

Beiträge zur Kenntnis der atmosphärischen Elektrizität
Nr. 76

Über den Ladungsverlust einer Kugel in
ruhender und in bewegter Luft

I. Mitteilung

Von

Egon von Schweidler

ordentl. Mitglied d. Akad. d. Wiss.

(Mit 2 Textfiguren)

(Vorgelegt in der Sitzung am 3. Juli 1941)

Das Problem, den Ladungsverlust eines elektrisch geladenen Körpers in einem unendlich ausgedehnten ionisierten Luftraum zu berechnen, und zwar erstens in ruhender und zweitens in strömender Luft, ist schon vor längerer Zeit mehrfach¹ behandelt worden. Es ist auch von Bedeutung für die luftelektrische Meßmethode, aus der beobachteten „Zerstreuung“ die Leitfähigkeit der Luft zu ermitteln.

Wenn dieses alte Problem hier nochmals eingehender untersucht werden soll, so geschieht dies einerseits, weil sich bei genauerer Betrachtung zunächst gewisse begriffliche Schwierigkeiten ergeben, deren Lösung nicht unmittelbar ersichtlich wird, andererseits weil die für die Praxis wichtige Frage, bis zu welchem unteren Grenzwert der Strömungsgeschwindigkeit der Luft die Anwendung der üblichen Riecke'schen Formel zulässig bleibt, bisher keine befriedigende Beantwortung gefunden hat.

Da es sich hier um das Prinzipielle handelt, soll zur Vermeidung allzu großer mathematischer Schwierigkeiten der einfachere Spezialfall untersucht werden, daß der geladene Körper die Form einer Kugel habe, der unendlich ausgedehnte Gasraum gleichmäßig ionisiert sei und daß die Beweglichkeit der positiven und der negativen Ionen gleich sei.

¹ E. Riecke, Ann. d. Phys. (4), 12, 52, 1903. — J. J. Thomson Conduction of electricity through gases, 1. ed., Cambridge 1903, S. 66 ff. — G. Mie, Ann. d. Phys. (4), 13, 857, 1904. — R. Seeliger, Ann. d. Phys. (4), 33, 319, 1910. — W. F. G. Swann, Terr. Magn., 19, 23 u. 81, 1914.

Bezeichnet q die Ionisierungsstärke, α den Wiedervereinigungskoeffizienten, n_1 und n_2 die Zahl der positiven, bzw. negativen Ionen in der Volumeneinheit, v_1 und v_2 deren Beweglichkeiten, so ist die im elektrostatischen Maßsystem ausgedrückte Leitfähigkeit des Gases

$$\Lambda = (n_1 v_1 + n_2 v_2) e$$

Die beiden Glieder dieser Summe werden gewöhnlich als „polar“ Leitfähigkeiten λ_1 und λ_2 bezeichnet; in unserem Spezial-

fall ist $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = \frac{\Lambda}{2}$. Die geltenden Ansichten sind nun, daß in strömender Luft (Strömungsgeschwindigkeit u) der Ladungsverlust gegeben sei durch

$$J = -\frac{dQ_{\pm}}{dt} = -4\pi\lambda_{\mp}Q_{\pm}$$

unabhängig von der Größe der Geschwindigkeit u , solange diese einen nicht näher bestimmbar Grenzwert merklich überschreite, daß dagegen in ruhender Luft keine recht definierte Beziehung zwischen Ladungsverlust und Leitfähigkeit bestehe.

Zur schärferen Fassung der Problemstellung ist es nun zweckmäßig, nicht von der Annahme einer gegebenen Ladung oder einem gegebenen Potential des „Zerstreuungskörpers“ auszugehen, sondern anzunehmen, daß in einem (nicht realisierbaren) Gedankenexperiment einer Kugel vom Radius a durch einen unendlich dünnen, daher kapazitätslosen Draht oder konvektiv ein konstanter Strom J zugeführt werde. Gefragt wird, welche Ladung Q_a , bzw. welches Potential U_a die Kugel im stationären Zustand annimmt, wenn die das ionisierte Gas charakterisierenden Größen gegeben sind.

In einem dem Ohm'schen Gesetz folgenden Medium (z. B. Metallkugel in einem Elektrolyt) wäre einfach

$$Q_a = \frac{J}{4\pi\Lambda} \quad \text{und} \quad U_a = \frac{Q_a}{a}$$

also:

$$4\pi\Lambda = \frac{J}{aU_a}.$$

In einem ionisierten Gase gilt bekanntlich diese einfache Beziehung nicht mehr. In der Umgebung des geladenen Körpers entstehen

Raumladungen („Elektroden effekt“), da die gleichnamigen Ionen abgestoßen, die ungleichnamigen angezogen werden. Im ruhenden Gas umgibt sich der Körper mit einer „Ionosphäre“, deren Gesamtladung entgegengesetzten Vorzeichens dem absoluten Betrage nach mit Q_A bezeichnet werde. Diese Ladung verändert das elektrische Feld und beeinflusst den Wert des Potentials U_a . Im strömenden Gas wird diese Ionosphäre zu einer mit einer Rauchfahne vergleichbaren „Ionenfahne“ verweht.

Hält man rein formal an der früher erwähnten Beziehung zwischen Leitfähigkeit, Strom und Potential fest in der Form

$$4\pi\Lambda^* = \frac{J}{aU_a},$$

so kann man Λ^* als die „Scheinleitfähigkeit“ des Gases bezeichnen.

Nach dem oben Gesagten ist im strömenden Gas nach der Riecke'schen Theorie $\Lambda^* = \lambda_1$ oder λ_2 je nach dem Vorzeichen der Kugelladung, im Spezialfall gleicher Beweglichkeiten also $\Lambda^* = \lambda = \frac{\Lambda}{2}$, dagegen undefiniert im ruhenden Gas.

Das Verhältnis von Λ^* zu Λ soll nun für ruhendes Gas sowie für langsam strömendes Gas genauer ermittelt werden.

I. Die Scheinleitfähigkeit im ruhenden Gas.

Die Ermittlung der Ladung Q_A der „Ionosphäre“, ihrer räumlichen Verteilung und ihres Einflusses auf das elektrische Feld in der Umgebung des geladenen Körpers ist ein spezieller Fall in der Behandlung des sogenannten „Elektroden effektes“.

Gleiche Beweglichkeit der beiden Ionengattungen vorausgesetzt, gilt dabei allgemein eine Differentialgleichung zwischen dimensionslosen Größen von der Form:

$$\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2 = \frac{4\beta^2}{\beta-1} \left[\beta-1 + \eta - \beta\eta^{\frac{1}{\beta}} \right]$$

mit den Grenzbedingungen:

$$\xi = 0; \frac{d\eta}{d\xi} = 2\beta$$

$$\xi = \infty; \eta = 1.$$

Die Lösung ist nicht in geschlossener Form angebbbar, läßt sich aber nach G. Mie (l. c.) darstellen durch:

$$\eta(\xi) = 1 + (\gamma^2 - 1) e^{-[k_1 \xi + k_2 \xi^2 + k_3 \xi^3 + \dots]},$$

wobei:

$$\gamma^2 = \beta^{\frac{3}{\beta-1}}$$

$$k_1 = \frac{2\beta}{\gamma^2 - 1}$$

$$k_2 = \frac{k_1(k_1 - 1)}{2}$$

$$k_3 = k_1 \left[k_2 + \frac{1}{3\gamma^2} - \frac{k_1^2}{6} \right]$$

Die physikalische Bedeutung der Größen β , ξ , η ist die folgende.

Der Parameter β ist durch die Eigenschaften des ionisierten Gases gegeben, und zwar

$$\beta = \frac{8\pi e v}{\alpha}$$

(e = Elementarquantum, v = Beweglichkeit, α = Wiedervereinigungskoeffizient).

Die numerischen Werte der obengenannten Konstanten bei verschiedenen Werten von β ergeben sich aus der folgenden Tabelle.

T a b e l l e 1.

β	γ^2	γ	k_1	k_2	k_3
100	104·76	10·235	1·9275	0·8936	—
10	12·916	3·5938	1·6785	0·5694	—
4·0	6·3496	2·5198	1·4955	0·3705	0·050
3·8	6·1214	2·4741	1·4840	0·3591	—
3·6	5·8924	2·4273	1·4717	0·3470	0·067
3·4	5·6615	2·3794	1·4588	0·3346	—
3·2	5·4293	2·3301	1·4449	0·3214	—
3·0	5·1962	2·2795	1·4394	0·3162	—
2·0	4·0000	2·0000	1·3333	0·2222	0·012
1·5	3·3750	1·8371	1·2632	0·1662	—
1·0	2·7183	1·6487	1·1640	0·0955	—

Für kernfreie atmosphärische Luft von normalem Druck erhält man für β einen nahe an 3·6 liegenden Wert; dieser ist daher den späteren numerischen Zahlenbeispielen zugrunde gelegt. Wie sich aus der Tabelle ergibt, ist der Verlauf der Funktion $\eta(\xi)$ bei mäßigen Abweichungen von diesem gewählten Wert nicht wesentlich verändert.

Die Variablen ξ und η haben im allgemeinen Problem verschiedene Bedeutung je nach der Form des geladenen Körpers. Ist dieser eine unendlich ausgedehnte ebene Platte, so werde zunächst eine Länge l definiert durch die Beziehung $l q e = i/2$, d. h. die zwischen der Platte und einer in der Entfernung l liegenden parallelen Ebene erzielbare Sättigungsstromdichte soll den halben Wert der der Platte zugeführten Stromdichte betragen. Die Feldstärke $E(x)$ in der Entfernung x von der Platte werde dann als Funktion der dimensionslosen Größe $\xi = \frac{x}{l}$

dargestellt; ferner werde der Quotient $\left(\frac{E(\xi)}{E(\infty)}\right)^2 = \eta$ gesetzt.

Es ist also $\frac{E(\xi)}{E(\infty)} = \sqrt{\eta}$ und daher $E(0) = \gamma E(\infty)$, wobei $E(\infty)$ durch die Bedingung gegeben ist, daß in sehr großer Entfernung der Zustand des ionisierten Gases unverändert bleibt und daher $i = \Lambda E(\infty)$ ist.

Der Verlauf der Funktion $\sqrt{\eta(\xi)}$ ist für den angenommenen Parameterwert $\beta = 3\cdot6$ in der Fig. 1 sowie zahlenmäßig in der 2. Kolumne der Tabelle 2 (S. 216) dargestellt.

Wie R. Seeliger (l. c.) gezeigt hat, gilt genau die gleiche Differentialgleichung wie oben auch für den Elektrodeneffekt in der Umgebung eines unendlich langen Drahtes (Radius a) oder einer Kugel vom Radius a , wenn für ξ , η und l eingesetzt wird:

beim Draht:

$$\xi = \frac{r^2 - a^2}{l^2 - a^2}; \eta = \left(\frac{\mu(r)}{\mu(\infty)}\right)^2; \pi(l^2 - a^2) q e = i/2$$

bei der Kugel:

$$\xi = \frac{r^3 - a^3}{l^3 - a^3}; \eta = \left(\frac{Q(r)}{Q(\infty)}\right)^2; \frac{4\pi}{3}(l^3 - a^3) q e = J/2,$$

wobei i der dem Draht je Längeneinheit zugeführte Strom,
 J der der Kugel zugeführte Strom,
 $\mu(r)$ die in einem Zylinder vom Radius r und der Länge 1,
 $Q(r)$ die in einer Kugel vom Radius r enthaltene
 Ladung bedeutet.

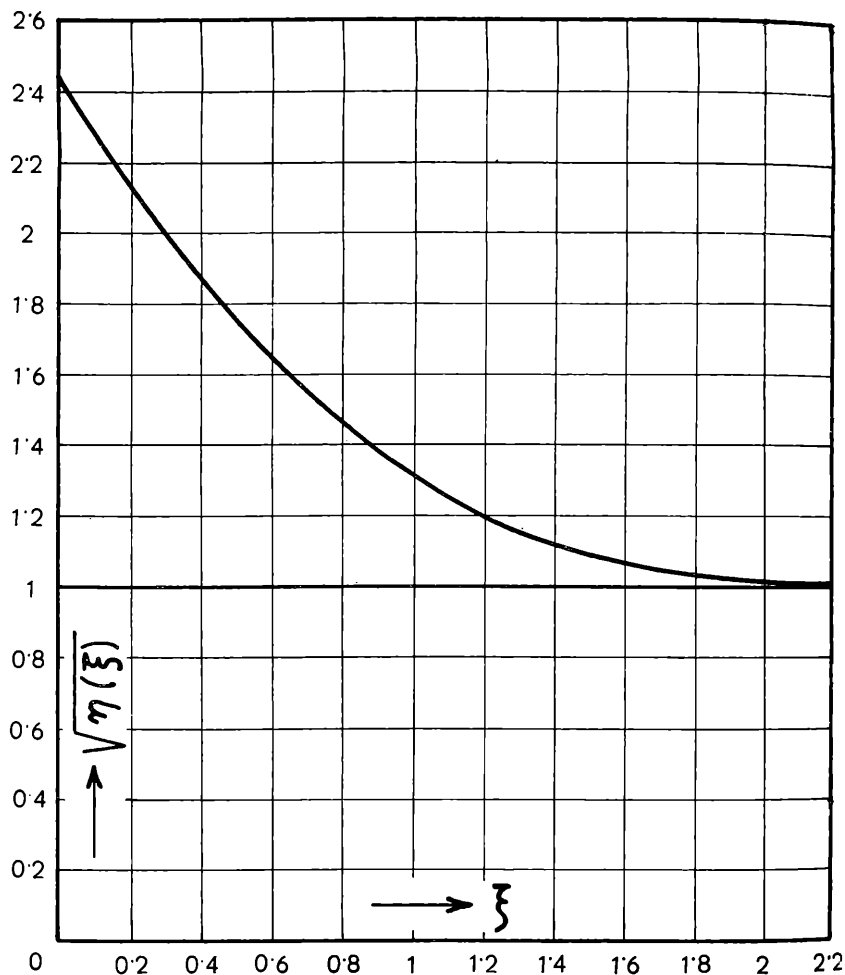


Fig. 1.

Wenn also einer Kugel ein konstanter positiver Strom J zugeführt wird, so nimmt sie im stationären Zustand eine positive Ladung

$$Q_a = \gamma Q_\infty = \gamma Q$$

an, wobei $Q = \frac{J}{4\pi\Lambda}$ die Gesamtladung von Kugel und „Ionosphäre“, also $Q = Q_a - Q_A$ ist.

Die Ionosphärenladung hat den absoluten Betrag $Q_A = Q(\gamma - 1)$.

Die räumliche Verteilung der Ladung ist zunächst durch die Formel $Q(\xi) = Q \sqrt{\gamma(\xi)}$ als Funktion der unabhängigen Variablen $\xi = \frac{r^3 - a^3}{l^3 - a^3}$ gegeben. Zu einer anschaulichen Darstellung ist es erforderlich, daraus die Funktion $Q(r)$ zu berechnen und diese fällt verschieden aus je nach dem Verhältnis der oben definierten Länge l , die man als „Halbsättigungsradius“ bezeichnen könnte, zum Kugelradius a .

Die folgende Tabelle 2 enthält für einige Werte von ξ die zugeordneten Werte von $\frac{Q(\xi)}{Q} = \sqrt{\gamma(\xi)}$ sowie die aus der Beziehung $r = l \sqrt[3]{\xi + \frac{a^3}{l^3}(1 - \xi)}$ berechneten zugehörigen Werte von r für verschiedene Werte des Quotienten l/a . Die Fig. 2 stellt einige der Funktionen $Q(r)$ graphisch dar.

Aus der Tabelle ist zu ersehen, daß in Distanzen, die nur wenig größer als der „Halbsättigungsradius“ l sind, die Raumladungsdichte der „Ionosphäre“ bereits unmerklich klein wird.

Um nun die Scheinleitfähigkeit Λ^* zu berechnen, muß das durch die Kugelladung Q_a und die Ionosphärenladung $-Q_A$ bedingte Potential U_a der Kugel bestimmt werden:

$$U_a = \frac{Q}{a} - \int_a^\infty \frac{dQ(r)}{r}.$$

Setzt man

$$\int_a^\infty \frac{dQ}{r} = \frac{1}{A} \int_a^\infty dQ = \frac{Q_A}{A}$$

so bedeutet die dadurch definierte Länge A diejenige Entfernung, in der man sich die gesamte Ladung Q konzentriert denken könnte, damit sie in der Kugel dasselbe Potential erzeuge wie bei ihrer wirklichen räumlichen Verteilung. Man möge A den „Äquivalenzradius der Ionosphäre“ nennen.

Tabelle 2.

ξ	$\frac{Q(\xi)}{Q}$	r/l für l/a :						
		sehr groß	10	5	4	3	2	10/9
0	2·427	sehr klein	0·100	0·200	0·250	0·333	0·500	0·900
0·01	2·413	0·215	0·222	0·260	0·294	0·360	0·511	0·901
0·05	2·354	0·368	0·371	0·386	0·402	0·440	0·553	0·906
0·1	2·282	0·464	0·466	0·475	0·485	0·511	0·597	0·911
0·2	2·143	0·585	0·585	0·591	0·597	0·612	0·669	0·922
0·3	2·006	0·669	0·670	0·674	0·677	0·688	0·729	0·932
0·4	1·886	0·737	0·737	0·740	0·743	0·750	0·780	0·943
0·5	1·770	0·794	0·794	0·796	0·798	0·803	0·826	0·953
0·6	1·662	0·843	0·844	0·845	0·846	0·850	0·866	0·962
0·8	1·473	0·928	0·928	0·929	0·930	0·931	0·938	0·982
1·0	1·321	1·000	1·000	1·000	1·000	1·000	1·000	1·000
1·2	1·206	1·063	1·063	1·062	1·062	1·060	1·055	1·018
1·5	1·095	1·145	1·145	1·144	1·143	1·140	1·128	1·043
1·8	1·038	1·219	1·218	1·215	1·215	1·210	1·194	1·068
2·0	1·019	1·260	1·260	1·258	1·257	1·252	1·235	1·083
2·5	1·002 ₆	1·357	1·357	1·355	1·353	1·347	1·322	1·120
3·0	1·000 ₂	1·442	1·442	1·440	1·437	1·430	1·401	1·155

Diese Größe läßt sich nicht explizit darstellen, sondern bloß durch eine mechanische Quadratur von $\int \frac{dQ}{r}$ ermitteln. Ist dies geschehen (für verschiedene Werte von l/a), so folgt aus:

$$Q = Q_a - Q_A = \frac{J}{4\pi\Lambda}$$

$$U_a = \frac{Q_a}{a} - \frac{Q_A}{A} = Q \left[\frac{\gamma}{a} - \frac{\gamma-1}{A} \right]$$

und der Definitionsgleichung (S. 211) $4\pi\Lambda^* = \frac{J}{aU_a}$ das Enderesultat:

$$\text{Scheinleitfähigkeit } \Lambda^* = \Lambda \frac{1}{\gamma - (\gamma-1) \frac{a}{A}}.$$

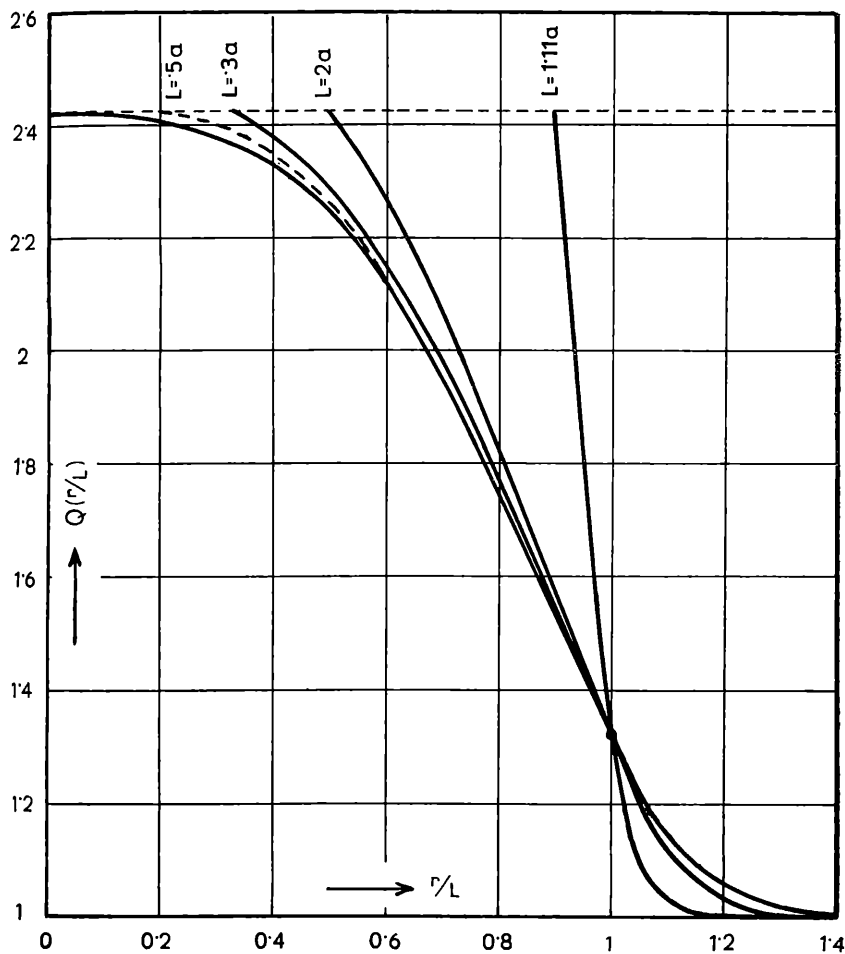


Fig. 2.

Die folgende Tabelle 3 stellt für den angenommenen Wert $\beta = 3.6$ und damit $\gamma = 2.427$ auf Grund ausgeführter mechanischer Quadraturen die Beziehungen von A , U_a und Λ^* zum Halbsättigungsradius l dar.

Die Scheinleitfähigkeit Λ^* ist also kleiner als die polare Leitfähigkeit $\lambda = \frac{\Lambda}{2}$, wenn der Halbsättigungsradius l groß

gegen den Kugelradius a ist; sie wird gleich λ bei $l = 4.62 a$ und nähert sich dem Werte der totalen Leitfähigkeit Λ , wenn l nur wenig größer als a ist. Dieser letzte Fall tritt ein, wenn entweder bei gegebenem Strom J der Kugelradius a sehr groß oder bei gegebenem a der Strom J sehr klein wird. Für praktisch verwendbare Messungen kommt er aber nicht in Betracht, weil er unhandlich große Zerstreungskörper oder für genauere Messungen zu kleine Potentialwerte voraussetzt.

T a b e l l e 3.

l/a	A/l	A/a	$U_a \cdot \frac{a}{Q}$	Λ^*/Λ
sehr groß	2/3	sehr groß	2.427	0.412
100	0.667	66.7	2.406	0.415
10	0.694	6.94	2.22	0.450
5	0.719	3.59	2.03	0.492
4.62	0.723	3.34	2.00	0.500
4	0.726	2.90	1.93	0.518
2	0.778	1.56	1.51	0.662
1.11	0.964	1.070	1.093	0.915
1.00	1	1	1	1

Dagegen ist der Fall, daß in ruhender Luft $\Lambda^* > \lambda$, also größer als in rasch strömender Luft ist, unter Umständen bei brauchbaren Versuchsanordnungen realisierbar.

Numerische Beispiele gibt die folgende Tabelle 4. Angenommen ist dabei ein kernfreies Gas mit $n = 10^3$ Ionenpaaren/cm³ und der Leitfähigkeit $\Lambda = 4.55 \cdot 10^{-4} \text{ sec}^{-1}$. Der zugeführte Strom J werde so gewählt, daß die Gesamtladung

$Q = Q_a - Q_A = \frac{J}{4\pi\Lambda}$ runde Werte von 10^{-2} , bzw. 10^{-1} , 1 und 10 Ccs

annimmt. (1 Ccs = 1 elektrostatische Ladungseinheit.)

Aus den Beziehungen

$$\frac{4\pi(l^3 - a^3)}{3} qe = \frac{J}{2} = 2\pi\Lambda Q \text{ und } q = \alpha n^2$$

erhält man dann

$$l = a \sqrt[3]{1 + \frac{3\beta}{8\pi e} \frac{Q}{na^3}} = a \sqrt[3]{1 + 9 \cdot 10^8 \frac{Q}{na^3}} \text{ (für } \beta = 3.6 \text{).}$$

Tabelle 4.

$\begin{matrix} Q \\ a \end{matrix}$	$10^{-2} C$	$0.1 Ces$	$1 Ces$	$10 Ces$
$1 cm \dots$	$l/a = 20.8$	44.8	96.5	208
$10 cm \dots$	2.15	4.50	9.66	20.8
$20 cm \dots$	1.25	2.30	4.84	10.4
$30 cm \dots$	1.10	1.63	3.25	6.94
$100 cm \dots$	1.00_3	1.03	1.24	2.15
$200 cm \dots$	1.000_4	1.00_4	1.04	1.31

Wird also bei rasch bewegter Luft aus der Entladungsgeschwindigkeit des Zerstreuungskörpers die polare Leitfähigkeit λ bestimmt, so kann der nach der üblichen Methode berechnete Wert bei abnehmender Strömungsgeschwindigkeit — sich dem bei ruhender Luft gültigen Wert annähernd — sowohl ab- als zunehmen, je nach dem Betrage des gerade vorhandenen Quotienten l/a . Bei welchen Minimalgeschwindigkeiten die Abweichung noch zu vernachlässigen ist, soll in einer 2. Mitteilung demnächst behandelt werden.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse](#)

Jahr/Year: 1941

Band/Volume: [150_2a](#)

Autor(en)/Author(s): Schweidler Egon Ritter von

Artikel/Article: [Beiträge zur Kenntnis der atmosphärischen Elektrizität Nr. 76. Über den Ladungsverlust einer Kugel in ruhender und in bewegter Luft. 209-219](#)