Eine Verallgemeinerung der Euler-Maclaurin'schen Reihe und der Bernoulli'schen Zahlen

Von

Anna Klingst in Wien

(Mit 3 Textfiguren)

(Vorgelegt in der Sitzung am 20. November 1941)

1. Einleitung und Übersicht.

Die vorliegende Arbeit behandelt die Aufgabe, die Methode der Trapezverbesserung zu verallgemeinern, d. h. die allgemeine Quadraturformel

$$\int_{a_0}^{a_n} f(x)\,dx = \sum_{0}^{n} {}_j\, L_j f(a_j) + R \tag{1}$$

mit den im Intervall $a_0 \ldots a_n$ symmetrisch[1] verteilten Anschlußpunkten $a_0, a_1, \ldots a_n$, wobei die L_j gewisse von f unabhängige Zahlenfaktoren sind, durch Entwicklung von R in eine Reihe umzuformen, derart, daß das Verfahren im Falle der Trapezregel die als *Euler-Maclaurin'sche* Formel[2] bekannte Reihe liefert. (Diese Anregung verdanke ich Herrn Prof. L. v. Schrutka.)

Die Aufgabe wird dadurch gelöst, daß eine bereits von *G. Kowalewski*[3] angegebene Form des Restgliedes R durch partielle Integrationen in eine Reihe entwickelt wird. Die so entstehende Reihe erhält den Namen: *höhere Euler-Maclaurin'sche Reihe.* Die oben erwähnte Form des Restgliedes R wird in Punkt 2 auf eine neue Weise hergeleitet, die sich dem Rahmen dieser Arbeit besser einfügt.

Für die Koeffizienten der höheren *Euler-Maclaurin'sehen* Reihen läßt sich ein Zusammenhang mit Zahlen feststellen, die

[1] Diese Einschränkung läßt die Analogien zum Falle der Trapezregel besser hervortreten und kann bedenkenlos gemacht werden, da alle geläufigen Quadraturformeln symmetrisch sind.

[2] Diese Bezeichnung entnehme ich dem Buch von *G. Kowalewski, Interpolation und genäherte Quadratur.* Leipzig und Berlin. S. 122.

[3] *G. Kowalewski,* a. a. O., S. 73 u. f., S. 87 u. f.

als eine Verallgemeinerung der *Bernoulli'sehen Zahlen* aufgefaßt werden können und einer symbolischen Rücklaufformel genügen, die eine für die *Bernoulli'sehen Zahlen* bekannte Rücklaufformel als Sonderfall enthält [Formel (8)]. Diese Zahlen werden daher als *höhere Bernoulli'sehe Zahlen* bezeichnet.[4]

Es zeigt sich ferner, daß in vielen Fällen in der Folge der nicht verschwindenden dieser höheren *Bernoulli'schen* Zahlen das Vorzeichen abwechselt, wie dies ja auch bei den gewöhnlichen *Bernoulli'schen* Zahlen zutrifft. Hiefür wurde eine hinreichende Bedingung aufgestellt und mit deren Hilfe der Zeichenwechsel im Falle der *Gauß'schen* und *Cotes'sehen* Quadraturformeln untersucht (Punkt 9, Punkt 11). Wenn diese Bedingung erfüllt ist — so läßt sich weiter zeigen — kann der Fehler, den man begeht, wenn man die höhere *Euler-Maclaurin'sche* Reihe an einer bestimmten Stelle abbricht, auf einfache Weise abgeschätzt werden.

Den Abschluß dieser Arbeit bildet eine Tabelle der ersten zu den *Cotes'schen* Formeln $n = 1, 2, \ldots 5$ gehörigen höheren *Bernoulli'schen* Zahlen und der zu eben diesen Formeln gehörigen höheren *Euler-Maclaurin'schen* Reihen.

An dieser Stelle möchte ich Herrn Prof. *L. v. Schrutka* herzlich danken für seine Anregung und seine vielen wertvollen Hinweise zu dieser Arbeit.

2. Das Restglied der Quadraturformeln:

$$\int_{a_0}^{a_n} f(x)\,dx = \sum_0^n {}_j L_j f(a_j) + R.$$

Die *Newton'sche Quadraturformel*,[5] d. h. jene Formel der Gestalt (1), welche durch Integration der bekannten *Newton'schen Interpolationsformel* mit den Anschlußpunkten $a_0, a_1, \ldots a_n$ zwischen den Grenzen a_0 und a_n entsteht, hat bekanntlich für den Fall, $f(x)$ = Polynom, dessen Grad n nicht übersteigt, die Eigenschaft $R = 0$. Es gilt daher für $f(x) = \frac{(a_n - x)^i}{i!}$; $i \leqq n$

$$R = \int_{a_0}^{a_n} \frac{(a_n - x)^i}{i!}\,dx - \sum_0 {}_j L_j \frac{(a_n - a_j)^i}{i!} =$$

[4] Wohl zu unterscheiden von den von *E. Cesaro* eingeführten, sogenannten *Ultra-Bernoulli'schen Zahlen* (Atti del Accad. di Napoli, 1865), welche der Bedingung $(B+1)^n - pB^n = n$ mit $B^0 = B_0 = 0$ genügen.

[5] Diese Bezeichnung entnehme ich *G. Kowalewski*, a. a. O., S. 40.

$$=\frac{(a_n-a_0)^{i+1}}{(i+1)!}-\sum_0^n{}_j\, L_j\frac{(a_n-a_j)^i}{i!}=0. \tag{2}$$

Diese Beziehungen (2) werden wir jetzt bei der folgenden Umformung des Restgliedes anzuwenden haben.

$$R=\int_{a_0}^{a_n} f(x)\,dx-\sum_0^n{}_j\, L_j f(a_j)$$

kann offenbar, wie man sich ohne weiteres durch partielle Integration und Benutzung der Tatsache [Formel (2) für $i=0$]

$$\sum_0^n{}_j\, L_j=a_n-a_0$$

überzeugt, in der Form

$$R=-\int_{a_0}^{a_1}[(x-a_0)-L_0]\,f'(x)\,dx-\int_{a_1}^{a_2}[(x-a_0)-L_0-L_1]\,f'(x)\,dx-\,.\,.$$

$$-\int_{a_{n-1}}^{a_n}[(x-a_0)-L_0-L_1-\ldots L_{n-1}]\,f'(x)\,dx$$

geschrieben werden, welche wiederum durch partielle Integration und Anwendung von (2) der Reihe nach übergeht in

$$R=+\int_{a_0}^{a_1}\left[\frac{(x-a_0)^2}{2!}-L_0(x-a_0)\right]f''(x)\,dx+$$

$$+\int_{a_1}^{a_2}\left[\frac{(x-a_0)^2}{2!}-L_0(x-a_0)-L_1(x-a_1)\right]f''(x)\,dx+\ldots+$$

$$+\int_{a_{n-1}}^{a_n}\left[\frac{(x-a_0)^2}{2!}-L_0(x-a_0)-L_1(x-a_1)-\ldots-\right.$$

$$\left.-L_{n-1}(x-a_{n-1})\right]f''(x)\,dx,$$

$$R=-\int_{a_0}^{a_1}\left[\frac{(x-a_0)^3}{3!}-L_0\frac{(x-a_0)^2}{2!}\right]f'''(x)\,dx-$$

$$-\int_{a_1}^{a_2}\left[\frac{(x-a_0)^3}{3!}-L_0\frac{(x-a_0)^2}{2!}-L_1\frac{(x-a_1)^2}{2!}\right]f'''(x)\,dx-\ldots-$$

$$-\int_{a_{n-1}}^{a_n}\frac{(x-a_0)^3}{3!}-L_0\frac{(x-a_0)^2}{2!}-L_1\frac{(x-a_1)^2}{2!}-\ldots-$$

$$-L_{n-1}\frac{(x-a_{n-1})^2}{2!}\Bigg]f'''(x)\,dx$$

$$R=(-1)^{n+1}\Bigg\{\int_{a_0}^{a_1}\left[\frac{(x-a_0)^{n+1}}{(n+1)!}-L_0\frac{(x-a_0)^n}{n!}\right]f^{(n+1)}(x)\,dx+$$

$$+\int_{a_1}^{a_2}\left[\frac{(x-a_0)^{n+1}}{(n+1)!}-L_0\frac{(x-a_0)^n}{n!}-L_1\frac{(x-a_1)^n}{n!}\right]f^{(n+1)}(x)\,dx+\ldots+ \tag{3}$$

$$+\int_{a_{n-1}}^{a_n}\Bigg[\frac{(x-a_0)^{n+1}}{(n+1)!}-L_0\frac{(x-a_0)^n}{n!}-L_1\frac{(x-a_1)^n}{n!}-\ldots-$$

$$-L_{n-1}\frac{(x-a_{n-1})^n}{n!}\Bigg]f^{(n+1)}(x)\,dx\Bigg\}.$$

Die Integrationskonstanten wurden so gewählt daß die, unter dem Integralzeichen auftretenden Polynome in den Anschlußstellen aneinanderschließen und das erste dieser Polynome an der Stelle a_0 den Wert Null besitzt.

Die Form (3) des Restgliedes wurde von *Kowalewski* bereits auf andere Weise hergeleitet. Sie gewinnt besonders dann praktische Bedeutung, wenn es gelingt, zu zeigen, daß die Funktion

$$\mathfrak{R}(x)=\frac{(x-a_0)^{n+1}}{(n+1)!}-L_0\frac{(x-a_0)^n}{n!}, \qquad \text{in } a_0\ldots a_1$$

$$=\frac{(x-a_0)^{n+1}}{(n+1)!}-L_0\frac{(x-a_0)^n}{n!}-L_1\frac{(x-a_1)^n}{n!}, \qquad \text{in } a_1\ldots a_2$$

$$=\frac{(x-a_0)^{n+1}}{(n+1)!}-L_0\frac{(x-a_0)^n}{n!}-L_1\frac{(x-a_1)^n}{n!}-\ldots-$$

$$-L_{n-1}\frac{(x-a_{n-1})^n}{n!}, \qquad \text{in } a_{n-1}\ldots a_n$$

im Intervall $a_0 \ldots a_n$ vorzeichenbeständig ist, da in diesem Falle der erste Mittelwertsatz auf

$$R = (-1)^{n+1} \int_{a_0}^{a_n} \mathfrak{N}(x) f^{(n+1)}(x)\, dx \tag{3a}$$

angewendet ergibt:

$$R = (-1)^{n+1} f^{(n+1)}(\xi) \int_{a_0}^{a_n} \mathfrak{N}(x)\, dx \qquad a_0 < \xi < a_n.$$

Diese Form des Restgliedes gestattet nämlich durch Einsetzen des Maximums von $f^{(n+1)}(\xi)$ in $a_0 \ldots a_n$ an die Stelle von $f^{(n+1)}(\xi)$ eine Abschätzung des Fehlers von (1). *Kowalewski* führt diesen Gedankengang für die dritte *Cotes'sche Formel*, die sogenannte *Newton'sche Lieblingsformel*, durch.[6]

Im folgenden sollen jetzt nur mehr solche Quadraturformeln (1) betrachtet werden, deren Anschlußpunkte in bezug auf die Intervallmitte symmetrisch liegen und die infolgedessen auch in den Koeffizienten L_j symmetrisch sind, so daß gilt

$$L_k = L_{n-k} \qquad (k = 0, 1, \ldots n).$$

Die n-te Ableitung der Funktion $\mathfrak{N}(x)$ ist dann, wie leicht einzusehen ist, eine in bezug auf den Intervallmittelpunkt schiefsymmetrische Funktion, d. h. es gilt

$$\mathfrak{N}^{(n)}(a_0+t) = -\mathfrak{N}^{(n)}(a_n-t).$$

Offenbar erhält man durch n-malige Bildung der Stammfunktionen von $\mathfrak{N}^{(n)}(x)$, so wie dies oben bei der Durchführung der partiellen Integration geschah, abwechselnd eine in bezug auf die Intervallmitte symmetrische und eine schiefsymmetrische Funktion

$$\mathfrak{N}^{(n-1)}(a_0+t) = +\mathfrak{N}^{(n-1)}(a_n-t)$$
$$\mathfrak{N}^{(n-2)}(a_0+t) = -\mathfrak{N}^{(n-2)}(a_n-t)$$

$$\mathfrak{N}(a_0+t) = (-1)^{n-1}\mathfrak{N}(a_n-t).$$

Denn diese Funktionen haben alle die Eigenschaft bis einschließlich $\mathfrak{N}'(x)$, im Intervall $a_0 \ldots a_n$ den Mittelwert Null zu besitzen. Dies folgt aus Formel 2:

$$\mathfrak{N}^{(n-1)}(a_n) = \mathfrak{N}^{(n-2)}(a_n) = \ldots \mathfrak{N}(a_n) = 0.$$

---

6 *Kowalewski*, a. a. O., S. 60 u. f.

Für $\mathfrak{N}(x)$ selbst ist dies nur dann der Fall, wenn n gerade ist, denn dann ist ja $\mathfrak{N}(x)$ eine schiefsymmetrische Funktion, die notwendigerweise den Mittelwert Null haben muß. Es kann in diesem Falle das Restglied (3a) nochmals partiell integriert werden und man erhält

$$R = (-1)^{n+2} \int_{a_0}^{a_n} \mathfrak{N}^{(-1)}(x) \, f^{(n+2)}(x) \, dx \qquad n \text{ gerade.} \tag{3b}$$

Diese Form des Restgliedes enthält einen Beweis dafür, daß die symmetrischen *Newton'schen* Quadraturformeln mit den Anschlußpunkten $a_0, a_1, \ldots a_n$ mit geradem n auch noch für den Grad $n+1$ exakt sind.

Diese Betrachtungen lassen sich verallgemeinern, da sie auch auf solche Formeln (1) anwendbar sind, die für den Fall, $f(x)$ = Polynom vom Grad $\leqq m$, wo $m \neq n$, bzw. $n \neq 1$ ist, die Eigenschaft $R = 0$ besitzen. Gemeint sind hier auch jene Formeln (1), welche nicht im obigen Sinne als *Newton'sche* Quadraturformeln angesprochen werden können. Insbesondere sind darunter solche Formeln zu verstehen, für die $n > m$ ist. In diesem Falle folgt aus der symmetrischen Verteilung der Anschlußpunkte nicht mehr notwendig die Symmetrie in den L_j und diese muß daher hier ausdrücklich vorausgesetzt werden. (Eine weitere Verallgemeinerung findet sich im Punkt 9.) Sei also nun eine Formel (1) vorgelegt, die für Polynome bis zum Grad m exakt erfüllt ist, dann gelten die Beziehungen (2) für $i \leqq m$ und man kann durch das eben entwickelte Verfahren, d. h. durch m-malige partielle Integration, das Restglied in der Form[7]

$$R = (-1)^{m+1} \int_{a_0}^{a_n} \mathfrak{N}^{(n-m)}(x) \, f^{(m+1)}(x) \, dx$$

mit

$$\mathfrak{N}^{(n-m)}(x) = \frac{(x-a_0)^{m+1}}{(m+1)!} - L_0 \frac{(x-a_0)^m}{m!} \qquad \text{in } a_0 \ldots a_1$$

$$= \frac{(x-a_0)^{m+1}}{(m+1)!} - L_0 \frac{(x-a_0)^m}{m!} - L_1 \frac{(x-a_1)^m}{m!}, \qquad \text{in } a_1 \ldots a_2$$

[7] Diese Schreibweise: $N^{(n-m)}(x)$ wird hier deshalb gewählt, um mit der *Kowalewski'schen* Bezeichnungsweise in Übereinstimmung zu bleiben.

$$= \frac{(x-a_0)^{m+1}}{(m+1)!} - L_0 \frac{(x-a_0)^m}{m!} - L_1 \frac{(x-a_1)^m}{m!} - \ldots -$$

$$- L_{n-1} \frac{(x-a_{n-1})^m}{m!}, \qquad \text{in } a_{n-1} \ldots a_n$$

gewinnen. m soll dabei stets als ungerade Zahl vorausgesetzt werden, da ja offenbar, ebenso wie oben im Fall n gerade, für m gerade die Formel (1) auch noch für $m+1$ exakt erfüllt wäre. Die Funktionen $\mathfrak{N}^{(n)}(x)$, $\mathfrak{N}^{(n-1)}(x)$, ... besitzen hier natürlich bis einschließlich $\mathfrak{N}^{(n-m+1)}(x)$ den Mittelwert Null.

3. Die höheren Euler-Maclaurin'schen Reihen.

Durch geeignete Wahl der Integrationskonstanten ist es möglich, bei dem, im vorigen Punkt erläuterten Verfahren das im allgemeinen bei $\mathfrak{N}^{(n-m)}(x)$ (m ungerade) verlorengehende Verschwinden des Mittelwertes wiederherzustellen. Dadurch wird nämlich erreicht, daß die so gebildeten Stammfunktionen im Intervall $a_0 \ldots a_n$ wieder symmetrisch, bzw. schiefsymmetrisch ausfallen.

Man hat also folgendermaßen zu verfahren:

$$R = -\int_{a_0}^{a_n} \mathfrak{N}^{(n-m+1)}(x)\, f^{(m)}(x)\, dx = -\left[(\mathfrak{N}^{(n-m)}(x) + C_1)\, f^{(m)}(x)\right]_{a_0}^{a_n} +$$

$$+ \int_{a_0}^{a_n} (\mathfrak{N}^{(n-m)}(x) + C_1)\, f^{(m+1)}(x)\, dx,$$

wobei C_1 so gewählt wird, daß

$$\int_{a_0}^{a_n} (\mathfrak{N}^{(n-m)}(x) + C_1)\, dx = \mathfrak{N}^{(n-m-1)}(a_n) + C_1 (a_n - a_0) = 0.$$

Die Stammfunktion $\mathfrak{N}^{(n-m-1)}(x) + C_1 (x - a_0)$ von $\mathfrak{N}^{(n-m)}(x) + C_1$ verschwindet für $x = a_0$, $x = a_n$, ist schiefsymmetrisch und besitzt daher den Mittelwert Null. (Im Falle der nicht symmetrischen Quadraturformeln würde das im allgemeinen nicht zutreffen.) Durch nochmalige Anwendung der partiellen Integration erhält man daher

$$R = -C_1\,[f^{(m)}(a_n) - f^{(m)}(a_0)] - \\ - \int_{a_0}^{a_n} (\mathfrak{N}^{(n-m-1)}(x) + C_1 (x - a_0))\, f^{(m+2)}(x)\, dx.$$

Die erste Stammfunktion von

$$\mathfrak{N}^{(n-m-1)}(x) + C_1 (x - a_0):$$

$$\mathfrak{N}^{(n-m-2)}(x) + C_1 \frac{(x-a_0)^2}{2!} + C_3$$

ist dann wieder eine symmetrische Funktion, die durch geeignete Wahl der Integrationskonstanten C_3 den Mittelwert Null erhält:

$$\int_{a_0}^{a_n} \left(\mathfrak{N}^{(n-m-2)}(x) + C_1 \frac{(x-a_0)^2}{2!} + C_3\right) dx = 0 \quad \text{usw.}$$

So fortfahrend erhält man also schließlich

$$\begin{aligned} R = &-C_1\,[f^{(m)}(a_n) - f^{(m)}(a_0)] - C_3\,[f^{(m+2)}(a_n) - f^{(m+2)}(a_0)] - \ldots - \\ &- C_{2k-1}\,[f^{(m+2k-2)}(a_n) - f^{(m+2k-2)}(a_0)] - \\ &- \int_{a_0}^{a_n} \Big[\mathfrak{N}^{(n-m-2k+1)}(x) + C_1 \frac{(x-a_0)^{2k-1}}{(2k-1)!} + \\ &+ C_3 \frac{(x-a_0)^{2k-3}}{(2k-3)!} + \ldots + C_{2k-1}(x-a_0)\Big] f^{(m+2k)}(x)\, dx. \end{aligned} \tag{4}$$

Die Quadraturformel (1) geht demnach über in

$$\begin{aligned} \int_{a_0}^{a_n} f(x)\, dx = &\sum_0^n L_j f(a_j) - C_1\,[f^{(m)}(a_n) - f^{(m)}(a_0)] - \\ &- C_3\,[f^{(m+2)}(a_n) - f^{(m+2)}(a_0)] - \ldots - \\ &- C_{2k-1}\,[f^{(m+2k-2)}(a_n) - f^{(m+2k-2)}(a_0)] - \\ &- \int_{a_0}^{a_n} \Big[\mathfrak{N}^{(n-m-2k+1)}(x) + C_1 \frac{(x-a_0)^{2k-1}}{(2k-1)!} + \\ &+ C_3 \frac{(x-a_0)^{2k-3}}{(2k-3)!} + \ldots + C_{2k-1}(x-a_0)\Big] f^{(m+2k)}(x)\, dx, \end{aligned} \tag{5}$$

oder, wenn man sich den Integrationsprozeß ad infinitum fortgesetzt denkt,

$$\int_{a_0}^{a_n} f(x)\,dx = \sum_0^n{}_j L_j f(a_j) - C_1\left[f^{(m)}(a_n) - f^{(m)}(a_0)\right] - \tag{5a}$$
$$- C_3\left[f^{(m+2)}(a_n) - f^{(m+2)}(a_0)\right] - \ldots \quad \text{ad inf.}$$

Ich nenne die Formel (5) die zu

$$\int_{a_0}^{a_n} f(x)\,dx = \sum_0^n{}_j L_j f(a_j) + R \tag{1}$$

gehörige *höhere Euler-Maclaurin'sche Quadraturformel* und ebenso möge ($5a$) die zu ebendieser Formel (1) gehörige *höhere Euler-Maelaurin'sche Reihe*[8] heißen.

4. Die höheren Bernoulli'schen Zahlen.

Wir wollen nun die in den höheren *Euler-Maclaurin'sehen* Reihen auftretenden Koeffizienten C_i in Zusammenhang bringen mit Zahlen, welche als eine Verallgemeinerung der *Bernoulli'schen* Zahlen angesprochen werden können, da sie diese als Sonderfall enthalten.

Dazu kommt man auf folgende Weise: Setzt man in der Formel ($5a$)

$$f(x) = \frac{(x-a_0)^i}{i!},$$

so erhält man

$$\left[\frac{(x-a_0)^{i+1}}{(i+1)!}\right]_{a_0}^{a_n} = \sum_0^n{}_j L_j \frac{(a_j-a_0)^i}{i!} - \left[C_1 \frac{(x-a_0)^{i-m}}{(i-m)!} + C_3 \frac{(x-a_0)^{i-m-2}}{(i-m-2)!} + \right.$$
$$\left. + \ldots + C_{i-m-1} \frac{(x-a_0)^2}{2!} + C_{i-m}(x-a_0)\right]_{a_0}^{a_n} \tag{6}$$

$$\frac{(a_n-a_0)^{i-1}}{(i+1)!} - L_n \frac{(a_n-a_0)^i}{i!} + C_1 \frac{(a_n-a_0)^{i-m}}{(i-m)!} + C_3 \frac{(a_n-a_0)^{i-m-2}}{(i-m-2)!} + \ldots +$$

---

[8] Darunter ist im folgenden die rein formal ad infinitum fortgesetzte Entwicklung zu verstehen. Konvergenzbetrachtungen sollen hier nicht angestellt werden.

$$+C_{i-m-1}\frac{(a_n-a_0)^2}{2!}+C_{i-m}(a_n-a_0)=\sum_1^{n-1}{}_j\, L_i\frac{(a_j-a_0)^i}{i!},$$

wobei, je nachdem, ob i gerade oder ungerade ist, das C_{i-m-1} oder das C_{i-m} verschwindet. Für L_n kann wegen der vorausgesetzten Symmetrie L_0 gesetzt werden. Formel (6) stellt offenbar eine Rücklaufformel zur Berechnung der C_i dar.

Werden nun die zur Quadraturformel

$$\int_{a_0}^{a_n} f(x)\,dx=\sum_0^n{}_j\, L_j f(a_j)+R \qquad (1)$$

gehörigen *höheren Bernoulli'schen Zahlen*, wie folgt, definiert,[9]

$$A_0=1,\qquad A_1=-\frac{L_0}{a_n-a_0},\qquad A_2=A_3=\ldots.=A_m=0,$$

$$A_{m+1}=\frac{(m+1)!}{(a_n-a_0)^{m+1}}C_1,\qquad A_{m+2}=0,$$

$$A_{m+3}=\frac{(m+3)!}{(a_n-a_0)^{m+3}}C_3,\qquad A_{m+4}=0, \qquad (7)$$

$$A_{i-1}=\frac{(i-1)!}{(a_n-a_0)^{i-1}}C_{i-m-1},\qquad A_i=\frac{i!}{(a_n-a_0)^i}C_{i-m},$$

wobei wieder entweder A_{i-1} oder A_i gleich Null wird, so kann die obige Beziehung (6) in die Form

$$\frac{(a_n-a_0)^{i+1}}{(i+1)!}\left[A_0+\binom{i+1}{1}A_1+\binom{i+1}{2}A_2+\ldots+\binom{i+1}{i-1}A_{i-1}+\right.$$
$$\left.+\binom{i+1}{i}A_i\right]=\sum_1^{n-1}{}_j\, L_j\frac{(a_j-a_0)^i}{i!}$$

übergeführt werden, oder in symbolischer Schreibweise

$$(A+1)^{i+1}-A^{i+1}=\frac{i+1}{(a_n-a_0)^{i+1}}\sum_1^{n-1}{}_j\, L_j\,(a_j-a_0)^i. \qquad (8)$$

[9] Die höheren *Bernoulli'schen* Zahlen sollen fortan mit dem Symbol A, die gewöhnlichen mit dem Symbol B bezeichnet werden.

Dieser Formel ist natürlich stets hinzuzufügen:[10]

$$A^0 = A_0 = 1, \qquad A^1 = A_1 = -\frac{L_0}{a_n - a_0}.$$

Offenbar gilt (8), wie aus ihrer Herleitung hervorgeht, für $i \geqq 1$. Sie stellt eine Rücklaufformel zur Berechnung der A_i und damit auch zur Berechnung der C_i dar:

$$C_i = \frac{(a_n - a_0)^{i+m}}{(i+m)!} A_{i+m}. \tag{7a}$$

Für den Fall $n = 1$ gibt Formel (8) die bekannte Rücklaufformel für die gewöhnlichen *Bernoulli'schen* Zahlen

$$(B+1)^{i+1} - B^{i+1} = 0 \qquad i \geqq 1$$
$$B^0 = B_0 = 1.$$

Wird Formel (7 a) auf Formel (5), bzw. (5 a) angewendet, so erhält man die höheren *Euler-Maclaurin'sehen* Quadraturformeln, bzw. die höheren *Euler-Maclaurin'sehen* Reihen in der Form

$$\begin{aligned}\int_{a_0}^{a_n} f(x)\,dx = \sum_0^n {}_j\, L_j f(a_j) &- \frac{(a_n - a_0)^{m+1}}{(m+1)!} A_{m+1} \left[f^{(m)}(a_n) - f^{(m)}(a_0)\right] - \\ &- \frac{(a_n - a_0)^{m+3}}{(m+3)!} A_{m+3} \left[f^{(m+2)}(a_n) - f^{(m+2)}(a_0)\right] - \ldots - \\ &- \frac{(a_n - a_0)^{m+2k-1}}{(m+2k-1)!} A_{m+2k-1} \left[f^{(m+2k-2)}(a_n) - f^{(m+2k-2)}(a_0)\right] - \\ &- \int_{a_0}^{a_n} \Big[N^{(n-m-2k+1)}(x) + \frac{(a_n - a_0)^{m+1}}{(m+1)!} A_{m+1} \frac{(x - a_0)^{2k-1}}{(2k-1)!} + \ldots + \\ &+ \frac{(a_n - a_0)^{m+2k-1}}{(m+2k-1)!} A_{m+2k-1} (x - a_0)\Big] f^{(m+2k)}(x)\,dx,\end{aligned} \tag{9}$$

bzw.

---

[10] Da die Ausdrücke $\frac{L_j}{a_n - a_0}$ und $\frac{a_j - a_0}{a_n - a_0}$ offenbar von $a_n - a_0$ unabhängig sind, so folgt aus Formel (8) sofort, daß auch die A_i von $a_n - a_0$ unabhängig sind.

$$\int_{a_0}^{a_n} f(x)\,dx = \sum_0^n{}_j\, L_j f(a_j) - \frac{(a_n - a_0)^{m+1}}{(m+1)!} A_{m+1} \left[f^{(m)}(a_n) - f^{(m)}(a_0)\right] -$$

$$- \frac{(a_n - a_0)^{m+3}}{(m+3)!} A_{m+3} \left[f^{(m+2)}(a_n) - f^{(m+2)}(a_0)\right] - \ldots \text{ad inf.} \qquad (9a)$$

Das Restglied

$$-\int_{a_0}^{a_n} \Big[\mathfrak{R}^{(n-m-2k+1)}(x) + \frac{(a_n - a_0)^{m+1}}{(m+1)!} A_{m+1} \frac{(x - a_0)^{2k-1}}{(2k-1)!} + \ldots +$$

$$+ \frac{(a_n - a_0)^{m+2k-1}}{(m+2k-1)!} A_{m+2k-1} (x - a_0)\Big] f^{(m+2k)}(x)\,dx$$

von (9) ist einer symbolischen Schreibung fähig, wenn man beachtet, daß

$$\frac{(x - a_0)^{m+2k}}{(m+2k)!} - L_0 \frac{(x - a_0)^{m+2k-1}}{(m+2k-1)!} + \frac{(a_n - a_0)^{m+1}}{(m+1)!} A_{m+1} \frac{(x - a_0)^{2k-1}}{(2k-1)!} +$$

$$+ \ldots + \frac{(a_n - a_0)^{m+2k-1}}{(m+2k-1)!} A_{m+2k-1} (x - a_0),$$

wenn hierin nach (7) L_0 durch $-(a_n - a_0) A_1$ ersetzt wird, sich symbolisch in der Form

$$\frac{(a_n - a_0)^{m+2k}}{(m+2k)!} \left[\left(\frac{x - a_0}{a_n - a_0} + A\right)^{m+2k} - A^{m+2k}\right]$$

darstellen läßt. Nennt man hierin den Ausdruck

$$\left(\frac{x - a_0}{a_n - a_0} + A\right)^{m+2k} - A^{m+2k} = P_{m+2k}$$

das $(m+2k)$*-te höhere Bernoulli'sche Polynom*,[11] so kann das Restglied von (9) offenbar in der Form

$$\frac{(a_n - a_0)^{m+2k}}{(m+2k)!} \int_{a_0}^{a_n} P_{m+2k} f^{(m+2k)}(x)\,dx -$$

[11] Vgl. damit die symbolische Schreibung der *Bernoulli'schen* Polynome bei *E. Lucas, Theorie des nombres*, Paris 1891, S. 238.

$$-\sum_{1}^{n-1}{}_j \int_{a_j}^{a_{j+1}} \sum_{1}^{j}{}_\mu L_\mu \frac{(x-a_\mu)^{m+2k-1}}{(m+2k-1)!} f^{(m+2k)}(x)\,dx \tag{10}$$

geschrieben werden.

5. Eine Beziehung zwischen höheren und gewöhnlichen Bernoulli'schen Zahlen.

Es soll nun eine Formel hergeleitet werden, mit deren Hilfe die höheren *Bernoulli'schen* Zahlen explizit dargestellt werden können. Dies kann etwa dadurch geschehen, daß eine Funktion, welche alle Glieder in ($9a$) bis auf das Glied mit A_i zum Verschwinden bringt, in diese Formel eingesetzt wird. Eine solche Funktion ist offenbar

$$p(x) = \left(\frac{x-a_0}{a_n-a_0} + B\right)^i$$

(worin B das Symbol für die gewöhnlichen *Bernoulli'schen* Zahlen bedeutet), denn dieses Polynom hat Ableitungen, die an den Stellen a_0 und a_n gleiche Werte besitzen (ausgenommen ist die $i-1$.te Ableitung). So gilt etwa für die k.te Ableitung

$$p^{(k)}(a_n) - p^{(k)}(a_0) = \frac{i(i-1)\ldots(i-k+1)}{(a_n-a_0)^k}\left[(B+1)^{i-k} - B^{i-k}\right] = 0,$$

wenn $k \neq i-1$ und $\leqq i$ ist. Im Falle $k = i-1$ gilt:

$$p^{(i-1)}(a_n) - p^{(i-1)}(a_0) = \frac{i!}{(a_n-a_0)^{i-1}}(B+1-B) = \frac{i!}{(a_n-a_0)^{i-1}}.$$

Wird daher $p(x)$ in die Formel ($9a$) eingesetzt, so bleibt, da

$$\int_{a_0}^{a_n}\left(\frac{x-a_0}{a_n-a_0} + B\right)^i dx = \frac{a_n-a_0}{i+1}\left[(B+1)^{i+1} - B^{i+1}\right]$$

ebenfalls verschwindet,

$$\frac{(a_n-a_0)^i}{i!}\,\frac{i!}{(a_n-a_0)^{i-1}}\,A_i = \sum_{0}{}_j L_j\left(\frac{a_j-a_0}{a_n-a_0} + B\right)^i$$

oder

$$A_i = \frac{1}{a_n - a_0} \sum_0^n {}_j L_j \left(\frac{a_j - a_0}{a_n - a_0} + B \right)^i. \tag{11}$$

Wie aus der Herleitung dieser Formel hervorgeht, gilt sie für $i \geqq 2$. Damit ist es gelungen, die höheren *Bernoulli'schen* Zahlen durch die gewöhnlichen darzustellen.

Für $n = 1$ geht wegen

$$L_0 = L_1 = \frac{a_1 - a_0}{2}$$

Formel (11) über in (für A wird jetzt B geschrieben, siehe Fußnote [9])

$$B^i = \frac{1}{a_1 - a_0} \frac{a_1 - a_0}{2} [B^i + (B+1)^i]$$

oder

$$(B+1)^i - B^i = 0 \qquad i \geqq 2.$$

Dies ist aber die Rücklaufformel für die gewöhnlichen *Bernoulli'schen* Zahlen.

6. Ein Beispiel zur Berechnung der ersten höheren Bernoulli'schen Zahlen.

Es sollen nun, etwa im Falle der *Simpson'schen* Regel, die zugehörigen höheren *Bernoulli'schen* Zahlen mit Hilfe der Rücklaufformel (8) berechnet werden.

Nach (7) muß $A_0 = 1$

und wegen $L_0 = \frac{a_2 - a_0}{6}$ $\qquad A_1 = -\frac{1}{6}$ sein. Ebenso muß, da die *Simpson'sche* Formel bekanntlich für Polynome bis einschließlich vom Grad $m = 3$ genau erfüllt ist, $A_2 = A_3 = 0$ gelten.

Es werde etwa $a_0 = 0$, $a_2 = 1$ angenommen, dann kann A_4 aus (8) für $i = 4$ berechnet werden, wie folgt:

$$(A+1)^5 - A^5 = 5\,A_4 + 10\,A_3 + 10\,A_2 + 5\,A_1 + A_0 = 5\,A_4 - \frac{5}{6} +$$

$$+ 1 = \frac{5}{1^5}\,\frac{4}{6}\,\frac{1}{2^4} = \frac{5}{24}$$

$$5\,A_4=\frac{5}{24}-\frac{4}{24}=\frac{1}{24},\qquad A_4=\frac{1}{120},\qquad A_5=0.$$

Die A mit ungeradem Index sind, mit Ausnahme von A_1, nach Definition (7) gleich Null.

Für $i=6$ gibt Formel (8):

$$7\,A_6+35\,A_4+(0)+7\,A_1+A_0=\frac{7}{6}\,\frac{4}{2^6}$$

$$7\,A_6+\frac{7}{24}-\frac{7}{6}+1=\frac{7}{96},\qquad A_6=-\frac{5}{672},\qquad A_7=0,$$

und für $i=8$:

$$9\,A_8+84\,A_6+126\,A_4+(0)+9\,A_1+A_0=\frac{9}{6}\,\frac{4}{2^8}$$

$$9\,A_8-\frac{5}{8}+\frac{21}{20}-\frac{3}{2}+1=\frac{3}{128},\quad A_8=\frac{7}{640},\quad A_9=0.$$

Man erhält also die ersten nicht verschwindenden, zur *Simpson'sehen* Regel gehörigen höheren *Bernoulli'schen* Zahlen als:

$$-\frac{1}{6},\quad \frac{1}{120},\quad -\frac{5}{672},\quad \frac{7}{640},\ldots.$$

und es liegt die Vermutung nahe, daß in dieser Folge die Vorzeichen abwechseln. Dies zu untersuchen, wird die nächste Aufgabe sein.

7. Eine hinreichende Bedingung dafür, daß in der Folge der höheren Bernoulli'schen Zahlen, welche nicht verschwinden, das Vorzeichen abwechselt.

Es gilt folgender Satz:

Es sei eine Quadraturformel (1)

$$\int_{a_0}^{a_n} f(x)\,dx=\sum_0^n{}_j\,L_j f(a_j)+R,\qquad L_0>0$$

vorgelegt, die für $f(x)=$ Polynom vom Grad $\leqq m$ die Eigenschaft $R=0$ besitzt. Hat dann die erste Ableitung $\mathfrak{N}^{(n-m+1)}(x)$ der im Restglied auftretenden Funktion $\mathfrak{N}^{(n-m)}(x)$ im Intervall $a_0\ldots a_n$ nur drei Nullstellen, und zwar dann notwendigerweise bei a_0, a_n und $\frac{a_0+a_n}{2}$, *so wechselt in der Folge der zugehörigen höheren Bernoulli'schen Zahlen, welche nicht verschwinden, stets das Vorzeichen ab.*

Die in diesem Satze gemachte Voraussetzung über $\mathfrak{N}^{(n-m+1)}(x)$ soll im folgenden zur Abkürzung *Bedingung S* genannt werden.

Der Beweis dieses Satzes wird am einfachsten dadurch erbracht, daß das im dritten Punkt dieser Abhandlung gegebene Verfahren graphisch verfolgt wird. $\mathfrak{N}^{(n-m+1)}(x)$ hat dann, falls $L_0 > 0$ und die Bedingung S erfüllt ist, stets die folgende Gestalt (Fig. 1): In der ersten Hälfte des Intervalls verläuft die Funktion unterhalb der X-Achse, in der zweiten Hälfte oberhalb der X-Achse. Sie ist in bezug auf die Intervallmitte schiefsymmetrisch und hat daher die Form eines liegenden S, weshalb die Bezeichnung *Bedingung S* gewählt wurde. Bildet man hier zunächst die erste Stammfunktion derart, daß sie an den Intervallenden gleich Null wird und führt daraufhin eine Schiebung so aus, daß der Mittelwert im Intervall $a_0 \ldots a_n$ verschwindet, so muß diese Schiebung offenbar nach oben erfolgen, weil die Stammfunktion im ganzen Intervall negativ ist (Fig. 1). Die dritte nicht verschwindende höhere *Bernoulli'sche* Zahl muß also zufolge Formel ($7a$) positiv sein. Das stimmt mit unserem Satz überein. Die nächste Stammfunktion, die wieder so bestimmt werden soll, daß sie an den Enden des Intervalls gleich Null wird, ist in der ersten Intervallhälfte positiv, in der zweiten negativ. Der Mittelwert ist bereits Null.

Durch nochmalige Bildung der Stammfunktion erhält man eine im Intervall durchwegs positive Funktion, welche, um den Mittelwert Null zu erhalten, nach unten geschoben werden muß. Also ist die vierte nicht verschwindende höhere *Bernoulli'sche* Zahl negativ.

Da nun die nächste Stammfunktion von derselben Art ist, wie $\mathfrak{N}^{(n-m+1)}(x)$, kann dieser Gedankengang wiederholt werden. Damit ist unser Satz bewiesen.

Obwohl der Fall $L_0 < 0$ in der Praxis wenig Bedeutung hat, soll er dennoch hier kurz besprochen werden. Es tritt hier offenbar zwischen

$$A_0 = 1, \quad A_1 = -\frac{L_0}{a_n - a_0}$$

kein Zeichenwechsel ein. Wenn die Bedingung S erfüllt ist, so kann man aber behaupten, daß, außer am Anfang, in der Folge der nicht verschwindenden höheren *Bernoulli'schen* Zahlen keine Störungen des Zeichenwechsels auftreten.

Denn wie oben überlegt man sich, daß hier $\mathfrak{R}^{(n-m+1)}(x)$ eine Funktion sein muß, die in der ersten Intervallhälfte positiv, in der zweiten Intervallhälfte negativ sein muß. Ihre erste Stammfunktion, welche an den Intervallenden gleich Null ist, ist daher im ganzen Intervall positiv und muß, um den Mittelwert Null

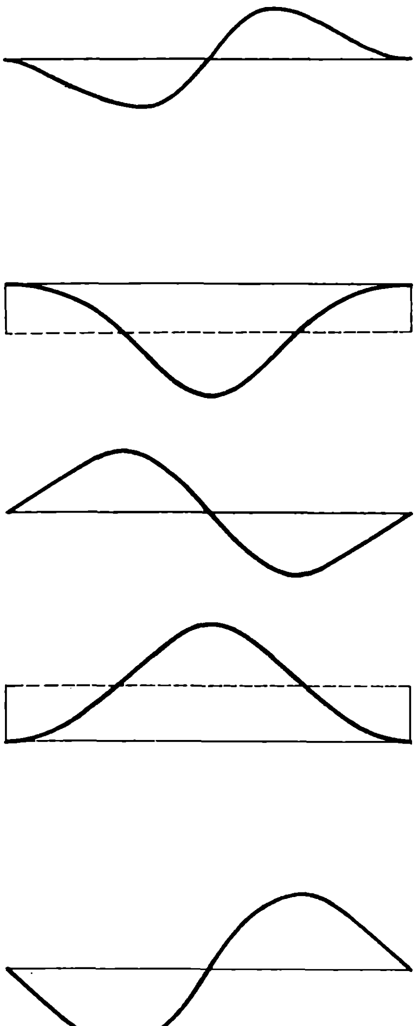

Fig. 1.

zu erhalten, nach abwärts geschoben werden. D. h. also, die dritte nicht verschwindende höhere *Bernoulli'sche* Zahl ist in diesem Falle negativ. Es findet also zwischen zweiter und dritter Zahl in der Folge ein Vorzeichenwechsel statt. Die weiteren Überlegungen verlaufen genau so wie oben, womit die Behauptung bewiesen ist.

8. Abschätzung des Restgliedes der höheren Euler-Maclaurinschen Quadraturformeln, wenn die Bedingung *S* erfüllt ist.

Ist für eine Quadraturformel (1) die Bedingung S erfüllt, so läßt sich das Restglied der zugehörigen *Euler-Maclaurin'schen* Quadraturformel (5) in einer Form schreiben, die eine einfache Abschätzung des Formelfehlers zuläßt. Für die höheren *Euler-Maclaurin'schen* Quadraturformeln ist die in dem Restglied

$$-\int_{a_0}^{a_n}\left[\mathfrak{N}^{(n-m-2k+1)}(x)+C_1\frac{(x-a_0)^{2k-1}}{(2k-1)!}+C_3\frac{(x-a_0)^{2k-3}}{(2k-3)!}+\ldots+\right.$$
$$\left.+C_{2k-1}(x-a_0)\right]f^{(m+2k)}(x)\,dx$$

in der eckigen Klammer erscheinende Funktion in bezug auf die Intervallmitte schiefsymmetrisch und besitzt, wenn die Bedingung S erfüllt ist, im Innern des Intervalls $a_0 \ldots a_n$ nur eine Nullstelle, und zwar bei $\frac{a_0+a_n}{2}$. Jene Stammfunktion $\mathfrak{Q}(x)$ dieser Funktion, die an den Intervallenden verschwindet, ist daher im ganzen Intervall vorzeichenbeständig und man kann also auf das durch partielle Integration umgeformte Restglied

$$R=+\int_{a_0}^{a_n}\mathfrak{Q}(x)\,f^{(m+2k+1)}(x)\,dx$$

den ersten Mittelwertsatz der Integralrechnung anwenden:

$$R=f^{(m+2k+1)}(\xi)\int_{a_0}^{a_n}\mathfrak{Q}(x)\,dx \qquad a_0<\xi<a_n.$$

Das Integral $\int_{a_0}^{a_n}\mathfrak{Q}(x)\,dx$ ist leicht zu ermitteln, wenn man in (9) für f eine Funktion einsetzt, deren $(m+2k+1)$-te Ableitung $=1$ ist.

Das Restglied

$$R = \int_{a_0}^{a_n} \mathfrak{Q}(x)\, dx$$

ist dann dem letzten Glied der abbrechenden Entwicklung (9*a*) gleich, also

$$-\frac{(a_n-a_0)^{m+2k+2}}{(m+2k+1)!} A_{m+2k+1},$$

also lautet das Restglied

$$-\frac{(a_n-a_0)^{m+2k+2}}{(m+2k+1)!} A_{m+2k+1} f^{(m+2k+1)}(\xi) \qquad a_0 < \xi < a_n. \tag{12}$$

Die Formel (9) nimmt dann die Form an

$$\int_{a_0}^{a_n} f(x)\, dx = \sum_0^n {}_j\, L_j f(a_j) - \frac{(a_n-a_0)^{m+1}}{(m+1)!} A_{m+1} [f^{(m)}(a_n) - f^{(m)}(a_0)] - \ldots -$$

$$-\frac{(a_n-a_0)^{m+2k-1}}{(m+2k-1)!} A_{m+2k-1} [f^{(m+2k-2)}(a_n) - f^{(m+2k-2)}(a_0)] - \tag{13}$$

$$-\frac{(a_n-a_0)^{m+2k+2}}{(m+2k+1)!} A_{m+2k+1} f^{(m+2k+1)}(\xi) \qquad a_0 < \xi < a_n.$$

Es gilt also der Satz:

Für eine Quadraturformel (1), *die die Bedingung S erfüllt, läßt sich das Restglied der zugehörigen höheren Euler-Maclaurin'schen Quadraturformel* (9) *stets in der Form* (12) *darstellen.*

Für die Praxis ist diese Form deshalb bedeutsam, weil durch Einsetzen des Maximums der in ihr erscheinenden höheren Ableitung von $f(x)$ in $a_0 \ldots a_n$ eine Abschätzung des Formelfehlers erhalten wird.

9. Eine Bemerkung über die Gauß'schen Quadraturformeln.

Bisher wurden nur solche (geschlossene) Quadraturformeln betrachtet, bei denen die Grenzen des bestimmten Integrals unter den Anschlußpunkten vorkamen. Jedoch fügen sich auch jene Quadraturformeln, bei denen dies nicht der Fall ist, welche auch offene[12]

[12] Die Bezeichnungen: *Open Type* und *Closed Type* finden sich in *I. S. Steffensens* Buch *Interpolation.* Baltimore 1927, S. 158.

genannt werden, ohne weiteres unseren Betrachtungen ein, wenn sie als geschlossene Formeln angesprochen werden, deren erster und letzter Koeffizient gleich Null ist.

$$L_0 = L_n = 0.$$

Das Restglied einer solchen Quadraturformel

$$\int_{a_0}^{a_n} f(x)\, dx = \sum_{1}^{n-1} {}_j\, L_j f(a_j) + R$$

läßt sich dann offenbar, wie durch partielle Integration und unter Benutzung der Tatsache

$$\sum_{1}^{n-1} {}_j\, L_j = a_n - a_0$$

sofort zu zeigen ist, in der Form

$$R = -\int_{a_0}^{a_1} (x-a_0)\, f'(x)\, dx - \int_{a_1}^{a_2} [(x-a_0)-L_1]\, f'(x)\, dx - \ldots -$$

$$-\int_{a_{n-1}}^{a_n} [(x-a_0)-L_1-L_2-\ldots-L_{n-1}]\, f'(x)\, dx$$

darstellen.

Da die *Gauß'schen* Quadraturformeln bekanntlich für den Fall $f(x) =$ Polynom vom Grad $\leqq m = 2n-3$ die Eigenschaft $R = 0$ besitzen, so muß nach dem, was am Schluß des 2. Punktes dieser Abhandlung bemerkt wurde, das Restglied dieser Formeln durch

$$R = \int_{a_0}^{a_n} \mathfrak{N}^{(-n+3)}(x)\, f^{(2n-2)}(x)\, dx,$$

wo jetzt

$$\mathfrak{N}^{(-n+3)}(x) = \frac{(x-a_0)^{2n-2}}{(2n-2)!} \qquad \text{in } a_0 \ldots a_1$$

$$= \frac{(x-a_0)^{2n-2}}{(2n-2)!} - L_1 \frac{(x-a_1)^{2n-3}}{(2n-3)!} \qquad \text{in } a_1 \ldots a_2$$

$$\frac{(x-a_0)^{2n-2}}{(2n-2)!} - L_1 \frac{(x-a_1)^{2n-3}}{(2n-3)!} - \ldots - L_{n-1} \frac{(x-a_{n-1})^{2n-3}}{(2n-3)!} \qquad \text{in } a_{n-1} \ldots a_n$$

ist, darzustellen sein. Nun ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{N}^{(n)}(x) &= x-a_0, && \text{in } a_0 \ldots a_1 \\ &= x-a_0-L_1, && \text{in } a_1 \ldots a_2 \\ & \\ &= x-a_0-L_1-L_2-\ldots L_{n-1} && \text{in } a_{n-1} \ldots a_n \end{aligned}$$

offenbar eine Funktion, welche im Innern des Intervalls $a_0 \ldots a_n$ höchstens $2n-1$ Null-, bzw. Unstetigkeitsstellen hat. Die Funktionen:

$$\mathfrak{N}^{(n-1)}(x), \qquad \mathfrak{N}^{(n-2)}(x), \qquad \mathfrak{N}^{(-n)}(x)$$

entstehen aus dieser Funktion durch Bildung der Stammfunktion wieder derart, daß an den Intervallenden der Funktionswert stets gleich Null wird und die einzelnen Polynome, aus denen diese Funktionen zusammengesetzt werden, in den Anschlußstellen aneinanderschließen. Bei jedem dieser Schritte vermindert sich aber, wie man leicht einsieht, die Zahl der im Innern des Intervalls vorhandenen Nullstellen um mindestens eine. $\mathfrak{N}^{(-n+2)}(x)$ hat daher im Innern des Intervalls höchstens eine Nullstelle. Nachdem es aber den Mittelwert Null hat, muß es diese Nullstelle auch tatsächlich besitzen, und zwar bei $\frac{a_0+a_n}{2}$

Es ist also für die *Gauß'schen* Quadraturformeln die Bedingung S stets erfüllt und es gelten die Sätze:

In der Folge der zu einer Gauß'schen Quadraturformel gehörigen höheren Bernoulli'schen Zahlen, welche nicht verschwinden, wechselt stets das Vorzeichen ab.

Und

Für eine Gauß'sche[13] *Quadraturformel läßt sich das Restglied der zugehörigen Euler-Maclaurin'schen Quadraturformel stets in der Form*

$$R = -\frac{(a_n-a_0)^{2n+2k+1}}{(2n+2k)!} A_{2n+2k} f^{(2n+2k)}(\xi) \qquad a_0 < \xi < a_n$$

darstellen.

[13] Zu beachten ist, daß hier die *Gauß'sche* Quadraturformel als geschlossene Quadratformel mit $L_0 = L_n = 0$ verstanden wird, daß also eigentlich eine Formel mit nur $n-1$ Anschlußpunkten vorliegt.

Dieser letzte Satz enthält offenbar den Satz:

Das Restglied einer Gauß'schen Quadraturformel läßt sich stets in der Gestalt

$$R = -\frac{(a_n - a_0)^{2n+1}}{(2n)!} A_{2n} f^{(2n)}(\xi) \qquad a_0 < \xi < a_n$$

darstellen.

10. Ein Beispiel und noch eine Bemerkung zu den Gauß'schen Quadraturformeln.

Für die *Gauß'sche* Quadraturformel mit zwei[14] Anschlußpunkten a_1, a_2

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2}\,[f(a_1)+f(a_2)]+R$$

sollen nun die ersten nicht verschwindenden höheren *Bernoulli'schen* Zahlen berechnet werden. Die Anschlußpunkte a_1, a_2 sind durch die Forderung, daß die Formel für Polynome bis einschließlich dritten Grades die Eigenschaft $R=0$ besitzen soll, charakterisiert und es wird für die folgenden Rechnungen gar nicht nötig sein, ihre Werte selbst zu kennen. Da infolge der eben genannten Eigenschaft in der Folge der höheren *Bernoulli'schen* Zahlen A_2 verschwinden muß, erhält man durch Einsetzen für

$$i = 2 \text{ in Formel (8) } 3A_2+1 = \frac{3}{1}\,\frac{1}{2}\,(a_1^2+a_2^2) \qquad a_1^2+a_2^2 = \frac{2}{3}.$$

Da weiter $a_1+a_2=1$ ist, erhält man aus $(a_1+a_2)^2 = a_1^2+a_2^2+ + 2a_1a_2$

$$a_1a_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

Aus den Ausdrücken a_1a_2 und a_1+a_2 lassen sich aber bekanntlich alle in a_1 und a_2 ganzen symmetrischen Funktionen aufbauen, was bedeutet, daß

$$a_1^k + a_2^k \qquad k = \text{natürliche Zahl}$$

stets eine rationale Zahl ist. Daher sind alle zur *Gauß'schen* Quadraturformel

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2}\,[f(a_1)+f(a_2)]+R$$

[14] Als geschlossene Quadraturformel im Sinne von Punkt 9 aufgefaßt, besitzt sie natürlich vier Anschlußpunkte, es liegt demnach der Fall $n=3$ vor.

gehörigen höheren *Bernoulli'sehen* Zahlen, wie Formel (8) lehrt, rationale Zahlen.

Es sollen hier die ersten Zahlen dieser Folge nach Formel (8) berechnet werden. (Die Zwischenrechnungen sind weggelassen.)

$$i=4, \qquad 5\,A_4+1=\frac{5}{1}\,\frac{1}{2}\,[(a_1^4+a_2^4)$$

$$a_1^4+a_2^4=(a_1^2+a_2^2)^2-2\,a_1^2\,a_2^2=\frac{7}{18}$$

$$A_4=-\frac{1}{180},$$

$$i=6, \qquad 7\,A_6-\frac{35}{180}+1=\frac{7}{2}\,(a_1^6+a_2^6)$$

$$a_1^6+a_2^6=(a_1^2+a_2^2)^3-3\,a_1^2\,a_2^2\,(a_1^2+a_2^2)=\frac{13}{54}$$

$$A_6=\frac{1}{189}.$$

$$i=8, \qquad 9\,A_8+\frac{84}{189}-\frac{126}{180}+1=\frac{9}{2}\,(a_1^8+a_2^8)$$

$$a_1^8+a_2^8=(a_1^4+a_2^4)^2-2\,a_1^4\,a_2^4=\frac{97}{648}$$

$$A_8=-\frac{17}{2160}.$$

Es liegt nun nahe, zu vermuten, daß die zu einer beliebigen anderen *Gauß'schen* Quadraturformel gehörigen höheren *Bernoulli'schen* Zahlen ebenfalls alle rational sind. Dies ist in der Tat der Fall.

Sei etwa allgemein eine *Gauß'sche* Quadraturformel

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\sum_1^{n-1}{}_j\,L_j\,f(a_j)+R$$

vorgelegt, so hat diese für $f(x)$ = Polynom vom Grad $\leqq 2n-3$ die Eigenschaft $R=0$ und daraus folgt durch Einsetzen von

$$f(x)=1,\ x,\ x^2,\ldots\ldots x^{2n-3},$$

daß die Ausdrücke

$$\sum_{1}^{n-1} {}_{j}\, L_j a_j^k = r_k \qquad (k = 0, 1, \ldots 2n-3)$$

rationale Zahlen sind.

Da ferner bekanntlich die a_j die Wurzeln einer Gleichung mit rationalen Koeffizienten sind,[15] so gilt offenbar

$$\sum_{1}^{n} {}_{i}\, c_i a_j^{n-i} = 0 \qquad (c_i \text{ rational})$$

oder nach Multiplikation mit a^t

$$\sum_{1}^{n} {}_{i}\, c_i a_j^{t+n-i} = 0 \qquad (t \text{ natürliche Zahl})$$

und aus dieser Beziehung kann a_j^{t+n-1} berechnet werden

$$a_j^{t+n-1} = -\frac{1}{c_1} \sum_{2}^{n} {}_{i}\, c_i a_j^{t+n-i}.$$

Daraus kann nun auf einfache Weise erschlossen werden, daß

$$\sum_{1}^{n-1} {}_{j}\, L_j a_i^k = r_k$$

für jedes positive, ganze k rational wird. Denn sobald

$$2n-3 \geqq n-1 \qquad \text{also} \qquad n \geqq 2$$

ist, kann die Behauptung für a_j^{2n-2} und ebenso für jede höhere Potenz Schritt für Schritt nachgewiesen werden, wie folgt:

Setzt man $t = n-1$, so wird

$$\sum_{1}^{n-1} {}_{j}\, L_j a_j^{2n-2} = \sum_{1}^{n-1} {}_{j}\, L_j \left(-\frac{1}{c_1} \sum_{2}^{n} {}_{j}\, c_i a_j^{2n-1-i}\right) =$$

$$= -\frac{1}{c_1} \sum_{2}^{n} {}_{i}\, c_i \sum_{1}^{n-1} {}_{j}\, L_j a_j^{2n-1-i} = -\frac{1}{c_1} \sum_{2}^{n} {}_{i}\, c_i r_{2n-1-i} = r_{2n-2} = \text{rat.},$$

[15] Vgl. etwa *A. A. Markoff, Differenzenrechnung.* Leipzig 1896, S. 66, Formel (61).

also

$$\sum_{1}^{n-1} {}_j\, L_j a_j^{2n-2} = r_{2n-2}.$$

Ebenso wird die Behauptung für alle anderen Potenzen als richtig nachgewiesen, indem der Reihe nach für $t = n,\ n+1,$ gesetzt wird.

Beachtet man, daß im vorliegenden Falle $a_0 = 0$ gewählt wurde, so fließt aus Formel (8) der Satz:

Die zu einer Gauß'schen Quadraturformel gehörigen höheren Bernoulli'schen Zahlen sind alle rational.

11. Untersuchung, ob für die Cotes'schen Formeln $n = 1, 2, \ldots, 10$ die Bedingung S erfüllt ist.

Cotes'sche Formeln[16] heißen bekanntlich die geschlossenen *Newton'schen* Quadraturformeln mit gleichabständigen Anschlußpunkten $a_0, a_1, \ldots a_n$. Es soll im folgenden untersucht werden, ob für die *Cotes'schen* Formeln mit $n = 1, 2, \ldots, 10$ die Bedingung S erfüllt ist. Da diese Formeln im Falle n ungerade für den Grad n, im Falle n gerade für den Grad $n+1$ noch exakt sind, so ist also im ersten Falle die Funktion $\mathfrak{N}'(x)$, im zweiten Falle die Funktion $\mathfrak{N}(x)$ zu prüfen, ob sie mehr als eine Nullstelle im Innern des Intervalls $a_0 \ldots a_n$ besitzt. Wir nehmen, um die numerischen Rechnungen zu vereinfachen, $a_0 = 0,\ a_n = n$ an.

$n = 1$: In diesem Falle ist (die Werte der L_j sind hier die n-fachen Cotes'schen Koeffizienten; vgl. Fußnote [16])

$$\mathfrak{N}'(x) = x - \frac{1}{2}$$

und hat (Fig. $2a$) nur eine Nullstelle im Intervall $0 \ldots 1$.

$n = 2$: Hier ist

$$\mathfrak{N}''(x) = x - \frac{1}{3}, \qquad \text{in } 0 \ldots 1$$

$$= x - \frac{1}{3} - \frac{4}{3} \qquad \text{in } 1 \ldots 2$$

---

[16] *Cotes* hat als erster in seiner *Harmonia mensuram* die Werte der in diesen Formeln auftretenden Koeffizienten veröffentlicht. Etwa nachzulesen in *A. A. Markoff*, a. a. O., S. 61.

— wofür von nun an stets die abkürzende Schreibweise

$$\mathfrak{N}''(x) = x - \frac{1}{3}, \quad -\frac{4}{3}$$

gebraucht werden soll — und hat, wie Fig. 2*b* zeigt, drei Null- bzw. Unstetigkeitsstellen im Innern von $0 \ldots 2$, daher besitzt $\mathfrak{N}(x)$ deren nur eine.

$$n = 3: \qquad \mathfrak{N}'''(x) = x - \frac{3}{8}, \quad -\frac{9}{8},$$

Diese Funktion hat fünf Null- bzw. Unstetigkeitsstellen im Intervall — daraus läßt sich nichts erschließen. Wir müssen

$$\mathfrak{N}''(x) = \frac{x^2}{2!} - \frac{3}{8}x, \qquad -\frac{9}{8}(x-1),$$

betrachten. Diese Funktion erscheint in Fig. 2*c* als ein aus lauter nach oben offenen Parabelstücken zusammengesetzter Linienzug. Das erste Parabelstück verläuft zunächst unterhalb der X-Achse, schneidet sie aber noch in $0 \ldots 1$, weil

$$\mathfrak{N}''(1) = \frac{1}{2} - \frac{3}{8} > 0$$

ist. Das sich daranschließende Parabelstück berührt wegen

$$\mathfrak{N}''\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{8} - \frac{3}{8}\frac{3}{2} - \frac{9}{8}\frac{1}{2} = 0$$

und der Symmetrie von $\mathfrak{N}''(x)$ die X-Achse bei $\frac{3}{2}$, also hat $\mathfrak{N}''(x)$ drei Nullstellen im Innern des Intervalls. $\mathfrak{N}'(x)$ hat ebenfalls bei $\frac{3}{2}$ den Wert Null, weil es schiefsymmetrisch ist, kann daher im Innern von $0 \ldots \frac{3}{2}$ keine Nullstelle besitzen und erfüllt somit die Bedingung S.

$n = 4$: Erledigt sich ebenso wie $n = 3$ (Fig. 2*d*) und soll hier nicht näher erörtert werden.

$n = 5$: Dieser Fall ist etwas schwieriger zu behandeln als die vorhergehenden.

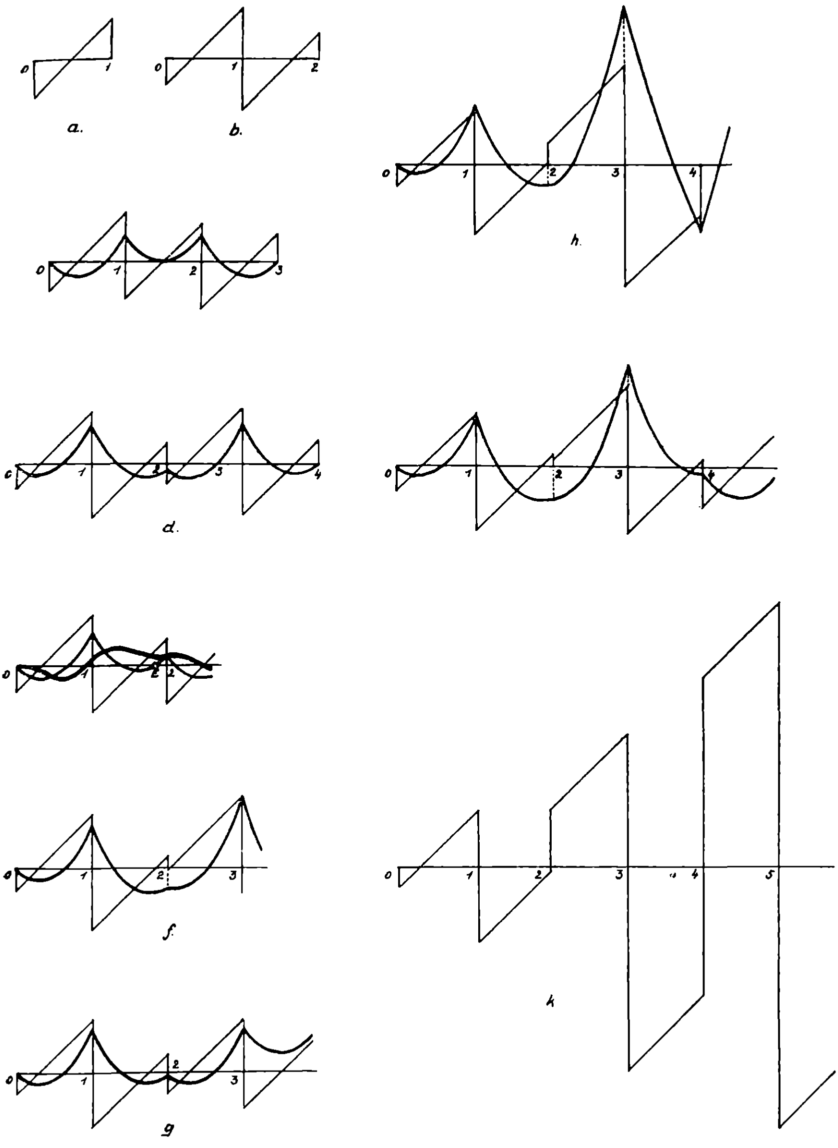

Fig. 2.

$$\mathfrak{N}^{V}(x) = x - \frac{95}{288}, \quad - \frac{375}{288}, \quad - \frac{250}{288},$$

hat, wie Fig. 2*e* zeigt, im Innern von 0...5 neun Nullstellen.

$$\mathfrak{N}^{IV}(x) = \frac{x^2}{2!} - \frac{95}{288}x, \quad - \frac{375}{288}(x-1), \quad - \frac{250}{288}(x-2), \ldots$$

hat zufolge

$$\mathfrak{N}^{IV}(1) = \frac{1}{2} - \frac{95}{288} > 0$$

$$\mathfrak{N}^{IV}(2) = 2 - \frac{190}{288} - \frac{375}{288} > 0$$

und

$$L_0 + L_1 = \frac{235}{144}$$

$$\mathfrak{N}^{IV}\left(\frac{235}{144}\right) = \frac{235^2}{144^2.2} - \frac{95}{288}\,\frac{235}{144} - \frac{375}{288}\,\frac{91}{144} =$$

$$= \frac{5^2}{144^2.2}(47^2 - 19.47 - 15.91) < 0$$

$$\mathfrak{N}^{IV}\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{5^2}{2^3} - \frac{95}{288}\,\frac{5}{2} - \frac{375}{288}\,\frac{3}{2} - \frac{250}{288}\,\frac{1}{2} =$$

$$= \frac{5^2}{2^3}\left(1 - \frac{19}{72} - \frac{45}{72} - \frac{10}{72}\right) < 0$$

deren acht und es läßt sich daraus noch nichts über $\mathfrak{N}'(x)$ aussagen. Wir müssen also

$$\mathfrak{N}'''(x) = \frac{x^3}{3!} - \frac{95}{288}\,\frac{x^2}{2!}, \quad - \frac{375}{288}\,\frac{(x-1)^2}{2!}, \quad - \frac{250}{288}\,\frac{(x-2)^2}{2!}, \ldots$$

untersuchen. Diese Funktion muß im Intervall 0...1 (vgl. Fig. 2*e*) ein Minimum, in 1...2 ein Maximum und bei E ein Minimum besitzen. Ist der Funktionswert bei E positiv, so kann $\mathfrak{N}'''(x)$ nur die in Fig. 2*e* gezeigte Gestalt aufweisen. E ist die näher bei 2 liegende Wurzel der Gleichung

$$\frac{x^2}{2!} - \frac{95}{288}x - \frac{375}{288}(x-1) = 0$$

$$x^2 - \frac{470}{144}x + \frac{375}{144} = 0$$

$$x = \frac{15}{8}.$$

$$\mathfrak{R}'''\left(\frac{15}{8}\right)=\frac{15^3}{3!\,8^3}-\frac{95}{288}\,\frac{15^2}{2!\,8^2}-\frac{375}{288}\,\frac{7^2}{2!\,8^2}=$$

$$=\frac{5^3}{3!\,8^3}\left(27-\frac{19.3^2}{12}-\frac{3.7^2}{12}\right)=\frac{5^3}{3!\,8^3}\left(27-\frac{53}{2}\right)>0.$$

Damit ist gezeigt, daß $\mathfrak{R}'''(x)$ im Innern von $0\ldots5$ nur drei Nullstellen und daher $\mathfrak{R}'(x)$ deren nur eine hat.

$n=6, 7, 8, 9$: Erledigen sich wie $n=3$ (Fig. 2 *f*, *g*, *h*, *i*) und sollen hier nicht näher erörtert werden.

$n=10$:

$$\mathfrak{R}^{X}(x)=x-\frac{160670}{598752},\ -\frac{1063000}{598752},\ +\frac{485250}{598752},\ -\frac{2724000}{598752},\ +$$

$$+\frac{2605500}{598752},\ -\frac{4273680}{598752},\ldots$$

besitzt wegen

$$L_0+L_1=\frac{1223670}{598752}>2$$

$$L_0+L_1+L_2=\frac{738420}{598752}<2$$

$$L_0+L_1+L_2+L_3=\frac{3462420}{598752}>4$$

$$L_0+L_1+L_2+L_3+L_4=\frac{856920}{598752}<4$$

nur elf Null- bzw. Unstetigkeitsstellen und dies liefert bereits die Aussage, daß $\mathfrak{R}(x)$ nur eine Nullstelle im Innern von $0\ldots10$ habe (Fig. 2*k*).

Man hat also die Sätze:

In der Folge der zu einer Cotes'schen Formel mit $n=1, 2, \ldots 10$ *gehörigen höheren Bernoulli'schen Zahlen, welche nicht verschwinden wechselt stets das Vorzeichen ab.*

(Damit ist auch die in Punkt 6 ausgesprochene Vermutung bestätigt.)

Und

Für eine Cotes'sche Formel mit $n=1, 2, \ldots 10$ *läßt sich das Restglied der zugehörigen Euler-Maclaurin'schen Quadraturformeln stets in der Form*

$$R = -\frac{(a_n - a_0)^{n+2k+2}}{(n+2k+1)!} A_{n+2k+1} f^{(n+2k+1)}(\xi)$$

$$a_0 < \xi < a_n$$

für n ungerade und

$$R = -\frac{(a_n - a_0)^{n+2k+3}}{(n+2k+2)!} A_{n+2k+2} f^{(n+2k+2)}(\xi)$$

$$a_0 < \xi < a_n$$

für n gerade darstellen.

Dieser letzte Satz enthält den Satz:

Das Restglied einer Cotes'schen Formel mit $n = 1, 2, \ldots 10$ *läßt sich stets in der Gestalt*

$$R = -\frac{(a_n - a_0)^{n+2}}{(n+1)!} A_{n+1} f^{(n+1)}(\xi)$$

$$a_0 < \xi < a_n$$

für n ungerade und

$$R = -\frac{(a_n - a_0)^{n+3}}{(n+2)!} A_{n+2} f^{(n+2)}(\xi)$$

$$a_0 < \xi < a_n$$

für n gerade darstellen.

Wenn dieser Satz auf das Beispiel in Punkt 6 ($n = 2$) angewendet wird, so muß sich das bekannte Restglied der *Simpson'schen* Regel

$$R = -\frac{(a_2 - a_0)^5}{2880} f^{IV}(\xi)$$

$$a_0 < \xi < a_2$$

ergeben. In der Tat stimmen bereits $(a_2 - a_0)^5$ und $f^{IV}(\xi)$ mit der allgemeinen Formel überein und es liefert schließlich

$$\frac{A_{n+2}}{(n+2)!} = \frac{A_4}{4!} = \frac{1}{4!\,120} = \frac{1}{2880}.$$

Ebenso wäre es möglich, auf Grund der in Punkt 13 gegebenen Tabelle, das Restglied in dieser Form für alle *Cotes'schen* Formeln mit $n = 1, 2 \ldots 10$ aufzustellen.[17]

[17] Siehe auch *Steffensen*, a. a. O., S. 158/59, 166/67, der diese Ergebnisse auf andere Weise herleitet.

12. Ein Beispiel und Bemerkungen zu dem Fall: Bedingung S nicht erfüllt.

Die Quadraturformel

$$\int_0^4 f(x)\,dx = \frac{2}{9}[f(0)+8f(1)+8f(3)+f(4)]+R$$

hat, wie leicht nachgeprüft werden kann, die Eigenschaft $R=0$ für den Fall $f(x)$ = Polynom vom Grad $\leqq 3$. Das Restglied lautet demnach

$$R=\int_0^4 \mathfrak{R}(x)\,f^{\mathrm{IV}}(x)\,dx,$$

wobei

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}(x) &= \frac{x^4}{4!}-\frac{2}{9}\frac{x^3}{3!}, && \text{in } 0\ldots 1\\ &= \frac{x^4}{4!}-\frac{2}{9}\frac{x^3}{3!}-\frac{16}{9}\frac{(x-1)^3}{3!}, && \text{in } 1\ldots 3\\ &= \frac{x^4}{4!}-\frac{2}{9}\frac{x^3}{3!}-\frac{16}{9}\frac{(x-1)^3}{3!}-\frac{16}{9}\frac{(x-3)^3}{3!}, && \text{in } 3\ldots 4\end{aligned}$$

ist.

Wir haben also, um zu sehen, ob die Bedingung S erfüllt ist, zu prüfen, wieviel Nullstellen $\mathfrak{R}'(x)$ im Innern von $0\ldots 4$ besitzt. Wie Fig. 3*a* zeigt, hat

$$\mathfrak{R}'''(x) = x-\frac{2}{9},\quad -\frac{16}{9},\ldots \quad \text{im Innern von } 0\ldots 4$$

fünf Null- bzw. Unstetigkeitsstellen.

$$\mathfrak{R}''(x)=\frac{x^2}{2!}-\frac{2}{9}x,\quad -\frac{16}{9}(x-1),\ldots$$

besitzt wegen

$$\mathfrak{R}''(1)=\frac{1}{2}-\frac{2}{9}>0,\qquad \mathfrak{R}''(2)=2-\frac{4}{9}-\frac{16}{9}<0$$

vier Nullstellen im Innern von $0\ldots 4$. Es muß also $\mathfrak{R}'(x)$ die in Fig. 3*a* gezeigte Gestalt aufweisen und daher ist die Bedingung S nicht erfüllt.

Der Vorzeichenwechsel in der Folge der zugehörigen nicht verschwindenden höheren *Bernoulli'schen* Zahlen kann also gestört sein. In der Tat erhält man, wenn man diese Zahlen mit Hilfe von (8) berechnet, wie man leicht überprüft, die Werte

$$-\frac{1}{18}, \quad -\frac{1}{480}, \quad +\frac{25}{10752}, \ldots$$

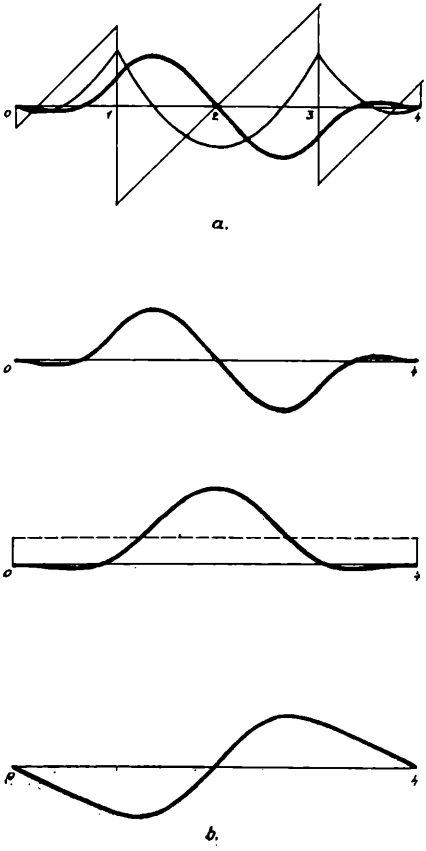

Fig. 3.

Es tritt also eine Störung des Zeichenwechsels ein. Die Frage, ob eine solche Störung nochmals auftreten kann, läßt sich im vorliegenden Falle leicht mit einem Nein beantworten, wenn man den Vorgang der Bildung der Stammfunktionen von $\mathfrak{N}'(x)$ und die damit verbundenen Schiebungen zur Erhaltung des Mittelwertes Null wie im Punkt 7 graphisch verfolgt (Fig. 3b).

Die Tatsache, daß die dritte nicht verschwindende höhere *Bernoulli'sche* Zahl einen negativen Wert erhält, bedeutet geometrisch, daß $\mathfrak{R}(x)$, um den Mittelwert Null zu erhalten, nach abwärts geschoben werden muß. Dieses so verschobene $\mathfrak{R}(x)$ hat aber sicher nicht mehr als zwei Nullstellen im Innern von $0\ldots 4$, daher hat die nächste Stammfunktion deren nur eine und wir haben in dieser Phase dieselben Verhältnisse, wie in Punkt 7 und 8. Es kann also nach dem dritten Glied in der Folge der zu unserer Quadraturformel gehörigen nicht verschwindenden höheren *Bernoulli'schen* Zahlen keine Störung des Zeichenwechsels mehr auftreten und ebenso muß für alle Glieder der zugehörigen höheren *Euler-Maclaurin'sehen* Reihe, welche auf das Glied mit $-\frac{1}{480}$ folgen, das Restglied in der Form (12) darstellbar sein.

Offenbar gilt allgemein, daß, wie an diesem speziellen Beispiel gezeigt wurde und wie man leicht durch graphische Veranschaulichung bestätigt, eine Störung des Zeichenwechsels, stets in der Folge der nach Punkt 3 gebildeten Stammfunktionen von $\mathfrak{R}^{(n-m+1)}(x)$ einen Verlust von mindestens zwei Nullstellen hervorruft. Es reinigen sich also diese Funktionen durch die Störungen des Zeichenwechsels von den Nullstellen.

Es können jedoch auch die Nullstellen allmählich verlorengehen, ohne eine Störung des Zeichenwechsels hervorzurufen. Ebenso ist es denkbar, daß einige der Nullstellen überhaupt erhalten bleiben.

Sei nun eine Quadraturformel (1) mit den symmetrisch verteilten Anschlußpunkten $a_0, a_1, \ldots a_n$ vorgelegt und angenommen, daß sie für Polynome vom Grad $\leqq m$ genau erfüllt sei, wobei m infolge der vorausgesetzten Symmetrie ungerade ist, dann hat die Funktion $\mathfrak{R}^{(n-m+1)}(x)$ höchstens $2n-m$ Nullstellen im Innern von $a_0\ldots a_n$, da

$$\mathfrak{R}^{(n)}(x) = x-L_0, \qquad -L_1, \ldots, \qquad -L_{n-1}$$

deren höchstens $2n-1$ hat. Da durch eine Störung des Zeichenwechsels in der Folge der zugehörigen nicht verschwindenden höheren *Bernoulli'schen* Zahlen jeweils mindestens zwei Nullstellen verlorengehen, kann man den Satz aussprechen:

Die zu einer symmetrischen Quadraturformel (1) *mit den Anschlußpunkten* $a_0, a_1, \ldots a_n$, — *die für alle Polynome, deren Grad* $\leqq m$ *ist, genau erfüllt ist — gehörige Folge der nicht verschwindenden höheren Bernoulli'schen Zahlen hat höchstens* $\frac{2n-m-1}{2}$ *Stö-*

rungen des Zeichenwechsels. Treten diese tatsächlich auf, so kann in der zugehörigen höheren Euler-Maclaurin'schen Quadraturformel von einer gewissen Stelle an das Restglied in der Form (12) *geschrieben werden. Diese Stelle entspricht jener höheren Bernoulli'schen Zahl, welche auf die letzte Störungsstelle folgt.*

13. Tabelle der ersten zu den Cotes'schen Formeln $n = 1, 2, \ldots 5$ gehörigen höheren Bernoulli'schen Zahlen.

Berechnet man mit Hilfe von Formel (8) die zu den *Cotes'schen* Formeln $n=1, 2, \ldots 5$ gehörigen höheren *Bernoulli'schen* Zahlen, so erhält man nachstehende Werte. In der Spalte mit $n=1$ erscheinen, wie zu erwarten, die gewöhnlichen *Bernoulli'schen* Zahlen.

n	1	2	3	4	5
A_0	1	1	1	1	1
A_1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{7}{90}$	$-\frac{19}{288}$
A_2	$\frac{1}{6}$	0	0	0	0
A_3	0	0	0	0	0
A_4	$-\frac{1}{30}$	$\frac{1}{120}$	$\frac{1}{270}$	0	0
A_5	0	0	0	0	0
A_6	$\frac{1}{42}$	$-\frac{5}{672}$	$-\frac{5}{1701}$	$\frac{1}{2688}$	$\frac{11}{52500}$
A_7	0	0	0	0	0
A_8	$-\frac{1}{30}$	$\frac{7}{640}$	$\frac{91}{21870}$	$-\frac{7}{10240}$	$-\frac{7}{18750}$
A_9	0	0	0	0	0
A_{10}	$\frac{5}{66}$	$-\frac{425}{16896}$	$-\frac{2050}{19683}$	$\frac{595}{360448}$	$\frac{15391}{17187500}$

14. Die zu den Cotes'schen Formeln $n = 1, 2, \ldots 5$ gehörigen höheren Euler-Maclaurin'schen Reihen.

Diese Reihen lassen sich nun sofort durch Einsetzen der Werte der obenstehenden Tabelle in die Formel (9a) angeben. Für $n=1$ erhalten wir die gewöhnliche *Euler-Maclaurin'sche* Reihe:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)] - \frac{(b-a)^2}{12}[f'(b)-f'(a)] +$$

$$+ \frac{(b-a)^4}{720}[f'''(b)-f'''(a)] - \frac{(b-a)^6}{30240}[f^{\mathrm{V}}(b)-f^{\mathrm{V}}(a)] +$$

Simpson $(n=2)$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right] - \frac{(b-a)^4}{2880}[f'''(b)-f'''(a)] +$$

$$+ \frac{(b-a)^6}{96768}[f^{\mathrm{V}}(b)-f^{\mathrm{V}}(a)] - \frac{(b-a)^8}{368640}[f^{\mathrm{VII}}(b)-f^{\mathrm{VII}}(a)] + \ldots$$

Newtons Lieblingsformel $(n=3)$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{8}\left[f(a)+3f\left(\frac{2a+b}{3}\right)+3f\left(\frac{a+2b}{3}\right)+f(b)\right] -$$

$$- \frac{(b-a)^4}{6480}[f'''(b)-f'''(a)] + \frac{(b-a)^6}{244944}[f^{\mathrm{V}}(b)-f^{\mathrm{V}}(a)] -$$

$$- (b-a)^8 \frac{13}{125971200}[f^{\mathrm{VII}}(b)-f^{\mathrm{VII}}(a)] + \ldots$$

$n=4$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{90}\left[7f(a)+32f\left(\frac{3a+b}{4}\right)+12f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\right.$$

$$\left.+32f\left(\frac{a+3b}{4}\right)+7f(b)\right] - \frac{(b-a)^6}{1935360}[f^{\mathrm{V}}(b)-f^{\mathrm{V}}(a)] +$$

$$+ \frac{(b-a)^8}{5898240}[f^{\mathrm{VII}}(b)-f^{\mathrm{VII}}(a)] - (b-a)^{10}\frac{17}{37371248640}[f^{\mathrm{IX}}(b)-$$

$$- f^{\mathrm{IX}}(a)] + \ldots$$

$n=5$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{288}\left[19f(a)+75f\left(\frac{4a+b}{5}\right)+50f\left(\frac{3a+2b}{5}\right)+\right.$$

$$+50\, f\left(\frac{2\,a+3\,b}{5}\right)+75\, f\left(\frac{a+4\,b}{5}\right)+19\, f(b)\Big]-$$

$$-\frac{11\,(b-a)^6}{378.10^5}\left[f^{\mathrm{V}}(b)-f^{\mathrm{V}}(a)\right]+\frac{(b-a)^8}{108.10^6}\left[f^{\mathrm{VII}}(b)-f^{\mathrm{VII}}(a)\right]-$$

$$-(b-a)^{10}\,\frac{15391}{6237.10^{10}}\left[f^{\mathrm{IX}}(b)-f^{\mathrm{IX}}(a)\right]+\ldots$$