Über die Hyperflächen zweiten Grades mit einem gemeinsamen Polsimplex

Von

Fritz Hohenberg, Wien

(Vorgelegt in der Sitzung am 6. März 1941)

Wir bezeichnen als Bund das in sich duale System aller Hyperflächen zweiten Grades in einem projektiven n-dimensionalen Raum $\mathfrak{O}$, die ein Polsimplex Ω gemein haben. Mit Hilfe einer Abbildung, die den Hyperflächen 2. Grades M^2 des Bundes die Punkte eines projektiven Hilfsraumes $\mathfrak{P}$ (Koordinatensimplex Π) zuordnet, wird hier das Verhalten des Bundes gegenüber projektiven Transformationen untersucht.

Es ergibt sich in $\mathfrak{O}$ eine n-gliedrige Gruppe $\mathfrak{G}$ von Kollineationen und eine n-gliedrige Schar von Korrelationen, die den Bund in sich überführen, d. h. die M^2 des Bundes untereinander vertauschen. Ihnen entsprechen in $\mathfrak{P}$ die Kollineationen, die das Simplex Π in sich überführen, sowie die Transformationen n. Ordnung mit dem Hauptsimplex Π. Die Gesamtgruppe $\overline{\mathfrak{G}}$ dieser Transformationen und einige wichtige Untergruppen werden untersucht und es werden die Invarianten eines M^2-Paares des Bundes gegenüber jeder dieser Gruppen aufgestellt. Damit ist entschieden, wann sich ein M^2-Paar in ein anderes gegebenes M^2-Paar des Bundes durch eine Transformation jener Gruppe überführen läßt. Umgekehrt gelingt die Berechnung eines M^2-Paares (bis auf Transformationen der betreffenden Gruppe) aus seinen Invarianten. (Im Sonderfall der Gruppe der Kollineationen des Bundes in sich wird diese Frage sonst von der Elementarteilertheorie beantwortet.)

Die Abbildung bewirkt dabei eine Vereinfachung und Veranschaulichung der Untersuchung und der Ergebnisse, weil jedes System von ∞^{n-1} M^2 des Bundes durch eine Hyperfläche in $\mathfrak{P}$ dargestellt wird, jede M^2-Reihe im Bund durch eine Kurve in $\mathfrak{P}$.

Die Abbildung läßt sich auch bei geometrischen Untersuchungen von Systemen von ∞^{n+2} bis $\infty^{1/2\,(n^2+3n-2)}$ M^2 im R_n (die nicht einem Bund angehören) mit Vorteil verwenden. (Vgl. Fritz Hohenberg, Apolarität und Schließungsproblem bei Kegelschnitten, erscheint in den Mon. f. Math. u. Phys.)

Die Abbildung.

Das gemeinsame Polsimplex Ω mit den Ecken O_i $(i=0,1,\ldots n)$ $(n \geqq 1)$ liege im Raum $\mathfrak{O}$. Der M^2

$$(\alpha) \equiv \sum_{i=0}^{} \frac{x_i^2}{\alpha_i} = 0 \quad \text{oder} \quad (\alpha) \equiv \sum_{i=0}^{n} \alpha_i u_i^2 = 0 \tag{1}$$

sei dann in einem projektiven Hilfsraum $\mathfrak{P}$ (Koordinatensimplex Π mit den Ecken P_i $(i=0,1,\ldots n)$) der Punkt $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_n)$ zugeordnet. (Liegt $\mathfrak{P}$ mit $\mathfrak{O}$ vereinigt, so ist der Bildpunkt der Pol der Einheitshyperebene

$$\sum x_i = 0$$

bez. der M^2.) Bei den singulären Mannigfaltigkeiten 2. Klasse des Bundes, z. B. $\alpha_0 u_0^2 + \ldots + \alpha_i u_i^2 = 0$ $(i<n)$, liegt der Bildpunkt $(\alpha_0, \ldots \alpha_i, 0, \ldots 0)$ in einem Teilsimplex von Π. Eine singuläre Mannigfaltigkeit 2. Ordnung des Bundes, z. B.

$$\frac{x_0^2}{\alpha_0} + \ldots + \frac{x_i^2}{\alpha_i} = 0 \quad (i<n)$$

wird aus einer nichtsingulären M^2 des Bundes erhalten, wenn man $\alpha_{i+1}, \alpha_{i+2}, \ldots \alpha_n$ über alle Grenzen wachsen läßt. Dem entspricht in $\mathfrak{P}$, daß der Bildpunkt in einen Punkt des $(n-i-1)$-dimensionalen Teilsimplexes $(\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_i = 0)$ von Π einrückt. Die Richtung, in der er einrückt, weist jedesmal zum Punkt $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_i, 0, \ldots 0)$. Man kann den Inbegriff des Teilsimplexes $(\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_i = 0)$ und seines Verbindungsraumes mit dem Punkt $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_i\ 0, \ldots 0)$ ein verallgemeinertes Linienelement nennen. Die einfach singulären M^2 bilden sich wegen $i = n-1$ auf die gewöhnlichen Linienelemente in den Ecken von Π ab.

Den M^2, die eine Hyperebene $(\bar{u}_i)$ berühren, entsprechen die Punkte der Hyperebene

$$\bar{u}\left(\sum \bar{u}_i^2 \alpha_i = 0\right)$$

in $\mathfrak{P}$. Der linearen Schar

$$\lambda' \sum \alpha_i' u_i^2 + \lambda'' \sum \alpha_i'' u_i^2 = 0$$

entspricht in $\mathfrak{P}$ die Gerade durch die Bildpunkte α' und α''.

Die M^2 durch einen Punkt $(\overline{x}_i)$ bilden sich auf die Punkte einer symmetrischen Hyperfläche n. Ordnung ab, nämlich

$$\sum \frac{\overline{x}_i^2}{\alpha_i} = 0.$$

Diese geht durch die $(n-2)$-dimensionalen Teilsimplexe von Π und soll daher Umhyperfläche $\overline{x}$ genannt werden. Dem Büschel

$$\sum \frac{x_i^2}{\alpha_i} \equiv \lambda' \sum \frac{x_i^2}{\alpha_i'} + \lambda'' \sum \frac{x_i^2}{\alpha_i''} = 0$$

entspricht in $\mathfrak{P}$ eine (rationale) Normkurve (n. Ordnung) durch die Ecken von Π, nämlich

$$\rho\, \alpha_i = \frac{\alpha_i' \alpha_i''}{\lambda'' \alpha_i' + \lambda' \alpha_i''}.$$

Sie sei Umlinie genannt. Nach Elimination des Proportionalitätsfaktors ρ folgt

$$-\frac{\lambda''}{\lambda'} = \frac{\alpha_i'' \alpha_k''}{\alpha_i' \alpha_k'} \frac{\alpha_i' \alpha_k - \alpha_k' \alpha_i}{\alpha_i'' \alpha_k - \alpha_k'' \alpha_i} = A_{i,k} \; (i, k = 0, 1, \ldots n).$$

Die Umlinie liegt auf den $3\binom{n+1}{3}$ singulären Hyperflächen 2. Grades $A_{i,k} = A_{j,k}$ $(i \neq j \neq k \neq i)$; diese haben einen Leitkegelschnitt in der Ebene $[P_i P_j P_k]$, von dessen Punkten die Erzeugenden zum Restsimplex gehen. Die Hyperfläche enthält das Simplex $\alpha_i = \alpha_j = 0$. Die Umlinie ist der Schnitt der Hyperflächen $A_{i,0} = A_{i+1,0}$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$. Liegt in $\mathfrak{O}$ der Punkt $(\overline{x}_i)$ auf dem Schnitt von (α_i') und (α_i''), so liegt die Umlinie zu dem so gegebenen Büschel auf der Umhyperfläche $\overline{x}$.

Die Abbildung ist eine Berührungstransformation. Denn in $\mathfrak{O}$ bestimmen ein Punkt $(\overline{x}_i)$ und seine Tangentialhyperebene $(\overline{u}_i)$ eindeutig eine M^2, die entsprechende Umhyperfläche $\overline{x}$ und die entsprechende Hyperebene $\overline{u}$ berühren sich im Bildpunkt jener M^2. (Den weiteren Schnittpunkten von $\overline{x}$ und $\overline{u}$ in $\mathfrak{P}$ entsprechen in $\mathfrak{O}$ jene M^2, die durch $(\overline{x}_i)$ gehen und die durch $(\overline{x}_i)$ gehende Hyperebene $(\overline{u}_i)$ anderswo berühren.) Einem Hyperebenenelement entspricht also wieder ein solches, den Hyperebenenelementen durch einen Punkt in $\mathfrak{O}$ entsprechen die einer Umhyperfläche in $\mathfrak{P}$, denen durch einen Punkt in $\mathfrak{P}$ entsprechen jene einer M^2 in $\mathfrak{O}$. Den Hyperebenenelementen einer Hyperebene entsprechen wiederum die einer Hyperebene.

$n = 1$. Bildet man die Punktepaare $x_0^2/\alpha_0 + x_1^2/\alpha_1 = 0$ (inhomogen $x = \pm\sqrt{-\alpha_0/\alpha_1}$) einer Geraden $\mathfrak{D}$ auf die reellen Punkte einer sie in $x = 0$ senkrecht schneidenden Geraden $\mathfrak{P}$ ab, so geht der Kreis durch das Punktepaar und den Einheitspunkt der Achse $\mathfrak{P}$ auch durch den Bildpunkt des Punktepaares. Diese quadratische Skala kann verwendet werden, um die Abbildung auch für $n > 1$ graphisch durchzuführen.

$n = 2$. Abbildung der Kegelschnitte mit einem gemeinsamen Poldreieck auf die Punkte der Ebene $\mathfrak{P}$. Den singulären Kurven 2. Ordnung entsprechen die Linienelemente in den Ecken von Π, den singulären Kurven 2. Klasse die Punkte auf den Seiten von Π. Die Umlinien und Umhyperflächen sind hier Kegelschnitte durch die Ecken von Π.

$n = 3$. Abbildung der Flächen 2. Grades mit einem gemeinsamen Poltetraeder auf die Punkte des Raumes $\mathfrak{P}$. Auf den Seiten von Π liegen die Bilder der einfach singulären, auf den Kanten von Π die der doppelt singulären Flächen 2. Klasse. Die Linienelemente in den Ecken von Π geben die einfach singulären, die „Ebenenelemente" durch die Kanten von Π die doppelt singulären Flächen 2. Ordnung an. Den Flächen des Bundes, die eine (zwei) Ebenen berühren, entsprechen die Punkte einer Ebene (Geraden). Den Flächen durch einen bzw. zwei Punkte entsprechen die Punkte einer Umfläche 3. Ordnung durch die Kanten von Π, mit Knotenpunkten P_i (Umlinie 3. Ordnung durch die P_i). Je zwei Umflächen schneiden sich in einer Umlinie.

Die automorphen Kollineationen und Korrelationen des Bundes.

Die Kollineationen

$$\rho\, x_i = a_{ik}\, x'_k \tag{2}$$

($a_{ik} \neq 0$, die k sind eine Permutation der Zahlen 0, 1, ... n, Indizes laufen immer von 0 bis n, ebenso alle Summationen) und die Korrelationen

$$\rho\, x_i = b_{ik}\, u'_k \tag{3}$$

($b_{ik} \neq 0$) führen den Bund in sich über. Durch (2) geht

$$\sum \frac{x_i^2}{\alpha_i} = 0$$

über in

$$\sum \frac{x_k'^2}{\alpha'_k} \equiv \sum \frac{a_{ik}^2\, x_k'^2}{\rho^2\, \alpha_i} = 0,$$

also erfahren die Bildpunkte in $\mathfrak{P}$ die Kollineation

$$\underline{G \ldots \rho^2 \alpha_i = a_{ik}^2 \alpha_k',} \tag{4}$$

die Π festläßt. Durch (3) geht

$$\sum \frac{x_i^2}{\alpha_i} = 0$$

über in

$$\sum \alpha_k' u_k'^2 \equiv \sum \frac{b_{ik}^2 u_k'^2}{\rho^2 \alpha_i} = 0,$$

der Korrelation (3) in $\mathfrak{O}$ entspricht also in $\mathfrak{P}$ die Transformation n. Ordnung

$$\underline{\overline{G} \qquad \rho^2 \alpha_i = \frac{b_{ik}^2}{\alpha_k'}} \tag{5}$$

mit dem Hauptsimplex Π.

Mit G und $\overline{G}$ können ohne Gefahr der Verwechslung zugleich die Transformationen in $\mathfrak{O}$ und die in $\mathfrak{P}$ bezeichnet werden. Nur ist zu beachten, daß jeder Transformation $G(a_{ik}^2)$ bzw. $\overline{G}(b_{ik}^2)$ in $\mathfrak{P}$ im Raum $\mathfrak{O}$ genau 2^n Transformationen $G(\pm a_{ik})$ bzw. $\overline{G}(\pm b_{ik})$ entsprechen, die auseinander durch zusätzliche Spiegelungen an den Hyperebenen von Ω hervorgehen.

Die G bilden eine Gruppe $\mathfrak{G}$, die $\overline{G}$ eine Schar; die G und $\overline{G}$ zusammen bilden die Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}$ aller Projektivitäten des Bundes in sich. Jede Transformation führt die x_i in einer bestimmten Permutation in die x_k' bzw. u_k' über, in derselben Permutation gehen die α_i in die α_k' über. Zu jeder Permutation gehört eine Schar von Transformationen G bzw. $\overline{G}$. Zur Gesamtgruppe $\mathfrak{S}_{n+1}$ der Permutationen von $n+1$ Elementen gehören die Gruppen $\mathfrak{G}$ und $\overline{\mathfrak{G}}$. Ebenso gehören zu jeder Untergruppe von $\mathfrak{S}_{n+1}$ a) eine zu ihr homomorphe, aus den zugehörigen Transformationen G bestehende Untergruppe von $\mathfrak{G}$, und b) eine zu ihr homomorphe, aus den zugehörigen Transformationen G und $\overline{G}$ bestehende Untergruppe von $\overline{\mathfrak{G}}$. Diese Untergruppen sind ebenso wie $\mathfrak{G}$ und $\overline{\mathfrak{G}}$ einfach transitiv, sie enthalten endlich viele Transformationen, die ein gegebenes α in ein gegebenes α' überführen. (Deren Anzahl ist bei den Kollineationsgruppen gleich der Ordnung der zugehörigen Permutationsgruppe, bei den anderen ist sie doppelt so groß.) — Dies sind aber noch nicht alle Untergruppen von $\mathfrak{G}$ bzw. $\overline{\mathfrak{G}}$, z. B. bilden ja schon die Potenzen einer speziellen Transformation G oder $\overline{G}$ eine Untergruppe.

Hervorzuheben sind die zur identischen Permutation gehörige Gruppe $\mathfrak{E}$ von Kollineationen $\rho^2 \alpha_i = a_{ii}^2 \alpha_i'$ und die aus $\mathfrak{E}$ und den Korrelationen $\rho^2 \alpha_i = b_{ii}^2 / \alpha_i'$ gebildete Gruppe $\overline{\mathfrak{E}}$.

Jede Gruppe in $\mathfrak{P}$ ist die Faktorgruppe der zugehörigen Gruppe in $\mathfrak{O}$ bez. der Gruppe der 2^n Spiegelungen an den Hyperebenen von Ω.

Die Gruppe $\mathfrak{E}$.

Sie enthält die vertauschbaren Kollineationen

$$\underline{E \ldots \rho^2 \alpha_i = a_{ii}^2 \alpha_i'.} \tag{6}$$

Fixpunkte von E sind in $\mathfrak{P}$ i. a. nur die Ecken von Π. Jene Kollineationen E, bei denen überdies noch Teilsimplexe von Π punktweise festbleiben, setzen sich zu Untergruppen von $\mathfrak{E}$ bzw. $\mathfrak{G}$ zusammen, z. B. die perspektiven Kollineationen in $\mathfrak{P}$ mit einer Ecke von Π als Zentrum und dem Restsimplex als Kollineationshyperebene.

Bestimmung der Invarianten. Die infinitesimale Transformation von $\mathfrak{E}$ lautet wegen $a_{ii}^2 = \rho^2 (1 - a_i \delta t)$ und

$$\alpha_i = \alpha_i + \delta \alpha_i = \frac{\alpha_i}{1 - a_i \delta t} = \alpha_i (1 + a_i \delta t + \ldots)$$

$$\delta \alpha_i = a_i \alpha_i \delta t$$

(willkürliche Parameter a_i). Die Bahnkurven der durch sie erzeugten eingliedrigen Untergruppe ergeben sich durch Integration des Systems $d\alpha_i - a_i \alpha_i dt = 0$, nämlich

$$\alpha_i = c_i e^{a_i t} \tag{7}$$

(c_i beliebig). Sie sind W-Kurven 1. Art in $\mathfrak{P}$. Durch die übrigen Transformationen von $\mathfrak{E}$ werden sie untereinander vertauscht. In $\mathfrak{O}$ entsprechen diesen Kurven M^2-Reihen, die ebenfalls bei einer eingliedrigen Gruppe von Kollineationen einzeln festbleiben. Das sind aber dieselben eingliedrigen Untergruppen, deren Bahnkurven auch in $\mathfrak{O}$ W-Kurven 1. Art sind.

Die Elimination von t aus (7) ergibt für $n \geqq 2$ die $\binom{n+1}{3}$ Gleichungen:

$$\alpha_i^{a_k - a_l} \alpha_k^{a_l - a_i} \alpha_l^{a_i - a_k} = \text{const.}, \tag{8}$$

von denen aber nur $n - 1$ unabhängig sind. (Für $n = 1$ ist natürlich $\mathfrak{P}$ selbst die Bahnkurve.) Diese Gleichungen stellen Hyperflächen in $\mathfrak{P}$ dar, auf denen die Bahnkurven liegen. Für $n=2$ ist (8) die Bahnkurve selbst, für $n=3$ ergeben sich vier Kegel (Spitzen P_i), für $n>3$ verallgemeinerte Kegel mit der Leitlinie (8) in der $[P_i P_k P_l]$-Ebene und dem Restsimplex von Π als „Spitze". Ist z. B. $a_i > a_k > a_l$, dann enthält der Hyperkegel die $(n-2)$-dimensionalen Untersimplexe $\alpha_i = \alpha_k = 0$ und $\alpha_k = \alpha_l = 0$ von Π.

Es ist also jeder Ausdruck

$$(\bar{\alpha}_i^{a_k - a_l} \bar{\alpha}_k^{a_l - a_i} \bar{\alpha}_l^{a_i - a_k}) : (\bar{\bar{\alpha}}_i^{a_k - a_l} \bar{\bar{\alpha}}_k^{a_l - a_i} \bar{\bar{\alpha}}_l^{a_i - a_k})$$

eine Invariante zweier M^2 $\bar{\alpha}$ und $\bar{\bar{\alpha}}$ gegenüber allen Transformationen E. Eine allgemeinere Invariante eines M^2-Paares gegenüber $\mathfrak{E}$ ist

$$\underline{\mathfrak{E}_{l_0 l_1 \ldots l_n}(\bar{\alpha}, \bar{\bar{\alpha}}) = \left(\frac{\bar{\alpha}_0}{\bar{\bar{\alpha}}_0}\right)^{l_0} \cdot \left(\frac{\bar{\alpha}_1}{\bar{\bar{\alpha}}_1}\right)^{l_1} \cdots \left(\frac{\bar{\alpha}_n}{\bar{\bar{\alpha}}_n}\right)^{l_n}}$$

wobei $l_0 + l_0 + \ldots + l_n = 0$ sein muß, damit dieser Ausdruck auch invariant sei gegenüber Umnormierungen der Koordinaten[1]. Alle α in $\mathfrak{P}$, die mit gegebenem $\bar{\alpha}$ zusammen ein Paar von konstantem $\mathfrak{E}_{l_0 \ldots l_n}$ bilden, liegen auf der Hyperfläche

$$\underline{\mathfrak{E}_{l_0 l_1 \ldots l_n}(\bar{\alpha}, \alpha) \equiv \left(\frac{\bar{\alpha}_0}{\alpha_0}\right)^{l_0} \left(\frac{\bar{\alpha}_1}{\alpha_1}\right)^{l_1} \quad \left(\frac{\bar{\alpha}_n}{\alpha_n}\right)^{l_n} = \text{const.}} \tag{9}$$

Die Bahnkurve (7) liegt auf dieser Hyperfläche, wenn

$$\sum a_i l_i = 0$$

ist.

Ganz analog ließen sich auch Invarianten von M^2-Tripeln usw. gegenüber $\mathfrak{E}$ bilden.

T r a n s f o r m a t i o n e n   e n d l i c h e r   O r d n u n g   i n $\mathfrak{E}$. Die Kollineationen

$$\underline{\rho^2 \alpha_i = \varepsilon_k^{j_i} \alpha_i'} \tag{10}$$

wo ε_k und mindestens eine der Potenzen $\varepsilon_k^{j_i}$ (j_i ganze Zahlen)

---

[1] Nimmt man bei $n = 2$ inhomogene Koordinaten $\frac{x_1}{x_3} = x_1 \frac{x_2}{x_3} = y$, so hat man den Bund der Kegelschnitte mit gemeinsamen Hauptachsen. Sind dann $a, b, \varphi, \rho_a, \rho_b$ und f bzw. die Halbachsen, der halbe Asymptotenwinkel, die Scheitelkrümmungsradien und der Flächeninhalt des Kegelschnittes α, so erhält man, wenn die l_i die Werte $1, -1, 0$ annehmen, die Invarianten $\bar{a} : \bar{\bar{a}}$, $\bar{b} : \bar{\bar{b}}$, $\operatorname{tg} \bar{\varphi} : \operatorname{tg} \bar{\bar{\varphi}}$ des Kegelschnittpaares $\bar{\alpha}, \bar{\bar{\alpha}}$ bzw. $\mathfrak{E}$. Erteilt man den l_i die Werte $2, -1, -1$, so ergeben sich die Invarianten $\bar{\rho}_a : \bar{\bar{\rho}}_b$, $\bar{\rho}_b : \bar{\bar{\rho}}_b$, $\bar{f} : \bar{\bar{f}}$.

primitive k. Einheitswurzeln sind, sind endlicher, u. zw. k. Ordnung. Diese Transformationen bilden natürlich eine Gruppe. Z. B.:

a) $k = 2$ liefert in $\mathfrak{P}$ die 2^n involutorischen Kollineationen $\rho^2 \alpha_i = \pm \alpha'_i$, denen in $\mathfrak{O}$ eine Gruppe von 2^{2n} involutorischen Kollineationen entspricht. Zwei M^2, die durch eine solche Kollineation auseinander hervorgehen, sollen vertauschbar heißen.

b) $k = n+1$ liefert eine Gruppe von $(n+1)^n$ Kollineationen $\rho^2 \alpha_i = \varepsilon_{n+1}^{j_i} \alpha'_i$ der Ordnung $n+1$. Eine M^2 geht dabei in $(n+1)^n$ verschiedene M^2 über (darunter in sich selbst), die miteinander verbunden heißen sollen. Wir sagen, sie bilden zusammen einen Akkord. Die $n+1$ Kollineationen $\rho^2 \alpha_i = \varepsilon_{n+1}^{mi} \alpha'_i$ $(m = 0, 1, \ldots n)$ bilden eine Untergruppe jener Gruppe. Die $n+1$ M^2, die durch diese Transformationen aus einer von ihnen entstehen, nennen wir einen zyklischen Akkord.

Im Fall $n = 2$ haben die Bildpunkte der Kegelschnitte eines zyklischen Akkords eine besondere Lage. Ein Bildpunkt kann mittels einer Transformation E in den Einheitspunkt verlegt werden, dann lauten die drei Bildpunkte $\beta^i (1, \varepsilon^i, \varepsilon^{2i})$ $(i = 0, 1, 2;$ $\varepsilon =$ primitive 3. Einheitswurzel). Die Geraden $P_0\beta^i$, $P_1\beta^k$, $P_2\beta^l$ schneiden sich dann (für jede Permutation i, k, l von 0, 1, 2) im Punkt $\gamma^{ikl} (1, \varepsilon^l, \varepsilon^{2k})$, d. h. die Dreiecke $\Pi = [P_0\, P_1\, P_2]$ und $[\beta^0 \beta^1 \beta^2]$ liegen in sechsfacher Weise perspektiv. Die sechs Perspektivitätszentra sind die restlichen Punkte des Akkords, dem der zyklische Akkord angehört. Die sechs Perspektivitätsachsen $a^{ikl} \equiv \alpha_0 + \varepsilon^{2l} \alpha_1 + \varepsilon^k \alpha_2 = 0$ enthalten je zwei Zentra, nämlich γ^{kli} und γ^{lik}. Das charakteristische Doppelverhältnis $(P_0, \beta^i, \gamma^{ikl}, a^{ikl})$ der Perspektivität hat den Wert ε oder ε^{-1}, je nachdem i, k, l eine gerade oder ungerade Permutation ist. Die Achsen und Zentra, d. h. die Dreiecke $(\gamma^{012}, \gamma^{120}, \gamma^{201})$ und $(\gamma^{021}, \gamma^{210}, \gamma^{102})$ liegen wiederum in sechsfacher Weise perspektiv, die zugehörigen Zentra und Achsen sind die Punkte und Seiten der Dreiecke Π und $[\beta^0 \beta^1 \beta^2]$. (Über sechsfach perspektive Dreiecke vgl. z. B. J. Valyi, Mon. f. Math. u. Phys., *9* (1898), S. 167.) Dieser (und ebenso jeder anderen) Konfiguration von Punkten und Geraden in $\mathfrak{P}$ entspricht in $\mathfrak{O}$ eine Konfiguration von M^2 und M^2-Scharen des Bundes.

Die Gruppe $\mathfrak{Z}$.

Sie wird von den Kollineationen

$$Z \begin{cases} \rho^2 \alpha_i = a^2_{i,i+1} \alpha'_{i+1} \; (i = 0, 1, \ldots n-1) \\ \rho^2 \alpha_n = a^2_{n,0} \alpha'_0 \end{cases} \tag{11}$$

erzeugt. Das Produkt von zwei Transformationen (11) ist eine Transformation Z^2. Das Produkt von $n+1$ verschiedenen Transformationen (11) ist eine allgemeine Transformation E. Dagegen ist Z^{n+1} immer die identische Transformation. $\mathfrak{Z}$ enthält $\mathfrak{E}$ und alle Z samt deren Potenzen $Z^2, Z^3, \ldots Z^n$.

Die Fixpunkte von Z in $\mathfrak{P}$ bilden den zyklischen Akkord

$$\begin{aligned} \alpha_0 : \alpha_1 : \ldots : \alpha_n = & \sqrt[n+1]{a_{01}^{2n} a_{12}^{2n-2} a_{23}^{2n-4} \ldots a_{n-1,n}^2} : \\ & : \varepsilon_{n+1} \sqrt[n+1]{a_{12}^{2n} a_{23}^{2n-2} \ldots a_{n-1,n}^4 a_{n,0}^2} : \ldots \\ & \ldots : \varepsilon_{n+1}^n \sqrt[n+1]{a_{n,0}^{2n} a_{01}^{2n-2} \ldots a_{n-2,n-1}^2}. \end{aligned} \tag{12}$$

In $\mathfrak{P}$ bestimmen je zwei Fixpunkte eine Fixgerade (in $\mathfrak{O}$ also eine Fixschar) und eine Fixumlinie (in $\mathfrak{O}$ ein Fixbüschel). Je i Fixpunkte ($i \leq n$) bestimmen eine (i—1)-fach ausgedehnte invariante Mannigfaltigkeit von Hyperflächen 2. Klasse und eine solche von Hyperflächen 2. Ordnung. Z. B. bestimmen n Fixpunkte in $\mathfrak{P}$ die Gesamtheit der M^2 in $\mathfrak{O}$, die eine Fixhyperebene der zu Z gehörenden Kollineation in $\mathfrak{O}$ berühren. Sie bestimmen ferner die Gesamtheit der M^2 in $\mathfrak{O}$, die durch einen Fixpunkt dieser Kollineation in $\mathfrak{O}$ gehen. Für $n = 2$ ergibt sich, wenn die Kollineation reell ist, in $\mathfrak{O}$ ein zyklischer Akkord, der einen reellen Kegelschnitt enthält. Die beiden übrigen (konjugiert komplexen) Fixkegelschnitte bestimmen die reelle Fixschar und das reelle Fixbüschel.

Eine gegebene M^2 $\bar{\alpha}$ gestattet die Kollineation

$$Z \ldots \rho^2 \alpha_i = \frac{\bar{\alpha}_i}{\bar{\alpha}_{i+1}} \alpha'_{i+1} \; (i = 0, 1, \ldots n—1), \quad \rho^2 \alpha_n = \frac{\bar{\alpha}_n}{\bar{\alpha}_0} \alpha'_0$$

und diese führt die mit $\bar{\alpha}$ zu einem zyklischen Akkord verbundenen M^2 einzeln in sich über.

Durch Z geht $\mathfrak{E}_{l_0 l_1 \ldots l_n}(\bar{\alpha}, \bar{\bar{\alpha}})$ über in $\mathfrak{E}_{l_1 l_2 \ldots l_n l_0}(\bar{\alpha}, \bar{\bar{\alpha}})$, dies in $\mathfrak{E}_{l_2 l_3 \ldots l_n l_0 l_1}(\bar{\alpha}, \bar{\bar{\alpha}})$ usw. Invarianten eines Paares $\bar{\alpha}, \bar{\bar{\alpha}}$ von M^2 gegenüber der Gruppe $\mathfrak{Z}$ sind also die symmetrischen Funktionen der $\mathfrak{E}_{l_0 l_1 \ldots l_n}(\bar{\alpha}, \bar{\bar{\alpha}})$.

Ähnliche Eigenschaften zeigen sich, wenn bei einer Kollineation G nur ein Teil der Koordinaten zyklisch vertauscht wird, also auch, wenn nur zwei Koordinaten vertauscht werden. Die letzteren Transformationen sollen eigens besprochen werden.

Die Gruppe $\mathfrak{T}_{01}$.

Sie enthält die Kollineationen E und die Kollineationen

$$T_{01} \begin{cases} \rho^2 \alpha_0 = a_{01}^2 \alpha_1' \\ \rho^2 \alpha_1 = a_{10}^2 \alpha_0' \\ \rho^2 \alpha_i = a_{ii}^2 \alpha_i' \qquad (i = 2, 3, \ldots n) \end{cases} \tag{13}$$

samt deren Potenzen T_{01}^2, $T_{01}^3, \ldots$.

T_{01}^2 ist eine spezielle Kollineation E, nämlich

$$(\alpha_i) \rightarrow (a_{01}^2 a_{10}^2 \alpha_0,\ a_{01}^2 a_{10}^2 \alpha_1,\ a_{22}^4 \alpha_2, \ldots a_{nn}^4 \alpha_n).$$

In jeder der ∞^{n-2}-Ebenen durch die Gerade $\alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_n = 0$ findet eine perspektive Kollineation mit dieser Geraden als Achse statt; Zentrum ist der Schnitt der Ebene mit $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$ (verallgemeinerte windschiefe Kollineation). T_{01}^3 ist wieder eine Transformation (13) usw. Das Produkt zweier verschiedener T_{01} ist eine allgemeine Transformation E.

Zu den Fixpunkten von T_{01} gehören zunächst die Punkte P_2, P_3, $\ldots P_n$. Im Büschel der Hyperebenen durch diese Punkte findet eine Involution statt, bei der sich die durch P_0 und P_1 gehenden Hyperebenen vertauschen und die Hyperebenen durch die beiden restlichen Fixpunkte, nämlich $(a_{01}, \eta a_{10}, 0, . \ .0)$ $(\eta = \pm 1)$ festbleiben. Je zwei entsprechende Hyperebenen dieses Büschels sind kollinear aufeinander bezogen, es entsprechen sich dabei die Punkte P_2, P_3, $\ldots$ P_n selbst, ebenso die Schnittpunkte mit der Geraden $[P_0 P_1]$. Diese Kollineation wird speziell, wenn irgendwelche der Werte $\eta a_{01} a_{10}$, a_{22}^2, $\ldots$ a_{nn}^2 übereinstimmen. Ist $a_{i_1 i_1}^2 = a_{i_2 i_2}^2 = \qquad = a_{i_m i_m}^2$, so bleibt das Teilsimplex $[P_{i_1}, P_{i_2}, \ldots P_{i_m}]$ punktweise fest. Ist

$$\eta a_{01} a_{10} = a_{i_1 i_1}^2 = a_{i_2 i_2}^2 = \qquad = a_{i_m i_m}^2,$$

so bleibt der Verbindungsraum des Punktes $(a_{01}, \eta a_{10}, 0, \ldots 0)$ mit $[P_{i_1}, P_{i_2}, \qquad P_{i_m}]$ punktweise fest. Ist endlich

$$\eta a_{01} a_{10} = a_{22}^2 = a_{33}^2 = \qquad = a_{nn}^2,$$

so ist T_{01} eine perspektive harmonische Kollineation (Zentrum $(a_{01}, -\eta a_{10}, 0, \qquad 0)$, Kollineationshyperebene durch die übrigen Fixpunkte).

Die Gruppe $\mathfrak{G}$.

Die Gesamtgruppe $\mathfrak{G}$ der Kollineationen

$$\underline{G \ldots \rho^2 \alpha_i = a_{i_k}^2 \alpha_k'} \tag{14}$$

($i = 0, 1, \quad n$; die k sind irgendeine Permutation der i)

des Bundes in sich enthält die Gruppen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{T}_{ik}$ und noch andere als Untergruppen. Sie wird von n Scharen von ∞^1 perspektiven Kollineationen bzw. deren infinitesimalen Transformationen erzeugt (Zentrum ist eine von den $n+1$ Ecken von Π, Kollineationshyperebene ist die gegenüberliegende Hyperebene von Π), zusammen mit $\binom{n+1}{2}$ Transformationen T_{ik} ($i, k = 0, 1, \quad n$) (da sich jede Permutation aus Transpositionen zusammensetzen läßt).

Gehen durch G die Indizes $0, 1, \quad n$ über in $i_0, i_1, \ldots i_n$, so gehen die Hyperflächen

$$\mathfrak{E}_{l_0 l_1 \ldots l_n}(\bar{\alpha}, \alpha) = \text{konst.}$$

über in

$$\mathfrak{E}_{l_{i_0} l_{i_1} \ldots l_{i_n}}(\bar{\alpha}, \alpha) = \text{konst.}$$

Um zu brauchbaren Invarianten eines M_2-Paares gegenüber $\mathfrak{G}$ zu gelangen, wird man von solchen Invarianten gegenüber $\mathfrak{E}$ ausgehen, die bei Vertauschung der Indizes gerade n verschiedene Werte annehmen, da ein Punkt in $\mathfrak{P}$ als Schnitt von n Hyperflächen bestimmt ist. Genauer: man wählt $l_0 = -n$, $l_1 = l_2 = \ldots \ldots = l_n = 1$[1] und bildet die elementarsymmetrischen Funktionen der $n+1$ Invarianten

$$\mathfrak{E}_{-n, 1, 1, \ldots 1}(\bar{\alpha}, \bar{\bar{\alpha}}) = \frac{\bar{\bar{\alpha}}_0^n \bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_2 \ldots \bar{\alpha}_n}{\bar{\alpha}_0^n \bar{\bar{\alpha}}_1 \bar{\bar{\alpha}}_2 \ldots \bar{\bar{\alpha}}_n} = \frac{\bar{\alpha}_0 \bar{\alpha}_1 \ldots \bar{\alpha}_n}{\bar{\bar{\alpha}}_0 \bar{\bar{\alpha}}_1 \ldots \bar{\bar{\alpha}}_n} \left(\frac{\bar{\bar{\alpha}}_0}{\bar{\alpha}_0}\right)^{n+1}$$

$$\mathfrak{E}_{1, -n, 1, \ldots 1}, \quad \ldots \mathfrak{E}_{1, 1, \ldots 1, -n},$$

nämlich

$$\mathfrak{G}_1(\bar{\alpha}, \bar{\bar{\alpha}}) = \frac{\bar{\alpha}_0 \bar{\alpha}_1 \ldots \bar{\alpha}_n}{\bar{\bar{\alpha}}_0 \bar{\bar{\alpha}}_1 \ldots \bar{\bar{\alpha}}_n} \sum \left(\frac{\bar{\bar{\alpha}}_0}{\bar{\alpha}_0}\right)^{n+1}$$

$$\mathfrak{G}_2(\bar{\alpha}, \bar{\bar{\alpha}}) = \left(\frac{\bar{\alpha}_0 \bar{\alpha}_1 \ldots \bar{\alpha}_n}{\bar{\bar{\alpha}}_0 \bar{\bar{\alpha}}_1 \ldots \bar{\bar{\alpha}}_n}\right)^2 \sum \left(\frac{\bar{\bar{\alpha}}_0 \bar{\bar{\alpha}}_1}{\bar{\alpha}_0 \bar{\alpha}_1}\right)^{n+1} \tag{15}$$

$$\ldots \mathfrak{G}_n(\bar{\alpha}, \bar{\bar{\alpha}}) = \left(\frac{\bar{\alpha}_0 \bar{\alpha}_1 \ldots \bar{\alpha}_n}{\bar{\bar{\alpha}}_0 \bar{\bar{\alpha}}_1 \ldots \bar{\bar{\alpha}}_n}\right)^n \sum \left(\frac{\bar{\bar{\alpha}}_0 \bar{\bar{\alpha}}_1 \ldots \bar{\bar{\alpha}}_{n-1}}{\bar{\alpha}_0 \bar{\alpha}_1 \ldots \bar{\alpha}_{n-1}}\right)^{n+1}$$

[1] Vgl. Anmerkung S. 7.

$\mathfrak{G}_{n+1}(\bar{\alpha}, \bar{\bar{\alpha}})$ hat immer den Wert 1. Ferner ist

$$\mathfrak{G}_i(\bar{\alpha}, \bar{\bar{\alpha}}) = \mathfrak{G}_{n-i}(\bar{\bar{\alpha}}, \bar{\alpha}), \ (i = 1, 2, \ldots n).$$

Ist umgekehrt bei gegebenem $\bar{\alpha}$ die andere M^2 des Paares, nämlich $\bar{\bar{\alpha}} = \alpha$, aus den gegebenen Werten

$$\underline{\mathfrak{G}_i(\bar{\alpha}, \alpha) = c_i \ (i = 1, 2, \ldots n)} \tag{16}$$

zu berechnen, so normiert man $\bar{\alpha}_0 \bar{\alpha}_1 \ldots \bar{\alpha}_n = \alpha_0 \alpha_1 \quad \alpha_n$ und erhält für die Werte $(\alpha_i/\bar{\alpha}_i)^{n+1} = \lambda_i$ die Gleichung

$$\lambda^{n+1} - c_1 \lambda^n + c_2 \lambda^{n-1} - \qquad + (-1)^n c_n \lambda + (-1)^{n+1} = 0$$

mit den Wurzeln $\lambda_0, \lambda_1 \ldots \lambda_n$ (in irgendeiner Reihenfolge). Dann ist

$$\alpha_i = \varepsilon_{n+1}^{j_i} \bar{\alpha}_i \sqrt[n+1]{\lambda_i} \tag{17}$$

mit der Bedingung $j_0 + j_1 + \quad . \quad + j_n \equiv 0\,(n+1)$ (wegen der Normierung). Setzt man $j_0 = 0$, so können $j_1, \ldots, j_{n-1}$ je $n+1$ Werte annehmen, j_n ist dann aus der Kongruenz zu berechnen. Jede Permutation der λ_i liefert also $(n+1)^{n-1}$ M^2 als Lösungen, die einen Teil eines Akkords darstellen. Bei geradem n verteilen sich diese Lösungen auf $(n+1)^{n-2}$ zyklische Akkorde, denn hier ist die Exponentensumme eines zyklischen Akkords durch $n+1$ teilbar. Bei ungeradem n verteilen sich diese Lösungen auf $2\,(n+1)^{n-2}$ zyklische Akkorde (in jedem derselben gehört jede zweite M^2 zu den Lösungen), denn hier ist erst jede zweite Exponentensumme durch $n+1$ teilbar. Sind alle Wurzeln λ_i voneinander verschieden, so gibt es $(n+1)!$ Permutationen von ihnen, also im ganzen $(n+1)^n . n!$ Lösungen $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_n)$.

Dies ist natürlich zugleich die Anzahl der Punkte, in denen sich die Hyperflächen 16) oder

$$\sum \left(\frac{\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_{i-1}}{\bar{\alpha}_0 \bar{\alpha}_1 \ldots \bar{\alpha}_{i-1}} \right)^{n+1} = c_i \left(\frac{\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_n}{\bar{\alpha}_0 \bar{\alpha}_1 \ldots \bar{\alpha}_n} \right)^i \qquad (i = 1, 2, \qquad n)$$

(Ordnung $i\,(n+1)$) untereinander schneiden.

Jede dieser Hyperflächen gestattet jede der $(n+1)!$ Kollinationen des Bundes in sich, die $\bar{\alpha}$ festläßt. Deren Koeffizienten erhält man aus

$$\rho^2 \bar{\alpha}_0 = a_{0 i_0}^2 \bar{\alpha}_{i_0}, \ \rho^2 \bar{\alpha}_1 = a_{1 i_1}^2 \bar{\alpha}_{i_1}, \ldots \rho^2 \bar{\alpha}_n = a_{n i_n}^2 \bar{\alpha}_{i_n}.$$

Ferner gestattet jede dieser Hyperflächen die $(n+1)^{n-1}$ Kollineationen $\rho^2 \alpha_i = \varepsilon_{n+1}^{j_i} \alpha'_i$, für die $j_0 + j_1 + \ldots + j_n \quad 0\,(n+1)$ ist, wie man 15) entnimmt. Diese Kollineationen bilden ebenso wie die vorhergehenden eine Gruppe. Unterwirft man nun eine Lösung α den Kollineationen der einen Gruppe und die hervorgehenden M^2 den Kollineationen der anderen Gruppe, so erhält man aus einer Lösung alle $(n+1)^n . n!$ Lösungen.

Für jedes i bilden die $\mathfrak{G}_i(\bar{\alpha}, \alpha) = c_i$ bei veränderlichem c_i ein Büschel, dessen Hyperflächen kovariant mit $\bar{\alpha}$ verbunden sind. Jeder solchen Hyperfläche entspricht in $\mathfrak{O}$ eine Mannigfaltigkeit von ∞^{n-1} M^2, die kovariant mit $\bar{\alpha}$ verbunden sind. Die Hyperflächen $\mathfrak{G}_i(\bar{\alpha}, \alpha) = c_i$ und $\mathfrak{G}_{n-i}(\bar{\alpha}, \alpha) = c_i$ gehen auseinander durch die quadratische Verwandtschaft $\alpha_i/\bar{\alpha}_i \longleftrightarrow \bar{\alpha}_i/\alpha_i$ hervor, sie haben daher duale Eigenschaften. Ist n gerade, so liegen also $n/2$ Paare von zueinander quadratisch verwandten Hyperflächen vor. Ist n ungerade, dann liegen $(n-1)/2$ solche Paare und eine weitere, zu sich selbst duale Hyperfläche vor.

Im Fall $n = 2$ erhält man in $\mathfrak{P}$ die Kurven 3. Ordnung

$$\mathfrak{G}_1(\bar{\alpha}, \alpha) = c_1 \text{ oder } \left(\frac{\alpha_0}{\bar{\alpha}_0}\right)^3 + \left(\frac{\alpha_1}{\bar{\alpha}_1}\right)^3 + \left(\frac{\alpha_2}{\bar{\alpha}_2}\right)^3 = c_1 \frac{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}{\bar{\alpha}_0\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2} \qquad (16a)$$

und die Kurven 6. Ordnung

$$\mathfrak{G}_2(\bar{\alpha}, \alpha) = c_2 \text{ oder } \left(\frac{\bar{\alpha}_0}{\alpha_0}\right)^3 + \left(\frac{\bar{\alpha}_1}{\alpha_1}\right)^3 + \left(\frac{\bar{\alpha}_2}{\alpha_2}\right)^3 = c_2 \frac{\bar{\alpha}_0\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2}{\alpha_0\alpha_1\alpha_2} \qquad (16b)$$

Die Kurven $\mathfrak{G}_2 = c_2$ haben in den gemeinsamen dreifachen Punkten P_0, P_1, P_2 gemeinsame Tangenten, z. B. in P_0 die Tangenten mit der gemeinsamen Gleichung $\bar{\alpha}_2^3\alpha_1^3 + \bar{\alpha}_1^3\alpha_2^3 = 0$, also der harmonische und die beiden äquianharmonischen Strahlen zum Strahl von P_0 nach $\bar{\alpha}$. Diese Tangenten schneiden $[P_1 P_2]$ in drei von den neun Grundpunkten des Büschels der Kurven $\mathfrak{G}_1 = c_1$, die dortselbst Wendepunkte haben (syzygetisches Büschel).

Die Kurven $\mathfrak{G}_1 = 3$ zerfallen in die geraden Polaren

$$\frac{\alpha_0}{\bar{\alpha}_0} + \frac{\alpha_1}{\varepsilon_3^i\bar{\alpha}_1} + \frac{\alpha_2}{\varepsilon_3^{2i}\bar{\alpha}_2} = 0$$

der Bildpunkte des durch $\bar{\alpha}$ bestimmten zyklischen Akkords (nämlich $(\bar{\alpha}_0, \varepsilon_3^i\bar{\alpha}_1, \varepsilon_3^{2i}\bar{\alpha}_2)$, $i = 0, 1, 2$), bez. der zerfallenen Kurve 3. Ordnung $\Pi \equiv \alpha_0\alpha_1\alpha_2 = 0$. Die Kurven $\mathfrak{G}_2 = 3$ zerfallen in die konischen Polaren

$$\frac{\bar{\alpha}_0}{\alpha_0} + \frac{\varepsilon_3^i\bar{\alpha}_1}{\alpha_1} + \frac{\varepsilon_3^{2i}\bar{\alpha}_2}{\alpha_2} = 0$$

der Bildpunkte des durch $\bar{\alpha}$ bestimmten zyklischen Akkords, bez. Π.

Die Gruppe $\overline{\mathfrak{E}}$.

Sie besteht aus $\mathfrak{E}$ und den involutorischen Transformationen

$$\overline{E} \dots \rho^2 \alpha_i \alpha_i' = b_{ii}^2 \quad (i = 0, 1, \dots n). \tag{17}$$

Das Produkt zweier verschiedener Transformationen (17) ist eine allgemeine Transformation E, dagegen ist $\overline{E}^2$ die identische Transformation. In $\mathfrak{O}$ gibt es zu (17) die 2^n paarweise vertauschbaren Fix-M^2

$$\alpha_0 : \alpha_1 : \dots : \alpha_n = \pm b_{00} : \pm b_{11} : \dots : \pm b_{nn}. \tag{18}$$

$\overline{E}$ stellt in $\mathfrak{O}$ die Polaritäten an diesen Fix-M^2 dar (denn einem Punkt (ξ_i) entspricht in der Polarität an $(\pm b_{ii})$ die Hyperebene $(\omega_i = \pm \xi_i / b_{ii})$, und wenn (ξ_i) auf (α_i) liegt, so umhüllen seine Polarhyperebenen, bez. $(\pm b_{ii})$ wegen $\xi_i = \pm b_{ii} \omega_i$ die

$$M^2 \dots \sum \alpha_i' \omega_i^2 \equiv \sum b_{ii}^2 \omega_i^2 / \alpha_i = 0, \text{ also ist } \rho^2 \alpha_i' = b_{ii}^2 / \alpha_i).$$

Die Polarität an den 2^n Fix-M^2 führt jede M^2 des Bundes in genau eine M^2 über. Jede M^2 geht durch die Polarität an sich selbst und an den mit ihr vertauschbaren M^2 in sich über. Jeder zyklische Akkord geht durch $\overline{E}$ in einen zyklischen Akkord über, insbesondere jeder durch eine Fix-M^2 bestimmte Akkord in sich selbst. Dabei wird die Reihenfolge der M^2 im Akkord umgekehrt. In $\mathfrak{P}$ erfahren die Strahlen in jedem Punkt P_i bei $\overline{E}$ eine involutorische Verwandtschaft $(n-1)$. Ordnung (für $n = 2$ also eine Involution). Auf den Doppelstrahlen derselben liegen je zwei Doppelpunkte. Jede andere Gerade in $\mathfrak{P}$ geht in eine Umlinie über und umgekehrt. Ist $\overline{E}$ durch eine bestimmte $M^2\, \alpha$ und ihr Bild $\bar{\alpha}'$ gegeben, so ist $\sigma b_{ii}^2 = \bar{\alpha}_i \bar{\alpha}_i'$ und in $\mathfrak{P}$ geht die Gerade durch die Bildpunkte in die Umlinie durch die Bildpunkte über.

Durch $\overline{E}$ geht $\mathfrak{E}_{l_0 l_1 \dots l_n}(\bar{\alpha}, \bar{\bar{\alpha}})$ über in $\mathfrak{E}^{-1}_{l_0 l_1 \dots l_n}(\bar{\alpha}, \bar{\bar{\alpha}})$. Invariant ist

$$\overline{\mathfrak{E}}_{l_0 l_1 \dots l_n}(\bar{\alpha}, \bar{\bar{\alpha}}) = \mathfrak{E}_{l_0 l_1 \dots l_n}(\bar{\alpha}, \bar{\bar{\alpha}}) + \mathfrak{E}^{-1}_{l_0 l_1 \dots l_n}(\bar{\alpha}, \bar{\bar{\alpha}}). \tag{19}$$

Durch n solcher Invarianten ist das M_2-Paar $\bar{\alpha}, \bar{\bar{\alpha}}$ bis auf Transformationen $\overline{E}$ bestimmt. Die bei variablem $\bar{\bar{\alpha}} = \alpha$ in $\mathfrak{P}$ entstehenden Hyperflächen $\overline{\mathfrak{E}}_{l_0 l_1 \dots l_n}(\bar{\alpha}, \alpha) = \bar{c}$ (konstant) sind kovariant mit $\bar{\alpha}$ verbunden; jede von ihnen zerfällt in die zwei Hyperflächen

$$\mathfrak{E}_{l_0 l_1 \ldots l_n}(\bar{\alpha}, \alpha) = \frac{1}{2}(\bar{c} \pm \sqrt{\bar{c}^2 - 4}).$$

Die Gruppe $\bar{\mathfrak{Z}}$.

$\bar{\mathfrak{Z}}$ enthält $\mathfrak{Z}$ und die Transformationen

$$\bar{Z} \begin{cases} \rho^2 \alpha_i = \dfrac{b_{i,i+1}^2}{\alpha'_{i+1}} & (i = 0, 1, \quad n-1) \\[2ex] \rho^2 \alpha_n = \dfrac{b_n}{\alpha'_0} & \end{cases} \tag{20}$$

$\bar{Z}^{2k}$ ist eine Kollineation Z^{2k}. Bei geradem n ist $\bar{Z}^{n+1}$ eine Transformation $\bar{E}$ und $\bar{Z}^{2(n+1)}$ die identische Transformation. Bei ungeradem n ist $\bar{Z}^{n+1}$ eine von der identischen verschiedene Kollineation E.

Wenn n gerade ist, hat $\bar{Z}$ in $\mathfrak{P}$ den Fixpunkt

$$\begin{aligned} \alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2 : \ldots : \alpha_n = (b_{01} b_{23} \ldots b_{n0})^2 : (b_{12} b_{34} \ldots b_{01})^2 : \\ : (b_{23} b_{45} \ldots b_{12})^2 : \ldots : (b_{n0} b_{12} \ldots b_{n-1,n})^2. \end{aligned} \tag{21}$$

In $\mathfrak{O}$ gibt es also eine einzige Fix-M^2. Wenn n ungerade ist, existiert i. a. kein Fixpunkt von $\bar{Z}$ in $\mathfrak{P}$. Wenn aber

$$b_{01} b_{23} b_{45} \ldots b_{n-1,n} = \pm b_{12} b_{34} b_{56} \ldots b_{n-2,n-1} b_{n,0} \tag{22}$$

ist, ergibt sich eine Gerade von Fixpunkten in $\mathfrak{P}$ (eine lineare Schar von Fix-M^2 in $\mathfrak{O}$), nämlich

$$\frac{b_{01}^2}{\alpha_0 \alpha_1} = \frac{b_{12}^2}{\alpha_1 \alpha_2} = \frac{b_{23}^2}{\alpha_2 \alpha_3} = \ldots = \frac{b_{n-1,n}^2}{\alpha_{n-1} \alpha_n} = \frac{b_{n0}^2}{\alpha_n \alpha_0} \tag{23}$$

Diese Gerade von Fixpunkten liegt auf den $n-1$ (linear abhängigen) Hyperebenen

$$b_{i,i+1}^2 \alpha_{i+2} - b_{i+1,i+2}^2 \alpha_i = 0 \qquad (i = 0, 1, 2 \ldots n-2), \tag{23a}$$

sie schneidet also die beiden $^1/_2\,(n-1)$-dimensionalen Teilsimplexe

$$\alpha_0 = \alpha_2 = \alpha_4 = \ldots = \alpha_{n-1} = 0 \quad \text{und} \quad \alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_5 = \ldots = \alpha_n = 0$$

von Π, im Fall $n = 3$ also zwei Gegenkanten des Tetraeders Π.

Die Gruppe $\overline{\mathfrak{T}}_{01}$.

Sie wird durch die Transformationen

$$\overline{T}_{01} \begin{cases} \rho^2\alpha_0 = \dfrac{b_{01}^2}{\alpha_1'} \\ \rho^2\alpha_1 = \dfrac{b_{10}^2}{\alpha_0'} \\ \rho^2\alpha_i = \dfrac{b_{ii}^2}{\alpha_i'} \qquad (i=2,\ 3, \qquad n) \end{cases} \tag{24}$$

erzeugt, $\overline{\mathfrak{T}}_{01}$ umfaßt alle Transformationen E und $\overline{T}_{01}$.

Durch $\overline{T}_{01}^2$ geht α über in

$$(b_{10}^4\alpha_0,\ b_{01}^4\alpha_1,\ b_{01}^2 b_{10}^2\alpha_2, \ldots .b_{01}^2 b_{10}^2\alpha_n),$$

$\overline{T}_{01}{}^2$ ist also in $\mathfrak{P}$ eine projektiv verallgemeinerte inhaltstreue Affinität (die für $n=2$ zwei Ellipsen mit gleichem Flächeninhalt, bzw. gleichem 1. oder 2. Scheitelkrümmungsradius in ebensolche überführt).

Ist $b_{01}^2 \neq b_{10}^2$, so existiert in $\mathfrak{P}$ kein Doppelpunkt zu $\overline{T}_{01}$, es werden in $\mathfrak{P}$ die Hyperflächen

$$(\alpha_0\alpha_1)^{n+1} = (\alpha_2\alpha_3 \ldots \alpha_n)^2 \qquad (c \text{ konstant}) \tag{25}$$

projektiv vertauscht, wobei die Hyperflächen (25) mit

$$c = \pm (b_{01}b_{10})^{n-1} : (b_{22} \ldots b_{nn})^2$$

in sich übergehen. (Im Fall $n=2$ geht das Büschel der Kegelschnitte in $\mathfrak{P}$, die p_0 in P_1 und p_1 in P_0 berühren, in sich über.)

Ist aber $b_{01}^2 = b_{10}^2$, so ist $\overline{T}_{01}$ involutorisch und die Fixpunkte in $\mathfrak{P}$ liegen auf

$$\frac{\alpha_0\alpha_1}{b_{01}^2} = \frac{\alpha_2^2}{b_{22}^2} = \frac{\alpha_3^2}{b_{33}^2} = \qquad = \frac{b_n^2}{b_{nn}^2} \tag{26}$$

Ist hier $n=1$, dann ist jeder Punkt in $\mathfrak{P}$ Fixpunkt. Ist $n=2$, so existiert ein Kegelschnitt $b_{22}^2\alpha_0\alpha_1 - b_{01}^2\alpha_2^2 = 0$ von Fixpunkten in $\mathfrak{P}$, $\overline{T}_{01}$ ist in $\mathfrak{P}$ das projektive Abbild der euklidischen Inversion (an einem Kreis). In $\mathfrak{D}$ hat jedes Kegelschnittbüschel des Bundes mit der Reihe von Fixkegelschnitten zwei Kegelschnitte gemein, es geht in die lineare Schar über, die diese beiden Kegelschnitte enthält, und umgekehrt. Ist $n > 2$, so liegen die Fixpunkte in $\mathfrak{P}$ auf den 2^{n-2} Kegelschnitten, die durch die 2^{n-2} Ebenen

$$\pm\frac{\alpha_2}{b_{22}}=\pm\frac{\alpha_3}{b_{33}}= \quad =\pm\frac{\alpha_n}{b_{nn}}$$

aus jedem der n—1 Hyperkegel 2. Ordnung

$$\frac{\alpha_0\alpha_1}{b_{01}^2}=\frac{\alpha_i^2}{b_{ii}^2} \qquad (i=2,\ 3, \qquad n)$$

geschnitten werden. (Im Fall $n=3$ also zwei Kegelschnitte von Fixpunkten in $\mathfrak{P}$.)

Die Gesamtgruppe $\overline{\mathfrak{G}}$.

Jede Invariante eines M^2-Paares $\bar{\alpha}$, $\bar{\bar{\alpha}}$ gegenüber $\overline{\mathfrak{G}}$ muß eine symmetrische Funktion der $\mathfrak{E}_{l_0 l_1\ldots l_n}(\bar{\alpha}, \bar{\bar{\alpha}})$ sein. Als niedrigste Invarianten erhält man die $\binom{n+1}{2}$ symmetrischen Funktionen

$$\underline{\overline{\mathfrak{G}}_1(\bar{\alpha}, \bar{\bar{\alpha}}),\ \overline{\mathfrak{G}}_2(\bar{\alpha}, \bar{\bar{\alpha}}),\ldots\overline{\mathfrak{G}}_{\binom{n+1}{2}}(\bar{\alpha}, \bar{\bar{\alpha}})} \tag{27}$$

der $\binom{n+1}{2}$ Invarianten

$$\underline{\mathfrak{E}_{0,0,\ldots 0,\overset{i}{1},0,\ldots 0,\overset{k}{-1},0\ldots 0}(\bar{\alpha}, \bar{\bar{\alpha}})=\frac{\bar{\alpha}_i^2\bar{\bar{\alpha}}_k^2+\bar{\bar{\alpha}}_i^2\bar{\alpha}_k^2}{\bar{\alpha}_i\bar{\bar{\alpha}}_i\bar{\alpha}_k\bar{\bar{\alpha}}_k} \qquad (i, k=0, 1,\ldots n;\ i>k).} \tag{28}$$

Zur Festlegung eines M^2-Paares $\bar{\alpha}$, $\bar{\bar{\alpha}}$ bis auf Transformationen $\overline{G}$ genügen schon n von den Invarianten $\overline{\mathfrak{G}}_\lambda(\bar{\alpha}, \bar{\bar{\alpha}})$.

Bei variablem $\bar{\bar{\alpha}}=\alpha$ und festem $\bar{\alpha}$ ergeben sich in $\mathfrak{P}$ die Hyperflächen

$$\overline{\mathfrak{G}}_\lambda(\bar{\alpha}, \alpha)=\bar{c}_\lambda\left(=\text{const.},\ \lambda=1, 2,\ldots\binom{n+1}{2}\right), \tag{29}$$

die kovariant mit $\bar{\alpha}$ verbunden sind. Sie gehen bei jeder $\bar{\alpha}$ festlassenden Transformation $\overline{G}$ in sich über, nämlich bei den $(n+1)!$ Kollineationen, deren Koeffizienten sich aus

$$\rho^2\bar{\alpha}_0=a_{0i_0}^2\bar{\alpha}_{i_0},\ \rho^2\bar{\alpha}_1=a_{1i_1}^2\bar{\alpha}_{i_1}, \qquad \rho^2\bar{\alpha}_n=a_{ni_n}^2\bar{\alpha}_{i_n}$$

ergeben, und bei den $(n+1)!$ Korrelationen, deren Koeffizienten aus

$$\rho^2\bar{\alpha}_0\bar{\alpha}_{i_0}=b_{0i_0}^2,\ \rho^2\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_{i_1}=b_{1i_1}^2, \qquad \rho^2\bar{\alpha}_n\bar{\alpha}_{i_n}=b_{ni_n}^2$$

berechnet werden (i_0, i_1, $\quad i_n$ ist jedesmal eine Permutation von 0, 1, $\quad n$). In $\mathfrak{D}$ entsprechen jeder solchen Transformation 2^n

Transformationen. Die $2^{n-1}.(n+1)!$ Transformationen in $\mathfrak{O}$, die eine M^2 $\bar{\alpha}$ festlassen, führen eine andere M^2 α in $2(n+1)!$ verschiedene M^2 über. Allgemeiner: die $2^n.(n+1)!$ Kollineationen und die $2^n.(n+1)!$ Korrelationen in $\mathfrak{O}$, die eine M^2 $\bar{\alpha}$ in eine M^2 $\bar{\alpha}'$ überführen, führen eine mit $\bar{\alpha}$ kovariant verbundene M^2 in $2(n+1)!$ verschiedene M^2 über.

Im Fall $n=2$ ist

$$\overline{\mathfrak{G}}_1(\bar{\alpha},\bar{\bar{\alpha}}) = \overline{\mathfrak{E}}_{1,-1,0}+\overline{\mathfrak{E}}_{0,1,-1}+\overline{\mathfrak{E}}_{-1,0,1} = \frac{\bar{\alpha}_0\bar{\bar{\alpha}}_0(\bar{\alpha}_1^2\bar{\bar{\alpha}}_2^2+\bar{\alpha}_2^2\bar{\bar{\alpha}}_1^2)+\bar{\alpha}_1\bar{\bar{\alpha}}_1(\bar{\alpha}_2^2\bar{\bar{\alpha}}_0^2+\bar{\alpha}_0^2\bar{\bar{\alpha}}_2^2)+\bar{\alpha}_2\bar{\bar{\alpha}}_2(\bar{\alpha}_0^2\bar{\bar{\alpha}}_1^2+\bar{\alpha}_1^2\bar{\bar{\alpha}}_0^2)}{\bar{\alpha}_0\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2\bar{\bar{\alpha}}_0\bar{\bar{\alpha}}_1\bar{\bar{\alpha}}_2}$$

$$\overline{\mathfrak{G}}_3(\bar{\alpha},\bar{\bar{\alpha}}) = \overline{\mathfrak{E}}_{1,-1,0}\overline{\mathfrak{E}}_{0,1,-1}\overline{\mathfrak{E}}_{-1,0,1} = \frac{(\bar{\alpha}_0^2\bar{\bar{\alpha}}_1^2+\bar{\alpha}_1^2\bar{\bar{\alpha}}_0^2)(\bar{\alpha}_1^2\bar{\bar{\alpha}}_2^2+\bar{\alpha}_2^2\bar{\bar{\alpha}}_1^2)(\bar{\alpha}_2^2\bar{\bar{\alpha}}_0^2+\bar{\alpha}_0^2\bar{\bar{\alpha}}_2^2)}{\bar{\alpha}_0^2\bar{\alpha}_1^2\bar{\alpha}_2^2\bar{\bar{\alpha}}_0^2\bar{\bar{\alpha}}_1^2\bar{\bar{\alpha}}_2^2} \tag{27 a}$$

und man findet leicht, daß

$$\overline{\mathfrak{G}}_2(\bar{\alpha},\bar{\bar{\alpha}}) = \frac{1}{2}(\overline{\mathfrak{G}}_1^2-\overline{\mathfrak{G}}_3-4) \tag{27 b}$$

ist. In $\mathfrak{P}$ bilden bei festem $\bar{\alpha}$ und veränderlichem α die Linien

$$\underline{\overline{\mathfrak{G}}_1(\bar{\alpha},\alpha) = \bar{c}_1} \quad \text{(konstant)} \tag{29 a}$$

ein Büschel von Kurven 3. Ordnung. Drei Grundpunkte des Büschels fallen in die Schnittpunkte der geraden Polaren von $\bar{\alpha}$ bez. der zerfallenen Kurve 3. Ordnung $\Pi \equiv \alpha_0\alpha_1\alpha_2 = 0$ mit den Seiten von Π, in den übrigen drei Grundpunkten P_i haben die Kurven gemeinsame Tangenten, die nach je einem der drei ersten Grundpunkte gerichtet sind. Weiters bilden die Kurven 6. Ordnung

$$\underline{\overline{\mathfrak{G}}_3(\bar{\alpha},\alpha) = \bar{c}_3} \quad \text{(konstant)} \tag{29 b}$$

ein Büschel, dessen Kurven in P_i Inflexionsknoten mit festen Tangenten haben; deren gemeinsame Gleichung z. B. in P_0 lautet $\bar{\alpha}_1^2\alpha_2^2+\bar{\alpha}_2^2\alpha_1^2=0$. Jede der sechs Tangenten in den drei Inflexionsknoten berührt die Kurve noch einmal, u. zw. in ihrem Schnitt mit der Gegenseite von Π.

Ist nun ein Kegelschnittpaar $\bar{\alpha}$, α (d. h. in $\mathfrak{P}$ ein Punktepaar $\bar{\alpha}$, α) z. B. durch die Invarianten $\mathfrak{G}_1(\bar{\alpha},\alpha)=\bar{c}_1$ und $\overline{\mathfrak{G}}_3(\bar{\alpha},\alpha)=c_3$ gegeben, so kann man, da $\mathfrak{G}$ transitiv ist, etwa $\bar{\alpha}$

fest wählen. α ist dann bis auf jene zwölf Transformationen $\overline{G}$ bestimmt, die $\bar{\alpha}$ festlassen. Es sind dann $\overline{\mathfrak{E}}_{1,-1,0}(\bar{\alpha},\alpha)$, $\overline{\mathfrak{E}}_{0,1,-1}(\bar{\alpha},\alpha)$ und $\overline{\mathfrak{E}}_{-1,0,1}(\bar{\alpha},\alpha)$ die Wurzeln der Gleichung

$$\lambda^3 - \bar{c}_1\lambda^2 + \frac{1}{2}(\bar{c}_1^2 - \bar{c}_3 - 4)\,\lambda - \bar{c}_3 = 0. \tag{30}$$

Sind diese Wurzeln λ_1, λ_2, λ_3 (in beliebiger Reihenfolge), so löst man das Gleichungssystem

$$\overline{\mathfrak{E}}_{1,-1,0}(\bar{\alpha},\alpha) = \lambda_1,\quad \overline{\mathfrak{E}}_{0,1,-1}(\bar{\alpha},\alpha) = \lambda_2,\quad \overline{\mathfrak{E}}_{-1,0,1}(\bar{\alpha},\alpha) = \lambda_3, \tag{31}$$

d. h. man hat in $\mathfrak{P}$ zwei Geradenpaare zu schneiden (Träger P_2, P_0); das dritte Geradenpaar (Träger P_1) geht dann von selbst durch die erhaltenen vier Punkte in $\mathfrak{P}$. Als Lösung ergeben sich also zunächst vier paarweise vertauschbare Kegelschnitte, deren Bildpunkte auf (29b) liegen (denn diese Kurve enthält mit jedem Kegelschnitt auch die mit ihm vertauschbaren). Aus den vier Punkten hat man dann einen der beiden Punkte α herauszusuchen, die auch auf (29a) liegen. Aus α erhält man die übrigen elf Lösungen, d. h. die übrigen elf Schnittpunkte der Kurven (29a) und (29b) durch Ausübung jener Transformationen $\overline{G}$, die $\bar{\alpha}$ festlassen.

Während also die Invarianten $\mathfrak{G}_\lambda(\bar{\alpha},\alpha)$ nur eine Anzahl von Akkorden bis auf Transformationen G festlegen, bestimmen die Invarianten $\overline{\mathfrak{G}}_\lambda(\bar{\alpha},\alpha)$ genau ein M^2-Paar bis auf Transformationen $\overline{G}$.

Nichteuklidische Deutung.

Schließlich sei bemerkt, daß das Vorstehende der nichteuklidischen Geometrie zugerechnet werden kann, wenn man in $\mathfrak{D}$ eine $M^2\,\bar{\alpha}$ als absolute Hyperfläche einer nichteuklidischen Metrik nimmt (in $\mathfrak{P}$ ist also ein Punkt $\bar{\alpha}$ ausgezeichnet). Dann haben alle M^2 des Bundes das nichteuklidische Hauptpolsimplex Ω. Die Invarianten eines Paares $\bar{\alpha}$, α gegenüber den Gruppen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{G}$ usw. sind nun nichteuklidische Invarianten von α, und zwar stehen die Invarianten gegenüber $\mathfrak{E}$, aus denen sich die Invarianten gegenüber den anderen hier besprochenen Gruppen aufbauen, in einfacher Beziehung zu den nichteuklidischen Halbachsen von α (und deren dualen Gegenstücken): α schneidet die Kante $[O_i O_k]$ von Ω in den Punkten A_{ik} und A'_{ik} ($x_i = \pm\sqrt{-\alpha_i}$, $x_k = \sqrt{\alpha_k}$, alle anderen $x_l = 0$). Dann ist nach der Abstandsformel

$$\mathrm{Ch}\,\frac{\overline{p^1p^2}}{2c} = \frac{(p^1p^2)}{\sqrt{(p^1p^1)(p^2p^2)}} \quad \text{oder} \quad \mathrm{Tanh}^2\,\frac{\overline{p^1p^2}}{2c} = 1 - \frac{(p^1p^1)(p^2p^2)}{(p^1p^2)^2}$$

der nichteuklidischen Geometrie $\left(\text{wobei } (x\,x) \quad \sum x_i^2/\bar{\alpha}_i = 0 \text{ ist}\right)$ die Halbachse $l_{ik} = \overline{O_i A_{ik}}$ von α bestimmt durch

$$\operatorname{Tanh}^2 \frac{l_{ik}}{2c} = \frac{\bar{\alpha}_i}{\alpha_i} \; \frac{\bar{\alpha}_k}{\alpha_k} = \mathfrak{E}_{0,\,0,\ldots 0,\overset{i}{1},0,\ldots 0,\overset{k}{-1},0\ldots 0}(\bar{\alpha}, \alpha)$$

und alle anderen Invarianten $\mathfrak{E}_{l_0\ldots l_n}(\bar{\alpha}, \alpha)$ sowie $\mathfrak{G}_{l_0\ldots l_n}(\bar{\alpha}, \alpha)$ usw. sind Potenzprodukte dieser niedrigsten Invarianten. Z. B. ergeben sich die mit $\bar{\alpha}$ zu einem zyklischen Akkord verbundenen α durch die nichteuklidisch metrische Forderung, daß alle l_{ik} gleich seien. (Das folgt schon daraus, daß die M^2 dieses Akkords durch jene Transformationen T_{ik} untereinander vertauscht werden, die $\bar{\alpha}$ festlassen.)

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1941

Band/Volume: 150_2a

Autor(en)/Author(s): Hohenberg Fritz

Artikel/Article: Über die Hyperflächen zweiten Grades mit einem gemeinsamen Polsimplex. 89-108