Über den Einfluß von Ungenauigkeiten der Form und Stärke eines Kreisringes auf die Schwingzahlen seiner ebenen Biegungsschwingungen

Von

Karl Federhofer (Graz)

ordentl. Mitglied d. Akad. d. Wiss.

(Vorgelegt in der Sitzung am 3. Juli 1941)

Die genaue Berechnung der Biegungsschwingungen eines dünnen Kreisringes erfordert nach einer früheren Untersuchung des Verfassers[1] sowohl die Berücksichtigung der bei der Schwingung entstehenden Dehnung der Ringachse als auch der Wirkung der Drehungsträgheit und der Schubkräfte. Den mit Beachtung dieser Nebeneinflüsse abgeleiteten Formeln liegt die Voraussetzung einer genauen Kreisform der Zentralachse und eines überall gleichen Ringquerschnittes zugrunde. Beide Annahmen werden in den praktischen Anwendungen entsprechend der bei der Herstellung der Ringe verlangten Genauigkeit mehr oder minder genau erfüllt sein. Im Hinblicke auf die Anwendung der in der genannten Untersuchung abgeleiteten Formeln zur Vorausbestimmung der Schwingzahlen eines Kreisringes ist es daher von Interesse, den Einfluß der durch Ungenauigkeiten bei der Herstellung eines Kreisringes verursachten geringen Abweichungen von den angegebenen beiden Annahmen auf die Größe der Schwingzahlen rechnerisch zu ermitteln.

1. Einfluß einer geringen Veränderlichkeit des Ringquerschnittes.

Zur Beurteilung dieses Einflusses ist die Kenntnis der Differentialgleichung für die Biegungsschwingungen eines Kreisringes mit veränderlichem Querschnitte notwendig. Sie wurde bisher noch nicht entwickelt, wir erhalten sie einfach aus der Forderung, daß das Gesamtpotential des schwingenden Ringes, das sich aus der Formänderungsarbeit und der Arbeit der Trägheitskräfte zusammensetzt, ein Extremum sein muß. Bezeichnen

---

[1] K. Federhofer, Sitz.-Ber. Akad. d. Wiss. Wien, Abt. II *a*, *144* (1935), S. 307.

u, w die radiale und tangentiale Schwingungskomponente eines Punktes P des Ringes vom Halbmesser a, dessen Lage in bezug auf einen durch den Mittelpunkt gelegten Nullstrahl durch den Winkel φ festgelegt ist, μ die Dichte des Ringstoffes, E den Elastizitätsmodul, F den Querschnitt, J das Trägheitsmoment für die Biegung in der Ringebene und ω die Kreisfrequenz der Eigenschwingung, dann gilt für das Gesamtpotential A bei Vernachlässigung der Formänderungsarbeit infolge Dehnung der Ringachse (also für dehnungslose Schwingungen)[1]

$$A = \frac{1}{2}\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}\left[\frac{EJ}{a^3}(u+u^{\mathrm{II}})^2 - \mu F a\omega^2(u^2+w^2)\right]d\varphi, \tag{1}$$

wobei zufolge der vorausgesetzten Dehnungslosigkeit der Ringachse

$$u+w^{\mathrm{I}} = 0. \tag{2}$$

Hochgestellte römische Zahlen bedeuten Ableitungen nach φ.

Gemäß (2) besteht somit für A der nur die Schwingungskomponente w und deren Ableitungen enthaltende Ausdruck

$$A = \frac{1}{2}\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}\left[\frac{EJ}{a^3}(w^{\mathrm{I}}+w^{\mathrm{III}})^2 - \mu F a\omega^2(w^2+w^{\mathrm{I}\,2})\right]d\varphi \tag{3}$$

oder

$$A = \int_0^{2\pi} f(\varphi, w, w^{\mathrm{I}}, w^{\mathrm{III}})\,d\varphi.$$

Die Bedingung $A =$ extrem verlangt die Befriedigung der Lagrange'schen Gleichung

$$\frac{d^3}{d\varphi^3}\left(\frac{\partial f}{\partial w^{\mathrm{III}}}\right) + \frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\partial f}{\partial w^{\mathrm{I}}}\right) - \frac{\partial f}{\partial w} = 0$$

und führt nach Eintragung des durch (3) erklärten Funktionswertes f bei Beachtung der Veränderlichkeit von J und F zur Differentialgleichung für die Eigenfunktion $w(\varphi)$ des Kreisringes mit veränderlichem Querschnitte:

$$\begin{aligned} &J w^{\mathrm{VI}} + 3\,J^{\mathrm{I}} w^{\mathrm{V}} + (2\,J+3\,J^{\mathrm{II}})\,w^{\mathrm{IV}} + (4\,J^{\mathrm{I}}+J^{\mathrm{III}})\,w^{\mathrm{III}} + \\ &+ (J+3\,J^{\mathrm{II}} - k a^2 F)\,w^{\mathrm{II}} + (J^{\mathrm{I}}+J^{\mathrm{III}} - k a^2 F^{\mathrm{I}})\,w^{\mathrm{I}} + (k a^2 F)\,w = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

[1] K. Federhofer, Ing. Arch., 4 (1933), S. 278.

Hierin hat die Dimensionslose k den Wert

$$k = \frac{\mu a^2 w^2}{E}. \tag{5}$$

Die Gleichung (4) geht für konstantes J und F in die bereits an anderer Stelle abgeleitete Differentialgleichung[1]

$$w^{\mathrm{VI}} + 2\, w^{\mathrm{IV}} + \left(1 - \frac{k a^2 F}{J}\right) w^{\mathrm{II}} + \frac{k a^2 F}{J} w = 0 \tag{6}$$

über. Ihr allgemeines Integral ist

$$w(\varphi) = \sum_{k=1}^{k=3} C_k \cos n_k \varphi + D_k \sin n_k \varphi),$$

worin n_1, n_2, n_3 die Wurzeln der Hauptgleichung

$$n^6 - 2\, n^4 + \left(1 - \frac{k a^2 F}{J}\right) n^2 - \frac{k a^2 F}{J} = 0 \tag{7}$$

sind. Für den geschlossenen Ring muß $w(\varphi)$ eine einfach periodische Funktion mit der Periode 2π sein, d. h. n muß eine g a n z e Zahl sein; da den Werten $n = 0$ und $n = 1$ eine Drehung, bzw. Verschiebung des starren Ringes entspricht (Kreisfrequenzen $\omega = 0$), so ist das kleinstmögliche n gleich 2, es ist demnach die Grundschwingung beschrieben durch

$$w(\varphi) = C \cos 2\varphi + D \sin 2\varphi \tag{8}$$

und

$$u(\varphi) = -w^{\mathrm{I}}.$$

Mit $n = 2$ ergibt sich aus (7)

$$k = \frac{36}{5} \frac{J}{F a^2}, \tag{9}$$

somit beträgt die Kreisfrequenz der Grundschwingung gemäß (5)

$$\underline{\omega^2_{n=2} = \frac{36}{5} \frac{EJ}{\mu F a^4}} \tag{10}$$

[1] Vgl. Fußnote 1, S. 2.

Hat der Ring kreisförmigen Querschnitt mit dem Durchmesser d, so folgt aus (9)

$$k = \frac{9}{20}\frac{d^2}{a^2},$$

bei rechteckigem Querschnitt $b.h$ ergibt sich

$$k = \frac{3}{5}\frac{h^2}{a^2}. \qquad (11)$$

Die Querschnittsveränderlichkeit wollen wir dadurch festlegen, daß der Durchmesser d des Kreisquerschnittes, bzw. im Falle eines Rechteckquerschnittes dessen Höhe h oder Breite b sich nach dem Gesetz

$$d = \alpha - \beta \cos \lambda \varphi \qquad (\lambda = 2, 3 \ldots) \qquad (12)$$

ändere, womit periodische Abweichungen der Werte d, b und h vom für konstanten Querschnitt gültigen Durchschnittswert $d = \alpha$ um $\pm\beta$ berücksichtigt werden. Es handelt sich also darum, die Abhängigkeit der Kreisfrequenz ω von dieser Abweichung $\pm\beta$ festzustellen. Wir beschränken die weitere Untersuchung auf den Fall der Grundschwingung, der eingeschlagene Lösungsweg führt auch für jede Oberschwingung zum Ziel. Für kleine Abweichungen β ist es jedenfalls zulässig, in erster Näherung die Schwingform des Ringes veränderlichen Querschnittes übereinstimmend mit jener des Ringes konstanten Querschnittes ($\beta = 0$), also mit Gleichung (8) anzunehmen; die Grundschwingzahl ist dann aus der Bedingung $A =$ extrem zu berechnen, wobei A zufolge des Ansatzes (8) auswertbar ist. Damit wird die strenge Integration der komplizierten Differentialgleichung (4) umgangen.

a) Für den Ring mit Kreisquerschnitt ist

$$J = \frac{\pi d^4}{64}, \quad F = \frac{\pi d^2}{4},$$

so daß sich für das Gesamtpotential A aus Gleichung (3) mit Beachtung von (5) und (12) und Weglassung eines für die weitere Rechnung unwesentlichen konstanten Faktors $\frac{E\pi\alpha^4}{128 a^3}$ der Ausdruck

$$A = \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \left[(1-\gamma\cos\lambda\varphi)^4 (w^{\mathrm{I}} + w^{\mathrm{III}})^2 - 16\frac{ka^2}{\alpha^2}(1-\gamma\cos\lambda\varphi)^2 (w^2 + w^{\mathrm{I}2})\right] d\varphi$$

ergibt, wo zur Abkürzung

$$\frac{\beta}{\alpha} = \gamma \tag{13}$$

gesetzt wurde; γ bedeutet hienach die auf den Durchschnittswert α der Ringstärke bezogene größte Abweichung β, demnach eine Zahl, die für praktische Fälle als klein gegen Eins vorauszusetzen ist.

Mit Benutzung der in der Zusammenstellung bestimmter Integrale (S. 128) erklärten Funktionswerte n und r wird

$$A = 36\,\pi n - 16\,\frac{k a^2}{\alpha^2}\,.5\,.\pi r.$$

Da die Funktionen n und r (nach den Angaben auf S. 128) nur die Quadrate der Schwingungskoordinaten C und D enthalten, so sind die durch $C \cos 2\varphi$ und $D \sin 2\varphi$ dargestellten Schwingformen voneinander unabhängig und es ergibt sich aus der Forderung $A =$ extrem — da C und D nicht verschwinden dürfen —,

$$k = \left(\frac{9}{20}\,\frac{\alpha^2}{a^2}\right)\frac{n}{r}.$$

Der Vergleich dieses Ergebnisses mit der ersten der Gleichungen (11) zeigt, daß der in Klammer gesetzte Faktor obiger Formel den für konstanten Querschnitt ($d = \alpha$) gültigen Wert von k darstellt, so daß durch den zweiten Faktor $\frac{n}{r}$ der Einfluß der durch Gleichung (12) festgelegten Veränderlichkeit des Durchmessers auf k und damit gemäß (5) auch auf ω^2 bestimmt ist.

Setzen wir diesen Einflußfaktor $\frac{n}{r}$ gleich Ψ, so folgt nach den Angaben auf S. 128, sobald $\lambda \neq 2, 4$

$$\Psi_C = \Psi_D = \frac{1 + 3\gamma^2 + \frac{3}{8}\gamma^4}{1 + \frac{\gamma^2}{2}},$$

während für $\lambda = 2$

$$\Psi_C = \frac{1 + \frac{3}{2}\gamma^2 + \frac{\gamma^4}{8}}{1 + \frac{7}{20}\gamma^2}, \qquad \Psi_D = \frac{1 + \frac{9}{2}\gamma^2 + \frac{5}{8}\gamma^4}{1 + \frac{13}{20}\gamma^2},$$

und für $\lambda = 4$:

$$\Psi_C = \frac{1+2\gamma+3\gamma^2+\frac{3}{2}\gamma^3+\frac{3}{8}\gamma^4}{1+\frac{3}{5}\gamma+\frac{1}{2}\gamma^2},$$

$$\Psi_D = \frac{1-2\gamma+3\gamma^2-\frac{3}{2}\gamma^3+\frac{3}{8}\gamma^4}{1-\frac{3}{5}\gamma+\frac{1}{2}\gamma^2}$$

wird. Zahlentafel 1 enthält die hienach für den Bereich $\gamma = 0$ bis $0 \cdot 2$ berechneten Einflußwerte Ψ_C und Ψ_D.

b) Für den Kreisring mit rechteckigem Querschnitte liefert eine mit der vorstehenden gleichlaufende Rechnung für das Gesamtpotential A, falls die Breite konstant und die Höhe nach dem Gesetze

$$h = \alpha - \beta \cos \lambda\varphi \text{ (vgl. Gleichung 12)}$$

veränderlich gewählt wird, mit $J = \frac{1}{12} b h^3$, $F = bh$:

$$A = \frac{E b \alpha^3}{24 a^3} \int\limits_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \Big[(1-\gamma \cos \lambda\varphi)^3 (w^{\mathrm{I}} + w^{\mathrm{III}})^2 -$$

$$- 12 \frac{k a^2}{\alpha^2} (1-\gamma \cos \lambda\varphi)(w^2 + w^{\mathrm{I}\,2}) \Big] d\varphi.$$

Dieser Ausdruck vereinfacht sich mit den auf S. 128 erklärten Funktionswerten p und l und mit Hinweglassung des konstanten Faktors $\frac{E b \alpha^3}{24 a^3}$ in

$$A = 36 \pi p - 12 \frac{k a^2}{\alpha^2} .5 \pi l.$$

Aus der Bedingung $A =$ extrem folgt

$$k = \left(\frac{3}{5} \frac{\alpha^2}{a^2}\right) \frac{p}{l};$$

vergleicht man dieses Ergebnis mit der zweiten Gleichung (11), so findet man für den vorhin eingeführten Einflußfaktor Ψ den Wert

$$\Psi = \frac{p}{l}.$$

Mit den Angaben auf S. 128 wird somit, so lange $\lambda \neq 2,\ 4$ ist

$$\Psi_C = \Psi_D = 1 + \frac{3}{2}\gamma^2,$$

während für $\lambda = 2$:

$$\Psi_C = 1 + \frac{3}{4}\gamma^2, \qquad \Psi_D = 1 + \frac{9}{4}\gamma^2,$$

und für $\lambda = 4$:

$$\Psi_C = \frac{1 + \frac{3}{2}\gamma + \frac{3}{2}\gamma^2 + \frac{3}{8}\gamma^3}{1 + \frac{3}{10}\gamma}, \qquad \Psi_D = \frac{1 - \frac{3}{2}\gamma + \frac{3}{2}\gamma^2 - \frac{3}{8}\gamma^3}{1 - \frac{3}{10}\gamma}$$

wird.

Wird hingegen die Höhe h als konstant und die Breite b nach dem Gesetze

$$b = \alpha - \beta \cos \lambda\varphi$$

veränderlich angenommen, dann entsteht für das Gesamtpotential

$$A = \frac{E h^3 \alpha}{24\, a^3} \int\limits_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \Big[(1-\gamma \cos \lambda\varphi)\,(w^{\mathrm{I}} + w^{\mathrm{III}})^2 - \\ - 12\,\frac{k a^2}{h^2}\,(1-\gamma \cos \lambda\varphi)\,(w^2 + w^{\mathrm{I}\,2}) \Big]\, d\varphi$$

oder

$$A = 36\,\pi m - 12\,\frac{k a^2}{h^2}\,.5\,\pi l,$$

woraus

$$k = \left(\frac{3}{5}\,\frac{h^2}{a^2}\right)\frac{m}{l}$$

folgt.

Für den Einflußfaktor $\Psi' = \frac{m}{l}$ ergibt sich, wenn $\lambda \neq 4$

$$\Psi'_C = \Psi'_D = 1,$$

während für $\lambda = 4$:

$$\Psi'_C = \frac{1 + \frac{\gamma}{2}}{1 + \frac{3}{10}\gamma}, \qquad \Psi'_D = \frac{1 - \frac{\gamma}{2}}{1 - \frac{3}{10}\gamma}.$$

Aus den Zahlentafeln 2 und 3 können die bei veränderlichem Rechteckquerschnitt gültigen Einflußwerte Ψ'_C und Ψ'_D für den Bereich $\gamma = 0$ bis $0 \cdot 2$ unmittelbar entnommen werden. Mit Ausnahme des Falles $\lambda = 4$, in welchem sich der zur Schwingform $w = D \sin 2\varphi$ gehörige Einflußfaktor Ψ'_D durchwegs kleiner als Eins ergibt, sind die Einflußwerte Ψ'_C und Ψ'_D stets größer als Eins und nehmen mit wachsendem zu.

2. Einfluß einer kleinen Abweichung von der genauen Kreisringform (Elliptizität).

Die Abweichung der Ringform von der eines genauen Kreisringes werde festgelegt durch die kleinen radialen Abweichungen $\xi(\varphi)$, von denen wir annehmen wollen, daß sie durch den Ansatz

$$\xi(\varphi) = \xi_0 \cos 2\varphi \tag{14}$$

gegeben seien. Damit ist die ursprüngliche ungefähr elliptische Ringform bestimmt durch

$$r(\varphi) = a + \xi(\varphi) = a + \xi_0 \cos 2\varphi, \tag{15}$$

wo ξ_0 die größte durch Messung erhobene radiale Abweichung von der genauen Kreisform angibt, die als klein gegen a anzunehmen ist. Dann gilt für das Bogenelement $d\sigma$ der Mittellinie des Ringes

$$d\sigma = \sqrt{r^2 + r^{I2}}\, d\varphi$$

oder wegen (14) und (15)

$$d\sigma = a\,d\varphi \sqrt{1 + 2\varepsilon \cos 2\varphi + \varepsilon^2 (1 + 3 \sin^2 2\varphi)},$$

worin

$$\varepsilon = \frac{\xi_0}{a} \tag{16}$$

gesetzt ist. Da ε eine Zahl klein gegen Eins ist, so kann $d\sigma$ bei Entwicklung bis einschließlich der Glieder mit ε^2 auch ersetzt werden durch

$$d\sigma = a\,d\varphi\,[1+\varepsilon \cos 2\varphi + \varepsilon^2 (1-\cos 4\varphi)]. \tag{17}$$

Für die Krümmung $\frac{1}{\rho_0}$ des Ringes gilt

$$\frac{1}{\rho_0} = \frac{r^2+2\,r^{\mathrm{I}\,2}-r\,r^{\mathrm{II}}}{(r^2+r^{\mathrm{I}\,2})^{3/2}}$$

oder entwickelt bis ε^2:

$$\frac{1}{\rho_0} = \frac{1}{a}\left[1+3\,\varepsilon \cos 2\varphi - \frac{\varepsilon^2}{2}(5+9\cos 4\varphi)\right]. \tag{18}$$

Ist $\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_0}$ die Krümmungsänderung infolge der Biegung des schwingenden Ringes, so beträgt die zugehörige Formänderungsarbeit bei konstantem Ringquerschnitt

$$\frac{EJ}{2}\int\limits_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_0}\right)^2 d\sigma.$$

Mit u als radialer und w als tangentieller Schwingungskomponente eines Punktes der Zentrallinie (u positiv nach außen, w positiv im Sinne wachsenden Winkels φ) gilt für die Krümmungsänderung[1]

$$\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_0} = \frac{d}{d\sigma}\left(\frac{w}{\rho_0}-\frac{du}{d\sigma}\right),$$

oder mit Beachtung der Bedingung[1]

$$\frac{dw}{d\sigma}+\frac{u}{\rho_0} = 0, \tag{19}$$

die ausdrückt, daß die Zentrallinie ungedehnt bleibe,

$$\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_0} = -\left(\frac{d^2u}{d\sigma^2}+\frac{u}{\rho_0^2}\right)+w\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{1}{\rho_0}\right).$$

---

[1] Vgl. A. E. H. Love, Lehrbuch der Elastizität (deutsch von H. Timpe), S. 513. Leipzig 1907.

Somit lautet der Ausdruck für das Gesamtpotential

$$A = \frac{EJ}{2}\int\limits_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}\left[\left(\frac{d^2u}{d\sigma^2}+\frac{u}{\rho_0^2}\right)-w\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{1}{\rho_0}\right)\right]^2 d\sigma-\frac{\mu_1\omega^2}{2}\int\limits_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}(u^2+w^2)\,d\sigma,$$

worin μ_1 die schwingende Masse je Längeneinheit des Bogens angibt.

Man erhält nach längerer einfacher Zwischenrechnung

$$\frac{d^2u}{d\sigma^2}=\frac{1}{a^2}\left[u^{\mathrm{II}}\left\{1-2\,\varepsilon\cos 2\,\varphi+\frac{\varepsilon^2}{2}(-1+7\cos 4\,\varphi)\right\}+\right.$$
$$\left.+u^{\mathrm{I}}(2\,\varepsilon\sin 2\,\varphi-7\,\varepsilon^2\sin 4\,\varphi)\right],$$

$$\frac{1}{\rho_0^2}=\frac{1}{a^2}\left[1+6\,\varepsilon\cos 2\,\varphi-\frac{\varepsilon^2}{2}(1+9\cos 4\,\varphi)\right],$$

$$\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{1}{\rho_0}\right)=\frac{6}{a^2}\left[-\varepsilon\sin 2\,\varphi+\frac{7}{2}\,\varepsilon^2\sin 4\,\varphi\right]$$

und aus der Bedingung (19) für die Dehnungslosigkeit der Ringachse

$$u=-w^{\mathrm{I}}\,[1-4\,\varepsilon\cos 2\,\varphi+4\,\varepsilon^2(2+3\cos 4\,\varphi)];$$

die vorkommenden Ableitungen von w und u sind nach φ zu nehmen. Da nun A als Funktion des Winkels φ dargestellt ist, so lassen sich die Integrationen ausführen, sobald für die Schwingungskomponente w, mit der gemäß (19) auch u bestimmt ist, ein passender Näherungsansatz gewählt wird. Wir setzen

$$w(\varphi)=C\sin 2\,\varphi$$

in Übereinstimmung mit dem im Falle der Grundschwingung exakt richtigen Ansatze für den genauen Kreisring. Nach Erledigung aller Integrationen ergibt sich schließlich

$$A=\frac{EJ}{2}\,\frac{C^2\pi}{a^3}\,(36+\varepsilon^2.\,7983)-\frac{\mu_1 a\,\omega^2}{2}\,C^2\pi\left(5+\frac{279}{2}\,\varepsilon^2\right).$$

Aus der Bedingung $A=$ extrem folgt

$$\omega^2=\frac{EJ}{\mu_1 a^4}\,\frac{36+\varepsilon^2.\,7983}{5+\varepsilon^2.\,\frac{279}{2}} \tag{20}$$

Da der Umfang des durch Gleichung (15) festgelegten Ringes gemäß (17) gleich

$$\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} d\sigma = 2\,a\pi\,(1+\varepsilon^2)$$

ist, so beträgt der Halbmesser a_0 des Kreisringes mit gleichem Umfange $a_0 = a\,(1+\varepsilon^2)$ und es ist das Quadrat der Grundfrequenz ω_0 dieses gleichlangen genauen Kreisringes nach Gleichung (10) gegeben durch

$$\omega_0^2 = \frac{36}{5}\,\frac{EJ}{\mu_1 a_0^4}\,.$$

Hiemit geht Gleichung (20) über in

$$\omega^2 = \omega_0^2\,(1+\varepsilon^2)^4\,\frac{1+222\,\varepsilon^2}{1+28\,\varepsilon^2}\,,$$

woraus für die gesuchte Frequenz ω bei Beachtung der Kleinheit von ε

$$\omega = \omega_0\,(1+99\,\varepsilon^2) \tag{21}$$

folgt. Durch den Faktor $1+99\,\varepsilon^2$ ist somit der Einfluß der durch Gleichung (14) festgelegten kleinen Abweichungen ξ von der genauen Kreisform auf die Grundfrequenz ω_0 bestimmt. Dieser Einfluß besteht in einer Frequenzerhöhung, die z. B. für $\varepsilon = 0{\cdot}1$ schon rund 100% ausmacht. Zahlentafel 4 gibt die Zunahme des Einflußfaktors mit wachsendem ε an. Da sich die gewählte Ringform $r\,(\varphi) = a\,(1+\varepsilon\cos 2\,\varphi)$ von einer Ellipse mit den Halbachsen $a\,(1 \pm \varepsilon)$ nur in Größen von der Ordnung ε^2 und noch höheren Potenzen von ε unterscheidet, so kann die Formel (21) auch zur Berechnung der Grundschwingzahl eines elliptischen Ringes benutzt werden, dessen numerische Exzentrizität e gleich

$$\sqrt{1-\left(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^2} = \frac{2\sqrt{\varepsilon}}{1+\varepsilon}$$

ist; Zahlentafel 4 enthält die zu verschiedenen kleinen ε zugehörigen Exzentrizitäten e.

Die Formel (21) kann somit als Ersatz für die bisher nicht entwickelte exakte Formel zur Berechnung der Grundschwingzahl eines elliptischen Ringes gelten, soferne das Halbachsenverhältnis sich nicht erheblich von Eins unterscheidet.

Zusammenstellung bestimmter Integrale.

$$N = \int_0^{2\pi} (1-\gamma \cos \lambda \varphi)^4 \, (w^{\mathrm{I}} + w^{\mathrm{III}})^2 \, d\varphi = 36\, \pi n\, (\gamma, C, D),$$

$$P = \int_0^{2\pi} (1-\gamma \cos \lambda \varphi)^3 \, (w^{\mathrm{I}} + w^{\mathrm{III}})^2 \, d\varphi = 36\, \pi p\, (\gamma, C, D),$$

$$M = \int_0^{2\pi} (1-\gamma \cos \lambda \varphi) \, (w^{\mathrm{I}} + w^{\mathrm{III}})^2 \, d\varphi = 36\, \pi m\, (\gamma, C, D),$$

$$R = \int_0^{2\pi} (1-\gamma \cos \lambda \varphi)^2 \, (w^2 + w^{\mathrm{I}\,2}) \, d\varphi = 5\, \pi r\, (\gamma, C, D),$$

$$L = \int_0^{2\pi} (1-\gamma \cos \lambda \varphi) \, (w^2 + w^{\mathrm{I}\,2}) \, d\varphi = 5\, \pi l\, (\gamma, C, D),$$

wo die Funktionswerte n, p, m, r, l für den Fall der Grundschwingung $w(\varphi) = C \cos 2\varphi + D \sin 2\varphi$ aus nachstehender Tabelle zu entnehmen sind.

Funktions-wert	$\lambda \neq 2, 4$	$\lambda = 2$
n	$\left(1+3\gamma^2+\frac{3}{8}\gamma^4\right)(C^2+D^2)$	$\left(1+\frac{3}{2}\gamma^2+\frac{1}{8}\gamma^4\right)C^2+\left(1+\frac{9}{2}\gamma^2+\right.$ $\left.+\frac{5}{8}\gamma^4\right)D^2$
p	$\left(1+\frac{3}{2}\gamma^2\right)(C^2+D^2)$	$\left(1+\frac{3}{4}\gamma^2\right)C^2+\left(1+\frac{9}{4}\gamma^2\right)D^2$
m	$C^2+D^2\ (\lambda \neq 4)$	C^2+D^2
	$\left(1+\frac{\gamma^2}{2}\right)(C^2+D^2)$	$\left(1+\frac{7}{20}\gamma^2\right)C^2+\left(1+\frac{13}{20}\gamma^2\right)D^2$
l	$C^2+D^2\ (\lambda \neq 4)$	C^2+D^2

Funktions-wert	$\lambda = 4$
n	$\left(1+2\,\gamma+3\,\gamma^2+\frac{3}{2}\,\gamma^3+\frac{3}{8}\,\gamma^4\right)C^2+\left(1-2\,\gamma+3\,\gamma^2-\frac{3}{2}\,\gamma^3+\frac{3}{8}\,\gamma^4\right)D^2$
p	$\left(1+\frac{3}{2}\,\gamma+\frac{3}{2}\,\gamma^2+\frac{3}{8}\,\gamma^3\right)C^2+\left(1-\frac{3}{2}\,\gamma+\frac{3}{2}\,\gamma^2-\frac{3}{8}\,\gamma^3\right)D^2$
m	$\left(1+\frac{\gamma}{2}\right)C^2+\left(1-\frac{\gamma}{2}\right)D^2$
	$\left(1+\frac{3}{5}\,\gamma+\frac{1}{2}\,\gamma^2\right)C^2+\left(1-\frac{3}{5}\,\gamma+\frac{1}{2}\,\gamma^2\right)D^2$
l	$\left(1+\frac{3}{10}\,\gamma\right)C^2+\left(1-\frac{3}{10}\,\gamma\right)D^2$

Zahlentafel 1.

Einflußwerte Ψ_C un Ψ_D nach Abschnitt 1 (a) bei Kreisquerschnitt.

γ	$\lambda = 2$		$\lambda = 4$		$\lambda \neq 2, 4$
	Ψ_C	Ψ_D	Ψ_C	Ψ_D	$\Psi_C = \Psi_D$
0	1	1	1	1	1
0·01	1·00015	1·00039	1·0142	0·9862	1·00025
0·02	1·00046	1·0015	1·0287	0·9727	1·0011
0·05	1·0029	1·0096	1·0741	0·9342	1·0062
0·10	1·0115	1·0383	1·1564	0·8768	1·0249
0·20	1·0456	1·1511	1·3444	0·7873	1·0986

Zahlentafel 2.

Einflußwerte Ψ_C und Ψ_D nach Abschnitt 1 (b) bei konstanter Breite b.

γ	$\lambda = 2$		$\lambda = 4$		$\lambda \neq 2, 4$
	Ψ_C	Ψ_D	Ψ_C	Ψ_D	$\Psi_C = \Psi_D$
0	1	1	1	1	1
0·01	1·00008	1·00023	1·0121	0·9881	1·00015
0·02	1·0003	1·0009	1·0245	0·9765	1·0006
0·05	1·0019	1·0056	1·0629	0·9428	1·00375
0·10	1·0075	1·0225	1·1314	0·8914	1·015
0·20	1·03	1·09	1·2858	0·8053	1·06

Zahlentafel 3.

Einflußwerte Ψ_C und Ψ_D nach Abschnitt 1 (*b*) bei konstanter Höhe *h*.

γ	$\lambda = 4$		$\lambda \neq 4$
	Ψ_C	Ψ_D	$\Psi_C = \Psi_D$
0	1	1	1
0·01	1·0020	0·9980	1
0·02	1·0040	0·9960	1
0·05	1·0098	0·9898	1
0·10	1·0194	0·9794	1
0·20	1·0377	0·9574	1

Zahlentafel 4.

Einflußfaktor $1+99\,\varepsilon^2$.

	$1+99\,\varepsilon^2$	$\dfrac{2\sqrt{\varepsilon}}{1+\varepsilon} =$ Exzentrizität e
0	1	0
0·01	1·010	0·198
0·02	1·040	0·277
0·03	1·089	0·336
0·04	1·158	0·385
0·05	1·248	0·426
0·06	1·356	0·462
0·07	1·485	0·495
0·08	1·634	0·524
0·09	1·802	0·551
0·10	1·99	0·575