x}'' + \tau'\mathfrak{x}' \\
\mathfrak{y}''' &= \tau\mathfrak{x}''' + 2\,\tau'\mathfrak{x}'' + \tau''\mathfrak{x}',
\end{aligned}$$

also gilt wegen $\varkappa = 1$ und (2, 13)

$$\bar{\mathfrak{y}}'^2 = \tau^2, \quad [\bar{\mathfrak{y}}'\,\bar{\mathfrak{y}}''] = \tau^2\,[\bar{\mathfrak{x}}'\bar{\mathfrak{x}}''] = \tau^2\varkappa = \tau^2$$

$$[\mathfrak{y}'\,\mathfrak{y}''\,\mathfrak{y}'''] = \tau^3\,[\mathfrak{x}'\,\mathfrak{x}''\,\mathfrak{x}'''] = \tau^3.\varkappa^2\tau = \tau^4$$

und daher wirklich:

$$\tau_0 = \frac{[\mathfrak{y}'\mathfrak{y}''\mathfrak{y}''']}{[\bar{\mathfrak{y}}'\bar{\mathfrak{y}}'']^2} = 1, \qquad \varkappa_0 = \frac{[\bar{\mathfrak{y}}'\bar{\mathfrak{y}}'']}{(\bar{\mathfrak{y}}'^2)^{3/2}} = \frac{1}{\tau(s)}. \qquad (5,\ 44)$$

Die allgemeinste Kurve der konstanten Torsion $C = \frac{1}{B}$ erhält man aus obigen Formeln, wenn man in (43) $\mathfrak{x}$ durch $B.\mathfrak{x}(s)$ ersetzt. Die Krümmung $\varkappa_0$ nimmt dann den Wert $\frac{1}{B\tau}$ an.

Nach Nr. 31 ist uns übrigens mit der allgemeinsten Kurve der konstanten Torsion $\frac{1}{B}$ auch die allgemeinste Bertrandkurve des isotropen Raumes bekannt.

VI. Die begleitende Schraubung. Die Darboux'sche Drehung und der Drehungsbivektor einer Raumkurve.

47. Zwei Nachbarpunkte s und $s+ds$ einer Raumkurve $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(s)$ und ihre begleitenden Dreikante $(\mathfrak{t}, \mathfrak{h}, \mathfrak{b})$ und $(\mathfrak{t}+\mathfrak{t}'\,ds, \mathfrak{h}+\mathfrak{h}'\,ds, \mathfrak{b}+\mathfrak{b}'\,ds) = (\mathfrak{t}+\mathfrak{t}'\,ds, \mathfrak{h}+\mathfrak{h}'\,ds, \mathfrak{b})$ bestimmen eindeutig eine Bewegung des isotropen Raumes, die sie zur Deckung bringt, und die wir gerne als begleitende Schraubung der Raumkurve bezeichnen wollen, wenn es sich auch nicht immer gerade um eine wirkliche Schraubung handeln wird, sondern gelegentlich einer der anderen Bewegungstypen aus Nr. 12 auftreten kann. Verschiebt man die Dreikante so parallel, daß ihre Scheitel in den Koordinatenursprung O fallen, so gelangen sie bereits durch eine reine Drehung des isotropen Raumes um den festen Ursprung zur Deckung, die wir als die begleitende Darbouxsche Drehung der Kurve bezeichnen.

Die begleitende Schraubung (deren allgemeiner Typ in Nr. 12 unter I beschrieben wurde) gibt, wenn sie auf die Stelle s der Kurve kontinuierlich angewandt wird, Anlaß zu einer den Kurvenbogen zwischen den Stellen s und $s + ds$ oskulierend ersetzenden Schraublinie. Diese hat in s dieselbe Krümmung und Windung wie die Kurve und besitzt in s und $s+ds$ mit ihr gemeinsame begleitende Dreibeine.

Aus elementaren Eigenschaften der Schraublinie folgt, daß die Hauptachse der begleitenden Schraubung stets das vollisotrope Gemeinlot der Hauptnormalen in den benachbarten begleitenden Dreibeinen ist. Die benachbarten Hauptnormalenvektoren $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{h}+d\mathfrak{h}$ bestimmen ferner jene Ebenenstellung, welche für die begleitende Schraubung invariant ist. Diese invariante Stellung ist also parallel zur entsprechenden Tangentialebene des Richtkegels der Hauptnormalen der Kurve.

Die begleitende Darboux'sche Drehung, deren allgemeiner Typ sich unter II in Nr. 12 beschrieben findet, hat daher die vollisotrope z-Achse als Hauptachse und besitzt ferner die zugehörige Tangentialebene des Richtkegels der Hauptnormalen als einzige eigentliche reelle Fixebene.

48. Es genügt für diesen einfachen Tatbestand, einige grundlegende Formeln zu geben. Wir beschränken uns dabei, wie üblich, auf die begleitende Darboux'sche Drehung. Diese führt die im Ursprung O angehefteten Vektoren $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{b}$ der Reihe nach in ihre Nachbarlagen $\mathfrak{t}+\mathfrak{t}'\,ds$, $\mathfrak{h}+\mathfrak{h}'\,ds$, $\mathfrak{b}$ über. Durchläuft man die Raumkurve $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}\,(s)$ mit der Geschwindigkeit eins, d. h. ist der Bogen s der Kurve die Laufzeit, so erfolgt die Darboux'sche Drehung mit einer gewissen Geschwindigkeit, deren Vektor $\mathfrak{V}_{\mathfrak{X}}$ im Raumpunkte $\mathfrak{X} = (X,\ Y,\ Z)$ die folgenden Koordinaten besitzt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dX}{ds} &= \qquad\qquad -\varkappa Y \\ \frac{dY}{ds} &= +\varkappa X \\ \frac{dZ}{ds} &= \frac{\begin{vmatrix} x'' & z'' \\ x''' & z''' \end{vmatrix}}{\varkappa^2}\,X + \frac{\begin{vmatrix} y'' & z'' \\ y''' & z''' \end{vmatrix}}{\varkappa^2}\,Y \end{aligned}\right\}\ldots\mathfrak{V}_{\mathfrak{X}}. \qquad (6,\ 1)$$

In der Tat, übt man auf die Vektoren $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{b}$ die im Zeitelemente ds wirkende Darboux'sche Drehung (1) aus, so erhält man die neuen Lagen $\mathfrak{t}+\mathfrak{t}'\,ds$, $\mathfrak{h}+\mathfrak{h}'\,ds$, $\mathfrak{b}$, denn die Geschwindigkeitsvektoren an den Endpunkten von $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{b}$ sind wirklich

$$\mathfrak{V}_{\mathfrak{t}} = \mathfrak{t}' = \mathfrak{x}'', \quad \mathfrak{V}_{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h}' = -\varkappa\mathfrak{t}+\tau\mathfrak{b}, \quad \mathfrak{V}_{\mathfrak{b}} = \mathfrak{o}! \qquad (6,\ 2)$$

Die letzte dieser Gleichungen ist nämlich aus (1) unmittelbar klar, die erste und zweite aber ergeben sich, wenn man für (X, Y, Z) einmal die Koordinaten (x', y', z') von $\mathfrak{t}$ und dann die Koordinaten $\left(\frac{x''}{\varkappa}, \frac{y''}{\varkappa}, \frac{z''}{\varkappa}\right)$ von $\mathfrak{h}$ einträgt und die Relationen (2, 30), (2, 34) und (2, 49) beachtet.

Man bestimmt nun auch leicht direkt die reelle Fixebene der Darboux'schen Drehung. Die Ebene

$$\Delta \equiv A.X+B.Y+C.Z=0 \tag{6, 3}$$

wird nämlich bei der Drehung (1) fest sein, wenn nach (1) ihr Verrückungsglied

$$d\Delta \equiv A.dX+B.dY+C.dZ \tag{6, 4}$$

identisch in X, Y, Z verschwindet. Daraus bestimmen sich A, B und C bis auf einen gemeinsamen Faktor wegen (2, 35) zu

$$A = \begin{vmatrix} y'' & z'' \\ y''' & z''' \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} z'' & x'' \\ z''' & x''' \end{vmatrix}, \quad C = \varkappa^3 = \begin{vmatrix} x'' & y'' \\ x''' & y''' \end{vmatrix}, \tag{6, 5}$$

so daß man die Fixebene der begleitenden Darboux'schen Drehung schreiben kann:

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix} = 0 \tag{6, 6}$$

oder, wenn wir den Ortsvektor $\mathfrak{X} = (X, Y, Z)$ heranziehen, kürzer so:

$$[\mathfrak{X}\, \mathfrak{x}''\, \mathfrak{x}'''] = 0. \tag{6, 7}$$

Übrigens ist $\mathfrak{x}'' = \varkappa\mathfrak{h}$, also $\mathfrak{x}''' = \varkappa'\mathfrak{h}+\varkappa\mathfrak{h}'$. Daher ist

$$[\mathfrak{X}\, \mathfrak{x}''\, \mathfrak{x}'''] = \varkappa^2\, [\mathfrak{X}\, \mathfrak{h}\, \mathfrak{h}'] \tag{6, 8}$$

und die Fixebene der Darboux'schen Drehung (an Stellen mit $\varkappa \neq 0$, d. h. mit nichtisotroper Schmiegebene) lautet auch

$$[\mathfrak{X}\, \mathfrak{h}\, \mathfrak{h}'] = 0, \tag{6, 9}$$

d. h. diese Fixebene berührt wirklich den Richtkegel der Hauptnormalen $\mathfrak{h}$.

49. Wenn auch (der ausgearteten Orthogonalitätsverhältnisse wegen) in der Kurventheorie des isotropen Raumes ein unmittelbares Analogon des sogenannten Darboux'schen Drehvektors nicht vorhanden ist, so kann doch das mit der Winkelgeschwindigkeit ω der augenblicklichen Darboux'schen Drehung versehene „Blatt“ der Fixebene, d. h. also der „Bivektor“

$$\mathfrak{D} = [\mathfrak{h}\,\mathfrak{h}'] \tag{6, 10}$$

als vollwertiger Ersatz herangezogen werden. Als Wert der Winkelgeschwindigkeit ω, die im Sinne der Bewegungsgeometrie des isotropen Raumes aus dem Grundriß abzulesen ist, ergibt sich hierbei:

$$\omega = [\bar{\mathfrak{h}}\bar{\mathfrak{h}}'] = [\bar{\mathfrak{h}}, -\varkappa\,\bar{\mathfrak{t}}] = \varkappa\,[\bar{\mathfrak{t}}\bar{\mathfrak{h}}] = \varkappa\,(s). \tag{6, 11}$$

Man kann zu diesem „Darboux'schen Drehungsbivektor“ $\mathfrak{D}$ auch so gelangen. Wir fassen die Vektorpaare des begleitenden Dreibeins zu „begleitenden Bivektoren“ zusammen und setzen

$$\mathfrak{T} = [\mathfrak{h}\,\mathfrak{b}], \quad \mathfrak{H} = [\mathfrak{b}\,\mathfrak{t}], \quad \mathfrak{B} = [\mathfrak{t}\,\mathfrak{h}]. \tag{6, 12}$$

Dann ergibt sich für den Darboux'schen Drehungsbivektor

$$\mathfrak{D} = [\mathfrak{h}\,\mathfrak{h}'] = [\mathfrak{h}, -\varkappa\mathfrak{t}+\tau\mathfrak{b}], \tag{6, 13}$$

also nach (12)

$$\mathfrak{D} = \tau\mathfrak{T}+\varkappa\mathfrak{B}. \tag{6, 14}$$

Natürlich gelten auch für die begleitenden Bivektoren Ableitungsgleichungen. Man findet auf Grund der Frenetschen Formeln (2, 51) leicht:

$$\left.\begin{array}{llll} \mathfrak{T}' = & * & \varkappa\mathfrak{H} & * \\ \mathfrak{H}' = & -\varkappa\mathfrak{T} & * & * \\ \mathfrak{B}' = & * & -\tau\,\mathfrak{H} & *. \end{array}\right\} \tag{6, 15}$$

Es folgt daraus

$$\tau\mathfrak{T}'+\varkappa\mathfrak{B}' = \mathfrak{O}, \tag{6, 16}$$

wenn $\mathfrak{O}$ den Nullbivektor bezeichnet. Also gilt weiter

$$\mathfrak{D}' = \tau'\mathfrak{T}+\varkappa'\mathfrak{B}. \tag{6, 17}$$

Danach ist z. B. der Drehungsbivektor eines Kreises oder einer Schraublinie konstant.

50. Beispiel 4. Die *Böschungslinien* sind dadurch charakterisiert, daß ihre *Drehungsbivektoren* zu einem festen Bivektor $\mathfrak{A}$ proportional, also *stellungsfest* sind.

In der Tat folgt aus

$$\mathfrak{D} = \gamma(s) . \mathfrak{A} \tag{6, 18}$$

durch Ableitung

$$\mathfrak{D}' = \gamma'(s) . \mathfrak{A},$$

also

$$\mathfrak{D}' = \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)} . \mathfrak{D}. \tag{6, 19}$$

Somit verschwindet das Außenprodukt der Bivektoren $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{D}'$ identisch.

Wegen (14) und (15) ist nun

$$[\mathfrak{D}\mathfrak{D}'] = [\tau\mathfrak{T}+\varkappa\mathfrak{B},\ \tau'\mathfrak{T}+\varkappa'\mathfrak{B}] = (\varkappa\tau' - \varkappa'\tau)\,[\mathfrak{B}\mathfrak{T}].$$

Da jedoch $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{B}$ linear unabhängig sind, folgt daraus

$$\varkappa\tau' - \varkappa'\tau \quad 0 \tag{6, 20}$$

oder, wegen $\varkappa \not= 0$,

$$\frac{\tau}{\varkappa} = \text{konst.}, \tag{6, 21}$$

wodurch, wegen der Umkehrbarkeit dieser Überlegung, nach Nr. 26 die *Böschungslinien* wirklich als die *Kurven mit fester Stellung des Drehungsbivektors* $\mathfrak{D}$ gekennzeichnet sind.