

# Eineindeutige involutorische Kegelschnittverwandtschaften, die sich mit Hilfe eines festen Kegelschnitts definieren lassen

Von

Fritz Hohenberg (Wien)

(Mit 16 Textfiguren)

(Vorgelegt in der Sitzung am 10. Juni 1943)

## Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Einleitung	16
1. Die Abbildung	18
2. Die Polarität $\Sigma$ an $k$	21
3. Die Kegelschnittverwandtschaft $\Gamma$	24
4. Die Kegelschnittverwandtschaft $\Delta$	28
5. Die Isologen von $\Sigma$ , $\Gamma$ und $\Delta$ in $\mathfrak{P}$	32
A. Die Isologen von $\Sigma$ . . . . .	32
B. Die Isologen von $\Gamma$ . . . . .	33
C. Die Isologen von $\Delta$ . . . . .	34
D. Gemeinsame Eigenschaften der Isologen	35
6. Die Dualisologen von $\Sigma$ , $\Gamma$ und $\Delta$ in $\mathfrak{P}$	37
A. Die Dualisologen von $\Sigma$ . . . . .	37
B. Die Dualisologen von $\Delta$ . . . . .	37
C. Die Dualisologen von $\Gamma$ . . . . .	39
7. Die weiteren Festkurven in $\mathfrak{P}$	39
8. Rechnerische Behandlung von $\Sigma$ , $\Gamma$ und $\Delta$ im allgemeinen Fall. . . . .	41
9. Erster Grenzfall: Berührende Kegelschnitte	44
A. Das Kegelschnittsystem $\mathfrak{C}_1$	44
B. Die Polarität $\Sigma$ in $\mathfrak{C}_1$ . . . . .	47
C. Die Kegelschnittverwandtschaft $\Gamma$ in $\mathfrak{C}_1$	48
D. Die Kegelschnittverwandtschaft $\Delta$ in $\mathfrak{C}_1$ . . . . .	49
E. Der Grenzübergang $\mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{C}_1$ für eine beliebige Kegelschnittverwandtschaft	50
10. Zweiter Grenzfall: Oskulierende Kegelschnitte . . . . .	52
A. Das Kegelschnittsystem $\mathfrak{C}_2$ . . . . .	52
B. Die Verwandtschaften $\Sigma$ , $\Gamma$ und $\Delta$ in $\mathfrak{C}_2$ . . . . .	54
C. Der Grenzübergang $\mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{C}_2$ für eine beliebige Kegelschnittverwandtschaft .	55

	Seite
11. Über weitere eindeutige involutorische Kegelschnittverwandtschaften, die sich mit Hilfe eines festen Kegelschnitts definieren lassen	57
12. Die Kegelschnittverwandtschaft $\Lambda^1$ , die sich auf eine harmonische Kollination in $\mathfrak{P}$ abbildet	59
A. Die Verwandtschaft $\Lambda^1$ in $\mathfrak{S}$	59
B. Die Verwandtschaft $\Lambda^1$ in $\mathfrak{S}_1$	61
C. Die Verwandtschaft $\Lambda^1$ in $\mathfrak{S}_2$	62
13. Die Kegelschnittverwandtschaften, die sich auf perspektive Jonquièrresse Punktverwandtschaften in $\mathfrak{P}$ abbilden	62
A. Die Kegelschnittverwandtschaft $\Lambda^2$	63
B. Die Kegelschnittverwandtschaft $\Lambda^3$	66
C. Die Kegelschnittverwandtschaft $\Lambda^4$	68
D. Die Kegelschnittverwandtschaft $\Lambda^{22}$	71
E. Die zu $\Lambda^{22}$ duale Kegelschnittverwandtschaft	74
14. Die Kegelschnittverwandtschaften, die sich auf Geisersche Punktverwandtschaften in $\mathfrak{P}$ abbilden	75
A. Die Geisersche Punktverwandtschaft	75
B. Die bisher behandelten Kegelschnittverwandtschaften als Geisersche Punktverwandtschaften in $\mathfrak{P}$	76
C. Bestimmung aller durch $K$ und $\Pi$ definierbaren Geiserschen Punktverwandtschaften in $\mathfrak{P}$	78
15. Erster Fall: Die Kegelschnittverwandtschaft, die sich auf die Geisersche Punktverwandtschaft $\Lambda^I$ in $\mathfrak{P}$ abbildet	79
A. Die Kegelschnittverwandtschaft $\Lambda^I$ in $\mathfrak{S}$	79
B. Die Verwandtschaft $\Lambda^I$ in $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$	82
C. Einige Sonderfälle von $\Lambda^I$	83
16. Zweiter Fall: Die Kegelschnittverwandtschaft, die sich auf die Geisersche Punktverwandtschaft $\Lambda^{II}$ in $\mathfrak{P}$ abbildet	84
A. Die Kegelschnittverwandtschaft $\Lambda^{II}$	84
B. Einige Sonderfälle von $\Lambda^{II}$	87
17. Dritter Fall: Die Kegelschnittverwandtschaft, die sich auf die Geisersche Punktverwandtschaft $\Lambda^{III}$ in $\mathfrak{P}$ abbildet	87
A. Die Kegelschnittverwandtschaft $\Lambda^{III}$ in $\mathfrak{S}$	87
B. Die Kegelschnittverwandtschaft $\Lambda^{III}$ in $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$	91
C. Die Kegelschnittverwandtschaft $\Lambda^{III}_1$	93
D. Vier Entartungsfälle von $\Lambda^{III}$	94
E. Die Kegelschnittverwandtschaft $\Lambda^{III}_\infty$	96
18. Die Kegelschnittverwandtschaften, die sich auf Bertinische Punktverwandtschaften in $\mathfrak{P}$ abbilden	100

## Einleitung.

Als Kegelschnittverwandtschaft bezeichnen wir hier ein Verfahren, das jedem Kegelschnitt einer projektiven Ebene einen oder mehrere Kegelschnitte in ihr zuordnet. Deutet man die sechs Koeffizienten einer Kegelschnittgleichung als projektive Koordinaten in einem  $R_5$ , so wird jede Kegelschnittverwandtschaft eine Punktverwandtschaft in diesem  $R_5$  bewirken. Will man aber mehr tun als die projektive Geometrie des  $R_5$  in der Ebene der

Kegelschnitte deuten, so wird man sich mit solchen Kegelschnittverwandtschaften zu befassen haben, die auch in der Kegelschnittebene von geometrischem Interesse sind. Das Beispiel der Polarität an einem Kegelschnitt zeigt, daß vor allem jene Kegelschnittverwandtschaften eine anschauliche Bedeutung haben werden, die involutorisch sind und mit Hilfe eines einzigen festen Kegelschnittes definiert werden können.

Es läßt sich, wie hier gezeigt werden soll, eine sehr allgemeine Klasse solcher Kegelschnittverwandtschaften finden. Ehe wir jedoch auf allgemeinere Fragestellungen eingehen, sollen (in 1. bis 10.) drei besondere Kegelschnittverwandtschaften untersucht werden:

1. die Polarität  $\Sigma$  an einem festen Kegelschnitt  $k$ ,
2. die Verwandtschaft  $\Gamma$ , in der sich zwei Kegelschnitte involutorisch entsprechen, wenn der feste Kegelschnitt  $k$  ihre harmonische Kurve 2. Ordnung ist (d. h.  $k$  geht durch die acht Berührungspunkte der gemeinsamen Tangenten entsprechender Kegelschnitte), und
3. die zu  $\Gamma$  duale Verwandtschaft  $\Delta$ , in der sich zwei Kegelschnitte involutorisch entsprechen, wenn der feste Kegelschnitt  $k$  ihre harmonische Kurve 2. Klasse ist (d. h.  $k$  berührt die acht Tangenten in den Schnittpunkten entsprechender Kegelschnitte).

In 11. bis 18. sollen weitere Kegelschnittverwandtschaften besprochen werden, insbesondere soll eine allgemeinere Kegelschnittverwandtschaft aufgesucht werden, die  $\Sigma$ ,  $\Gamma$  und  $\Delta$  als sehr spezielle Sonderfälle enthält.

Bei  $\Sigma$ ,  $\Gamma$  und  $\Delta$  ist das gemeinsame Poldreieck entsprechender Kegelschnitte  $\alpha$  und  $\alpha'^1$  auch Poldreieck von  $k$ . Wir beschränken uns vorerst (in 1. bis 8.) auf solche Kegelschnitte  $\alpha$ , die mit  $k$  ein nichtausgeartetes Poldreieck gemein haben. Nimmt man dann ein nichtausgeartetes Poldreieck  $\Omega$  von  $k$  willkürlich an, so entspricht in den drei Verwandtschaften jedem Kegelschnitt  $\alpha$  mit dem Poldreieck  $\Omega$  je ein Kegelschnitt  $\alpha'$  mit demselben Poldreieck. Aus den so erhaltenen Paaren  $\alpha$ ,  $\alpha'$  von  $\Sigma$  bzw.  $\Gamma$ ,  $\Delta$  erhält man alle Paare in der ganzen Ebene, die miteinander und mit  $k$  ein nichtausgeartetes Poldreieck gemein haben, indem man auf die erhaltenen Paare die dreigliedrige Gruppe jener Kollineationen ausübt, die  $k$  in sich überführen.

<sup>1</sup> Einen veränderlichen Kegelschnitt bezeichnen wir mit  $\alpha$ , seinen entsprechenden mit  $\alpha'$ .

Ebenso genügt es bei den noch zu besprechenden Kegelschnittverwandtschaften, diese im System aller Kegelschnitte mit einem gemeinsamen Poldreieck  $\Omega$  zu betrachten. Wir nennen dieses in sich duale System „Bund“.

Die Untersuchung wird einfacher und anschaulicher, wenn man die Kegelschnitte des Bundes auf Punkte abbildet.<sup>1</sup> Aus jeder Verwandtschaft zwischen den Kegelschnitten des Bundes wird dadurch eine Punktverwandtschaft. Den im Folgenden zu besprechenden Kegelschnittverwandtschaften entsprechen birationale involutorische Punktverwandtschaften.

### 1. Die Abbildung.

In der projektiven Ebene  $\mathfrak{D}$  liege der Bund, d. h. das System der Kegelschnitte mit einem gemeinsamen nichtausgearteten Poldreieck  $\Omega$  (Ecken  $O_1, O_2, O_3$ , Seiten  $o_1 = [O_2 O_3]$ ,  $o_2, o_3$ ), ferner eine feste Gerade  $e$  allgemeiner Lage. Jedem Kegelschnitt  $\alpha$  des Bundes ordnen wir den Pol von  $e$  bezüglich  $\alpha$  als Bildpunkt zu; der Bildpunkt werde wieder mit  $\alpha$  bezeichnet.<sup>2</sup> Die Gesamtheit der Bildpunkte nennen wir die (mit  $\mathfrak{D}$  vereinigt liegende) Bildebene  $\mathfrak{B}$ ; sie enthält das mit  $\Omega$  zusammenfallende Dreieck  $\Pi$  (Ecken  $P_i = O_i$ , Seiten  $p_i = o_i$ ). Die Gerade  $o_1$  schneidet den Kegelschnitt  $\alpha$  in  $\mathfrak{D}$  in komplexen oder reellen Punkten, je nachdem die Schnittpunkte von  $e$  und  $[P_1 \alpha]$  mit  $p_1$  von den Punkten  $P_2$  und  $P_3$  getrennt oder nicht getrennt werden.

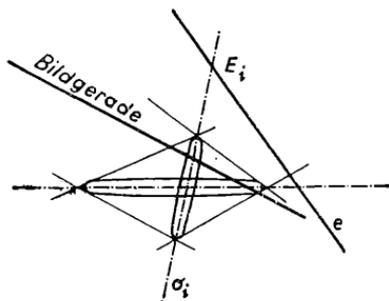


Fig. 1.

<sup>1</sup> Verwandte Untersuchungen: Fritz Hohenberg, Apolarität und Schließungsproblem bei Kegelschnitten (Mon. f. Math. u. Phys., Bd. 50 (1941), S. 111—124), Über die Hyperflächen zweiten Grades mit einem gemeinsamen Polsimplex (Sitzungsber. d. Akad. d. Wiss. in Wien, Abt. II a, Bd. 150 (1941), S. 89—108), Über die Kegelschnitte mit gemeinsamen Hauptachsen (Deutsche Mathematik, Jahrg. 6, Heft 6, S. 530—537).

<sup>2</sup> Man kann  $\Omega$  metrisch speziell als Hauptpoldreieck deuten (Bund der Kegelschnitte mit gemeinsamen Achsen) oder bei allgemeiner Lage von  $\Omega$  für  $e$  die Ferngerade der euklidischen Ebene nehmen (jedem Kegelschnitt des Bundes ist sein Mittelpunkt als Bildpunkt zugeordnet).

Die Pole von  $e$  bezüglich der Kegelschnitte einer im Bund enthaltenen Schar liegen auf einer Geraden (Abb. 1). Deren Schnittpunkt mit  $o_i$  liegt harmonisch zum Schnittpunkt  $E_i$  von  $e$  mit  $o_i$  bezüglich der auf  $o_i$  gelegenen Gegenecken des Grundtangenvierseits der Schar. Also entspricht einer Kegelschnittschar des Bundes eine Gerade in  $\mathfrak{B}$ ; deren Schnittpunkte mit  $p_i$  entsprechen den zerfallenen Kurven 2. Klasse der Schar.

Die Pole von  $e$  bezüglich der Kegelschnitte eines im Bund enthaltenen Büschels liegen auf dem Polkegelschnitt von  $e$ . Dieser geht durch die Punkte  $P_i$  und soll daher Umlinie heißen (Fig. 2). Beim Grenzübergang von nichtzerfallenen Kurven des Büschels zu der durch  $O_i$  gehenden zerfallenen Kurve des Büschels erkennt man, daß die Tangente in  $P_i$  an die Umlinie harmonisch liegt zur Geraden  $[O_i E_i]$  bezüglich der durch  $O_i$  gehenden Seiten des Grundvierecks des Büschels. Also entspricht einem Kegelschnittbüschel des Bundes eine Umlinie; deren Tangenten in den Punkten  $P_i$  geben die zerfallenen Kurven 2. Ordnung des Büschels an.

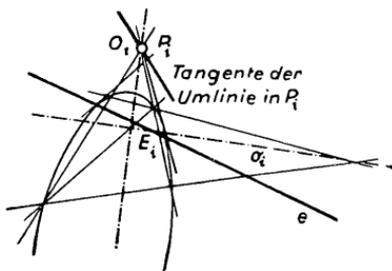


Fig. 2.

Während sich also die im Bund enthaltenen Punktepaare und nichtzerfallenen Kegelschnitte, d. h. die im Bund enthaltenen Kurven 2. Klasse eineindeutig auf die Punkte einer projektiven Ebene abbilden, erfordert die Abbildung der Geradenpaare des Bundes, daß die projektive Bildebene durch die Linienelemente der drei Punkte  $P_i$  zur Bildebene  $\mathfrak{B}$  erweitert wird.

Die Pole von  $e$  bezüglich der Kegelschnitte, die z. B.  $o_1$  in zwei festen Punkten schneiden (Berührungsbüschel), liegen auf der Polaren von  $E_1$  bezüglich dieser Kegelschnitte.

In  $\mathfrak{D}$  bestimmt eine Tangente samt Berührungspunkt, also ein Linienelement, eindeutig einen Kegelschnitt des Bundes. Die Tangente bestimmt eine Schar des Bundes, der Punkt ein Büschel, in  $\mathfrak{B}$  sind also eine Gerade und eine Umlinie gegeben, die sich wegen der eindeutigen Bestimmtheit des Kegelschnitts in dessen Bildpunkt berühren. Daher entspricht einem Linienelement in  $\mathfrak{D}$  ein solches in  $\mathfrak{B}$ , die Abbildung  $\mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{B}$  ist eine Berührungstransformation. Den Linienelementen einer Geraden in  $\mathfrak{D}$  entsprechen die einer Geraden in  $\mathfrak{B}$  (und zwar sind die daraufliegenden Punktreihen projektiv, es entsprechen sich die Schnittpunkte mit

den Seiten von  $\Omega$  bzw.  $\Pi$ ). Den Linienelementen eines Punktes in  $\mathfrak{D}$  entsprechen ebenso projektiv die einer Umlinie in  $\mathfrak{B}$ , während zu den Linienelementen eines Punktes in  $\mathfrak{B}$  die eines Kegelschnitts des Bundes in  $\mathfrak{D}$  gehören. Daher ist jeder Berührungstransformation in  $\mathfrak{D}$  durch die Abbildung eine Berührungstransformation in  $\mathfrak{B}$  zugeordnet, insbesondere jeder Berührungstransformation in  $\mathfrak{D}$ , die die Kegelschnitte des Bundes untereinander vertauscht, eine Punkttransformation in  $\mathfrak{B}$ .<sup>1</sup>

Die Verwandtschaften  $\Sigma$ ,  $\Gamma$  und  $\Delta$ , angewandt auf Kegelschnitte des Bundes, stellen sich in  $\mathfrak{B}$  als Punkttransformationen dar, ihnen entsprechen also in  $\mathfrak{D}$  Berührungstransformationen, die die Kegelschnitte des Bundes untereinander vertauschen. Aus diesen Berührungstransformationen in  $\mathfrak{D}$  erhält man dann die allgemeinen Kegelschnittverwandtschaften  $\Sigma$ ,  $\Gamma$  und  $\Delta$  durch Ausübung der Kollineationen, die  $k$  in sich überführen. ( $\Sigma$ ,  $\Gamma$  und  $\Delta$  sind also nur innerhalb des Bundes Berührungstransformationen, als Transformationen aller  $\infty^5$  Kegelschnitte der Ebene betrachtet sind sie es nicht.)

Eine Kegelschnittreihe im Bund heiÙe algebraisch, und zwar  $(m, n)$ -Reihe, wenn ihre Bildkurve in  $\mathfrak{B}$  algebraisch ist und wenn durch jeden Punkt in  $\mathfrak{D}$   $m$  Kegelschnitte der Reihe gehen und jede Gerade in  $\mathfrak{D}$   $n$  Kegelschnitte der Reihe berührt.<sup>2</sup> Für die Bildkurve der Reihe ist  $m$  die Anzahl der Schnittpunkte mit einer allgemeinen Umlinie, abgesehen von den Ecken  $P_i$  von  $\Pi$ .  $n$  ist die Ordnung der Bildkurve. Geht die Bildkurve  $n_i$ -fach durch  $P_i$ , so ist  $m = 2n - (n_1 + n_2 + n_3)$ . Der Klasse der Bildkurve (Anzahl der Tangenten aus einem Punkt  $\bar{\alpha}$ ) entspricht in  $\mathfrak{D}$  die Anzahl der Tangentenquadrupel (Diagonaldreieck  $\mathfrak{Q}$ ) eines Kegelschnitts  $\bar{\alpha}$  des Bundes, für die zwei der  $n$  Kegelschnitte der Reihe, die sie berühren, zusammenfallen. Einem Doppelpunkt der Bildkurve entspricht in  $\mathfrak{D}$  ein Kegelschnitt der Reihe, der beim Durchlaufen der Reihe zweimal angetroffen wird. Wird das Durchlaufen stationär, so liegt in  $\mathfrak{B}$  eine Spitze vor. Ähnliches gilt für die anderen Singularitäten. Als Geschlecht der Reihe bezeichnen wir das Geschlecht ihrer Bildkurve. Eine Reihe heiÙe irreduzibel, wenn ihre Bildkurve irreduzibel ist.

<sup>1</sup> Z. B. entsprechen den automorphen Kollineationen des Bundes jene Kollineationen in  $\mathfrak{B}$ , die das Dreieck  $\Pi$  festlassen, und den automorphen Korrelationen des Bundes die quadratischen Transformationen in  $\mathfrak{B}$  mit dem Hauptdreieck  $\Pi$  (vgl. F. Hohenberg, Über die Hyperflächen usw., I. S. 93).

<sup>2</sup>  $m$  und  $n$  sind die Jonquièresschen Indices der Reihe, vgl. E. Pascal, Rep. d. höh. Math., Bd. II/1, S. 289.

### 2. Die Polarität $\Sigma$ an $k$ .

Bei  $\Sigma$  gehen die Kegelschnitte  $\alpha$  des Bundes, die  $o_i$  in den festen Punkten  $A$  und  $A_1$  schneiden, in die Kegelschnitte  $\alpha'$  über,

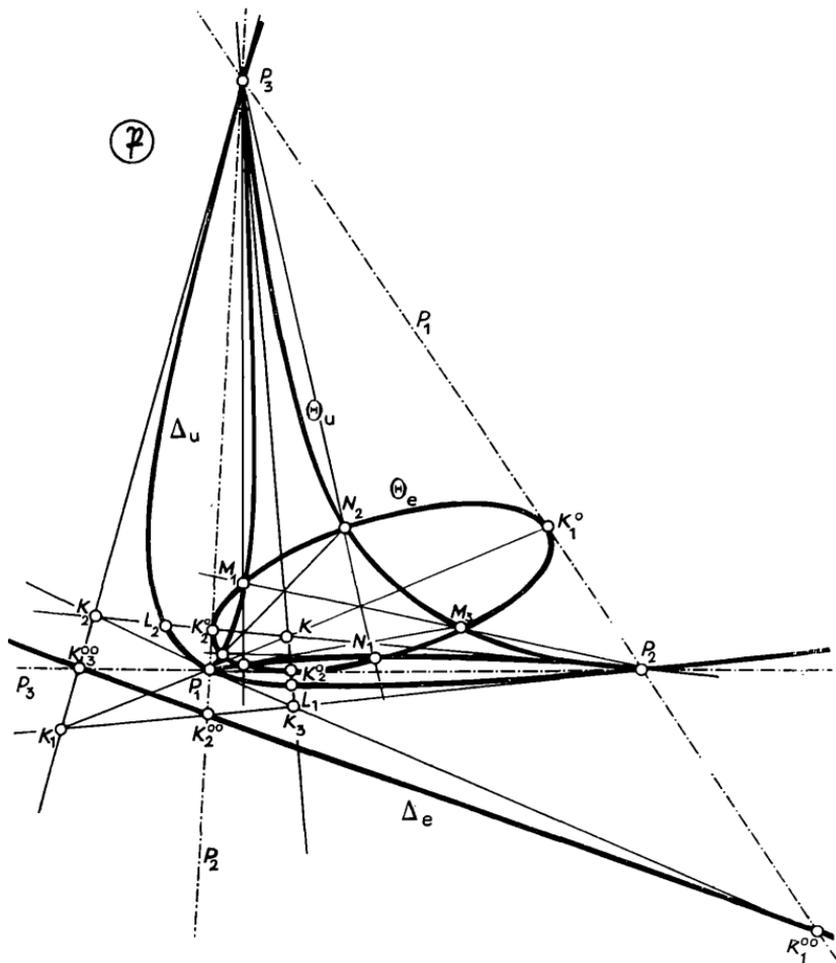


Fig. 3.

die  $o_i$  in den festen Punkten  $A'$  und  $A'_1$  schneiden, und zwar liegen z. B.  $A$  und  $A'$  und ebenso  $A_1$  und  $A'_1$  harmonisch bezüglich des Schnittpunkts von  $k$  mit  $o_i$ . Die Bildpunkte der  $\alpha$  liegen

auf einer Geraden durch  $P_i$ , die Bildpunkte der  $\alpha'$  ebenfalls;  $\Sigma$  bewirkt also in  $\mathfrak{B}$  eine Involution unter den Geraden durch  $P_i$ . Einer der Feststrahlen geht natürlich durch den Bildpunkt  $k$  von  $k$  (Abb. 3).

Der Polarität  $\Sigma$  an  $k$  in  $\mathfrak{D}$  entspricht also in  $\mathfrak{B}$  eine involutorische quadratische Verwandtschaft  $\Sigma$  mit dem Hauptdreieck  $\Pi$ . Einer der Festpunkte in  $\mathfrak{B}$  ist  $K$ , die drei weiteren Festpunkte  $K_i$  liegen auf je einem Strahl  $[P_i K]$ , und zwar harmonisch zu  $K$  bezüglich  $P_i$  und des Schnittpunktes  $K_i^0$  von  $[P_i K]$  mit  $p_i$  (Abb. 3).  $K_i$  ist Bildpunkt jenes Kegelschnittes  $k_i$  des Bundes, der  $k$  in den Schnittpunkten mit  $o_i$  berührt und dessen Schnittpunkte mit den beiden anderen Seiten von  $\Omega$  harmonisch liegen zu denen von  $k$ . Geht ein Kegelschnitt  $\alpha$  durch die Polarität an  $k$  in  $\alpha'$  über, so geht er auch durch die Polarität an  $k_i$  in  $\alpha'$  über (einem Schnittpunkt von  $\alpha$  und  $\alpha'$  entspricht dabei als Polare bezüglich  $k$  bzw.  $k_i$  der Reihe nach jede der gemeinsamen Tangenten von  $\alpha$  und  $\alpha'$ ). Daher nennen wir die Kegelschnitte  $k, k_1, k_2, k_3$  untereinander vertauschbar. Das Diagonaldreieck ihrer Bildpunkte ist  $\Pi$ . Die Festpunkte  $K, K_i$  in  $\mathfrak{B}$  sind die Bildpunkte der vier vertauschbaren Kegelschnitte  $k, k_i$ .

Einer Geraden in  $\mathfrak{B}$  ist durch  $\Sigma$  eine Umlinie zugeordnet, die auf der Geraden ein Punktepaar von  $\Sigma$  ausschneidet. In  $\mathfrak{D}$  gehen also Scharen in Büschel über (und umgekehrt), eine Schar und das ihr entsprechende Büschel haben zwei zu  $k$  polare Kegelschnitte gemein. Einem Linienelement in  $\mathfrak{B}$  (Punkt  $\alpha$ , Gerade  $g$  durch  $\alpha$ ) entspricht ein Linienelement ( $\alpha', g_1$ ): der Umlinie, die  $g$  in  $\alpha$  berührt, entspricht  $g_1$ , der Geraden  $g$  entspricht eine Umlinie, die  $g_1$  in  $\alpha'$  berührt. Geht die Gerade in  $\mathfrak{B}$  durch einen Festpunkt, so berührt sie dort die entsprechende Umlinie, d. h. die Linienelemente der Festpunkte in  $\mathfrak{B}$  bzw. die Linienelementquadrupel der Festkegelschnitte in  $\mathfrak{D}$ , deren Diagonaldreieck  $\Omega$  ist, bleiben einzeln fest.

Geht in  $\mathfrak{D}$  der Kegelschnitt  $\alpha$  in  $\alpha'$  über, so entspricht einer gemeinsamen Tangente von  $\alpha$  und  $k$  der Berührungspunkt auf  $k$  als Punkt von  $\alpha'$ , in  $\mathfrak{B}$  entspricht also der Geraden  $[K\alpha]$  jene Umlinie, die sie in  $K$  berührt (Abb. 4). Einem Schnittpunkt von  $\alpha$  und  $k$  in  $\mathfrak{D}$  entspricht die Tangente an  $k$  als Tangente von  $\alpha'$ , in  $\mathfrak{B}$  entspricht also der Umlinie durch  $K$  und  $\alpha$  ihre Tangente in  $K$ . Entnimmt man daher dem Umlinienbüschel durch  $K$  zwei beliebige Umlinien und schneidet jede mit der Tangente des Punktes  $K$  an die andere Umlinie, so sind die Schnittpunkte ein Punktepaar von  $\Sigma$  in  $\mathfrak{B}$ . An Stelle von  $K$  kann auch  $K_i$  treten.

Wir merken für späteren Gebrauch noch einiges aus der Theorie der Apolarität und des Schließungsproblems bei Kegelschnitten an.<sup>1</sup>  $K_i^{00}$  liege harmonisch zu  $K_i^0$  bezüglich der auf  $p_i$  liegenden Ecken von  $\Pi$ . Die Punkte  $K_i^{00}$  liegen auf einer Geraden  $\Delta_e(k)$ , der geraden Polaren von  $K$  bezüglich der in die  $p_i$  zerfallenen Kurve 3. Ordnung  $\Pi$  (Abb. 3).  $\Delta_e(k)$  stellt die Reihe der  $k$  harmonisch eingeschriebenen Kegelschnitte des Bundes dar. Durch  $\Sigma$  geht  $\Delta_e(k)$  in jene Umlinie  $\Delta_u(k)$  über, deren Tangenten in  $P_i$  je zwei der Punkte  $K_i$  enthalten.  $\Delta_u(k)$  ist die Bildkurve der Reihe der  $k$  harmonisch umschriebenen Kegelschnitte des Bundes.  $\Delta_e(k)$  und  $\Delta_u(k)$  schneiden sich in den (konjugiert komplexen) Bildpunkten  $K^1$  und  $K^2$  der beiden mit  $k$  „verbundenen“ Kegelschnitte  $k^1$  und  $k^2$  (d. h. in  $\mathfrak{D}$  liegen die Schnittpunkte von  $k^1$  bzw.  $k^2$  mit  $o_i$  äquianharmonisch zu denen von  $k$  mit  $o_i$ ). Die beiden mit  $k$  verbundenen Kegelschnitte des Bundes vertauschen sich durch die Polarität an  $k$ .

Die Grundtangente der Schar  $\Delta_e$  und die Grundpunkte des Büschels  $\Delta_u$  in  $\mathfrak{D}$  lassen sich daraus leicht gewinnen. Die Schnittpunkte der Grundtangente von  $\Delta_e$  mit  $o_1$  liegen harmonisch zu den Schnittpunkten von  $k$  mit  $o_1$  und ebenso harmonisch zu den Punkten  $O_2$  und  $O_3$  auf  $o_1$ , sie fallen also bei vereinigter Lage von  $\mathfrak{D}$  und  $\mathfrak{P}$  in die Punkte  $K_i^0$  und  $K_i^{00}$ . Bei vereinigter Lage von  $\mathfrak{D}$  und  $\mathfrak{P}$  decken sich also die Grundtangente der Schar  $\Delta_e$  in  $\mathfrak{D}$  mit den Geraden  $\Delta_e$ ,  $[K_1^0 K_2^0]$ ,  $[K_2^0 K_3^0]$ ,  $[K_3^0 K_1^0]$  der Ebene  $\mathfrak{P}$ . Ebenso decken sich bei vereinigter Lage von  $\mathfrak{D}$  und  $\mathfrak{P}$  die Grundpunkte des Büschels  $\Delta_u$  in  $\mathfrak{D}$  mit den Punkten  $K$  und  $K_i$  der Ebene  $\mathfrak{P}$ .

Ferner<sup>1</sup> kann man die Kegelschnitte des Bundes bestimmen, die die Seiten zweier (und damit unendlich vieler) Dreiecke berühren, die  $k$  in  $\mathfrak{D}$  eingeschrieben sind. Die Bildpunkte dieser  $k$  „eingeschriebenen“ Kegelschnitte liegen in  $\mathfrak{P}$  auf dem Kegelschnitt  $\Theta_e(k)$ , der  $p_i$  in  $K_i^0$  berührt (Abb. 3).<sup>2</sup> In  $\mathfrak{D}$  heißt

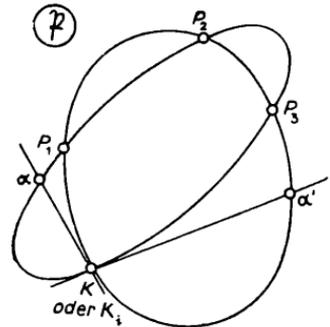


Fig. 4.

<sup>1</sup> Vgl. hierzu F. Hohenberg, Apolarität usw., I. c., S. 113—121.

<sup>2</sup> Durch eine zentrische Kollineation in  $\mathfrak{P}$  (Zentrum  $K$ , Achse  $\Delta_e$ ) läßt sich  $\Delta_u(k)$  in  $\Theta_e(k)$  überführen. Dieser Kollineation entspricht in  $\mathfrak{D}$  eine Berührungstransformation im Bund, bei der die Linienelemente von  $k$  einzeln festbleiben, die Linienelemente jedes  $k$  harmonisch eingeschriebenen Kegelschnitts

umgekehrt  $k$  jedem dieser Kegelschnitte umschrieben. Als Bildkurve der Reihe der  $k$  „umschriebenen“ Kegelschnitte des Bundes ergibt sich aus  $\Theta_e(k)$  durch Anwendung von  $\Sigma$  die Kurve 4. Ordnung  $\Theta_u(k)$  mit Spitzen in  $P_i$ , deren Tangenten sich in  $K$  schneiden. Auch  $\Theta_e(k)$  und  $\Theta_u(k)$  haben die Punkte  $K^1$  und  $K^2$  gemein.

Zur Veranschaulichung empfiehlt es sich manchmal,  $P_1$  und  $P_2$  als Kreispunkte der euklidischen Ebene zu deuten. Dann ist  $\Delta_u(k)$  der Kreis durch  $P_3$ , dessen Mitte der Spiegel­punkt von  $K$  bzw.  $P_3$  ist,  $\Delta_e(k)$  die Polare von  $K$ .  $\Theta_e(k)$  ist die  $\Delta_u(k)$  in  $K^1$  und  $K^2$  berührende Parabel mit dem Brennpunkt  $P_3$ ,  $\Theta_u(k)$  die Kardioide mit der Spitze  $P_3$  und der Doppeltangente  $\Delta_e(k)$  (Berührungspunkte  $K^1, K^2$ ) (= Fußpunktkurve des Kreises durch  $P_3$ , dessen Mitte der Spiegel­punkt von  $P_3$  bezüglich  $K$  ist). Danach läßt sich z. B. die Erzeugung von  $\Sigma$  im Umlinienbündel durch  $K$  für ein Kreisbündel mit den Grundpunkten  $P_3$  und  $K$  deuten; übt man noch die Inversion am Kreis um  $K$  durch  $P_3$  aus, so wird  $\Sigma$  zur Spiegelung am Mittelpunkt der Strecke  $\overline{KP_3}$ .

Eine günstigere metrische Spezialisierung erhält man, wenn man  $\Pi$  als gleichseitiges Dreieck der euklidischen Ebene nimmt,  $K$  als dessen Mittelpunkt. Dann sind die Punkte  $K_i^0$  die Höhenfußpunkte,  $K_i^{00}$  die Fernpunkte der Dreieckseiten,  $K_i$  die Ecken des  $\Pi$  „umschriebenen“ gleichseitigen Dreiecks,  $K^1$  und  $K^2$  die Kreispunkte der Ebene.  $\Delta_e$  ist die Ferngerade der Ebene,  $\Delta_u$  der Umkreis,  $\Theta_e$  der Inkreis von  $\Pi$ , während  $\Theta_u$  eine Steinersche Hypozykloide mit den Spitzen  $P_i$  wird, deren Spitzentangenten sich in  $K$  schneiden. Wir bezeichnen diese im folgenden mehrmals verwendete Veranschaulichung mit  $\mathfrak{P}^0$ .

### 3. Die Kegelschnittverwandtschaft $\Gamma$ .

In  $\mathfrak{D}$  liegen die Berührungspunkte der gemeinsamen Tangenten entsprechender Kegelschnitte  $\alpha$  und  $\alpha'$  auf  $k$ . Um  $\alpha'$  bei gegebenem  $\alpha$  zu bestimmen, legt man also in den Schnittpunkten  $A_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) von  $\alpha$  und  $k$  die Tangenten  $t_i$  an  $\alpha$  (Abb. 5); diese werden in ihren zweiten Schnittpunkten  $A'_i$  mit  $k$  von  $\alpha'$  berührt. Dazu gehören in  $\mathfrak{B}$  die Umlinie  $A$  durch die Punkte  $\alpha$  und  $K$  und die Umlinie  $A'$  durch  $\alpha'$  und  $K$ . Beide müssen die Gerade  $[\alpha, \alpha']$

---

sich untereinander vertauschen, jeder  $k$  harmonisch umschriebene Kegelschnitt in einen  $k$  eingeschriebenen Kegelschnitt übergeht und entsprechende Kegelschnitte immer einer Schar angehören, der auch  $k$  angehört. (F. Hohenberg, Apolarität usw., I. c., S. 119—120.)

berühren, weil in  $\mathfrak{D}$  der Punkt  $A_i$  und die Tangente  $t_i$  in ihm eindeutig  $\alpha$  bestimmen, ebenso  $A'_i$  und  $t'_i$  eindeutig  $\alpha'$ . In  $\mathfrak{P}$  findet man also  $\alpha'$  aus  $\alpha$ , indem man in  $\alpha$  die Tangente  $t$  an die durch  $\alpha$  und  $K$  gehende Umlinie legt;  $\alpha'$  ist der Berührungspunkt der zweiten Umlinie durch  $K$ , die  $t$  berührt. Auf jeder Geraden  $t$  in  $\mathfrak{P}$  liegt also ein Punktepaar von  $\Gamma$ , nämlich die Doppelpunkte der vom Umlinienbüschel durch  $K$  auf  $t$  ausgeschnittenen Involution.<sup>1</sup>

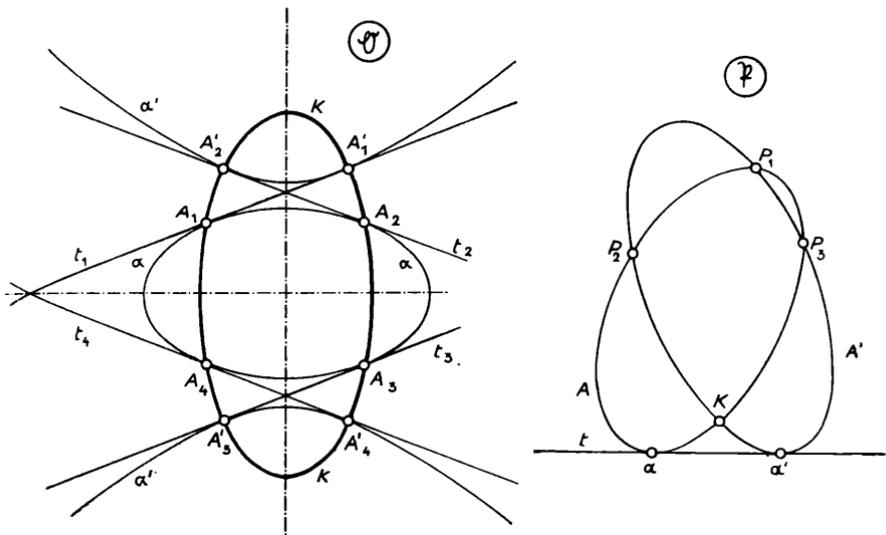


Fig.

$\alpha$  und  $\alpha'$  fallen dann und nur dann zusammen, wenn  $t$  durch einen Grundpunkt dieses Umlinienbüschels geht,  $P_1, P_2, P_3, K$  sind also die Festpunkte von  $\Gamma$ . Die einer allgemeinen Geraden  $t$  in  $\mathfrak{P}$  entsprechende Kurve schneidet  $t$  in  $\alpha$  und  $\alpha'$ , sie ist also ein Kegelschnitt,  $\Gamma$  ist eine involutorische quadratische Verwandtschaft in  $\mathfrak{P}$ . Legt man  $t$  z. B. durch  $K_1^0$ , so ist  $K_1^0$

<sup>1</sup> Die Umlinien  $A$  und  $A'$  haben  $t$  und noch drei Tangenten gemein. Auch deren Berührungspunkte sind Punktepaare von  $\Gamma$ . In  $\mathfrak{D}$  erhält man die vier zugehörigen Kegelschnittpaare bei gegebenen Punkten  $A_i$  und  $A'_i$  auf  $k$ , wenn man als gemeinsame Tangente von  $\alpha$  und  $\alpha'$  der Reihe nach die Geraden  $[A_i A'_i]$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) nimmt.

der eine Festpunkt der Involution auf  $t$  (ausgeschnitten von der zerfallenen Umlinie  $p_1 + [P_1K]$ ), der andere ist der Schnitt mit  $[K_2^0 K_3^0]$ .  $K_1^0$  entspricht also jeder Punkt von  $[K_2^0 K_3^0]$ , daher ist  $K_1^0 K_2^0 K_3^0$  das Hauptdreieck von  $\Gamma$ .  $K_i^0$  entspricht in  $\mathfrak{D}$  die aus den Schnittpunkten von  $k$  mit  $o_i$  bestehende zerfallene Kurve 2. Klasse  $k_i^0$ . Bei  $\Gamma$  entspricht also z. B.  $k_1^0$  jeder Kegelschnitt der durch  $k_2^0$  und  $k_3^0$  bestimmten Schar; diese enthält auch  $k_1^{00}$  und stellt die Reihe aller  $k_1$  harmonisch eingeschriebenen Kegelschnitte dar. Dem Punktepaar  $k_i^0$  entspricht also in  $\mathfrak{D}$  bei  $\Gamma$  jeder  $k_i$  harmonisch eingeschriebene Kegelschnitt.

Durch  $\Gamma$  erfahren die Strahlen durch einen Punkt  $K_i^0$  eine Involution. Die Feststrahlen gehen durch je zwei Festpunkte, auf ihnen bilden die Paare entsprechender Punkte eine Involution, z. B. entsprechen sich die Punkte  $K_i^0$  und  $K_i^{00}$ . In  $\mathfrak{D}$  werden also z. B. die auf  $o_1$  gelegenen Punktepaare des Bundes projektiv vertauscht, wobei sich  $k_1^0$  und  $k_1^{00}$  entsprechen und die doppelt-singulären Kurven 2. Klasse  $O_2$  und  $O_3$  festbleiben.

Einer allgemeinen Geraden  $t$  in  $\mathfrak{B}$  entspricht ein Kegelschnitt durch  $K_i^0$ , der mit  $t$  ein Punktepaar von  $\Gamma$  gemein hat; sein zweiter Schnittpunkt mit einer Seite des Vierecks  $P_i K$  entspricht dem Schnittpunkt von  $t$  mit dieser Seite. Insbesondere entspricht der durch die Punkte  $K_i^{00}$  gehenden Geraden  $\Delta_e(k)$  der Kegelschnitt  $\Theta_e(k)$ , der  $p_i$  in  $k_i^0$  berührt, bei  $\Gamma$  geht also in  $\mathfrak{D}$  die Schar der  $k$  harmonisch eingeschriebenen Kegelschnitte in die Reihe der  $k$  eingeschriebenen Kegelschnitte über.  $\Delta_e(k)$  und  $\Theta_e(k)$  schneiden sich in den Punkten  $K^1$  und  $K^2$ , die beiden mit  $k$  verbundenen Kegelschnitte  $k^1$  und  $k^2$  vertauschen sich also durch  $\Gamma$ . Einer allgemeinen Schar in  $\mathfrak{D}$  entspricht eine rationale (4,2)-Reihe, die  $k_i^0$  enthält.

Geht  $t$  durch einen Festpunkt, so berührt  $t$  dort den entsprechenden Kegelschnitt, d. h. die Linienelemente der Festpunkte bleiben einzeln fest, daher wird in  $\mathfrak{D}$  jedes Geradenpaar des Bundes in sich übergeführt und jedes Linienelement von  $k$  entspricht sich selbst. Weiters entspricht einer Umlinie eine  $C_4$  mit Doppelpunkten in  $K_i^0$ , die die Umlinie in  $P_i$  berührt, in  $\mathfrak{D}$  entspricht also einem Büschel eine rationale (5,4)-Reihe, die mit dem Büschel die Geradenpaare und zwei einander in  $\Gamma$  entsprechende Kegelschnitte gemein hat. In jedem Büschel befindet sich also ein Paar entsprechender Kegelschnitte. Einem Berührungsbüschel entspricht eine rationale (3,2)-Reihe.

In  $\mathfrak{B}$  sei ein Linienelement gegeben (Punkt  $\alpha$ , Gerade  $g$  durch  $\alpha$ );  $g$  entspricht bei  $\Gamma$  ein Kegelschnitt  $g'$  durch  $K_i^0$ , dem Kegelschnitt durch  $K_i^0$ , der  $g$  in  $\alpha$  berührt, eine Gerade, die  $g'$  in  $\alpha'$  berührt.  $(\alpha', g')$  ist das entsprechende Linienelement. Damit ist auch die zu  $\Gamma$  gehörende Verwandtschaft der Linienelemente in  $\mathfrak{D}$  bekannt.

Wir besprechen nun einen wichtigen Sonderfall der Kegelschnittverwandtschaft  $\Gamma$ . Die harmonische Kurve 2. Ordnung  $k$

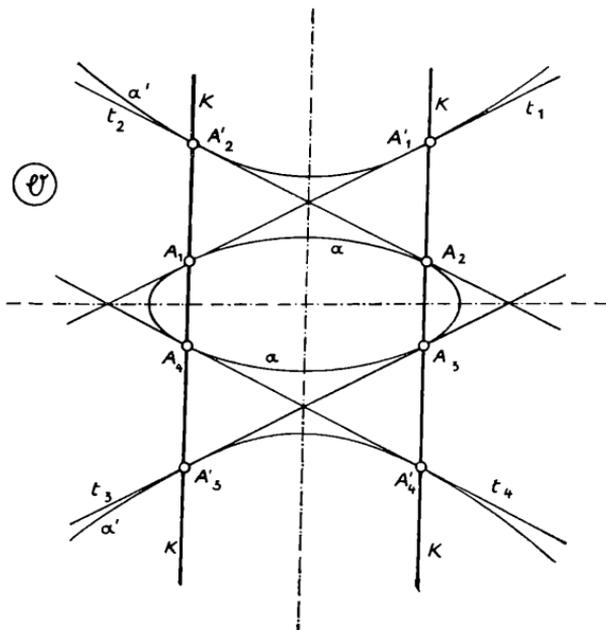


Fig. 6.

zweier Kegelschnitte  $\alpha$  und  $\alpha'$  des Bundes zerfällt (Abb. 6), wenn die Berührungspunkte  $A_1$  und  $A'_1$  einer gemeinsamen Tangente  $t_1$  und die Berührungspunkte  $A_2, A'_2$  einer gemeinsamen Tangente  $t_2$  so liegen, daß die Geraden  $[A_1 A'_2]$  und  $[A'_1 A_2]$  z. B. durch  $O_3$  gehen (und dann  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  harmonisch trennen). Dem entspricht in  $\mathfrak{B}$ , daß  $K$  in einer bestimmten Richtung  $[P_3 K_3^0]$  nach  $P_3$  rückt. Dann rücken auch  $K_1^0$  und  $K_2^0$  nach  $P_3$ , ihre Verbindungsgerade geht dabei immer durch  $K_3^{00}$ .  $\Gamma$  wird zu einer singulären quadratischen Verwandtschaft  $\Gamma_0$  mit den Hauptpunkten  $P_3$  (Hauptrichtung  $[P_3 K_3^{00}]$ ) und  $K_3^0$ . Bei  $\Gamma_0$  entspricht dem Punktepaar  $k_3^0$  in  $\mathfrak{D}$ , das aus den Schnitt-

punkten von  $k$  mit  $o_3$  besteht, jeder Kegelschnitt, dessen Schnittpunkte mit  $o_3$  harmonisch liegen zu denen von  $k$ , während dem Geradenpaar durch  $O_3$ , dessen Schnittpunkte mit  $o_3$  harmonisch liegen zu denen von  $k$ , jeder Kegelschnitt entspricht, der  $k$  in den Schnittpunkten mit  $o_3$  berührt.

Einer Geraden durch  $P_3$  entspricht die zu ihr bezüglich  $p_1$  und  $p_2$  harmonische Gerade. Einer Geraden durch  $K_3^0$  entspricht die zu ihr bezüglich  $[P_3 K_3^0]$  und  $p_3$  harmonische Gerade. Einer allgemeinen Geraden entspricht ein Kegelschnitt durch  $K_3^0$ , der  $[P_3 K_3^0]$  in  $P_3$  berührt. Einer Schar in  $\mathfrak{D}$  entspricht also eine spezielle rationale (3,2)-Reihe.

Von der einer Umlinie entsprechenden  $C_4$  spaltet sich, weil die Umlinie durch  $P_3$  geht,  $[P_3 K_3^0]$  ab. Die Tangente der restlichen  $C_3$  in  $P_3$  liegt harmonisch zur dortigen Tangente der Umlinie bezüglich  $p_1$  und  $p_2$ ; ferner entspricht dem zweiten Schnittpunkt der Umlinie mit  $[P_3 K_3^0]$ , daß die  $C_3$  in  $P_3$  auch  $[P_3 K_3^0]$  berührt, sie hat also in  $P_3$  einen Doppelpunkt mit den angegebenen Tangenten. Dem zweiten Schnittpunkt der Umlinie mit  $[P_3 K_3^0]$  entspricht der Punkt  $K_3^0$  der  $C_3$ . Die  $C_3$  geht ferner durch die Festpunkte  $P_1$  und  $P_2$  und berührt dort die Umlinie (weil jedes Linienelement von  $P_1$  und  $P_2$  festbleibt). Einem Büschel in  $\mathfrak{D}$  entspricht also eine spezielle rationale (2,3)-Reihe.

Berührt die Umlinie die Gerade  $[P_3 K_3^0]$  in  $P_3$ , so spaltet sich  $[P_3 K_3^0]$  von der  $C_3$  ab und es bleibt eine Umlinie, die die gegebene Umlinie in  $P_1$  und  $P_2$  berührt, also mit ihr identisch ist. In  $\mathfrak{D}$  geht also jedes Büschel in sich über, dessen durch  $O_3$  gehendes Geradenpaar das Geradenpaar  $k$  harmonisch trennt.  $\Gamma_0$  in  $\mathfrak{B}$  läßt sich daher auch so erzeugen; jedes Strahlenpaar der Involution in  $P_3$  mit den Doppelstrahlen  $p_1$  und  $p_2$  (oder nach obigem auch jedes Strahlenpaar der Involution in  $K_3^0$  mit den Doppelstrahlen  $p_3$  und  $[P_3 K_3^0]$ ) schneidet auf jeder Umlinie, die  $[P_3 K_3^0]$  in  $P_3$  berührt, ein Punktepaar von  $\Gamma_0$  aus.

#### 4. Die Kegelschnittverwandtschaft $\Delta$ .

Übt man auf ein Punktepaar  $\alpha, \alpha'$  von  $\Gamma$  in  $\mathfrak{B}$  die Transformation  $\Sigma$  aus, so erhält man ein Punktepaar von  $\Delta$ , wie aus der geometrischen Bedeutung von  $\Sigma, \Gamma$  und  $\Delta$  in  $\mathfrak{D}$  hervorgeht; es ist also  $\Delta = \Sigma\Gamma\Sigma$ .<sup>1</sup> Man gewinnt aber einen besseren Einblick in die

<sup>1</sup> Auch durch eine projektive Inversion  $\mathfrak{J}$  in  $\mathfrak{B}$  (Zentrum z. B.  $P_3$ , Inversionskegelschnitt berühre  $p_1$  in  $P_2$  und  $p_2$  in  $P_1$  und gehe durch  $K$ ) geht jedes Punktepaar von  $\Gamma$  in  $\mathfrak{B}$  in ein Punktepaar von  $\Delta$  über, also ist auch  $\Delta = \mathfrak{J}\Gamma\mathfrak{J}$ .  $\mathfrak{J}$  entspricht in  $\mathfrak{D}$  jene Korrelation des Bundes, die  $\alpha_1$  mit  $O_2$ ,  $\alpha_2$  mit  $O_1$  und  $\alpha_3$  mit  $O_3$  vertauscht und  $k$  in sich überführt.

Verwandtschaft  $\Delta$  und ihrem Zusammenhang mit  $\Gamma$ , wenn man  $\Delta$  in der Abbildung auf  $\mathfrak{P}$  gesondert untersucht.

In  $\mathfrak{D}$  berühren die in den Schnittpunkten  $A_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) entsprechender Kegelschnitte  $\alpha$  und  $\alpha'$  gelegten Tangenten  $t_i$  und  $t'_i$  den Kegelschnitt  $k$  (Abb. 7). Um  $\alpha'$  aus  $\alpha$  zu erhalten, legt man die gemeinsamen Tangenten an  $\alpha$  und  $k$ ;  $\alpha'$  geht durch deren Berührungspunkte auf  $\alpha$  und berührt dort die zweiten Tangenten, die aus diesen Punkten an  $k$  gehen. In  $\mathfrak{P}$  entspricht dem Büschel mit den Grundpunkten  $A_i$  eine Umlinie  $A$ , den Tangenten  $t_i$  bzw.  $t'_i$  in  $A_i$  entsprechen die Tangenten  $t$  und  $t'$  von  $A$  in den Bildpunkten  $\alpha$  und  $\alpha'$ ; diese müssen sich in  $K$

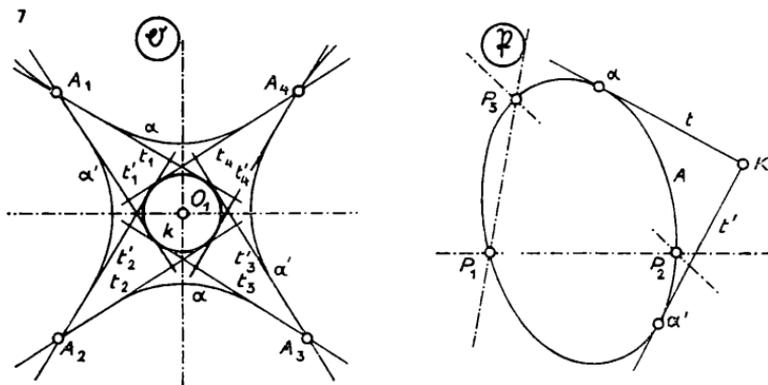


Fig. 7.

schneiden. Also bilden in  $\mathfrak{P}$  auf jeder Umlinie die Berührungspunkte der Tangenten aus  $K$ , d. h. die Schnittpunkte mit der Polaren von  $K$  ein Punktepaar von  $\Delta$ . Ist  $\alpha$  gegeben, so legt man aus  $K$  an die Umlinie die  $[K\alpha]$  in  $\alpha$  berührt, die zweite Tangente; der Berührungspunkt ist  $\alpha'$ .<sup>1</sup>

Liegt  $\alpha$  z. B. auf  $p_1$ , so besteht die Umlinie durch  $\alpha$  und  $\alpha'$  aus  $p_1$  und  $[P_1\alpha]$ , also ist  $\alpha' = \alpha$ ; jeder Punkt auf einer Seite von  $\Pi$  ist Festpunkt von  $\Delta$ , in  $\mathfrak{D}$  wird jede singuläre Kurve 2. Klasse des Bundes in sich übergeführt. Ist  $\alpha = K$ , so existiert ein Umlaufbüschel durch  $\alpha = K = \alpha'$ ,

<sup>1</sup> Gibt man in  $\mathfrak{P}$  zwei Geraden  $t$  und  $t'$  durch  $K$  vor, so gibt es vier Umlinien, die sie berühren. Die Berührungspunkte bilden jedesmal ein Punktepaar von  $\Delta$ . Dem entspricht in  $\mathfrak{D}$ , daß z. B.  $\alpha$  von  $t_1$  der Reihe nach in den Schnittpunkten mit  $t'_1, t'_2, t'_3, t'_4$  berührt wird. Den Berührungspunkten entsprechen die vier Umlinien.

$K$  ist Festpunkt von  $\Delta$ , in  $\mathfrak{D}$  wird jedes Linienelement von  $k$  in sich übergeführt.

Liegt  $\alpha$  auf  $[P_1K]$ , aber nicht in  $P_1$ , so zerfällt die Umlinie durch  $\alpha$  und  $\alpha'$  in  $[P_1K]$  und  $p_1$ ,  $\alpha'$  liegt auf  $[P_1K]$ . Auf den Festgeraden  $[P_iK]$  bilden die Paare entsprechender Punkte eine Involution mit den Festpunkten  $K$  und  $K_i^0$ . Rückt nun  $\alpha$  auf  $[P_1K]$  nach  $P_1$ , so gibt es ein Büschel von Umlinien, die  $[K\alpha]$  in  $\alpha$  berühren. Die Berührungspunkte der zweiten Tangenten aus  $K$  an diese Umlinien erfüllen eine Umlinie, deren Tangenten in  $P_2$  und  $P_3$  durch  $K$  gehen, während die Tangente in  $P_1$  durch  $K_1^{00}$  geht. Diese Umlinie ist also die Bildkurve  $\Delta_u(k)$  der Reihe aller  $k_1$  harmonisch umschriebenen Kegelschnitte. Es besteht also eine eindeutige Zuordnung zwischen den Geradenpaaren mit dem Träger  $O_i$  in  $\mathfrak{D}$  und den Kegelschnitten des Büschels  $\Delta_u(k_i)$ ;  $P_i$  sind die Hauptpunkte,  $\Delta_u(k_i)$  die Hauptkurven von  $\Delta$  in  $\mathfrak{B}$ . Liegt also  $\alpha$  auf  $\Delta_u(k_i)$ , aber nicht in  $P_i$ , so ist  $\alpha'$  das Linienelement  $P_i$ ,  $[P_iK]$ .

Einer allgemeinen Geraden  $g$  in  $\mathfrak{B}$  entspricht eine Kurve, die  $g$  in dem auf  $g$  gelegenen Punktepaar von  $\Delta$ ,<sup>1</sup> ferner in den auf  $g$  gelegenen Festpunkten von  $\Delta$ , d. h. in den Schnittpunkten von  $g$  mit  $p_i$  schneidet. Einer allgemeinen Geraden in  $\mathfrak{B}$  entspricht also eine Kurve 5. Ordnung  $C_5$ ,  $\Delta$  ist eine Involution 5. Ordnung in  $\mathfrak{B}$ .  $g$  schneidet  $\Delta_u(k_i)$  in je zwei Punkten, daher hat die  $C_5$  in  $P_i$  je einen Berührungsknoten mit nach  $K$  gerichteter Tangente. (Die  $C_5$  ist rational, wie es sein muß.) In  $\mathfrak{D}$  entspricht also einer Schar eine rationale (4,5)-Reihe, die mit der Schar die zerfallenen Kurven und zwei einander in  $\Delta$  entsprechende Kegelschnitte gemein hat; sie enthält auch (doppelzählend) die Tangentenpaare aus  $O_i$  an  $k$ .

Geht  $g$  durch  $P_{12}$ , so spaltet sich  $\Delta_u(k_1)$  von der  $C_5$  ab und die Berührungsknoten lösen sich auf; die restliche  $C_3$  hat in  $P_2$  und  $P_3$  Tangenten durch  $K$  und in  $P_1$  einen Doppelpunkt, dessen eine Tangente durch  $K$  geht (entsprechend dem zweiten Schnittpunkt von  $g$  mit  $\Delta_u(k_1)$ ; die andere liegt harmonisch zu  $g$  bezüglich  $p_2$  und  $p_3$ ). In  $\mathfrak{D}$  entspricht also einem Berührungsbüschel eine rationale (2,3)-Reihe.

Einem Kegelschnitt  $l$  in  $\mathfrak{B}$  entspricht eine  $C_{10}$ ; ist  $l$  eine Umlinie, so lösen sich die zweifachen Berührungsknoten in  $P_i$  auf, die Hauptkurven spalten sich von der  $C_{10}$  ab und es bleibt eine  $C_4$ . In deren Doppelpunkten  $P_i$  gehen die einen Tangenten

<sup>1</sup> Ausgeschnitten von der Umlinie, für die  $K$  und  $g$  Pol und Polare sind.

durch  $K$  (entsprechend den vierten Schnittpunkten der Umlinie mit den Hauptkurven), die anderen liegen harmonisch zu den Tangenten der Umlinie in  $P_i$  bezüglich der Geraden  $p_i$  durch  $P_i$ , sie schneiden sich also in jenem Punkt  $L$ , dessen konische Polare bezüglich der zerfallenen Kurve 3. Ordnung  $\Pi$  die gegebene Umlinie ist. Die Doppelpunkte werden zu Spitzen mit nach  $K$  gerichteten Tangenten, wenn die gegebene Umlinie die konische Polare  $\Delta_u(k)$  von  $K$  bezüglich  $\Pi$  ist. Einer allgemeinen Umlinie entspricht also eine spezielle rationale  $C_4$ ,<sup>1</sup> in  $\mathfrak{D}$  entspricht einem allgemeinen Büschel eine spezielle rationale (2,4)-Reihe, den  $k$  harmonisch umschriebenen Kegelschnitten entsprechen die  $k$  umschriebenen Kegelschnitte.  $\Delta_u(k)$  und  $\Theta_u(k)$  haben die Bildpunkte  $K^1$  und  $K^2$  der mit  $k$  verbundenen Kegelschnitte gemein,  $K^1$  und  $K^2$  sind also auch ein Punktepaar von  $\Delta$  in  $\mathfrak{B}$ .

Einem Linienelement (Punkt  $\alpha$ , Gerade  $g$  durch  $\alpha$ ) in  $\mathfrak{B}$  entspricht ein Linienelement (Punkt  $\alpha'$ , Gerade  $g_1$  durch  $\alpha'$ ):  $g$  entspricht eine  $C_5$ , der Umlinie, die  $g$  in  $\alpha$  berührt, entspricht eine  $C_4$ . 18 der 20 Schnittpunkte der  $C_5$  und  $C_4$  fallen in die Punkte  $P_i$ , die restlichen zwei fallen in  $(\alpha', g_1)$  zusammen.

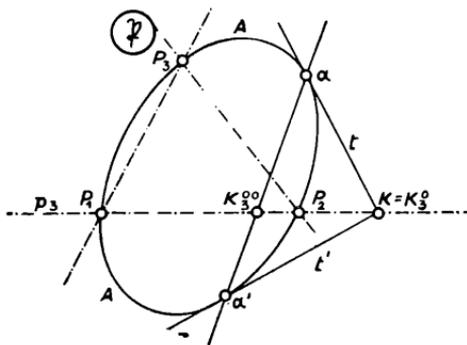


Fig. 8.

Wie bei  $\Gamma$  gibt es auch hier bei  $\Delta$  den wichtigen Sonderfall, daß die harmonische Kurve 2. Klasse  $k$  zweier Kegelschnitte  $\alpha$  und  $\alpha'$  des Bundes zerfällt (Abb. 8). In diesem Fall liegen die in den Schnittpunkten  $A_i$  von  $\alpha$  und  $\alpha'$  gelegten Tangenten  $t_i$  und  $t'_i$  so, daß sich z. B.  $t_1$  und  $t'_2$  auf  $o_3$  schneiden, ebenso  $t'_1$  und  $t_2$  usw.  $k$  ist dann eine zerfallene Kurve 2. Klasse,  $K$  liegt auf  $p_3$ . Auch hier werden auf den Umlinien von den Polaren des Punktes  $K = K^0_3$  die Punktepaare dieser Verwandtschaft  $\Delta_0$  ausgeschnitten. Alle diese Polaren gehen durch  $K^00_3$ , so daß jedes Punktepaar von  $\Delta_0$  auf einer Geraden durch  $K^00_3$  liegt,  $\Delta_0$  bewirkt auf jeder Geraden durch  $K^00_3$  eine Involution,

<sup>1</sup> Bei einer allgemeinen rationalen  $C_4$  umhüllen die Doppelpunkt-tangenten einen Kegelschnitt (J. Plücker, Theorie der algebraischen Kurven, 1839, S. 196), hier umhüllen sie das Punktepaar  $K, L$ .

die Festpunkte liegen auf  $p_1$  und  $p_2$ , denn wie oben ergibt sich, daß jeder Punkt von  $p_1$  und  $p_2$  (außer  $P_3$ ) Festpunkt ist. Auch  $P_1$  und  $P_2$  sind Festpunkte,  $K$  und  $K_3^{00}$  sind entsprechende Punkte. Je zwei zu  $p_1$  und  $p_2$  harmonische Strahlen durch  $p_3$  schneiden also auf jeder Geraden durch  $K_3^{00}$  ein Punktepaar von  $\Delta_0$  aus. Es liegt die projektive Inversion an dem Geradenpaar  $p_1, p_2$  und mit dem Pol  $K_3^{00}$  vor.

Eine allgemeine Gerade  $g$  in  $\mathfrak{P}$  ist das Erzeugnis projektiver Strahlbüschel  $[K_3^{00}\alpha]$  und  $[P_3\alpha]$ . Für jeden Punkt  $\alpha$  von  $g$  ist dann  $[K_3^{00}\alpha'] = [K_3^{00}\alpha]$  und  $[P_3\alpha']$  liegt harmonisch zu  $[P_3\alpha]$  bezüglich  $p_1$  und  $p_2$ . Die  $g$  entsprechende Kurve  $g'$  ist das Erzeugnis der projektiven Strahlbüschel  $[K_3^{00}\alpha']$  und  $[P_3\alpha']$ , einer allgemeinen Geraden entspricht also ein Kegelschnitt durch  $K_3^{00}$ , der  $[P_3K]$  in  $P_3$  berührt und durch die Schnittpunkte der Geraden mit  $p_1$  und  $p_2$  geht.  $\Delta_0$  ist in  $\mathfrak{P}$  eine singuläre quadratische Verwandtschaft,  $P_3$  entspricht jedem Punkt auf  $[P_3K_3^{00}]$ ,  $K_3^{00}$  jedem Punkt auf  $[P_3K]$ . In  $\mathfrak{D}$  geht jede Schar in sich über, die das Punktepaar  $k_3^{00}$  auf  $o_3$  enthält, das  $k$  harmonisch trennt. Einer allgemeinen Schar entspricht eine rationale (3,2)-Reihe, die  $k_3^{00}$  und das Tangentenpaar aus  $O_3$  an  $k$  enthält.

## 5. Die Isologen von $\Sigma$ , $\Gamma$ und $\Delta$ in $\mathfrak{P}$ .

Beim Studium einer ebenen Punktverwandtschaft ist das Netz der Isologen von Interesse. Die Isologe eines Punktes  $\lambda$  in  $\mathfrak{P}$  ist die Gesamtheit der Punkte, die mit ihren entsprechenden Punkten auf einer Geraden durch  $\lambda$  liegen.<sup>1</sup> Ihr entspricht in  $\mathfrak{D}$  eine Kegelschnittreihe des Bundes, die zu jedem ihrer Kegelschnitte den entsprechenden enthält, wobei die gemeinsamen Tangenten entsprechender Kegelschnitte einen Kegelschnitt mit dem Bildpunkt  $\lambda$  einhüllen. Die Betrachtung der Isologen führt zu einer allgemeineren Kegelerwandtschaft, die  $\Sigma$ ,  $\Gamma$  und  $\Delta$  als Sonderfälle enthält.

### A. Die Isologen von $\Sigma$ .

Bei  $\Sigma$  entspricht jeder Geraden durch  $\lambda$  in  $\mathfrak{P}$  eine Umlinie durch den entsprechenden Punkt  $\lambda'$ , beide schneiden sich in einem Paar entsprechender Punkte. Dem Strahlbüschel ( $\lambda$ ) ist also das Umlinienbüschel ( $\lambda'$ ) projektiv zugeordnet. Das Erzeugnis ist die Isologe von  $\lambda$  (Abb. 9), eine elliptische  $C_3$  durch  $P_1, P_2, P_3, \lambda, \lambda'$ ; legt man die Gerade des Büschels durch einen Festpunkt

<sup>1</sup> Enzykl. d. math. Wiss., III C 11, S. 1985.

von  $\Sigma$ , so berührt sie dort die entsprechende Umlinie, d. h. die  $C_3$  geht durch die Festpunkte und die dortigen Tangenten schneiden sich in  $\lambda$ . Der Geraden  $[\lambda\lambda']$  entspricht die Umlinie durch  $\lambda$  und  $\lambda'$ , daher berührt diese Umlinie die  $C_3$  in  $\lambda'$  und die Tangente der  $C_3$  in  $\lambda$  geht durch  $\lambda'$ . Legt man die Gerade des Büschels ( $\lambda$ ) durch  $P_i$ , so folgt, daß die Tangenten der  $C_3$  in  $P_i$  durch  $\lambda'$  gehen und daß die Schnittpunkte von  $[P_i\lambda]$  mit der Gegenseite  $p_i$  des Hauptdreiecks der  $C_3$  angehören.

In  $\mathfrak{D}$  entspricht der Isologen von  $\lambda$  eine (3,3)-Reihe des Bundes mit einer einhüllenden Kurve  $H$ . Die Reihe enthält die Kegelschnitte  $k$  und  $k_i$ ;  $H$  berührt  $k$  und  $k_i$  in den Berührungspunkten der gemeinsamen Tangenten von  $\lambda$  und  $k, k_i$ . Die Reihe enthält ferner  $\lambda$ ,  $H$  berührt  $\lambda$  in den Berührungspunkten der gemeinsamen Tangenten von  $\lambda$  und  $\lambda'$ . Die Geradenpaare der Reihe sind die Tangentenpaare, die aus  $O_i$  an  $\lambda'$  gehen und diese sind die Tangenten von  $H$  in den Doppelpunkten  $O_i$  von  $H$ . Die Punktepaare der Reihe bestehen aus den Schnittpunkten des Kegelschnitts  $\lambda$  mit  $o_i$ . (Wir übergehen es im folgenden, die in  $\mathfrak{B}$  erhaltenen Kurven ausdrücklich in  $\mathfrak{D}$  zu deuten.)

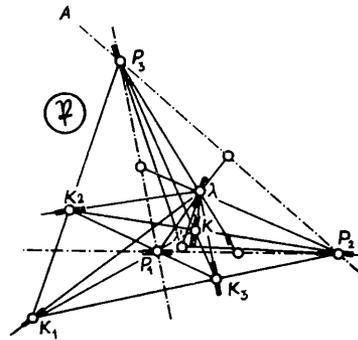


Fig. 9.

Liegt  $\lambda$  in  $\mathfrak{B}$  auf der Geraden durch zwei Festpunkte, z. B. auf  $[P_1K]$ , dann gehört diese zur Isologen von  $\lambda$ , es bleibt ein Kegelschnitt  $C_2$ . Die Tangenten aus  $\lambda'$  an  $C_2$  berühren in  $P_2$  und  $P_3$ , die aus  $\lambda$  in  $K_2$  und  $K_3$ . Die Isologe von  $K$  zerfällt in die drei Geraden  $[P_iK]$ , die von  $P_1$  in die Geraden  $p_1, [P_1K K_1], [P_1K_2 K_3]$ .

### B. Die Isologen von $\Gamma$ .

Bei  $\Gamma$  entspricht dem Strahlenbüschel ( $\lambda$ ) ein dazu projektives Kegelschnittbüschel mit den Grundpunkten  $K_i^0$  und  $\lambda'$ . Da sich entsprechende Kurven in einem Paar entsprechender Punkte schneiden, ist das Erzeugnis die Isologe von  $\lambda$ , eine elliptische  $C_3$  (Abb. 10), von der sich wie oben zeigen läßt, daß die Tangenten in den Kurvenpunkten  $P_i$  und  $K$  durch  $\lambda$  gehen, die Tangenten in den Kurvenpunkten  $K_i^0$  und  $\lambda$  durch  $\lambda'$ .

Zur  $C_3$  gehören die den Hauptpunkten  $K_i^0$  entsprechenden Schnittpunkte von  $[K_i^0\lambda]$  mit der Gegenseite des Hauptdreiecks. Liegt  $\lambda$  in  $\mathfrak{P}$  z. B. auf  $p_1$ , so gehört  $p_1$  zur Isologen von  $\lambda$ , der Rest ist ein Kegelschnitt durch  $P_1, K, K_2^0, K_3^0$ ; seine Tangenten in  $P_1$  und  $K$  gehen durch  $\lambda$ , die Tangenten in  $K_2^0$  und  $K_3^0$  gehen durch  $\lambda'$ . Liegt  $\lambda$  in  $P_3$ , so spalten sich  $p_1$  und  $p_2$  ab und es bleibt die Gerade  $[P_3K]$ . (Analog, wenn  $\lambda$  auf  $[P_1K]$ , z. B. in  $K_1^0$  liegt.)

Läßt man  $K$  in bestimmter Richtung nach  $P_3$  rücken, so erhält man aus den Isologen von  $\Gamma$  die von  $\Gamma_0$  (Abb. 10 a). Die

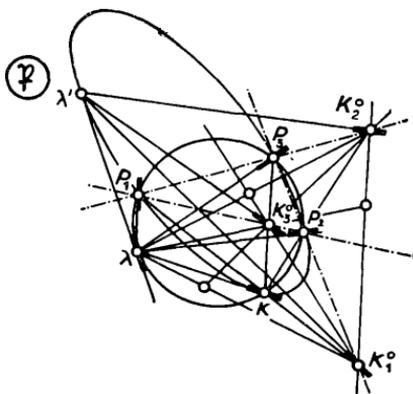


Fig. 10.

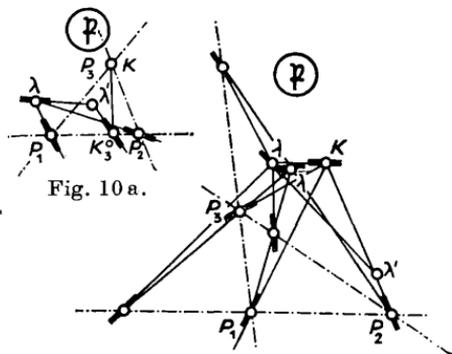


Fig. 10 a.



Fig. 11.

Isologen von  $\Gamma_0$  sind rationale  $C_3$ , der Doppelpunkt liegt in  $P_3 = K$ . Die Tangenten in den Kurvenpunkten  $P_1$  und  $P_2$  schneiden sich in  $\lambda$ , die Tangenten in den Kurvenpunkten  $\lambda$  und  $K_3^0$  schneiden sich in  $\lambda'$ .  $\lambda$  und  $\lambda'$  sind Kurvenpunkte, daher<sup>1</sup> liegen die Doppelpunkt tangente harmonisch zu  $p_1$  und  $p_2$  sowie zu  $[P_3K_3^0]$  und  $[P_3\lambda]$ .

### C. Die Isologen von $\Delta$ .

Bei  $\Delta$  entspricht einem Strahlbüschel mit dem Träger  $\lambda$  ein Büschel von  $C_5$  durch  $\lambda'$ , die in  $P_i$  gemeinsame Berührungsknoten haben. Einfacher ergeben sich die Isologen, wenn man bedenkt, daß jede Umlinie die Polare von  $K$  bezüglich dieser Umlinie

<sup>1</sup> Vgl. etwa E. Pascal, Rep. d. höh. Math., Bd. II/1, S. 426.

in einem Punktepaar von  $\Delta$  schneidet.<sup>1</sup> Bei einem Umlinienbündel (4. Grundpunkt sei  $\bar{\lambda}$ ) bilden die Polaren von  $K$  ein dazu projektives Strahlbündel ( $\lambda$ ). Das Erzeugnis ist die Isologe von  $\lambda$ , eine elliptische  $C_3$ , von der sich wie oben ergibt, daß die Tangenten in den Kurvenpunkten  $P_1, P_2, P_3, \bar{\lambda}$  durch  $K$  gehen, die Tangenten in  $K$  und in den Diagonalepunkten des Vierecks  $P_1, P_2, P_3, \bar{\lambda}$ , die auch der  $C_3$  angehören, durch  $\lambda$ . Die Tangente in  $\lambda$  schneidet die  $C_3$  noch in  $\lambda'$ . Zur  $C_3$  gehören noch die Schnittpunkte von  $[P_i\lambda]$  mit der Hauptkurve  $\Delta_u(k_i)$ . (Zu jeder Isologe wäre die Koinzidenzkurve hinzuzurechnen, die drei Geraden  $p_i$ .) (Siehe Abb. 11.)

Liegt  $\lambda$  z. B. auf  $[P_1K]$ , so liegt auch  $\bar{\lambda}$  auf dieser Geraden, und zwar harmonisch zu  $P_1$  bezüglich  $K$  und  $\lambda$ . Die Isologe von  $\lambda$  besteht aus  $[P_1K]$  und einem Kegelschnitt  $C_2$  durch  $P_2$  und  $P_3$ ; die Tangenten in  $P_2$  und  $P_3$  gehen durch  $K$ ,  $C_2$  berührt also  $\Delta_u(k_i)$  doppelt. Die Tangenten im Schnittpunkt von  $p_2$  mit  $[P_2\bar{\lambda}]$  und im Schnittpunkt von  $p_3$  mit  $[P_3\bar{\lambda}]$  gehen durch  $\lambda$ . Insbesondere folgt, daß die Isologe von  $K_i$  aus  $[K_i P_i]$  und  $p_i$  (doppelt gezählt) besteht.

Die Isologen von  $\Delta_0$  sind natürlich die Geraden durch  $K_0^0$ .

#### D. Gemeinsame Eigenschaften der Isologen.

Bei  $\Sigma$ , ebenso bei  $\Gamma$  und  $\Delta$  bestimmen die Paare entsprechender Punkte auf der Isologen eines Punktes  $\lambda$  eine zentrale Punktinvolution (entsprechende Punkte liegen auf Geraden durch  $\lambda$ ). Die Festpunkte dieser Involution sind die Berührungspunkte der Tangenten aus  $\lambda$ , sie sind die auf der  $C_3$  gelegenen Festpunkte der Verwandtschaft. Ferner sind  $\lambda$  und  $\lambda'$  entsprechende Punkte, die Tangente in  $\lambda$  schneidet die  $C_3$  noch in  $\lambda'$ . Beschreibt  $\lambda$  eine Gerade  $l$  in  $\mathfrak{P}$ , so bilden die Isologen ein Bündel; das auf  $l$  liegende Punktepaar der Verwandtschaft bildet den 8. und 9. Grundpunkt des Bündels. Durch dieses Bündel wird die Ebene  $\mathfrak{P}$  (bis auf die Grundpunkte) schlicht überdeckt. Die Verwandtschaft läßt sich in dieser Weise aus  $\infty^1$  zentralen Punktinvolutionsen auf elliptischen  $C_3$  zusammensetzen.

<sup>1</sup> Greift man auf die Verwandtschaft  $\Gamma$  zurück und bedenkt, daß in  $\mathfrak{P}$  alle Punktepaare der quadratischen Verwandtschaft  $\Gamma$  konjugiert sind bez. aller Umlinien durch  $K$ , so folgt der Satz: Bestimmt man in jedem Kegelschnittbündel in  $\mathfrak{D}$ , das den Kegelschnitt  $k$  enthält, jenes Kegelschnittpaar  $l_1, l_2$ , dessen harmonische Kurve 2. Klasse ein gegebener Kegelschnitt  $\alpha$  ist, so umhüllen die gemeinsamen Tangenten zusammengehöriger Kegelschnitte  $l_1, l_2$  einen Kegelschnitt  $\alpha'$ , und es ist  $k$  die harmonische Kurve 2. Ordnung von  $\alpha$  und  $\alpha'$ .

Wir ziehen noch eine Folgerung. Die Isologen von  $\Sigma$  gehen durch die 7 Punkte  $P_i, K_i, K$ , sie bilden also ein lineares Netz. Irgendein Punktepaar  $\alpha, \alpha'$  von  $\Sigma$  liegt auf der Isologen jedes Punktes der Geraden  $[\alpha \alpha']$  und je zwei dieser  $\infty^1$  Isologen haben die 9 Punkte  $P_i, K_i, K, \alpha, \alpha'$  gemein. Daher sind die 7 Punkte und  $\alpha$  und  $\alpha'$  9 assoziierte Punkte jeder sie enthaltenden Isologen und wir haben das Ergebnis, daß die Verwandtschaft  $\Sigma$  in  $\mathfrak{P}$  dadurch gekennzeichnet ist, daß ihre Punktepaare ein Viereck  $KK_1K_2K_3$  und dessen Diagonalepunkte  $P_1P_2P_3$  zu je 9 assoziierten Punkten einer  $C_3$  ergänzen.

Ebenso ergänzen die Punktepaare der Verwandtschaft  $\Gamma$  in  $\mathfrak{P}$  ein Viereck  $P_1P_2P_3K$  und seine Diagonalepunkte  $K_1^0K_2^0K_3^0$  zu je 9 assoziierten Punkten einer  $C_3$ . Die Isologen von  $\Delta$  gehen durch  $K$  und haben in den Punkten  $P_i$  die festen Tangenten  $[P_iK]$ . Also ergänzen die Punktepaare der Verwandtschaft  $\Delta$  in  $\mathfrak{P}$  den Punkt  $K$  und die drei Linienelemente  $(P_i[P_iK])$  zu je einer Punktgruppe, die 9 assoziierten Punkten einer  $C_3$  äquivalent ist.

Bei allgemeiner Lage von 7 Punkten in  $\mathfrak{P}$  ist nun die Involution der Punktepaare, die sie zu 9 assoziierten Punkten einer  $C_3$  ergänzen, von der Ordnung 8, es ist dies die bekannte Geisersche Punktverwandtschaft.<sup>1</sup> Sind z. B.  $P_i$  und vier weitere Punkte in  $\mathfrak{P}$  diese 7 Punkte, so entspricht dieser Involution 8. Ordnung in  $\mathfrak{P}$  folgende Kegelschnittverwandtschaft in  $\mathfrak{Q}$ : man bestimme alle (elliptischen) (3,3)-Reihen, die einen Kegelschnitt  $\alpha$  und vier feste Kegelschnitte des Bundes enthalten; diese Reihen haben einen Kegelschnitt  $\alpha'$  gemein, der  $\alpha$  zugeordnet ist.  $\Sigma, \Gamma$  und  $\Delta$  sind Sonderfälle dieser allgemeineren Kegelschnittverwandtschaft: sind die vier festen Kegelschnitte paarweise vertauschbar, so ergibt sich  $\Sigma$ , bestehen sie aus einem Kegelschnitt  $k$  und den Punktepaaren, in denen  $k$  die Seiten von  $\Omega$  schneidet, so ergibt sich  $\Gamma$ , bestehen sie aus einem Kegelschnitt  $k$  und den Tangentenpaaren aus  $O_i$  an  $k$ , so ergibt sich  $\Delta$ .

Gegenüber den Bildkurven der (3,3)-Reihen der allgemeineren Kegelschnittverwandtschaft sind die Isologen von  $\Sigma, \Gamma$  und  $\Delta$  dadurch ausgezeichnet, daß sich bei ihnen die Tangenten der

<sup>1</sup> Über diese Geisersche Punktverwandtschaft siehe z. B. Geiser, Journal für Mathematik 67, 78 (1867); Milinowski, Journal für Mathematik 77, 263 (1874); R Sturm, Geometrische Verwandtschaften, Bd. 1, S. 353—355, Bd. 4, S. 23, 96—128; Enzyklopädie d. math. Wiss., III., 2., 2 B, S. 1994, wo auch weitere Arbeiten, insbesondere amerikanischer Mathematiker, über die Geisersche Punktverwandtschaft angegeben sind.

Punkte  $P_i$  in einem Punkt der Isologen schneiden. (Dieser Punkt ist  $\lambda'$  bei  $\Sigma$ ,  $\lambda$  bei  $\Gamma$  und  $K$  bei  $\Delta$ ; der Berührungspunkt der vierten Tangente aus diesem Punkt an die  $C_3$  ist  $\lambda$  bei  $\Sigma$ ,  $K$  bei  $\Gamma$  und  $\bar{\lambda}$  bei  $\Delta$ .) Entsprechendes gilt für die zerfallenen Isologen.

Von dieser Auffassung von  $\Sigma$ ,  $\Gamma$  und  $\Delta$  in  $P$  als Sonderfälle der Geiserschen Punktverwandtschaft gelangt man zu einer Verallgemeinerung der bisherigen Untersuchung, die in 11. bis 18. behandelt werden soll.

## 6. Die Dualisologen von $\Sigma$ , $\Gamma$ und $\Delta$ in $\mathfrak{B}$ .

Unter den Dualisologen eines Punktes  $\bar{\lambda}$  in  $\mathfrak{B}$  verstehen wir die Gesamtheit der Punkte in  $\mathfrak{B}$ , die zusammen mit ihren entsprechenden auf einer Umlinie durch  $\bar{\lambda}$  liegen. Ihnen entsprechen in  $\mathfrak{D}$  Kegelschnittreihen des Bundes, die zu jedem ihrer Kegelschnitte den entsprechenden enthalten, wobei entsprechende Kegelschnitte sich in vier Punkten des gegebenen Kegelschnittes  $\bar{\lambda}$  schneiden, mit  $\bar{\lambda}$  zusammen also einem Büschel angehören.

### A. Die Dualisologen von $\Sigma$ .

Aus der Erzeugung der Isologen bei  $\Sigma$  folgt: bei  $\Sigma$  ist die Isologe von  $\lambda$  zugleich die Dualisologe von  $\lambda'$ . Dies, ebenso das folgende, gilt auch für zerfallene Isologen.

### B. Die Dualisologen von $\Delta$ .

Die Isologe eines Punktes  $\lambda$  bei  $\Delta$  ist nach 5. C. das Erzeugnis des Strahlenbüschels  $\lambda$  mit einem dazu projektiven Umlinienbüschel, dessen vierten Grundpunkt wir  $\bar{\lambda}$  nennen. Bei  $\Delta$  ist also die Isologe von  $\lambda$  zugleich die Dualisologe von  $\bar{\lambda}$ . (Von der Dualisologen von  $\bar{\lambda}$  sind daher schon die in 5. genannten Punkte bekannt; sie geht weiters durch  $\bar{\lambda}$ , den Bildpunkt  $\bar{\lambda}'$  von  $\bar{\lambda}$  und berührt in  $\bar{\lambda}$  die durch  $\bar{\lambda}$  und  $\bar{\lambda}'$  gelegte Umlinie.)

Wir betrachten nun die Verwandtschaft  $\bar{\Delta}$  der Punkte  $\lambda$  und  $\bar{\lambda}$  in  $\mathfrak{B}$ . Bei gegebenem  $\lambda$  findet man  $\bar{\lambda}$  im Schnitt zweier jener Umlinien (Abb. 12); eine Umlinie geht durch  $\lambda$  und  $\lambda'$  (die Tangenten in diesen Punkten gehen durch  $K$ ), eine andere durch den Festpunkt  $K$  und berührt dort die Tangente  $[K\lambda]$  an die Isologe von  $\lambda$ . Die beiden Umlinien berühren also  $[K\lambda]$  in  $K$  bzw.  $\lambda$ , sie schneiden sich in  $\bar{\lambda}$ ; also bildeten  $K$  und  $\lambda$ , wenn  $\bar{\lambda}$  und nicht  $K$  fest wäre, eine Punktepaar von  $\Gamma$ . Die Verwandtschaft  $\bar{\Delta}$  ( $\lambda \rightarrow \bar{\lambda}$ ) ordnet also einem Kegelschnitt  $\lambda$  in  $\mathfrak{D}$  die harmonische Kurve 2. Ordnung  $\bar{\lambda}$  von  $\lambda$  und dem festen Kegel-

schnitt  $k$  zu, d. h. in  $\mathfrak{D}$  geht  $\bar{\lambda}$  durch die 8 Berührungspunkte der gemeinsamen Tangenten von  $\lambda$  und  $k$ . Da zwei einander bei  $\Delta$  entsprechende Punkte  $\alpha$  und  $\alpha'$  in  $\mathfrak{B}$  auf der Isologen jedes Punktes der Geraden  $[\alpha\alpha']$  liegen, folgt: entsprechen sich in  $\mathfrak{D}$  die Kegelschnitte  $\alpha$  und  $\alpha'$  des Bundes bei  $\Delta$ , und ist  $\lambda$  irgendein Kegelschnitt in der Schar  $[\alpha\alpha']$ , so liegen die Schnittpunkte von  $\alpha$  und  $\alpha'$  immer auf der harmonischen Kurve 2. Ordnung  $\bar{\lambda}$  von  $\lambda$  und  $k$ .

Es zeigt sich ferner: der  $\Delta$  beigeordneten Kegelschnittverwandtschaft  $\bar{\Delta} (\lambda \rightarrow \bar{\lambda})$  in  $\mathfrak{D}$  entspricht in  $\mathfrak{B}$  eine spezielle (nicht singuläre) quadratische Punktverwandtschaft.

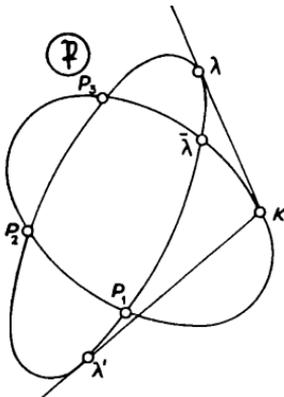


Fig. 12.

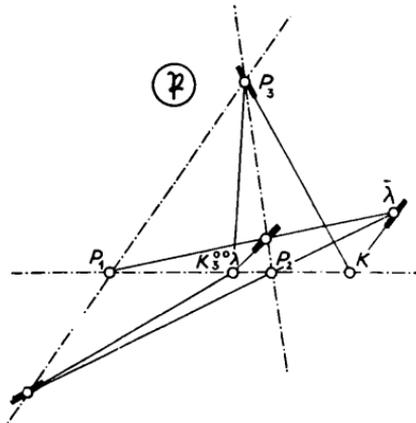


Fig. 13.

schaft. Die Hauptpunkte in der Ebene der  $\lambda$  sind die Bildpunkte  $K_i$  der mit  $k$  vertauschbaren Kegelschnitte (die Isologe von  $K_i$  ist  $p_i$ ), in der Ebene der  $\bar{\lambda}$  sind  $P_i$  die Hauptpunkte, die bei dieser Verwandtschaft auf den entsprechenden Hauptgeraden liegen und daher zugleich Festpunkte sind. Der vierte Festpunkt ist  $K$ .

Durch den Grenzübergang  $K \rightarrow K_3^0$  ergeben sich die Dualisologen bei  $\Delta_0$ , nämlich Kegelschnitte (Abb. 13); die Tangenten in  $P_3$  und  $\bar{\lambda}$  gehen durch  $K = K_3^0$ , die Tangenten in den Schnittpunkten von  $[P_i\bar{\lambda}]$  mit  $p_i$  ( $i = 1, 2$ ) gehen durch  $\lambda = K_3^0$ . Die Schnittpunkte der Dualisologen von  $\bar{\lambda}$  mit  $p_3$  liegen harmonisch zu  $P_1$  und  $P_2$  sowie zu  $K$  und dem Schnittpunkt von  $[P_3\bar{\lambda}]$  mit  $p_3$ . Da  $\lambda$  immer mit  $K_3^0$  zusammenfällt, kann hier von einer Verwandtschaft zwischen  $\lambda$  und  $\bar{\lambda}$  nicht gesprochen werden.

### C. Die Dualisologen von $\Gamma$ .

Ebenso kann man durch jedes Punktepaar auf der Isologen eines Punktes  $\lambda$  bei  $\Gamma$  eine Umlinie legen. Diese Umlinien bilden ein Büschel mit einem vierten Grundpunkt  $\bar{\lambda}$ . Bei  $\Gamma$  ist also die Isologe des Punktes  $\lambda$  zugleich die Dualisologe eines Punktes  $\bar{\lambda}$  der Kurve. Man findet wie oben: legt man durch  $K$  und  $\bar{\lambda}$  eine Umlinie, so schneiden sich die in diesen Punkten gelegten Tangenten in  $\lambda$ ; in  $\mathfrak{D}$  berührt also  $\lambda$  die 8 Geraden, die  $k$  und  $\bar{\lambda}$  in deren Schnittpunkten berühren,  $\lambda$  ist die harmonische Kurve 2. Klasse von  $k$  und  $\bar{\lambda}$ . Da zwei einander bei  $\Gamma$  entsprechende Punkte  $\alpha$  und  $\alpha'$  in  $\mathfrak{B}$  auf der Dualisologen jedes Punktes der durch  $\alpha$  und  $\alpha'$  gehenden Umlinie liegen, folgt: entsprechen sich in  $\mathfrak{D}$  die Kegelschnitte  $\alpha$  und  $\alpha'$  des Bundes bei  $\Gamma$ , und ist  $\bar{\lambda}$  irgendein Kegelschnitt des durch  $\alpha$  und  $\alpha'$  bestimmten Büschels, so berühren die gemeinsamen Tangenten von  $\alpha$  und  $\alpha'$  immer auch die harmonische Kurve 2. Klasse  $\lambda$  von  $k$  und  $\bar{\lambda}$ .

Über die  $\Gamma$  beigeordnete Kegelschnittverwandtschaft  $\bar{\Gamma}$  ( $\lambda \rightarrow \bar{\lambda}$ ) in  $\mathfrak{D}$ , die einem Kegelschnitt  $\bar{\lambda}$  des Bundes die harmonische Kurve 2. Klasse  $\lambda$  von  $\bar{\lambda}$  und einem festen Kegelschnitt  $k$  zuordnet, ergibt sich weiters:  $\bar{\Gamma}$  stellt sich in  $\mathfrak{B}$  als eine spezielle (nicht singuläre) quadratische Punktverwandtschaft dar. Die Hauptpunkte in der Ebene der  $\bar{\lambda}$  sind die Punkte  $P_i$ , in der Ebene der  $\lambda$  sind  $K_i^?$  die Hauptpunkte; sie liegen bei dieser Verwandtschaft auf den entsprechenden Hauptgeraden und sind daher zugleich Festpunkte von  $\bar{\Gamma}$ ; der vierte Festpunkt  $K$ .

Die Dualisologe eines Punktes  $\bar{\lambda}$  bei  $\Gamma_0$  ist nach 3. offenbar die Umlinie durch  $\bar{\lambda}$ , die  $[P_3 K_3^{00}]$  in  $P_3$  berührt.

### 7. Die weiteren Festkurven in $\mathfrak{B}$ .

Die Isologen und Dualisologen sind die einfachsten Festkurven in  $\mathfrak{B}$ . Da bei  $\Sigma$ ,  $\Gamma$  und  $\Delta$  auf jeder Geraden in  $\mathfrak{B}$  ein Paar entsprechender Punkte liegt, erhält man Festkurven in  $\mathfrak{B}$  als Erzeugnis einer Geradenreihe mit der Reihe der entsprechenden Kurven. Verbindet man umgekehrt jeden Punkt einer Festkurve mit dem entsprechenden Punkt, so sieht man, daß sich alle Festkurven in  $\mathfrak{B}$  auf diese Art erzeugen lassen. Dies gilt auch für  $\Gamma_0$  (und das Duale gilt für  $\Delta_0$ ).

Bei  $\Sigma$  ist also jede Gerade der Reihe mit der entsprechenden Umlinie zu schneiden, bei  $\Gamma$  mit dem entsprechenden Kegelschnitt durch  $K_i^?$  (oder auch mit der Umlinie durch das auf der

Geraden liegende Punktepaar). Bei  $\Delta$  wird man statt der  $C_5$ , die der Geraden entspricht, besser die Umlinie durch das Punktepaar auf der Geraden verwenden; man kann auch von einer Umlinienreihe ausgehen und an deren Umlinien die Tangenten aus  $K$  legen, die Berührungspunkte erfüllen eine Festkurve. Also sind die Festkurven von  $\Delta$  in  $\mathfrak{P}$  die „äußeren Panpolaren“<sup>1</sup> von Umlinienreihen bezüglich  $K$ .

Übersichtlicher lassen sich die Festkurven in  $\mathfrak{P}$  mittels der Isologen gewinnen. Je zwei (zerfallene oder nichtzerfallene) Isologen einer Verwandtschaft schneiden sich in 7 unveränderlichen Punkten und in einem Punktepaar der Verwandtschaft. Das Erzeugnis einer Korrespondenz (z. B. einer Projektivität) zwischen zwei Reihen von Isologen einer Verwandtschaft ist also eine Festkurve dieser Verwandtschaft. Insbesondere kann man in einer Reihe von Isologen jeder Kurve eine benachbarte zuordnen, d. h. wenn eine Reihe von Isologen in  $\mathfrak{P}$  eine Einhüllende hat, so ist diese eine Festkurve in  $\mathfrak{P}$ . Umgekehrt läßt sich jede Festkurve in  $\mathfrak{P}$  auf diese Art erzeugen, denn durch jedes Paar  $\alpha, \alpha'$  entsprechender Punkte auf der Festkurve lassen sich die Isologen dieser Punkte legen und einander zuordnen. (Da auf der Festkurve i. a. mehrere Punktepaare einer und derselben Isologen liegen, wird die Korrespondenz i. a. keine Projektivität sein.)

Z. B. erzeugen zwei projektive Büschel isologer  $C_2$  (d. h. Büschel von Kegelschnitten, die als Isologen auftreten) eine Fest- $C_4$ , ein Büschel isologer  $C_2$  und ein dazu projektives Büschel isologer  $C_3$  eine Fest- $C_5$ . Zwei projektive Büschel isologer  $C_3$  erzeugen eine Fest- $C_6$  (diese ergibt sich auch, wenn man bei der ersten Erzeugungsart eine quadratische Geradenreihe, d. h. die Tangenten eines Kegelschnitts in  $\mathfrak{P}$  zugrunde legt). In den gemeinsamen Grundpunkten beider Büschel ergeben sich Doppelpunkte bzw. Spitzen der erzeugten Festkurve.

Außerdem kommt man auf besonderen Wegen zu einzelnen Festkurven. Es seien z. B. drei Punktepaare von  $\Sigma$  gegeben: legt man eine  $C_3$  durch diese sechs Punkte und  $P_i$ , so ist diese  $C_3$  entweder selbst eine Festkurve oder es entspricht ihr eine andere  $C_3$  durch dieselben Punkte. Im zweiten Fall bestimmt die  $C_3$  und ihre entsprechende Kurve ein Büschel, in dem durch  $\Sigma$  eine Involution bewirkt wird. Die Doppелеlemente dieser Involution sind zwei Festkurven. Wenn also die drei Geraden, auf denen die gegebenen Punktepaare liegen, nicht durch einen Punkt gehen,

<sup>1</sup> Name von J. Steiner.

ergibt sich mindestens eine Fest- $C_3$  von  $\Sigma$  in  $\mathfrak{P}$ , die nicht Isologe ist.

Den Festkurven in  $\mathfrak{P}$  entsprechen in  $\mathfrak{D}$  Kegelschnittreihen des Bundes, die die Berührungstransformation  $\Sigma$  bzw.  $\Gamma$  oder  $\Delta$  in  $\mathfrak{D}$  gestatten. Da die Abbildung  $\mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{P}$  eine Berührungstransformation ist, entsprechen den Linienelementen einer Kurve in  $\mathfrak{P}$  umgekehrt die Linienelemente der Einhüllenden einer Kegelschnittreihe des Bundes. Die Einhüllenden von Festreihen des Bundes sind also jene Kurven in  $\mathfrak{D}$ , die die Berührungstransformation  $\Sigma$  bzw.  $\Gamma$  oder  $\Delta$  gestatten.<sup>1</sup>

### §. Rechnerische Behandlung von $\Sigma$ , $\Gamma$ und $\Delta$ im allgemeinen Fall.

Wir entwickeln nun einige Formeln zur rechnerischen Behandlung der drei Kegelschnittverwandtschaften.  $\Omega$  ( $O_i$ ,  $o_i$ ) sei Grunddreieck eines Systems projektiver Punkt- bzw. Linienkoordinaten  $x_i$ ,  $u_i$  in  $\mathfrak{D}$ . Den Einheitspunkt wählen wir so, daß der gegebene Kegelschnitt  $k$  die Gleichung

$$\underline{k \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0} \quad (1)$$

hat.  $e$  sei die Einheitsgerade  $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ . Einem Kegelschnitt  $\alpha$

$$\underline{\frac{x_1^2}{\alpha_1} + \frac{x_2^2}{\alpha_2} + \frac{x_3^2}{\alpha_3} = 0 \quad \text{oder} \quad \alpha_1 u_1^2 + \alpha_2 u_2^2 + \alpha_3 u_3^2 = 0} \quad (2)$$

des Bundes ist dann der Pol  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  der Geraden  $e$  als Bildpunkt  $\alpha$  in  $\mathfrak{P}$  zugeordnet.<sup>2</sup> Bei festen  $x_i^2$  bzw.  $u_i^2$  und veränderlichen  $\alpha_i$  stellt (2) eine Umlinie bzw. eine Gerade in  $\mathfrak{P}$  dar, das Bild des Büschels mit den Grundpunkten  $(\pm x_i)$  bzw. der Schar mit den Grundtangente(n)  $(\pm u_i)$ .

Die Abbildung  $\mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{P}$  ist eine Berührungstransformation. Dem Linienelement  $(x_i, u_i)$  in  $\mathfrak{D}$  entspricht ein Linienelement  $(\alpha_i, \omega_i)$  in  $\mathfrak{P}$ : es seien  $\xi_i$  laufende Punktkoordinaten in  $\mathfrak{D}$ ; da der Kegelschnitt  $\alpha$  in  $\mathfrak{D}$  im Punkt  $x$  die Tangente  $u$  hat, ist  $\Sigma \frac{x_i}{\alpha_i} \xi_i \equiv \Sigma u_i \xi_i$ ; da ferner die Gerade  $u$  in  $\mathfrak{D}$  die Schar  $\Sigma u_i^2 \sigma_i = 0$  mit der Bildgeraden  $\Sigma \omega_i \alpha_i = 0$  bestimmt, folgt

<sup>1</sup> G. Loria gibt die Kurven in  $\mathfrak{D}$  an, die eine Polarität gestatten (Ebene Kurven, 1910, Bd. 1, S. 426ff.).

<sup>2</sup> Ist  $e$  die Ferngerade der euklidischen Ebene, so sind  $\alpha_i$  die baryzentrischen Koordinaten des Mittelpunkts des Kegelschnitts.

$$\alpha_i = \frac{x_i}{u_i}, \quad \omega_i = u_i^2. \quad (3)$$

Umgekehrt entsprechen dem Linienelement  $(\alpha_i, \omega_i)$  in  $\mathfrak{P}$  die vier Linienelemente  $(\pm x_i, \pm u_i)$  in  $\mathfrak{D}$ , für die

$$x_i^2 = \alpha_i^2 \omega_i, \quad u_i^2 = \omega_i \quad (3a)$$

ist. Die Vorzeichen bei  $\pm x_i$  und  $\pm u_i$  sind so zusammenzufassen, daß  $\Sigma u_i x_i = 0$  ist vermöge  $\Sigma \omega_i \alpha_i = 0$ . Man erhält also insbesondere aus der Klassengleichung der Bildkurve einer Kegelschnittreihe des Bundes die Klassengleichung der Einhüllenden der Reihe in  $\mathfrak{D}$ , indem man die  $\omega_i$  durch die  $u_i^2$  ersetzt.

Es ist  $K(1, 1, 1)$ , ferner sind  $K_1(-1, 1, 1)$ ,  $K_2(1, -1, 1)$ ,  $K_3(1, 1, -1)$  die Bildpunkte der mit  $k$  vertauschbaren Kegelschnitte  $k_i$ ;  $K^1(1, \varepsilon, \varepsilon^2)$  und  $K^2(1, \varepsilon^2, \varepsilon)$  ( $\varepsilon = 3$ . Einheitswurzel) sind die Bildpunkte der mit  $k$  verbundenen Kegelschnitte. Die Gleichungen von  $\Delta_e(k)$  usw. sind<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \Delta_e(k) &\equiv \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ \Delta_u(k) &\equiv \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_3 \alpha_1 + \alpha_1 \alpha_2 = 0, \\ \Theta_e(k) &\equiv (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)^2 - 4(\alpha_2 \alpha_3 + \alpha_3 \alpha_1 + \alpha_1 \alpha_2) = 0, \\ \Theta_u(k) &\equiv (\alpha_2 \alpha_3 + \alpha_3 \alpha_1 + \alpha_1 \alpha_2)^2 - 4\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Die Verwandtschaft  $\Sigma$  in  $\mathfrak{P}$  mit dem Hauptdreieck  $\Pi$  und den Festpunkten  $K, K_i$  lautet offenbar

$$\Sigma \dots \alpha'_1 : \alpha'_2 : \alpha'_3 = \alpha_2 \alpha_3 : \alpha_3 \alpha_1 : \alpha_1 \alpha_2. \quad (5)$$

Die Gleichungen von  $\Gamma$  und  $\Delta$  in  $\mathfrak{P}$  lassen sich ebenfalls aus den Ergebnissen von 3. und 4. ableiten oder auch aus den bekannten Formeln<sup>2</sup> für die harmonische Kurve 2. Ordnung bzw. 2. Klasse zweier Kegelschnitte  $\alpha$  und  $\alpha'$  durch Auflösung nach den  $\alpha'_i$  gewinnen. Man findet

$$\Gamma \dots \alpha'_1 : \alpha'_2 : \alpha'_3 = \alpha_1(-\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) : \alpha_2(\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3) : \alpha_3(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3) \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \Delta \dots \alpha'_1 : \alpha'_2 : \alpha'_3 &= \alpha_1(\alpha_2 \alpha_3 - \alpha_3 \alpha_1 + \alpha_1 \alpha_2) : \alpha_2(\alpha_2 \alpha_3 + \alpha_3 \alpha_1 - \alpha_1 \alpha_2) : \\ &\alpha_2(\alpha_2 \alpha_3 + \alpha_3 \alpha_1 - \alpha_1 \alpha_2) : (-\alpha_2 \alpha_3 + \alpha_3 \alpha_1 + \alpha_1 \alpha_2) : \\ &: \alpha_3(-\alpha_2 \alpha_3 + \alpha_3 \alpha_1 + \alpha_1 \alpha_2) : \alpha_2 \alpha_3 - \alpha_3 \alpha_1 + \alpha_1 \alpha_2. \end{aligned} \quad (7)$$

<sup>1</sup> F. Hohenberg, Apolarität usw., I. c., S. 114, 115, 119, 120.

<sup>2</sup> Siehe z. B. E. Pascal, Rep. d. höh. Math., Bd. II/1, S. 247 und 254.

Die Klammerausdrücke bei (6) ergeben nullgesetzt die Hauptgeraden von  $\Gamma$ , die bei (7) die Hauptkegelschnitte von  $\Delta$ .<sup>1</sup>

Die Gleichung der Isologen eines Punktes  $(\lambda_i)$  in  $\mathfrak{P}$  ist die nullgesetzte Determinante der  $\lambda_i, \alpha_i, \alpha'_i$ , die Gleichung der Dualisologen eines Punktes  $(\bar{\lambda}_i)$  in  $\mathfrak{P}$  ist die nullgesetzte Determinante der Reziprokwerte von  $\bar{\lambda}_i, \alpha_i, \alpha'_i$ . (Von beiden Gleichungen läßt sich, wenn die Verwandtschaft in  $\mathfrak{P}$  eine Koinzidenzkurve hat, die Gleichung derselben abspalten.)

Die Isologe von  $\lambda$  bei  $\Sigma$  ist

$$\underline{\lambda_1 \alpha_1 (\alpha_2^2 - \alpha_3^2) + \lambda_2 \alpha_2 (\alpha_3^2 - \alpha_1^2) + \lambda_3 \alpha_3 (\alpha_1^2 - \alpha_2^2) = 0}, \quad (8)$$

sie ist zugleich die Dualisologe von  $\bar{\lambda} = \lambda'$ . Die Isologe von  $\lambda$  bei  $\Gamma$  ist

$$\underline{\lambda_1 \alpha_2 \alpha_3 (\alpha_2 - \alpha_3) + \lambda_2 \alpha_3 \alpha_1 (\alpha_3 - \alpha_1) + \lambda_3 \alpha_1 \alpha_2 (\alpha_1 - \alpha_2) = 0}. \quad (9)$$

Die Dualisologe von  $\bar{\lambda}$  bei  $\bar{\Gamma}$  ist

$$\bar{\lambda}_2 \bar{\lambda}_3 \alpha_1 (\alpha_2 - \alpha_3) \cdot (-\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + \bar{\lambda}_3 \bar{\lambda}_1 \alpha_2 (\alpha_3 - \alpha_1) (\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3) + \bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_2 \alpha_3 (\alpha_1 - \alpha_2) (\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3) = 0. \quad (9a)$$

Durch Koeffizientenvergleich zwischen (9) und (9a) ergibt sich die Verwandtschaft  $\bar{\Gamma}$  zwischen  $\lambda$  und  $\bar{\lambda}$  nämlich

$$\begin{aligned} \lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 &= \bar{\lambda}_1 (\bar{\lambda}_2 + \bar{\lambda}_3) : \bar{\lambda}_2 (\bar{\lambda}_3 + \bar{\lambda}_1) : \bar{\lambda}_3 (\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2) \\ \bar{\lambda}_1 : \bar{\lambda}_2 : \bar{\lambda}_3 &= \underline{(\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3) (\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3) : (\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3) (-\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) : (-\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) (\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3)}. \end{aligned} \quad (10)$$

Die Isologe von  $\lambda$  bei  $\Delta$  ist

$$\underline{\lambda_1 (\alpha_2 - \alpha_3) (-\alpha_2 \alpha_3 + \alpha_3 \alpha_1 + \alpha_1 \alpha_2) + \lambda_2 (\alpha_3 - \alpha_1) (\alpha_2 \alpha_3 - \alpha_3 \alpha_1 + \alpha_1 \alpha_2) + \lambda_3 (\alpha_1 - \alpha_2) (\alpha_2 \alpha_3 + \alpha_3 \alpha_1 - \alpha_1 \alpha_2) = 0}. \quad (11)$$

<sup>1</sup> Zu einfacheren Formeln gelangt man, wenn man  $P_1$  und  $P_2$  als Kreispunkte der Ebene  $\mathfrak{P}$  deutet und  $\mathfrak{P}$  als Gaussche Zahlenebene auffaßt. Ist dann  $P_3$  der Ursprung und  $K$  der Einheitspunkt der reellen Achse, so folgt für die reellen Punkte dieser Ebene  $\mathfrak{P}$

$$\Sigma \dots z' = \frac{1}{z}, \quad \Gamma \dots z' = \frac{z(1-z+\bar{z})}{-1+z+\bar{z}}, \quad \Delta \dots z' = \frac{z(z+\bar{z}-z\bar{z})}{z-\bar{z}+z\bar{z}}.$$

Bei dieser Darstellung in der Gausschen Zahlenebene geht natürlich die Abbildung der Punkte der Ferngeraden und aller komplexen Punkte dieser Ebene verloren.

Die Dualisologe von  $\bar{\lambda}$  bei  $\Delta$  ist

$$\bar{\lambda}_2 \bar{\lambda}_3 \alpha_1^2 (\alpha_2 - \alpha_3) + \bar{\lambda}_3 \bar{\lambda}_1 \alpha_2^2 (\alpha_3 - \alpha_1) + \bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_2 \alpha_3^2 (\alpha_1 - \alpha_2) = 0. \quad (11a)$$

Durch Koeffizientenvergleich zwischen (11) und (11a) ergibt sich die Verwandtschaft  $\bar{\Delta}$  zwischen  $\lambda$  und  $\bar{\lambda}$ , nämlich

$$\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 = (-\bar{\lambda}_2 \bar{\lambda}_3 + \bar{\lambda}_3 \bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_2) : (\bar{\lambda}_2 \bar{\lambda}_3 - \bar{\lambda}_3 \bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_2) : (\bar{\lambda}_2 \bar{\lambda}_3 + \bar{\lambda}_3 \bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_2)$$

$$\bar{\lambda}_1 : \bar{\lambda}_2 : \bar{\lambda}_3 = (\lambda_1 + \lambda_2) (\lambda_3 + \lambda_1) : (\lambda_2 + \lambda_3) (\lambda_1 + \lambda_2) : (\lambda_3 + \lambda_1) (\lambda_2 + \lambda_3). \quad (12)$$

Bei den quadratischen Verwandtschaften  $\bar{\Gamma}$  und  $\bar{\Delta}$  ist  $K^1$ ,  $K^2$  das einzige involutorische Punktepaar in  $\mathfrak{P}$ . Wenn bei  $\bar{\Gamma}$  und ebenso bei  $\bar{\Delta}$  der Punkt  $\lambda$  auf  $\Delta_e$  liegt, so liegt  $\bar{\lambda}$  auf  $\Delta_u$ .

Bei  $\Gamma_0$  lautet die Gleichung von  $k$  in  $\mathfrak{D}$

$$k \quad x_1^2 + x_2^2 = 0. \quad (13)$$

Man findet dann

$$\Gamma_0 \dots \alpha'_1 : \alpha'_2 : \alpha'_3 = \alpha_1 (-\alpha_1 + \alpha_2) : \alpha_2 (\alpha_1 - \alpha_2) : \alpha_3 (\alpha_1 + \alpha_2). \quad (14)$$

Die Isologe von  $\lambda$  bei  $\Gamma_0$  ist

$$\lambda_1 \alpha_2^2 \alpha_3 - \lambda_2 \alpha_3 \alpha_1^2 + \lambda_3 \alpha_1 \alpha_2 (\alpha_1 - \alpha_2) = 0. \quad (15)$$

Bei  $\Delta_0$  lauten die entsprechenden Gleichungen

$$k \equiv u_1^2 + u_2^2 = 0, \quad (16)$$

$$\Delta_0 \dots \alpha'_1 : \alpha'_2 : \alpha'_3 = \alpha_1 (\alpha_1 + \alpha_2) : \alpha_2 (-\alpha_1 - \alpha_2) : \alpha_3 (\alpha_1 - \alpha_2), \quad (17)$$

$$\bar{\lambda}_2 \bar{\lambda}_3 \alpha_1^2 - \bar{\lambda}_3 \bar{\lambda}_1 \alpha_2^2 - \bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_2 \alpha_3 (\alpha_1 - \alpha_2) = 0. \quad (18)$$

## 9. Erster Grenzfall: Berührende Kegelschnitte.

### A. Das Kegelschnittssystem $\mathfrak{S}_1$ .

Bisher war vorausgesetzt, daß  $k$  und  $\alpha$  (und daher auch  $\alpha'$ ) ein nichtausgeartetes Poldreieck gemein haben. In dem nunmehr zu behandelnden Grenzfall bezeichnen wir einen „laufenden“ Kegelschnitt, der einer Verwandtschaft unterworfen werden soll, statt mit  $\alpha$  mit  $\beta$ .

Wenn  $\beta$  den gegebenen nichtsingulären Kegelschnitt  $k$  in einem Punkt  $O_3$  berührt und noch in zwei getrennten Punkten schneidet, so schneidet deren Verbindungsgerade die Tangente von  $O_3$  in einem Punkt  $O_2$ , der bezüglich  $k$  und  $\beta$  dieselbe Polare  $o_2$  hat.

Der zweite Schnittpunkt von  $o_2$  mit  $k$  sei  $O_1$  (Abb. 14). Man sieht dann, daß  $O_2$  und  $o_2$  auch Pol und Polare für die  $\beta$  in  $\Sigma$ ,  $\Gamma$  und  $\Delta$  entsprechenden Kegelschnitte  $\beta'$  sind. Also geht durch  $\Sigma$ ,  $\Gamma$  und  $\Delta$  das System  $\mathfrak{S}_1$  der  $\infty^2$  Kegelschnitte, die  $k$  in  $O_3$  berühren und für die  $O_2$  und  $o_2$  Pol und Polare sind, in sich über.

Man erhält  $\mathfrak{S}_1$  aus einem Bund, wenn zwei Ecken von  $\Omega$  zusammenrücken. Daher verläuft die Untersuchung von  $\Sigma$ ,  $\Gamma$  und  $\Delta$  in  $\mathfrak{S}_1$  genau wie beim Bund und wir können uns nach der Abbildung von  $\mathfrak{S}_1$  auf die Punkte einer Hilfsebene  $\mathfrak{P}_1$  auf die Anführung der Ergebnisse beschränken.

$\mathfrak{D}_1$  sei die Ebene, in der die Kegelschnitte von  $\mathfrak{S}_1$  liegen. Jedem Kegelschnitt von  $\mathfrak{S}_1$  wird als Bildpunkt der Pol bezüglich einer festen Geraden  $e$  zugeordnet (Abb. 14).<sup>1</sup> Die Gesamtheit der Bildpunkte ist die (mit  $\mathfrak{D}_1$  vereinigt liegende) Bildebene  $\mathfrak{P}_1$ . Wir führen in  $\mathfrak{D}_1$  projektive Punkt- bzw. Linienkoordinaten  $y_i, v_i$  mit dem Grunddreieck  $(O_1 O_2 O_3, \text{Gegenseiten } o_i)$  und in  $\mathfrak{P}_1$  projektive Punktkoordinaten  $\beta_i$  mit dem Grunddreieck  $(P_i = O_i, p_i = o_i)$  ein. Legt man dann  $e$  beliebig durch  $O_1$  und wählt als Einheitspunkt den zweiten Schnittpunkt von  $k$  und  $e$ , so hat  $k$  den Bildpunkt  $K(2, 1, 0)$  und die Gleichung des Kegelschnitts  $\beta$  von  $\mathfrak{S}_1$  mit dem Bildpunkt  $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$  lautet, da der Punkt  $\beta$  und die Gerade  $e$  konjugiert bezüglich des Kegelschnitts  $\beta$  sein sollen,

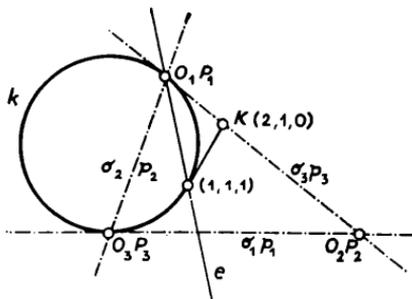


Fig. 14.

insbesondere hat  $k$  die Gleichung  $y_2^2 - y_1 y_3 = 0$ .

$$\beta_2 \beta_3 y_1^2 + \beta_1^2 y_2^2 - 2\beta_1 \beta_2 y_1 y_3 = 0 \text{ bzw. } \beta_2 v_2^2 - \beta_3 v_3^2 - 2\beta_1 v_1 v_3 = 0. \quad (1)$$

Bei festen  $y_i$  bzw.  $v_i$  und veränderlichen  $\beta_i$  stellt (1) in  $\mathfrak{P}_1$  eine „Umlinie“ bzw. eine Gerade dar. Die Umlinie ist das Bild des Büschels, dessen Kegelschnitte  $o_1$  in  $O_3$  berühren und durch die beiden Punkte  $(y_1, \pm y_2, y_3)$  gehen. Die Gerade ist das Bild der Schar, deren Kegelschnitte  $o_1$  in  $O_3$  berühren und ebenso die beiden Geraden  $(v_1, \pm v_2, v_3)$  berühren.

<sup>1</sup> Ist  $e$  die Ferngerade der euklidischen Ebene, so wird jedem Kegelschnitt von  $\mathfrak{S}_1$  sein Mittelpunkt zugeordnet,  $\beta_i$  sind dessen baryzentrische Koordinaten.

$o_1$  schneidet die Grundtangente  $t_1$  und  $t_2$  der Schar in  $T_1$  und  $T_2$  (Abb. 15),  $T$  sei der (auf  $o_2$  liegende) Schnittpunkt von  $t_1$  und  $t_2$ .  $e$  schneide  $o_1$  in  $E_1$ . Dann liegt der Schnittpunkt der Bildgeraden mit  $o_1$  harmonisch zu  $E_1$  bezüglich  $T_1, T_2$ , ihr Schnittpunkt mit  $o_2$  liegt harmonisch zu  $O_1$  bezüglich  $O_3$  und  $T$ . Diese beiden Punkte der Bildgeraden stellen die zerfallenen Kurven 2. Klasse in der Schar dar.<sup>1</sup> Geht die Bildgerade durch  $P_2$ , so berühren sich die Kegelschnitte der Schar in  $O_3$  und einem anderen Punkt von  $o_2$ . Insbesondere stellt  $\beta_3 = 0$  die Reihe der Kegelschnitte in  $\mathfrak{D}_1$  dar, die  $k$  in  $O_1$  und  $O_3$  berühren. Geht die Bildgerade durch  $P_3$ , so hyperoskulieren sich die Kegelschnitte der Schar in  $O_3$ .

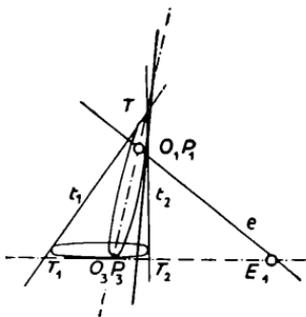


Fig. 15.

Jede Umlinie geht durch  $P_2$  und berührt  $p_2$  in  $P_3$ .  $X_1$  und  $X_2$  seien die Grundpunkte des Büschels. Geht man im Büschel zum zerfallenen Kegelschnitt  $o_1 + [O_2 X_1 X_2]$  über, so rückt der Bildpunkt in der zu  $p_3$  bezüglich  $p_1$  und  $[P_2 X_1 X_2]$  harmonischen Richtung in  $P_2$  ein, einem aus  $o_1$  und einer Geraden durch  $O_2$  bestehenden Geradenpaar von  $\mathfrak{S}_1$  entspricht also ein Linien-element in  $P_2$ . Dagegen ist dem Geradenpaar  $[O_3 X_1] + [O_3 X_2]$  des Büschels das Krümmungselement der Umlinie in  $P_3$  zugeordnet.

$\mathfrak{D}_1 \rightarrow \mathfrak{B}_1$  ist eine Berührungstransformation.  $\Sigma, \Gamma$  und  $\Delta$  werden Punkttransformationen in  $\mathfrak{B}_1$ ; zu ihnen gehören, wenn man sich auf die Kegelschnitte von  $\mathfrak{S}_1$  beschränkt, Berührungstransformationen in  $\mathfrak{D}_1$ . Aus den in  $\mathfrak{S}_1$  enthaltenen Paaren  $\Sigma, \Gamma$  und  $\Delta$  erhält man durch Anwendung der  $\infty^2$  Kollineationen, die  $k$  in sich überführen, alle übrigen Paare entsprechender Kegelschnitte, die  $k$  berühren.

Sucht man auch hier die dem festen Kegelschnitt  $k$  harmonisch eingeschriebenen bzw. umschriebenen Kegelschnitte sowie die  $k$  eingeschriebenen bzw. umschriebenen Kegelschnitte,

<sup>1</sup> Deutet man ein auf  $o_1$  gelegenes Punktepaar von  $\mathfrak{S}_1$  als Kreispunktepaar, so ist  $\mathfrak{S}_1$  die Gesamtheit der Parabeln mit fester Achse.

<sup>2</sup> F. Hohenberg, Apolarität usw., I. c., S. 116 und 121. Kegelschnitte, die mit  $k$  „verbunden“ sind, gibt es im System  $\mathfrak{S}_1$  nicht.

so ergibt sich jedesmal eine Schar von Kegelschnitten, die sich in  $O_3$  hyperoskulieren, nämlich

$$\begin{aligned} \Delta_e(k) \equiv \alpha_1 + \alpha_2 &= 0, & \Delta_u(k) \equiv \alpha_1 + 4\alpha_2 &= 0, \\ \Theta_e(k) \equiv 2\alpha_1 - \alpha_2 &= 0, & \Theta_u(k) \equiv \alpha_1 - 8\alpha_2 &= 0. \end{aligned}$$

### B. Die Polarität $\Sigma$ in $\mathfrak{S}_1$ .

Durch die Polarität  $\Sigma$  an  $k$  geht  $e$  in  $K$  und der Punkt  $\beta$  in seine Polare bezüglich  $k$  über, die wir mit  $(\beta)$  bezeichnen wollen. Der Punkt  $\beta$  und die Gerade  $e$  sind Pol und Polare des Kegelschnitts  $\beta$ . Daraus folgt, daß die Gerade  $(\beta)$  und der Punkt  $K$  Polare und Pol des Kegelschnitts

$$\beta' \equiv \beta'_2 \beta'_3 y_1^2 + \beta_1'^2 y_2^2 - 2\beta'_1 \beta'_2 y_1 y_3 = 0$$

sind, der  $\beta$  in der Polarität  $\Sigma$  entspricht. Hieraus folgt durch Koeffizientenvergleich die Darstellung von  $\Sigma$  in  $\mathfrak{S}_1$

$$\Sigma \dots \beta'_1 : \beta'_2 : \beta'_3 = 4\beta_1 \beta_2 : \beta_1^2 : -4\beta_2 \beta_3. \quad (2)$$

Dies ist eine singuläre quadratische Verwandtschaft in  $\mathfrak{P}_1$ , die jeder Geraden eine Umlinie zuordnet und umgekehrt. Einer Geraden durch  $P_2$  entspricht die zu ihr bezüglich der Festgeraden  $p_1$  und  $p_3$  harmonische Gerade. Auch die Strahlen durch  $P_3$  bilden eine Involution; der eine Feststrahl geht durch  $K$ , der andere durch den zweiten Festpunkt  $K_1(2, -1, 0)$  von  $\Sigma$  in  $\mathfrak{P}_1$ .  $K_1$  ist Bildpunkt des mit  $k$  „vertauschbaren“ Kegelschnitts  $k \equiv y_2^2 + y_1 y_3 = 0$  (geht  $\beta$  in  $\mathfrak{D}_1$  durch die Polarität an  $k$  in  $\beta'$  über, dann auch durch die Polarität an  $k_1$ ). Durch  $\Sigma$  vertauschen sich natürlich  $\Delta_e$  und  $\Delta_u$  sowie  $\Theta_e$  und  $\Theta_u$ .

Die Isologe eines Punktes  $\lambda$  in  $\mathfrak{P}_1$  ist der Ort der Punkte  $\beta$ , die zusammen mit ihren entsprechenden Punkten  $\beta'$  auf einer Geraden durch  $\lambda$  liegen. In  $\mathfrak{D}_1$  gehören also die Kegelschnitte  $\lambda, \beta$  und  $\beta'$  einer linearen Schar an, nach (1) ist also die Gleichung der Isologen die nullgesetzte Determinante der  $\lambda_i, \beta_i, \beta'_i$ . So ergibt sich z. B. als Isologe von  $\lambda$  bei  $\Sigma$  die rationale  $C_3$

$$\lambda_1(\beta_1^2 + 4\beta_2^2)\beta_3 - 8\lambda_2\beta_1\beta_2\beta_3 - \lambda_3\beta_1(\beta_1^2 - 4\beta_2^2) = 0. \quad (3)$$

Die Tangenten in den Kurvenpunkten  $K$  und  $K_1$  schneiden sich in  $\lambda$ , die Tangenten in den Kurvenpunkten  $\lambda$  und  $P_2$  schneiden sich im Kurvenpunkt  $\lambda'$ . Die Tangenten des Doppelpunkts  $P_3$  liegen harmonisch zu  $[P_3K]$  und  $[P_3K_1]$  sowie zu  $p_1$  und  $[P_3\lambda]$ . Liegt  $\lambda$  auf  $p_1$ , so besteht die Isologe aus  $p_1$  und einem Kegelschnitt

durch  $K$  und  $K_1$  (Tangenten gehen durch  $\lambda$ ), der  $p_2$  in  $P_3$  berührt und durch den zu  $P_3$  bezüglich  $\lambda$  und  $P_2$  harmonischen Punkt geht. Die Isologe von  $P_3$  besteht aus den drei Festgeraden  $p_2$ ,  $[P_3 K]$ ,  $[P_3 K_1]$ .

Die Isologe von  $\lambda$  ist zugleich die Dualisologe von  $\lambda'$ . (Die Dualisologe eines Punktes  $\bar{\lambda}$  in  $\mathfrak{P}_1$  wird dabei wie in 6. definiert, d. h. die Kegelschnitte  $\bar{\lambda}$ ,  $\beta$ ,  $\beta'$  sollen einem Büschel angehören.) Nach (1) ist die Gleichung der Dualisologen eines Punktes  $\bar{\lambda}$  in  $\mathfrak{P}_1$

$$\begin{vmatrix} \bar{\lambda}_2 \bar{\lambda}_3 & \bar{\lambda}_1^2 & \bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_2 \\ \beta_2 \beta_3 & \beta_1^2 & \beta_1 \beta_2 \\ \beta'_2 \beta'_3 & \beta_1'^2 & \beta'_1 \beta'_2 \end{vmatrix} = 0.$$

### C. Die Kegelschnittverwandtschaft $\Gamma$ in $\mathfrak{S}_1$ .

Nach den Formeln für die harmonische Kurve 2. Ordnung zweier Kegelschnitte<sup>1</sup> kann man die Bedingung aufstellen, daß  $k$  die harmonische Kurve 2. Ordnung von  $\beta$  und  $\beta'$  ist. Durch Koeffizientenvergleich folgt die Darstellung von  $\Gamma$  in  $\mathfrak{P}_1$ , nämlich:

$$\Gamma \dots \beta'_1 : \beta'_2 : \beta'_3 = \beta_1 \beta_2 : \beta_2 (\beta_1 - \beta_2) : \beta_3 (\beta_2 - \beta_1). \quad (4)$$

Einer Geraden in  $\mathfrak{P}_1$  entspricht ein Kegelschnitt durch  $P_1$  und  $P_3$ , die Tangente in  $P_3$  liegt harmonisch zu  $p_2$  bezüglich  $p_3$  und  $[P_3 K]$ . Der zweite Schnittpunkt mit  $p_1$  liegt harmonisch zum Schnittpunkt der Geraden mit  $p_1$  bezüglich  $P_2$  und  $P_3$ . Einer Geraden durch  $P_1$  entspricht die zu ihr bezüglich  $p_2$  und  $p_3$  harmonische Gerade. Auch die Strahlen durch  $P_3$  bilden eine Involution; die Feststrahlen sind  $p_1$  und  $[P_3 K]$  (d. h. die  $k$  in einem Punkt hyperoskulierenden Kegelschnitte vertauschen sich untereinander, was schon aus der Bedingung folgt, daß die Verwandtschaft durch  $k$  allein definiert ist). Einer Umlinie entspricht eine  $C_4$ , die die Umlinie in  $P_2$  berührt und in  $P_3$  einen dreifachen Punkt hat, von dem eine Tangente  $p_1$  ist, während die beiden anderen in  $[P_3 K]$  zusammenfallen.

Ferner findet man wie im allgemeinen Fall, daß sich durch  $\Gamma$  in  $\mathfrak{P}_1$  die Geraden  $\Delta_e(k)$  und  $\Delta_u(k)$  vertauschen, d. h. in  $\mathfrak{D}$  entsprechen den  $k$  harmonisch eingeschriebenen Kegelschnitten die  $k$  eingeschriebenen Kegelschnitte.

Die Isologe von  $\lambda$  bei  $\Gamma$  ist die rationale  $C_3$

$$\underline{2\lambda_1 \beta_2 \beta_3 (\beta_1 - \beta_2) - \lambda_2 \beta_1^2 \beta_3 - \lambda_3 \beta_1 \beta_2 (\beta_1 - 2\beta_2) = 0.} \quad (5)$$

<sup>1</sup> Siehe z. B. E. Pascal, Rep. d. höh. Math., Bd. II/1, S. 247 und 254.

Die Tangenten in den Kurvenpunkten  $P_2$  und  $K$  gehen durch  $\lambda$ , die Tangenten in den Kurvenpunkten  $P_1$  und  $\lambda$  durch  $\lambda'$ , die Tangenten des Doppelpunktes  $P_3$  liegen harmonisch zu  $p_1$  und  $[P_3K]$  sowie zu  $p_2$  und  $[P_3\lambda]$ . Die Isologe zerfällt, wenn ein  $\lambda_i = 0$  ist.

Die Isologe von  $\lambda$  ist zugleich die Dualisologe eines Punktes  $\bar{\lambda}$ , der aus  $\lambda$  durch die singuläre quadratische Transformation

$$\bar{\lambda}_1 : \bar{\lambda}_2 : \bar{\lambda}_3 = 2\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2) : \lambda_2^2 2\lambda_3 : (\lambda_1 - \lambda_2) \quad (6)$$

hervorgeht ( $P_1, K$  einfache,  $P_3$  doppelt zählender Festpunkt, Hauptpunkte  $P_1, P_3$  in der  $\lambda$ -Ebene,  $P_2, P_3$  in der  $\bar{\lambda}$ -Ebene).

#### D. Die Kegelschnittverwandtschaft $\Delta$ in $\mathfrak{S}_1$ .

Ihre Darstellung ergibt sich auf demselben Weg wie die von  $\Gamma$ , man erhält die kubische Verwandtschaft

$$\Delta \dots \beta'_1 : \beta'_2 : \beta'_3 = \beta_1^2(\beta_1 - 4\beta_2) : -\beta_1^2\beta_2 : (\beta_1 - 4\beta_2)^2\beta_3. \quad (7)$$

Jeder Punkt von  $p_2$  ist Festpunkt. Einer Geraden durch  $P_3$  entspricht die zu ihr bez.  $p_2$  und  $[P_3K]$  harmonische Gerade. Auf den Festgeraden  $p_3$  und  $[P_3K]$  durch die Festpunkte  $P_1$  und  $K$  bilden die Paare entsprechender Punkte eine Involution. Einer allgemeinen Geraden in  $\mathfrak{B}_1$  entspricht eine  $C_3$ , die mit der Geraden den Festpunkt auf  $p_2$  und das auf ihr liegende Punktepaar von  $\Delta$  gemein hat. Die Tangente der Spitze  $P_3$  jeder dieser  $C_3$  liegt harmonisch zu  $p_1$  bezüglich  $p_2$  und  $[P_3K]$  und jede dieser  $C_3$  berührt  $p_3$  in  $P_2$ . Einer Umlinie entspricht eine  $C_3$  mit dem Doppelpunkt  $P_3$ ; dessen Tangenten sind  $p_2$  und die Spitzentangente der vorigen  $C_3$ . Diese  $C_3$  berührt ebenfalls  $p_3$  in  $P_2$ .

Wie im allgemeinen Fall vertauschen sich auch hier die Geraden  $\Delta_u(k)$  und  $\Theta_u(k)$  in  $\mathfrak{B}_1$ , in  $\mathfrak{D}_1$  gehen also die  $k$  harmonisch umschriebenen Kegelschnitte in die  $k$  umschriebenen Kegelschnitte über.

Die Isologe von  $\lambda$  bei  $\Delta$  ist die rationale  $C_3$

$$\lambda_1(\beta_1^2 - 4\beta_1\beta_2 + 8\beta_2^2)\beta_3 + 2\lambda_2\beta_1\beta_3(\beta_1 - 4\beta_2) - \lambda_3\beta_1^2(\beta_1 - 2\beta_2) = 0 \quad (8)$$

$P_2, K, \lambda, \lambda'$  sind Punkte der  $C_3$ , die Tangente in  $P_2$  ist  $p_3$ , die Tangente in  $K$  geht durch  $\lambda$ , die in  $\lambda$  durch  $\lambda'$ . Die Tangenten des Doppelpunktes  $P_3$  liegen harmonisch zu  $p_2$  und  $[P_3K]$ .

Die Isologe von  $\lambda$  ist zugleich die Dualisologe eines Punktes  $\bar{\lambda}$ , der aus  $\lambda$  durch die singuläre quadratische Transformation

$$\bar{\lambda}_1 : \bar{\lambda}_2 : \bar{\lambda}_3 = 4\lambda_1(\lambda_1 + 2\lambda_2) : (\lambda_1 + 2\lambda_2)^2 : 4\lambda_1\lambda_3 \quad (9)$$

hervorgeht ( $P_2$ ,  $K$  einfache,  $P_3$  doppeltzählender Festpunkt, Hauptpunkte  $P_3$  und  $K_1$  in der  $\lambda$ -Ebene,  $P_2$  und  $P_3$  in der  $\bar{\lambda}$ -Ebene).

Man sieht, daß die Punktepaare von  $\Sigma$ ,  $\Gamma$  und  $\Delta$  auch in diesem Grenzfall eine feste Punktgruppe zu 9 assoziierten Punkten einer (rationalen)  $C_3$  ergänzen. Diese Punktgruppe enthält drei Punkte, die auf einer Geraden liegen ( $P_2$ ,  $K$ ,  $K_1$  bei  $\Sigma$ ,  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $K$  bei  $\Gamma$ ,  $P_2$  samt Tangente  $p_3$ ,  $K$  bei  $\Delta$ ), ferner sollen die Tangenten des Doppelpunkts  $P_3$  harmonisch liegen zu zwei Festgeraden der Verwandtschaft (nämlich  $[P_3K]$  und  $[P_3K_1]$  bei  $\Sigma$ ,  $p_1$  und  $[P_3K]$  bei  $\Gamma$ ,  $p_2$  und  $[P_3K]$  bei  $\Delta$ ).

E. Der Grenzübergang  $\mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{S}_1$  für eine beliebige Kegelschnittverwandtschaft.

Ehe wir auf den Fall eingehen, daß der Kegelschnitt, der einer der Verwandtschaften  $\Sigma$ ,  $\Gamma$  oder  $\Delta$  unterworfen werden soll, den festen Kegelschnitt  $k$  oskuliert, soll im Hinblick auf spätere allgemeinere Fragestellungen der Grenzübergang  $\mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{S}_1$  für eine beliebige Kegelschnittverwandtschaft

$$\alpha'_1 : \alpha'_2 : \alpha'_3 = F_1(\alpha_i) : F_2(\alpha_i) : F_3(\alpha_i) \quad (10)$$

behandelt werden. Es sei also im System  $\mathfrak{S}_1$  mit dem vorhin verwendeten Koordinatensystem der feste Kegelschnitt  $k \equiv y_2^2 - y_1 y_3 = 0$  (Parameterdarstellung  $y_1 = t^2$ ,  $y_2 = t$ ,  $y_3 = 1$ ) gegeben, ferner der Kegelschnitt  $\beta$

$$\beta_2 \beta_3 y_1^2 + \beta_1^2 y_2^2 - 2\beta_1 \beta_2 y_1 y_3 = 0 \text{ oder } \beta_2 v_2^2 - \beta_3 v_3^2 - 2\beta_1 v_1 v_3 = 0. \quad (1)$$

$\beta$  berührt  $k$  in  $O_3$  (Tangente  $o_1$ ) und schneidet  $k$  noch in den Punkten mit  $t = \pm \sqrt{(2\beta_1\beta_2 - \beta_1^2) : \beta_2\beta_3}$ . Der Punkt  $O_3$  auf  $k$  ergibt sich für  $t = 0$ . Um auf den allgemeinen Fall zurückzukommen, daß sich  $k$  und der zu transformierende Kegelschnitt in vier getrennten Punkten schneiden, ersetzen wir  $\beta$  durch einen Kegelschnitt  $\alpha$ , der  $k$  in den Punkten mit  $\pm t_1$  und  $\pm t_0$  schneidet, wo  $t_0$  eine kleine, von Null verschiedene Zahl bedeuten soll. Dann ergibt sich aus diesem so bestimmten allgemeinen Bund  $\mathfrak{S}$  durch den Grenzübergang  $t_0 \rightarrow 0$  der spezielle Bund der Kegelschnitte,

die  $k$  in  $O_3$  berühren und für die  $O_2$  und  $o_2$  Pol und Polare sind. Die vier zunächst getrennten Schnittpunkte von  $k$  und  $\alpha$  lauten

$$\text{I } (t_1^2, t_1, 1), \quad \text{II } (t_1^2, -t_1, 1), \quad \text{III } (t_0^2, t_0, 1), \quad \text{IV } (t_0^2, -t_0, 1).$$

Sie haben das Diagonaldreieck  $[\text{I}, \text{IV}].[\text{II}, \text{III}] = R_1(t_0, t_1, 0, 1)$ ,  $[\text{I}, \text{III}].[\text{II}, \text{IV}] = R_2(0, 1, 0)$ ,  $R_3(t_0, t_1, 0, -1)$ . Wir beziehen nun die Gleichungen von  $k$  und  $\alpha$  auf das Dreieck  $R_1 R_2 R_3$  als Koordinatendreieck und wählen den Einheitspunkt so, daß die Gleichung von  $k$  in den neuen laufenden Koordinaten  $x_i$  nunmehr  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$  lautet. Dann führen die Gleichungen

$$\begin{aligned} y_1 : y_2 : y_3 &= t_0 t_1 (i x_1 + x_3) : \sqrt{t_0 t_1} x_2 : (i x_1 - x_3) \quad (i = \sqrt{-1}) \\ x_1 : x_2 : x_3 &= -i (y_1 + t_0 t_1 y_3) : 2 \sqrt{t_0 t_1} y_2 : (y_1 - t_0 t_1 y_3) \end{aligned} \quad (11)$$

die  $y_i$  in die  $x_i$  über und umgekehrt. Die zugehörige Transformation der Linienkoordinaten  $v_i$  (im alten System, Bund  $\mathfrak{S}_1$ ) und  $u_i$  (im neuen System, Bund  $\mathfrak{S}$ ) lautet

$$\begin{aligned} v_1 : v_2 : v_3 &= (-i u_1 + u_3) : 2 \sqrt{t_0 t_1} u_2 : -t_0 t_1 (i u_1 + u_3) \\ u_1 : u_2 : u_3 &= i (t_0 t_1 v_1 + v_3) : \sqrt{t_0 t_1} v_2 : (t_0 t_1 v_1 - v_3). \end{aligned} \quad (11a)$$

Der ursprüngliche Kegelschnitt  $\beta$  schneidet  $o_2 (y_2 = 0)$  in  $O_3$  und im Punkt mit den  $y$ -Koordinaten  $(2\beta_1, 0, \beta_3)$ . Die Gleichung des durch  $(2\beta_1, 0, \beta_3)$  und die Punkte mit den Parameterwerten  $\pm t_0, \pm t_1$  gelegten Kegelschnitts  $\alpha$  lautet nach Transformation auf die Koordinaten  $x_i$

$$\begin{aligned} (2\beta_1 \beta_2 - 2 \sqrt{(2\beta_2 - \beta_1) \beta_1 \beta_2 \beta_3} \cdot t_0 + \dots) x_1^2 + (\beta_1^2 + \dots) x_2^2 + \\ + (2\beta_1 \beta_2 + 2 \sqrt{(2\beta_2 - \beta_1) \beta_1 \beta_2 \beta_3} \cdot t_0 + \dots) x_3^2 = 0, \end{aligned}$$

wo die durch Punkte angedeuteten Glieder hier und im folgenden den Faktor  $t_0^2$  enthalten. Vergleicht man diese Gleichung mit

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1} + \frac{x_2^2}{\alpha_2} + \frac{x_3^2}{\alpha_3} = 0,$$

so folgt (nach Erweitern mit dem Produkt der Koeffizienten der  $x_i^2$ )

$$\begin{aligned} \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 &= \left( \beta_1 + \sqrt{\frac{(2\beta_2 - \beta_1) \beta_1 \beta_3}{\beta_2}} \cdot t_0 + \dots \right) \\ &\quad \underline{\hspace{10em}} \\ &: (2\beta_2 + \dots) : \left( \beta_1 - \sqrt{\frac{(2\beta_2 - \beta_1) \beta_1 \beta_3}{\beta_2}} \cdot t_0 + \dots \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Setzt man diese Werte der  $\alpha_i$  in die Gleichungen (10) der Kegelschnittverwandtschaft ein und ordnet nach Potenzen von  $t_0$ , so folgen Ausdrücke von der Form

$$\underline{\alpha'_i = f_i(\beta_1, \beta_2, \beta_3) + g_i(\beta_1, \beta_2, \beta_3) \cdot t_0 + \dots}, \quad (13)$$

d. h. der Kegelschnitt  $\Sigma \alpha_i u_i^2 = 0$  geht in den Kegelschnitt  $\Sigma \alpha'_i u_i^2 = 0$  über, der nach (11 a) im alten System (Bund  $\mathfrak{S}_1$ ) die Gleichung

$$-(f_1 + g_1 t_0 + \dots)(t_0 t_1 v_1 + v_3)^2 + (f_2 + g_2 t_0 + \dots)t_0 t_1 v_2^2 + (f_3 + g_3 t_0 + \dots)(t_0 t_1 v_1 - v_3)^2 = 0 \quad (14)$$

hat. Nach (10) entsteht  $F_3$  aus  $F_1$  durch Vertauschung von  $\alpha_1$  mit  $\alpha_3$  und dies bewirkt nach (12), daß in (13) beim Übergang von  $\alpha'_1$  zu  $\alpha'_3$  das von  $t_0$  freie Glied seinen Wert beibehält und das Glied mit  $t_0$  sein Vorzeichen verändert, also  $f_3 = f_1$  und  $g_3 = -g_1$ . Daher verschwindet in (14) das von  $t_0$  freie Glied und nach Division durch  $t_0$  erhält (14) die Form

$$f_2 t_1 v_2^2 - 2g_1 v_3^2 - 4f_1 t_1 v_1 v_3 + t_0 [\dots] = 0. \quad (14a)$$

Hier kann man den Grenzübergang  $t_0 \rightarrow 0$  vollziehen und erhält durch Vergleich der Restgleichung mit (1) die Formel für den Grenzübergang  $\mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{S}_1$

$$\underline{\beta'_1 : \beta'_2 : \beta'_3 = 2f_1 : f_2 : 2g_1 \sqrt{\frac{\beta_2 \beta_3}{\beta_1(2\beta_2 - \beta_1)}}}. \quad (15)$$

## 10. Zweiter Grenzfall: Oskulierende Kegelschnitte.

### A. Das Kegelschnittssystem $\mathfrak{S}_2$ .

Wenn ein Kegelschnitt den gegebenen Kegelschnitt  $k$  in einem Punkt  $O_3$  oskuliert, so oskuliert auch der bei  $\Sigma$ ,  $\Gamma$  oder  $\Delta$  entsprechende Kegelschnitt den Kegelschnitt  $k$  in  $O_3$ , wie man leicht feststellt. Das System  $\mathfrak{S}_2$  der Kegelschnitte, die  $k$  in  $O_3$  oskulieren, geht also bei  $\Sigma$ ,  $\Gamma$  und  $\Delta$  in sich über und läßt sich daher in ähnlicher Weise wie das System  $\mathfrak{S}_1$  behandeln.<sup>1</sup>  $O_1$  sei ein weiterer Punkt von  $k$ ,  $O_2$  der Schnitt der Tangenten in  $O_1$  und  $O_3$  an  $k$  (Abb. 16). Ist dann  $O_1 O_2 O_3$  das Grunddreieck eines projektiven Koordinatensystems in der Ebene  $\mathfrak{D}_2$  der Kegelschnitte von  $\mathfrak{S}_2$ , so lauten deren Gleichungen (laufende Punktkoordinaten  $z_i$ , Linienkoordinaten  $w_i$ )

<sup>1</sup> Ist die Tangente von  $O_3$  die Ferngerade der euklidischen Ebene, so ist  $\mathfrak{S}_2$  ein System kongruenter Parabeln mit fester Achsenrichtung  $O_3$ .

$$c_{11}z_1^2 + 2c_{12}z_1z_2 - \kappa c_{31}z_2^2 + 2c_{31}z_3z_1 = 0, \quad (1)$$

wo  $\kappa$  eine von der Wahl des Einheitspunktes abhängige Konstante ist. Es zeigt sich, daß sich die folgenden Rechnungen vereinfachen, wenn man  $\kappa = -1$  setzt. Dann hat der feste Kegelschnitt  $k$  die Gleichung  $z_2^2 + 2z_1z_3 = 0$ .

Nun ordnen wir wieder jedem Kegelschnitt von  $\mathfrak{S}_2$  den Pol einer festen Geraden  $e$  als Bildpunkt zu. Wir wählen  $e = o_3 = [O_1O_2]$  und erhalten als Gleichung des Kegelschnitts mit dem Bildpunkt  $\gamma (\gamma_1\gamma_2, \gamma_3)$

$$\frac{(\gamma_2^2 - \gamma_1\gamma_3)z_1^2 - 2\gamma_1\gamma_2z_1z_2 + \gamma_1^2(z_2^2 + 2z_1z_3)}{\text{bzw. } \gamma_1\omega_2^2 + 2\gamma_2\omega_2\omega_3 + \gamma_3\omega_3^2 + 2\gamma_1\omega_1\omega_3} = 0 \quad (2)$$

Die Gesamtheit der Bildpunkte  $\gamma$  bezeichnen wir als die (mit  $\mathfrak{D}_2$  vereinigt liegende) Bildebene  $\mathfrak{P}_2$  (Grunddreieck  $P_i = O_i, p_i = o_i$ ).  $k$  hat den Bildpunkt  $K = P_1 (1, 0, 0)$ .  $\mathfrak{D}_2 \rightarrow \mathfrak{P}_2$  ist wie im allgemeinen Fall eine Berührungstransformation.

Wenn sich zwei Kegelschnitte von  $\mathfrak{S}_2$  in  $O_3$  hyperoskulieren, so liegen ihre Bildpunkte auf einer Geraden durch  $P_3$ .<sup>1</sup> Insbesondere liegen auf  $[P_3K] = p_2$  die Bildpunkte der  $k$  hyperoskulierenden Kegelschnitte von  $\mathfrak{S}_2$ . Bei festen  $z_i$  bzw.  $\omega_i$  und veränderlichen  $\gamma_i$  stellt (2) in  $\mathfrak{P}_2$  eine „Umlinie“ bzw. eine Gerade dar. Die Gerade ist das Bild der Schar mit der Grundtangente  $\omega$ , ihr Schnittpunkt mit  $p_1$  liegt harmonisch zu  $P_2$  bezüglich  $P_3$  und des Schnittpunkts von  $\omega$  mit  $o_1$ ; er stellt die zerfallene Kurve 2. Klasse der Schar dar, die aus  $O_3$  und dem Schnittpunkt von  $\omega$  mit  $o_1$  besteht. (Zwischen den Geraden  $\omega$  in  $\mathfrak{D}_2$  und den Bildgeraden in  $\mathfrak{P}_2$  besteht eine quadratische Verwandtschaft.) Die Umlinie stellt das Büschel der durch den Punkt  $z$  gehenden Kegelschnitte von  $\mathfrak{S}_2$  dar. Die zu  $\mathfrak{S}_2$  gehörigen

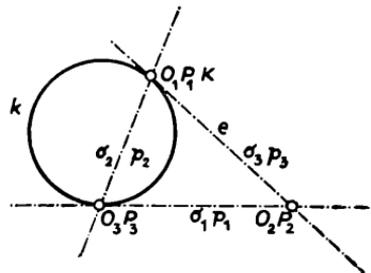


Fig. 16.

<sup>1</sup> Liegt der Bildpunkt eines Kegelschnitts auf  $e = p_3$ , so berührt der Kegelschnitt dort  $p_3$ . Ist also  $p_3$  die Ferngerade der euklidischen Ebene, und ist  $\gamma$  Bildpunkt eines Kegelschnitts von  $\mathfrak{S}_2$ , so ist der Schnitt von  $[P_3\gamma]$  mit  $p_3$  der Bildpunkt der Parabel, die den gegebenen Kegelschnitt in  $O_3$  hyperoskuliert.

Umlinien in  $\mathfrak{P}_2$  oskulieren sich in  $P_3$  (Tangente  $p_1$ ), sie ergeben sich für  $\varkappa = 2$  aus (1), wenn man die  $z_i$  durch die  $\gamma_i$  ersetzt.

### B. Die Verwandtschaften $\Sigma$ , $\Gamma$ und $\Delta$ in $\mathfrak{S}_2$ .

Die Ausdrücke für  $\Sigma$ ,  $\Gamma$  und  $\Delta$  findet man auch hier wie im allgemeinen Fall, bzw. wie im Fall der berührenden Kegelschnitte. Es ergeben sich die singulären quadratischen Verwandtschaften

$$\underline{\gamma'_1 : \gamma'_2 : \gamma'_3 = \gamma_1^2 : -\gamma_1 \gamma_2 : (\rho \gamma_2^2 - \gamma_1 \gamma_3)}, \quad (3)$$

wo  $\rho = 1$  bei  $\Sigma$ ,  $\rho = -2$  bei  $\Gamma$ ,  $\rho = 4$  bei  $\Delta$  ist. Einer Geraden durch  $P_3$  entspricht jedesmal die zu ihr bezüglich  $p_1$  und  $p_2$  harmonische Gerade durch  $P_3$ . Die einer allgemeinen Geraden in  $\mathfrak{P}_2$  entsprechenden Kegelschnitte in  $\mathfrak{P}_2$  ergeben sich, wenn man in (1)  $\varkappa = 2\rho$  setzt und die  $z_i$  durch die  $\gamma_i$  ersetzt. (Im Fall der Polarität  $\Sigma$ , also  $\rho = 1$ , sind dies natürlich die Umlinien in  $\mathfrak{P}_2$ .) Der zweite Schnittpunkt des Kegelschnitts mit  $[P_3K]$  liegt immer harmonisch zum Schnittpunkt der gegebenen Geraden bezüglich  $P_3$  und  $K$ . Den Umlinien in  $\mathfrak{P}_2$  entsprechen Kegelschnitte, die einander in  $P_3$  oskulieren; man erhält sie aus (1), wenn man dort  $\varkappa = 2(\rho - 1)$  setzt und die  $z_i$  durch  $\gamma_i$  ersetzt.

Die Isologe von  $\lambda$  ist zufolge (2) die  $C_3$

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \\ \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \\ \gamma'_1 \gamma'_2 \gamma'_3 \end{vmatrix} = 0 \text{ oder } \underline{\rho \lambda_1 \gamma_2^3 + \lambda_2 \gamma_1 (2\gamma_1 \gamma_3 - \rho \gamma_2^2) - 2\lambda_3 \gamma_1^2 \gamma_2 = 0} \quad (4)$$

mit der Spitze  $P_3$  (Spitzentangente  $p_1$ ). Sie geht bei  $\Sigma$ ,  $\Gamma$  und  $\Delta$  durch  $K = P_1$ ,  $\lambda$  und  $\lambda'$ . Die Tangente in  $K$  geht durch  $\lambda$ , die in  $\lambda$  durch  $\lambda'$ . Die Isologe von  $\lambda$  ist zugleich die Dualisologe

$$\begin{vmatrix} \bar{\lambda}_2^2 - \bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_3 & \bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_2 & \bar{\lambda}_1^2 \\ \gamma_2^2 - \gamma_1 \gamma_3 & \gamma_1 \gamma_2 & \gamma_1^2 \\ \gamma'_2{}^2 - \gamma'_1 \gamma'_3 & \gamma'_1 \gamma'_2 & \gamma'_1{}^2 \end{vmatrix} = 0$$

eines Punktes  $\bar{\lambda}$ , der aus  $\lambda$  durch die singuläre quadratische Verwandtschaft

$$\bar{\lambda}_1 : \bar{\lambda}_2 : \bar{\lambda}_3 = \frac{\rho^2}{2 - \rho} \lambda_1^2 : -\rho \lambda_1 \lambda_2 : [(2 - \rho) \lambda_2^2 - \rho \lambda_1 \lambda_3] \quad (5)$$

hervorgeht.

C. Der Grenzübergang  $\mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{S}_2$  für eine beliebige Kegelschnittverwandtschaft.

Wir untersuchen nun, wie sich der Grenzübergang  $\mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{S}_2$  für eine beliebige Kegelschnittverwandtschaft

$$\underline{\alpha'_1 : \alpha'_2 : \alpha'_3 = F_1(\alpha_i) : F_2(\alpha_i) : F_3(\alpha_i)} \quad (6)$$

vollzieht. Im Koordinatensystem der  $z_i$  ist

$$z_1 = t^2, \quad z_2 = 2t, \quad z_3 = -2 \quad (7)$$

eine Parameterdarstellung des Kegelschnitts  $k$ . Er oskuliert den Kegelschnitt  $\gamma$  des Systems  $\mathfrak{S}_2$  im Punkt mit  $t = 0$  und schneidet ihn noch im Punkt mit  $t_1 = 4\gamma_1\gamma_2(\gamma_2^2 - \gamma_1\gamma_3)$ . Bedeutet dann  $t_0$  einen kleinen, von Null verschiedenen Wert, so geht der durch die Punkte mit  $t = 0, t = \pm t_0, t = t_1$  und einen weiteren Punkt von  $\gamma$ , etwa den Schnittpunkt  $(-2\gamma_1^2, 0, \gamma_2^2 - \gamma_1\gamma_3)$  mit  $p_2$ , gelegte Kegelschnitt  $\alpha$  in  $\gamma$  über, wenn  $t_0$  gegen Null konvergiert.  $\alpha$  hat im Koordinatensystem der  $z_i$  die Gleichung

$$\begin{aligned} & 4(\gamma_2^2 - \gamma_1\gamma_3)z_1^2 + [4\gamma_1^2 - t_0^2(\gamma_2^2 - \gamma_1\gamma_3)]z_2^2 - \\ & - 4\gamma_1\gamma_2 t_0^2 z_2 z_3 + 8\gamma_1^2 z_3 z_1 - 8\gamma_1\gamma_2 z_1 z_2 = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Das Diagonaldreieck der vier Schnittpunkte dieses Kegelschnitts mit  $k$  besteht aus den Punkten

$$\begin{aligned} R_1(t_0^2 t_1, 2t_0 t_1, -4t_0 + 2t_1), \quad R_2(t_0^2 t_1, -2t_0 t_1, 4t_0 + 2t_1), \\ R_3(t_0^2 t_1, 2t_0^2, -2t_1). \end{aligned} \quad (9)$$

Führt man neue Koordinaten  $x_i$  mit dem Grunddreieck  $R_1 R_2 R_3$  ein und wählt den neuen Einheitspunkt so, daß die Gleichung von  $k$  nunmehr  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$  lautet, so ergeben sich die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} & \left. \begin{aligned} z_1 &= \rho_1 t_0^2 t_1 x_1 + \rho_2 t_0^2 t_1 x_2 + \rho_3 t_0^2 t_1 x_3 \\ z_2 &= 2\rho_1 t_0 t_1 x_1 - 2\rho_2 t_0 t_1 x_2 + 2\rho_3 t_0^2 x_3 \\ z_3 &= -2\rho_1 (2t_0 - t_1) x_1 + 2\rho_2 (2t_0 + t_1) x_2 - 2\rho_3 t_1 x_3 \end{aligned} \right\} \\ & \left. \begin{aligned} (t_0 - t_1) \rho_1 x_1 &= 2(2t_0 - t_1) z_1 - 2t_0 t_1 z_2 - t_0^2 t_1 z_3 \\ (t_0 + t_1) \rho_2 x_2 &= 2(2t_0 + t_1) z_1 - 2t_0 t_1 z_2 + t_0^2 t_1 z_3 \\ (t_0^2 - t_1^2) \rho_3 x_3 &= -4t_1^2 z_1 + 4t_0^2 t_1 z_2 + 2t_0^2 t_1^2 z_3 \end{aligned} \right\} \\ & \rho_1^2 : \rho_2^2 : \rho_3^2 = (t_0 + t_1) : (-t_0 + t_1) : -2t_1 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

und die Gleichung (8) von  $\alpha$  lautet in den neuen Koordinaten

$$\Sigma \frac{x_i^2}{\alpha_i} \equiv 4\gamma_1(\gamma_1 - \gamma_2 t_0)x_1^2 + 4\gamma_1(\gamma_1 + \gamma_2 t_0)x_2^2 + [4\gamma_1^2 - (\gamma_2^2 - \gamma_1\gamma_3)t_0^2]x_3^2 = 0. \quad (11)$$

Hieraus folgt durch Koeffizientenvergleich

$$\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 = [4\gamma_1^2 + 4\gamma_1\gamma_2 t_0 - (\gamma_2^2 - \gamma_1\gamma_3)t_0^2 + \dots] : [4\gamma_1^2 - 4\gamma_1\gamma_2 t_0 - (\gamma_2^2 - \gamma_1\gamma_3)t_0^2 + \dots] : [4\gamma_1^2 - 4\gamma_2^2 t_0^2], \quad (12)$$

worin die Punkte in den Klammern solche Glieder andeuten, die den Faktor  $t_0^3$  enthalten. Setzt man diese Ausdrücke für die  $\alpha_i$  in (6) ein, so erhält man, nach Potenzen von  $t_0$  geordnet, Ausdrücke von der Form

$$\alpha_i = f_i(\gamma_1\gamma_2\gamma_3) + g_i(\gamma_1\gamma_2\gamma_3) \cdot t_0 + h_i(\gamma_1\gamma_2\gamma_3) \cdot t_0^2 + \dots \quad (13)$$

Hierin ist  $f_1 = f_2 = f_3$ ; denn setzt man in (12)  $t_0 = 0$ , so ist  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$  und dies ergibt in (6)  $\alpha'_1 = \alpha'_2 = \alpha'_3$  und in (13)  $\alpha'_i = f_i(\gamma_1\gamma_2\gamma_3)$ , also ist  $f_1 = f_2 = f_3$ . Ersetzt man ferner  $t_0$  durch  $-t_0$ , so bleibt nach (12)  $\alpha_3$  fest, während sich  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  vertauschen, also ist zufolge (13)  $g_3 = 0$  und  $g_1 = -g_2$ . Wir können also

$$\underline{f_1 = f_2 = f_3 = f, \quad g_1 = -g_2 = g, \quad g_3 = 0} \quad (13a)$$

setzen.

Ersetzt man nun in der Gleichung

$$\alpha'_2 \alpha'_3 x_1^2 + \alpha'_3 \alpha'_1 x_2^2 + \alpha'_1 \alpha'_2 x_3^2 = 0$$

des Kegelschnitts  $\alpha'$ , der  $\alpha$  entspricht, die  $\alpha'_i$  durch die Ausdrücke (13) und die  $x_i$  gemäß (10) durch die  $z_i$ , so erhält man nach Multiplikation der Gleichung mit  $2(t_0^2 - t_1^2)t_1$

$$[f_2 + g_2 t_0 + h_2 t_0^2 + \dots][f_3 + g_3 t_0 + h_3 t_0^2 + \dots] \cdot 2(t_0 + t_1)t_1 \cdot [2(2t_0 - t_1)z_1 - 2t_0 t_1 z_2 - t_0^2 t_1 z_3]^2 + \dots = 0.$$

Hier verschwinden zufolge (13a) die Koeffizienten von  $t_0^0$  und  $t_0^1$ ; nach Division durch  $t_0^2$  und Grenzübergang  $t_0 \rightarrow 0$  verschwinden die Glieder, die  $t_0$  in einer höheren als der zweiten Potenz enthielten und man erhält die Gleichung des  $\gamma$  entsprechenden Kegelschnitts  $\gamma'$ , nämlich

$$[t_1 f (2h_3 - h_1 - h_2) + 2t_1 g^2 + 6fg] z_1^2 - 4t_1 fg z_1 z_2 + 2t_1 f^2 (z_2^2 + 2z_1 z_3) = 0.$$

Vergleicht man dies mit

$$(\gamma_2^2 - \gamma_1 \gamma_3) z_1^2 - 2\gamma_1 \gamma_2 z_1 z_2 + \gamma_1^2 (z_2^2 + 2z_1 z_3) = 0,$$

so erhält man die Formel für den Grenzübergang  $\mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{S}_2$ , nämlich

$$\underline{\gamma'_1 : \gamma'_2 : \gamma'_3 = 2f : 2g : \left[ (h_1 + h_2 - 2h_3) - \frac{3(\gamma_2^2 - \gamma_1\gamma_3)g}{2\gamma_1\gamma_2} \right]}. \quad (14)$$

### 11. Über weitere eineindeutige involutorische Kegelschnittverwandtschaften, die sich mit Hilfe eines festen Kegelschnitts definieren lassen.

Wenn eine Kegelschnittverwandtschaft mit Hilfe eines festen Kegelschnitts  $k$  definiert werden soll, so steht zunächst fest, daß das gemeinsame Poldreieck entsprechender Kegelschnitte  $\alpha$  und  $\alpha'$  auch Poldreieck von  $k$  sein muß. Denn hätten  $\alpha$  und  $k$  das gemeinsame Poldreieck  $\Omega$ , dagegen  $\alpha'$  und  $k$  ein anderes gemeinsames Poldreieck  $\Omega'$ , so müßte es gelingen, aus der Kenntnis von  $k$ ,  $\alpha$  und  $\Omega$  heraus das neue Poldreieck  $\Omega'$  festzulegen, was aber offenbar nicht möglich ist. Dies zeigt, daß der bei der Untersuchung von  $\Sigma$ ,  $\Gamma$  und  $\Delta$  eingeschlagene Weg, die Kegelschnittverwandtschaften zunächst in einem Bund  $\mathfrak{S}$  zu behandeln und auf  $\mathfrak{S}$  die automorphen Kollineationen von  $k$  auszuüben, in der Natur der Sache begründet ist. Wir untersuchen also zunächst eine Kegelschnittverwandtschaft in einem Bund  $\mathfrak{S}$ , gewinnen daraus durch Grenzübergang die Verwandtschaft in einem System  $\mathfrak{S}_1$  bzw.  $\mathfrak{S}_2$  (wo sich  $\alpha$  und  $k$  berühren bzw. oskulieren) und gelangen von da aus zur Verwandtschaft aller  $\infty^5$  Kegelschnitte in der Ebene, indem wir auf den betrachteten Bund  $\mathfrak{S}$ , ferner auf die Systeme  $\mathfrak{S}_1$  und  $\mathfrak{S}_2$  alle automorphen Kollineationen von  $k$  ausüben.

Um nun eine neue involutorische Kegelschnittverwandtschaft zu gewinnen, die sich mit Hilfe eines festen Kegelschnitts  $k$  definieren läßt, kann man zwei Kegelschnitte  $\alpha$  und  $\alpha'$  einander dann zuordnen, wenn irgendein mit dem Kegelschnittpaar  $\alpha, \alpha'$  kovariant verbundener Kegelschnitt  $k$  fest vorgegeben ist. Bei  $\Sigma$  war  $k$  einer jener vier Kegelschnitte, durch deren Polarität sich  $\alpha$  und  $\alpha'$  vertauschen, bei  $\Gamma$  und  $\Delta$  war  $k$  die harmonische Kurve 2. Ordnung bzw. 2. Klasse von  $\alpha$  und  $\alpha'$ . Es gibt aber noch unendlich viele andere Kegelschnitte  $k$ , die mit einem Kegelschnittpaar  $\alpha, \alpha'$  kovariant verknüpft sind. Legt man z. B. in jedem Schnittpunkt von  $\alpha$  und  $\alpha'$  die Tangente an jeden der beiden Kegelschnitte und bestimmt deren Pol bezüglich des anderen Kegelschnitts, so liegen diese acht Pole auf einem Kegelschnitt  $k$  des durch  $\alpha$  und  $\alpha'$  bestimmten Bundes. Hält

man diesen Kegelschnitt  $k$  fest und variiert  $\alpha$ , so variiert auch  $\alpha'$ , aber die so gegebene involutorische Kegelschnittverwandtschaft ist, wie eine nähere Untersuchung zeigt, eindreideutig. Allgemein wird man auf dem angegebenen Weg meistens zu mehrdeutigen involutorischen Kegelschnittverwandtschaften gelangen, die aber weniger Interesse verdienen.

Will man eineindeutige involutorische Kegelschnittverwandtschaften aufsuchen, so empfiehlt es sich vielmehr, von der Ebene  $\mathfrak{B}$  auszugehen, auf deren Punkte wir die Kegelschnitte des Bundes abgebildet haben. Jeder eineindeutigen involutorischen Kegelschnittverwandtschaft im Bund entspricht in  $\mathfrak{B}$  eine eineindeutige involutorische Punktverwandtschaft. Die Kegelschnittverwandtschaft soll durch den festen Kegelschnitt  $k$  allein definierbar sein, daher muß sich die zugehörige Punktverwandtschaft in  $\mathfrak{B}$  allein mit Hilfe des Dreiecks  $\Pi (P_1P_2P_3)$  und des Punktes  $K$  definieren lassen.

Damit erhält man sofort einen Einblick in die Gesamtheit der Typen aller möglichen involutorischen Kegelschnittverwandtschaften. Bertini<sup>1</sup> hat (allerdings unter der Voraussetzung getrennt liegender Hauptpunkte) jene ebenen involutorischen Punktverwandtschaften angegeben, auf die sich alle anderen durch Cremonatransformationen zurückführen lassen, nämlich

1. die harmonische Kollineation (= involutorische Homologie);

2. die Jonquièressche Involution einer gewissen Ordnung  $p+2$  ( $p > 0$ ), mit  $2p+2$  getrennten einfachen Hauptpunkten und einer Koinzidenzkurve der Ordnung  $p+2$  und des Geschlechts  $p$ , die einen  $p$ -fachen Punkt besitzt, der  $(p+1)$ -facher Hauptpunkt der Transformation ist;

3. die Geisersche Involution der Ordnung 8 mit 7 dreifachen Hauptpunkten, die eine durch die 7 Hauptpunkte doppelt hindurchgehende Koinzidenzkurve 6. Ordnung besitzt. Ihre Punktepaare ergänzen die 7 Hauptpunkte zu 9 assoziierten Punkten einer  $C_3$ ;

4. die Bertinische Involution der Ordnung 17 mit 8 sechsfachen Hauptpunkten, die eine durch die 8 Hauptpunkte dreimal hindurchgehende Koinzidenzkurve 9. Ordnung besitzt.<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Nach E. Pascal, Rep. d. Höh. Math., Bd. II/1, S. 370, bei Bertini, Ann. di Mat. (2), 8, 244 (1877), Lomb. Ist. Rend. (2), 13, 443 (1880).

<sup>2</sup> Siehe z. B. R. Sturm, Geometrische Verwandtschaften, Bd. IV, S. 105—107.

Ihre Punktepaare haben die Eigenschaft, daß alle rationalen  $C_6$ , die in dem einen Punkt des Paares und in den 8 Hauptpunkten Doppelpunkte haben, auch im anderen Punkt des Paares einen Doppelpunkt haben, d. h. ihre Punktepaare ergänzen die 8 Hauptpunkte zu 10 Doppelpunkten einer rationalen  $C_6$ .

Es wird sich nun darum handeln, unter den Punktverwandtschaften dieser vier Typen jene auszusuchen, die sich in der Ebene  $\mathfrak{P}$  allein mit Hilfe des Dreiecks  $\Pi$  und des Bildpunkts  $K$  von  $k$  definieren lassen. Alle weiteren eindeutigen involutorischen Kegelschnittverwandtschaften in  $\mathfrak{D}$ , die sich mittels eines festen Kegelschnittes  $k$  definieren lassen, bilden sich dann auf eindeutige involutorische Punktverwandtschaften in  $P$  ab, die offenbar aus den Punktverwandtschaften der vier Typen durch Ausübung von Cremonatransformationen in  $\mathfrak{P}$  hervorgehen, die selbst wieder mit Hilfe des Dreiecks  $\Pi$  und des Punktes  $K$  definierbar sind.

Wir untersuchen im folgenden zunächst die harmonische Kollineation in  $\mathfrak{P}$  sowie die Jonquièresschen Transformationen der ersten vier Ordnungen, die sich in  $\mathfrak{P}$  mittels  $K$  und  $\Pi$  definieren lassen. Diese Verwandtschaften werden sich als Sonderfälle der Geiserschen Verwandtschaft in  $\mathfrak{P}$  erweisen. Die zentrale Stellung der Geiserschen Punktverwandtschaft für das vorliegende Thema wird sich außerdem darin zeigen, daß zum Schluß nachgewiesen wird, daß auch die durch  $K$  und  $\Pi$  definierbaren Bertinischen Verwandtschaften in  $\mathfrak{P}$  (zu denen auch  $\Sigma$ ,  $\Gamma$  und  $\Delta$  gehören) Sonderfälle der Geiserschen Verwandtschaft sind.

Auf solche Kegelschnittverwandtschaften, die sich als Produkt von bereits besprochenen Kegelschnittverwandtschaften darstellen lassen, wie es z. B. bei  $\Delta = \Sigma\Gamma\Sigma$  der Fall war, soll dabei nicht eingegangen werden. Ebensowenig gehen wir auf die mannigfachen Sonderfälle ein, die sich ergeben, wenn  $k$  eine zerfallene Kurve 2. Ordnung oder 2. Klasse ist.

## 12. Die Kegelschnittverwandtschaft $\Lambda^1$ , die sich auf eine harmonische Kollineation in $\mathfrak{P}$ abbildet.

### A. Die Verwandtschaft $\Lambda^1$ in $\mathfrak{S}$ .

Eine harmonische Kollineation ist durch ihr Zentrum und ihre Achse bestimmt. Sollen sich Zentrum und Achse mit Hilfe des Punktes  $K$  und des Dreiecks  $\Pi$  definieren lassen, so kommt als Zentrum nur  $K$  in Frage und als Achse nur die Gerade  $\Delta_e$ .

Diese harmonische Kollineation  $(K, \Delta_e)$  in  $\mathfrak{P}$  sowie die ihr in  $\mathfrak{D}$  entsprechende Kegelschnittverwandtschaft nennen wir  $\Lambda^1$ . In  $\mathfrak{P}_0$  liegt die gewöhnliche Spiegelung an  $K$  vor.

Aus den Eigenschaften von  $\Lambda^1$  in  $\mathfrak{P}$  folgen sofort die Eigenschaften der Kegelschnittverwandtschaft  $\Lambda^1$  in  $\mathfrak{D}$ . Jede  $k$  enthaltende Schar geht in sich über; in ihr bilden die Kegelschnitte eine Involution; deren Festkegelschnitte sind  $k$  und jener Kegelschnitt der Schar, der  $k$  harmonisch eingeschrieben ist (Bildpunkt auf  $\Delta_e$ ). Jede Grundtangente dieser Schar enthält also eine Involution von Berührungspunkten; deren Doppelpunkte sind die Berührungspunkte mit  $k$  und mit dem  $k$  harmonisch eingeschriebenen Kegelschnitt der Schar. Dies dient zur Vervollständigung der Kegelschnittverwandtschaft in  $\mathfrak{D}$ .

In  $\mathfrak{P}$  schneiden sich entsprechende Geraden auf  $\Delta_e$ . In  $\mathfrak{D}$  sind daher jene Linienelementquadrupel entsprechender Kegelschnitte  $\alpha$  und  $\alpha'$ , deren Diagonaldreieck  $\Omega$  ist, einander so zugeordnet, daß je zwei entsprechende Quadrupel einen  $k$  harmonisch eingeschriebenen Kegelschnitt einhüllen.

$k$  geht durch  $\Lambda^1$  in sich über, seine Linienelemente bleiben einzeln fest. Weiters geht jeder  $k$  harmonisch eingeschriebene Kegelschnitt in sich über, seine Linienelementquadrupel mit dem Diagonaldreieck  $\Omega$  erfahren eine Involution, in welcher das mit  $k$  gemeinsame Tangentenquadrupel und das Grundtangentenquadrupel der Schar  $\Delta_e$  festbleiben.

In  $\mathfrak{P}$  erfahren die Punkte von  $\Delta_u$  und  $\Theta_e$  je eine Involution mit dem Zentrum  $K$  und den Festpunkten  $K^i$ . In  $\mathfrak{D}$  werden daher die  $k$  harmonisch umschriebenen Kegelschnitte, ebenso die  $k$  eingeschriebenen Kegelschnitte untereinander vertauscht, wobei die gemeinsamen Tangenten entsprechender Kegelschnitte auch  $k$  berühren. Die mit  $k$  verbundenen Kegelschnitte  $k^1$  und  $k^2$  bleiben einzeln fest.

$\Lambda^1$  hat in  $\mathfrak{P}$  keinen Hauptpunkt, dennoch ist die Kegelschnittverwandtschaft  $\Lambda^1$  in  $\mathfrak{D}$  nicht ausnahmslos eineindeutig, da dem Punkt  $P_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) in  $\mathfrak{P}$  der Bildpunkt  $L_i$  eines der drei harmonischen Kegelschnitte des Büschels  $\Delta_u$  (Abb. 3) entspricht; dabei entsprechen einander die Linienelemente von  $P_i$  und  $L_i$ . Einem Geradenpaar mit dem Doppelpunkt  $O_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) in  $\mathfrak{D}$  entspricht also ein Linienelementquadrupel des harmonischen Kegelschnitts  $l_i$  des Büschels  $\Delta_u$ . Das Geradenpaar und das ihm entsprechende Linienelementquadrupel umhüllen wieder einen  $k$  harmonisch eingeschriebenen Kegelschnitt.

Dagegen entspricht einer zerfallenen Kurve 2. Klasse  $\alpha$  (Träger sei z. B.  $\alpha_1$ , Bildpunkt also auf  $p_1$ ) ein Kegelschnitt  $\alpha'$  der durch  $l_2$  und  $l_3$  bestimmten Schar, wobei wieder  $\alpha$ ,  $\alpha'$  und  $k$  einer Schar angehören; denn in  $\mathfrak{P}$  entspricht der Geraden  $p_1$  die Gerade  $[L_2 L_3]$ .

Einer allgemeinen linearen Schar in  $\mathfrak{D}$  entspricht natürlich wieder eine lineare Schar, die mit der gegebenen Schar einen  $k$  harmonisch eingeschriebenen Kegelschnitt gemein hat. Einem allgemeinen Büschel entspricht eine (2, 4)-Reihe, die die harmonischen Kegelschnitte des Büschels  $\Delta_u$  enthält.

Eine Kegelschnittreihe des Bundes bleibt bei  $\Lambda^1$  fest, wenn ihr Bild in  $\mathfrak{P}$  eine zu  $\Delta_e$  bzw.  $K$  projektiv-symmetrische Kurve ist (bei  $\mathfrak{P}^0$ : wenn  $K$  Mittelpunkt der Bildkurve ist).

Da in  $\mathfrak{P}$  z. B. der Geraden  $p_1$  ( $\alpha_1 = 0$ ) die Gerade  $[L_2 L_3]$ , nämlich  $-\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0$ , entspricht, ist die Verwandtschaft durch

$$\underline{\alpha'_1 : \alpha'_2 : \alpha'_3 = (-\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3) : (2\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3) : (2\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3)} \quad (1)$$

gegeben. Die Isologe eines Punktes  $\lambda$  in  $\mathfrak{P}$  ist natürlich seine Verbindungsgerade mit  $K$ ; die Dualisologe eines Punktes  $\bar{\lambda}$  ist die  $C_3$

$$\bar{\lambda}_2 \bar{\lambda}_3 \alpha_1 (\alpha_2 - \alpha_3) (-\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3) + \bar{\lambda}_3 \bar{\lambda}_1 \alpha_2 (\alpha_3 - \alpha_1) (2\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3) + \bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_2 \alpha_3 (\alpha_1 - \alpha_2) (2\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3) = 0. \quad (2)$$

Diese  $C_3$  geht durch  $P_i$ ,  $L_i$ ,  $K$ ,  $\bar{\lambda}$  und den Bildpunkt  $\bar{\lambda}'$  von  $\bar{\lambda}$ . Ihre Tangente in  $K$  geht durch den Bildpunkt des zu  $\bar{\lambda}$  bezüglich  $k$  polaren Kegelschnitts; weiters berührt die  $C_3$  in  $\bar{\lambda}$  die durch  $\bar{\lambda}$  und  $\bar{\lambda}'$  gelegte Umlinie.

### B. Die Verwandtschaft $\Lambda^1$ in $\mathfrak{S}_1$ .

Nach dem in 9. E. gegebenen Verfahren findet man, daß  $\Lambda^1$  im System  $\mathfrak{S}_1$  in die Verwandtschaft

$$\underline{\beta'_1 : \beta'_2 : \beta'_3 = (\beta_1 + 4\beta_2) : (2\beta_1 - \beta_2) : -3\beta_3} \quad (3)$$

übergeht. Dies ist in der Bildebene  $\mathfrak{P}_1$  der Kegelschnitte von  $\mathfrak{S}_1$  ebenfalls eine harmonische Kollineation, ihr Zentrum ist  $K(2, 1, 0)$ , die Achse ist  $\Delta_e(\beta_1 + \beta_2 = 0)$ . Es treten aber einige Unterschiede gegenüber der Verwandtschaft in einem allgemeinen Bund auf. Der Geraden  $\Delta_u(\beta_1 + 4\beta_2 = 0)$  in  $\mathfrak{P}_1$  entspricht die Gerade  $p_1$ , der Geraden  $\Theta_e(2\beta_1 - \beta_2 = 0)$  die Gerade  $p_2$ , d. h. in  $\mathfrak{D}_1$  entsprechen den  $k$  harmonisch umschriebenen

Kegelschnitten die auf  $o_1$  gelegenen Punktepaare des Systems  $\mathfrak{S}_1$ , während den  $k$  eingeschriebenen Kegelschnitten jene zerfallenen Kurven 2. Klasse von  $\mathfrak{S}_1$  entsprechen, die aus dem Punkt  $O_3$  und einem weiteren Punkt auf  $o_1$  bestehen. Dabei gehören entsprechende Kegelschnitte  $\beta$  und  $\beta'$  einer linearen Schar an, die auch  $k$  enthält. Allgemein entspricht einer Schar von Kegelschnitten in  $\mathfrak{S}_1$ , die sich in  $O_3$  hyperoskulieren, wieder eine solche Schar. Insbesondere werden die Kegelschnitte von  $\mathfrak{S}_1$ , die  $k$  in  $O_3$  hyperoskulieren, untereinander vertauscht, wobei  $k$  und die aus dem doppelt gezählten Punkt  $O_3$  bestehende zerfallene Kurve 2. Klasse festbleiben.

Ebenso vertauschen sich die Kegelschnitte untereinander, die  $k$  in  $O_3$  und  $O_1$  berühren, es bleiben dabei  $k$  und der  $k$  harmonisch eingeschriebene Kegelschnitt dieser Schar fest.

Die weiteren Eigenschaften von  $\Lambda^1$  in  $\mathfrak{S}_1$  stimmen mit denen von  $\Lambda^1$  in einem allgemeinen Bund  $\mathfrak{S}$  überein.

### C. Die Verwandtschaft $\Lambda^1$ in $\mathfrak{S}_2$ .

Ferner findet man nach dem in 10. C. gegebenen Verfahren, daß  $\Lambda^1$  im System  $\mathfrak{S}_2$  in die Verwandtschaft

$$\underline{\gamma'_1 : \gamma'_2 : \gamma'_3} = -\gamma_1 : \gamma_2 : \gamma_3 \quad (4)$$

übergeht. Dies ist die harmonische Kollineation mit dem Zentrum  $K = P_1$  und der Achse  $\Delta_e = p_1$  (Abb. 16). Hier geht  $p_1$  in  $\mathfrak{P}_2$  in sich über, d. h. in  $\mathfrak{D}_2$  geht jede zerfallene Kurve 2. Klasse (bestehend aus  $O_3$  und einem weiteren Punkt von  $o_1$ ) in sich über. Jedem  $k$  hyperoskulierenden Kegelschnitt entspricht ein ebensolcher, denn in  $\mathfrak{P}_2$  geht die Gerade  $[P_3K] = p_2$  in sich über. Allgemeiner entspricht einer Schar von Kegelschnitten aus  $\mathfrak{S}_2$ , die sich untereinander hyperoskulieren, wieder eine solche Schar. Im übrigen treten keine Abweichungen von der Verwandtschaft  $\Lambda^1$  im allgemeinen Bund  $\mathfrak{S}$  ein.

### 13. Die Kegelschnittverwandtschaften, die sich auf perspektive Jonquièressche Punktverwandtschaften in $\mathfrak{P}$ abbilden.

Eine perspektive Jonquièressche Punktverwandtschaft vom Grad  $n$  ( $\geq 2$ ) ist durch ihre Koinzidenzkurve gegeben. Diese ist von  $n$ . Ordnung und vom Geschlecht  $n-2$ , sie hat einen  $(n-2)$ -fachen Punkt und es werden einander je zwei Punkte der Ebene zugeordnet, die auf einem Strahl durch den  $(n-2)$ -fachen Punkt liegen und

die beiden restlichen Schnittpunkte des Strahls mit der Koinzidenzkurve  $C$  harmonisch trennen.

Der ausgezeichnete  $(n-2)$ -fache Punkt von  $C$  kann in der Ebene  $\mathfrak{P}$  nur der Punkt  $K$  sein, wenn die zugehörige Kegelschnittverwandtschaft in  $\mathfrak{D}$  allein mit Hilfe des Kegelschnitts  $k$  definiert sein soll.  $K$  ist dann  $(n-1)$ -facher Hauptpunkt der Transformation in  $\mathfrak{P}$ , die übrigen  $2(n-1)$  getrennten einfachen Hauptpunkte sind die Berührungspunkte der Tangenten aus  $K$  an  $C$ .  $C$  muß allein mit Hilfe des Dreiecks  $\Pi$  und des Punktes  $K$  definiert sein,  $C$  ist also triangulär-symmetrisch (d. h.  $C$  geht durch die Transformation  $\alpha_1 \rightarrow \alpha_2$ ,  $\alpha_2 \rightarrow \alpha_3$ ,  $\alpha_3 \rightarrow \alpha_1$  in sich über). Dann liegen natürlich auch die  $2(n-1)$  getrennten einfachen Hauptpunkte triangulär-symmetrisch. Als einfache Hauptpunkte kommen daher nur die Bildpunkte  $K^1, K^2$  der mit  $k$  verbundenen Kegelschnitte oder irgendwelche Tripel oder auch Sextupel von Punkten in Frage, die triangulär-symmetrisch gelegen sind. Während zu den  $2(n-1)$  einfachen Hauptpunkten die Verbindungsgeraden mit  $K$  als ihre Hauptgeraden gehören, ist die Hauptkurve von  $K$  eine Kurve der Ordnung  $n-1$ , die in  $K$  einen  $(n-2)$ -fachen Punkt hat.

Nun besprechen wir einige der Kegelschnittverwandtschaften, die sich für die ersten Werte von  $n$  ergeben und von denen sich später zeigen wird, daß sie gerade jene Verwandtschaften sind, die sich als Sonderfälle bzw. Ausartungsfälle einer Geiserschen Verwandtschaft ergeben.

### A. Die Kegelschnittverwandtschaft $\Lambda^2$ .

Für  $n = 2$  haben wir nur zwei einfache Hauptpunkte; diese können nur  $K^1$  und  $K^2$  sein,  $C$  ist also einer der  $\infty^1$  Kegelschnitte in  $\mathfrak{P}$ , die in  $K^i$  ( $i = 1, 2$ ) die Gerade  $[K K^i]$  berühren, z. B.  $\Delta_u$  oder  $\Theta_e$ . (In  $\mathfrak{P}^0$  ist  $C$  ein Kreis mit der Mitte  $K$ .) Die Verwandtschaft ist in  $\mathfrak{P}$  die projektive Inversion an  $C$  mit dem Zentrum  $K$ , wir nennen sie  $\Lambda^2$ .

Nehmen wir etwa  $\Delta_u$  als Koinzidenzkurve, so folgt für die zugehörige Kegelschnittverwandtschaft in  $\mathfrak{D}$ , daß jede  $k$  enthaltende Schar in sich übergeht und ihre Kegelschnitte so vertauscht werden, daß die beiden in der Schar enthaltenen  $k$  harmonisch umschriebenen Kegelschnitte festbleiben. Auf jeder Grundtangente der Schar bilden die Berührungspunkte entsprechender Kegelschnitte eine Involution, die Doppelpunkte sind die Berührungspunkte der  $k$  harmonisch umschriebenen Kegelschnitte. Da die

Berührungspunkte der beiden Kegelschnitte des Büschels  $\Delta_u$ , die der angenommenen Schar angehören, leicht bestimmt werden können, ist die Kegelschnittverwandtschaft auch in  $\mathfrak{D}$  leicht zu vervollständigen.

Da jeder Punkt von  $\Delta_u$  in  $\mathfrak{P}$  festbleibt und eine Involution entsprechender Linienelemente trägt, folgt, daß jeder nicht-zerfallene  $k$  harmonisch umschriebene Kegelschnitt in  $\mathfrak{D}$  festbleibt und seine Linienelementquadrupel eine Involution erfahren, in der das Tangentenquadrupel in den Grundpunkten des Büschels  $\Delta_u$  sowie das Quadrupel der mit  $k$  gemeinsamen Tangenten festbleibt. Da ebenso die Punkte  $P_i$  in  $\mathfrak{P}$  eine Involution entsprechender Linienelemente tragen, folgt, daß jeder zerfallenen Kurve 2. Ordnung eine ebensolche mit demselben Doppelpunkt entspricht. In dieser Involution entsprechender Geradenpaare in  $\mathfrak{D}$  bleiben die Scheiteltangenten von  $k$  und die aus ihnen durch das „Konjugium“ hervorgehenden Geradenpaare des Büschels  $\Delta_u$  fest.

Zum Punkt  $K$  in  $\mathfrak{P}$  gehört die Hauptgerade  $\Delta_e$ , in  $\mathfrak{D}$  entspricht  $k$  jeder  $k$  harmonisch eingeschriebene Kegelschnitt. Zum Hauptpunkt  $K^i$  gehört die Hauptgerade  $[\mathfrak{K}K^i]$ .

In  $\mathfrak{P}$  entspricht der Geraden  $p_1$  der Kegelschnitt durch  $K$ , der  $p_2$  in  $P_3$  und  $p_3$  in  $P_2$  berührt. Deutet man  $k_1^0$  als Kreispunktepaar einer euklidischen Metrik, so ist  $k$  in  $\mathfrak{D}$  ein Kreis  $k$  von bestimmtem Radius  $r$ , der  $p_1$  entsprechende Kegelschnitt in  $\mathfrak{P}$  ist dann die Bildkurve der Reihe aller mit  $k$  flächengleichen Kegelschnitte, während den Punktepaaren in  $\mathfrak{D}$ , deren Bildpunkte auf  $p_2$  oder  $p_3$  liegen, die Kegelschnitte entsprechen, bei denen der eine oder andere Hauptkrümmungsradius  $= r$  ist.<sup>1</sup> Ferner geht in  $\mathfrak{P}$  der Kegelschnitt durch  $K^1$  und  $K^2$ , der in  $P_2$  bzw.  $P_3$  die Tangente  $[P_2K]$  bzw.  $[P_3K]$  hat, in sich über. Er stellt bei derselben Deutung von  $k_1^0$  als Kreispunktepaar eine Reihe von Kegelschnitten dar, die von  $k$  konstante Tangentialentfernung haben.<sup>1</sup> Ebenso geht in  $\mathfrak{P}$  jeder Kegelschnitt durch  $K^1$ ,  $K^2$ ,  $P_2$ ,  $P_3$ , bei dem der Pol von  $p_1$  auf  $[P_1K]$  liegt, in einen ebensolchen über. Er stellt, wenn wieder  $k_1^0$  das Kreispunktepaar der Ebene  $\mathfrak{D}$  ist, eine Reihe von Kegelschnitten dar, die konstante Tangentialentfernung von jenem Kegelschnitt haben, dessen Bildpunkt in  $\mathfrak{P}$  der Pol von  $p_1$  ist.<sup>1</sup>

Da der Geraden  $p_1$  ( $\alpha_1 = 0$ ) in  $\mathfrak{P}$  der Kegelschnitt  $\alpha_1^2 - \alpha_2 \alpha_3 = 0$  entspricht, der durch  $K$  geht und  $p_2$  in  $P_3$  und  $p_3$  in  $P_2$  berührt, ist die Verwandtschaft  $\Lambda^2$  durch

<sup>1</sup> Vgl. F. Hohenberg, „Über die Kegelschnitte mit gemeinsamen Hauptachsen“, Deutsche Mathematik, Jahrgang 6, Heft 6, S. 533.

$$\underline{\alpha'_1 : \alpha'_2 : \alpha'_3 = (\alpha_1^2 - \alpha_2 \alpha_3) : (\alpha_2^2 - \alpha_3 \alpha_1) : (\alpha_3^2 - \alpha_1 \alpha_2)} \quad (1)$$

gegeben. Im System  $\mathfrak{S}_1$  wird daraus nach 9. E. die Verwandtschaft

$$\underline{\beta'_1 : \beta'_2 : \beta'_3 = 2\beta_1(\beta_1 - 2\beta_2) : -(\beta_1 - 2\beta_2)(\beta_1 + 2\beta_2) : 4(\beta_1 + \beta_2)\beta_3.} \quad (2)$$

Sie ist in  $\mathfrak{P}_1$  die projektive Inversion mit dem Zentrum  $K(2, 1, 0)$  an dem Geradenpaar  $p_1(\beta_1 = 0)$ ,  $\Delta_u(\beta_1 + 4\beta_2 = 0)$ , d. h. es bleibt in  $\mathfrak{D}_1$  jedes auf  $o_1$  gelegene Punktepaar von  $\mathfrak{S}_1$ , ebenso jeder  $k$  harmonisch umschriebene Kegelschnitt fest, und es gehören entsprechende Kegelschnitte  $\beta$  und  $\beta'$  zusammen mit  $k$  einer Schar an.  $k$  entspricht jedem  $k$  harmonisch eingeschriebenen Kegelschnitt. Ferner entspricht  $P_3$  jedem Punkt von  $[P_3K]$ , d. h. in  $\mathfrak{D}_1$  entspricht jedem Kegelschnitt von  $\mathfrak{S}_1$ , der  $k$  in  $O_3$  hyperoskuliert, der Punkt  $O_3$  als zweifach singuläre Kurve 2. Klasse. Weiters vertauschen sich in  $\mathfrak{P}_1$  die Linien-elemente von  $P_2$ , in  $\mathfrak{D}_1$  daher die aus  $o_1$  und einer Geraden durch  $O_2$  bestehenden Geradenpaare.

Im System  $\mathfrak{S}_2$  ergibt sich nach 10. C. die singuläre Verwandtschaft

$$\gamma'_1 : \gamma'_2 : \gamma'_3 = 0 : \gamma_2 : \gamma_3, \quad (3)$$

die jedem Punkt  $\gamma$  den Schnittpunkt von  $[K\gamma]$  mit  $p_1$  zuordnet. Es entspricht also einem Punktepaar, bestehend aus  $O_3$  und einem weiteren Punkt der Tangente in  $O_3$  an  $k$ , jeder Kegelschnitt der durch dieses Punktepaar und  $k$  bestimmten Schar. Jedem Punkt der Geraden  $[P_3K]$  entspricht  $P_3$ , also folgt wie in  $\mathfrak{S}_1$ , daß jedem  $k$  hyperoskulierenden Kegelschnitt der doppeltgezählte Punkt  $O_3$  entspricht.

Die Dualisologe eines Punktes  $\bar{\lambda}$  bei  $\Lambda^2$  ist im Bund  $\mathfrak{S}$  die  $C_4$

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_2 \bar{\lambda}_3 \alpha_1 (\alpha_2 - \alpha_3) (\alpha_1^2 - \alpha_2 \alpha_3) + \bar{\lambda}_3 \bar{\lambda}_1 \alpha_2 (\alpha_3 - \alpha_1) (\alpha_2^2 - \alpha_3 \alpha_1) + \\ + \bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_2 \alpha_3 (\alpha_1 - \alpha_2) (\alpha_3^2 - \alpha_1 \alpha_2) = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Diese  $C_4$  geht durch die Punkte  $P_i$ , und die dortigen Tangenten schneiden sich in  $K$ .  $K$  ist Doppelpunkt der  $C_4$ , die Doppelpunkttangenten gehören der Involution mit den Doppelstrahlen  $[KK^i]$  an. Die  $C_4$  geht ferner durch  $K^i, \bar{\lambda}, \bar{\lambda}'$  und die Punkte  $(0, \pm\sqrt{\bar{\lambda}_2}, \sqrt{\bar{\lambda}_3}), (\sqrt{\bar{\lambda}_1}, 0, \pm\sqrt{\bar{\lambda}_3}), (\pm\sqrt{\bar{\lambda}_1}, \sqrt{\bar{\lambda}_2}, 0)$ . Sie berührt in  $\bar{\lambda}$  die durch  $\bar{\lambda}$  und  $\bar{\lambda}'$  gelegte Umlinie.

Es gibt aber auch Kurven niedrigerer Ordnung in  $\mathfrak{P}$ , die durch  $\Lambda^2$  in sich übergehen, nämlich (außer den Geraden durch  $K$ ) die Kegelschnitte durch  $K^i$ , bei denen die Tangenten in den beiden letzten Schnittpunkten mit  $\Delta_u$  durch  $K$

gehen (siehe die Deutung der Verwandtschaft in  $\mathfrak{P}^0$ ), ferner die Kurven 3. Ordnung

$$\mu_0 (\alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3 - 3\alpha_1\alpha_2\alpha_3) + \mu_1 \alpha_1^2 (\alpha_2 + \alpha_3) + \mu_2 \alpha_2^2 (\alpha_3 + \alpha_1) + \mu_3 \alpha_3^2 (\alpha_1 + \alpha_2) = 0, \quad (5)$$

bei denen  $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 0$  ist. Diese  $C_3$  gehen durch  $K$  und oskulieren  $\Delta_u$  in  $K^1$  und  $K^2$ .

Die Dualisologe eines Punktes  $\bar{\lambda}$  im System  $\mathfrak{S}_1$  ist die  $C_3$

$$\bar{\lambda}_2 \bar{\lambda}_3 \beta_1^2 (\beta_1 - 2\beta_2) + \bar{\lambda}_1^2 \beta_2 \beta_3 (\beta_1 + 2\beta_2) - 2\bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_2 \beta_1^2 \beta_3 = 0. \quad (6)$$

Sie hat in  $P_3$  einen Doppelpunkt, dessen Tangenten harmonisch liegen zu  $p_1$  und dem 4. harmonischen Strahl zu  $p_1$  bezüglich  $p_2$  und  $[P_3 K_1]$  ( $K_1$  ist nach 9. B. das Bild des mit  $k$  vertauschbaren Kegelschnitts des Systems  $\mathfrak{S}_1$ ). Die  $C_3$  geht ferner durch  $K$  und berührt  $p_3$  in  $P_2$ . Auch in  $\mathfrak{S}_1$  gibt es Kurven niedrigerer Ordnung in  $\mathfrak{P}_1$ , die in sich übergehen, z. B. die Kegelschnitte, die  $\Delta_c$  in  $P_3$  berühren und bei denen die Tangenten in den zweiten Schnittpunkten mit den Koinzidenzgeraden  $p_1$  und  $\Delta_u$  durch  $K$  gehen.

### B. Die Kegelschnittverwandtschaft $\Lambda^3$ .

Für  $n = 3$  haben wir vier getrennte einfache Hauptpunkte. Diese lassen sich aber offenbar nicht triangulär-symmetrisch anordnen, also ist eine perspektive Jonquièressche Verwandtschaft in  $\mathfrak{P}$ , die man als Bild einer Kegelschnittverwandtschaft in  $\mathfrak{D}$  auffassen kann, nur möglich, wenn man die Voraussetzung aufgibt, daß die einfachen Hauptpunkte getrennt sind.

Wir nehmen als Koinzidenzkurve eine Kurve 3. Ordnung, deren Gleichung symmetrisch in den  $\alpha_i$  ist. Diese  $C_3$  muß in  $K$  mindestens einen einfachen Punkt haben, denn sonst hätte jede Gerade durch  $K$  drei allgemeine Schnittpunkte mit der  $C_3$  und eine Verwandtschaft der verlangten Art ließe sich nicht definieren. Sie kann aber auch keinen einfachen Punkt in  $K$  haben, denn dessen Tangente müßte allein durch  $K$  und das Dreieck  $\Pi$  definierbar sein, was offensichtlich nicht möglich ist. Also muß die Koinzidenzkurve in  $K$  einen Doppelpunkt haben, dessen Tangenten die Geraden  $[K K^i]$  sind. Dann entsprechen sich auf einem Strahl durch  $K$  je zwei Punkte in  $\mathfrak{P}$ , wenn sie harmonisch liegen zu  $K$  und dem letzten Schnittpunkt des Strahls mit der Koinzidenzkurve. Beispielsweise nehmen wir als Koinzidenzkurve die rationale  $C_3$

$$\begin{aligned} C \equiv \alpha_1 \alpha_2 (\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_2 \alpha_3 (\alpha_2 + \alpha_3) + \alpha_3 \alpha_1 (\alpha_3 + \alpha_1) - \\ - 6\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Sie hat im Doppelpunkt  $K$  die Tangenten  $[K K^i]$ , die Tangenten in  $P_i$  gehen durch  $K_i^{00}$ ,  $K_i^{00}$  sind Wendepunkte. Das Tangentenpaar  $[K K^i]$  des Doppelpunkts  $K$  hat die Gleichung

$$D \equiv \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 - \alpha_2 \alpha_3 - \alpha_3 \alpha_1 - \alpha_1 \alpha_2 = 0. \quad (8)$$

Der Punkt  $(1+t(\alpha_i-1))$  beschreibt bei veränderlichem Parameter  $t$  die Gerade  $[K\alpha]$ ,  $t=0$  ergibt  $K$  und  $t=1$  ergibt den Punkt  $\alpha$ . Für  $t=-2D:(C-2D)$  ergibt sich der restliche Schnittpunkt mit der Koinzidenzkurve, daher (wegen der harmonischen Lage der vier Punkte) für  $t=D:(D-C)$  der Punkt  $\alpha'$  in  $\mathfrak{B}$ , der  $\alpha$  in der Verwandtschaft  $\Lambda^3$  entspricht, nämlich

$$\alpha'_1 : \alpha'_2 : \alpha'_3 = (D\alpha_1 - C) : (D\alpha_2 - C) : (D\alpha_3 - C). \quad (9)$$

$K$  ist der einzige Hauptpunkt der Verwandtschaft in  $\mathfrak{B}$ , das Doppelpunkt tangentenpaar  $D=0$  die zugehörige Hauptkurve. Die Linienelemente der Punkte  $P_i$  bilden eine Involution, deren Doppelstrahlen durch  $K$  und  $K_i^{00}$  gehen, also werden in  $\mathfrak{D}$  die Geradenpaare des Bundes involutorisch vertauscht, wobei die Scheiteltangenten von  $k$  sowie die Scheiteltangenten der mit  $k$  vertauschbaren Kegelschnitte festbleiben. Einer Geraden  $g$  in  $\mathfrak{B}$  entspricht eine  $C_3$ ; im Doppelpunkt  $K$  hat sie dieselben Doppelpunkt tangenten wie  $C$ . Sie geht durch die Schnittpunkte der Geraden mit  $C$ . Die zwei  $C_3$ , die zwei verschiedenen Geraden entsprechen, oskulieren sich mit beiden Ästen in  $K$ . Die Wendepunkte der einer Geraden  $g$  entsprechenden  $C_3$  liegen auf den Geraden  $[K K_i^{00}]$ , d. h. auf den Verbindungsgeraden von  $K$  mit den Wendepunkten von  $C$ . Die gegebene Gerade  $g$  geht durch die harmonische Kollineation mit dem Zentrum  $K$  und der Achse  $\Delta_e$  in die Wendepunktgerade der entsprechenden  $C_3$  über.

Im System  $\mathfrak{S}_1$  wird die Verwandtschaft  $\Lambda^3$  nach 9. E. zur perspektiven harmonischen Kollineation mit dem Zentrum  $K$  und der Achse  $p_1$  (Abb. 14), nämlich

$$\beta'_1 : \beta'_2 : \beta'_3 = \beta_1 : (\beta_1 - \beta_2) : -\beta_3. \quad (10)$$

In  $\mathfrak{B}_1$  bleibt jeder Punkt von  $p_1$  fest, in  $\mathfrak{D}_1$  geht also jedes auf  $o_1$  gelegene Punktepaar von  $\mathfrak{S}_1$  in sich über. In  $\mathfrak{B}_1$  geht jede Gerade durch  $K$  in sich über, in  $\mathfrak{D}_1$  vertauschen sich die Kegelschnitte jeder Schar, die  $k$  enthält, wobei die Berührungspunkte entsprechender

Kegelschnitte auf jeder der beiden einfachen Grundtangente der Schar harmonisch liegen zum Berührungspunkt mit  $k$  und zum Schnittpunkt mit der doppeltgezählten Tangente  $o_1$ . Insbesondere entspricht in  $\mathfrak{P}_1$  die Gerade  $p_3$  sich selbst, in  $\mathfrak{D}_1$  vertauschen sich also die  $k$  doppelt berührenden Kegelschnitte. Da in  $\mathfrak{P}_1$  jeder Geraden durch  $P_2$  eine ebensolche entspricht, geht in  $\mathfrak{D}_1$  jede Schar von Kegelschnitten aus  $\mathfrak{S}_1$ , die sich auf  $o_2$  doppelt berühren, in eine ebensolche Schar über. In  $\mathfrak{P}_1$  entspricht jeder Geraden durch  $P_3$  eine ebensolche, in  $\mathfrak{D}_1$  geht also jede Schar von Kegelschnitten, die sich in  $O_3$  hyperoskulieren, in eine ebensolche über; insbesondere geht die Schar der  $k$  hyperoskulierenden Kegelschnitte in sich über. Weiters entspricht in  $\mathfrak{P}_1$  der Geraden  $\Delta_e$  die Gerade  $\Theta_e$ , in  $\mathfrak{D}_1$  gehen die  $k$  harmonisch eingeschriebenen Kegelschnitte in die  $k$  eingeschriebenen Kegelschnitte über.

Im System  $\mathfrak{S}_2$  wird die Verwandtschaft nach 10. C. zur perspektiven harmonischen Kollineation mit dem Zentrum  $K$  und der Achse  $p_1$  (Abb. 16). In  $\mathfrak{D}_2$  bleibt also jede zerfallene Kurve 2. Klasse fest, die aus  $O_3$  und einem Punkt von  $o_1$  besteht. Die  $k$  hyperoskulierenden Kegelschnitte werden untereinander vertauscht, festbleiben  $k$  und der doppeltgezählte Punkt  $O_3$ . Im übrigen gehören je zwei entsprechende Kegelschnitte  $\gamma$  und  $\gamma'$  zusammen mit  $k$  einer Schar an, wobei auf der von  $o_1$  verschiedenen gemeinsamen Tangente die Berührungspunkte von  $\gamma$  und  $\gamma'$  harmonisch liegen zum Berührungspunkt mit  $k$  und zum Schnittpunkt der Tangente mit  $o_1$ .

### C. Die Kegelschnittverwandtschaft $\Lambda^4$ .

Für  $n = 4$  haben wir, wenn die Kegelschnittverwandtschaft sich auf eine perspektive Jonquièressche Transformation in  $\mathfrak{P}$  abbilden soll, in der Bildebene  $\mathfrak{P}$  den dreifachen Hauptpunkt  $K$  und sechs getrennte einfache Hauptpunkte, die triangulär-symmetrisch angeordnet werden müssen. Als einfache Hauptpunkte können wir zwei der Punkttripel  $P_i$ ,  $K_i$ ,  $K_i^?$ ,  $L_i$  usw. nehmen, es lassen sich aber auch Sextupel von Punkten in  $\mathfrak{P}$  angeben, die triangulär-symmetrisch angeordnet sind und sich nicht in zwei Tripel dieser Art zerlegen lassen.

Besprechen wir ein Beispiel dieser letzteren Art. Wir nehmen als einfache Hauptpunkte in  $\mathfrak{P}$  jene sechs Schnittpunkte von  $\Theta_e$  und  $\Theta_u$ , die von  $K_i$  verschieden sind. Sie seien mit  $M_1, M_2, M_3, N_1, N_2, N_3$  bezeichnet (Abb. 3). Sie sind die Bildpunkte jener sechs von  $k^1, k^2$  verschiedenen Kegelschnitte des Bundes, die  $k$  zugleich eingeschrieben und umschrieben sind.

Eliminiert man aus

$$\Theta_e \equiv \Delta_e^2 - 4\Delta_u = 0$$

und

$$\Theta_u \equiv \Delta_u^2 - 4\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \Delta_e = 0$$

den Ausdruck  $\Delta_u$ , so findet man die Kurve 3. Ordnung

$$\Delta_e^3 - 64\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 = 0,$$

die  $\Theta_e$  nur in den gesuchten sechs Schnittpunkten schneidet.

Aus der Gleichung von  $\Theta_e$  folgt dann

$$\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2 \pm 2\sqrt{\alpha_1 \alpha_2}$$

und durch Einsetzen in die Gleichung der Kurve 3. Ordnung

ergibt sich, wenn  $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = t$  und  $t + \frac{1}{t} = u$  gesetzt wird, die kubische Gleichung  $u^3 - 13u^2 + 51u - 63 = 0$  mit der einfachen

Wurzel  $u = 7$  und der Doppelwurzel  $u = 3$ . Hieraus folgen die sechs von  $K^i$  verschiedenen Schnittpunkte von  $\Theta_u$  und  $\Theta_e$  in  $\mathfrak{P}$ , nämlich

$$M_1(2, 3 - \sqrt{5}, 3 + \sqrt{5}), \quad N_1(2, 3 + \sqrt{5}, 3 - \sqrt{5}),$$

$$M_2(3 + \sqrt{5}, 2, 3 - \sqrt{5}), \quad N_2(3 - \sqrt{5}, 2, 3 + \sqrt{5}),$$

$$M_3(3 - \sqrt{5}, 3 + \sqrt{5}, 2), \quad N_3(3 + \sqrt{5}, 3 - \sqrt{5}, 2).$$

Diese sechs Punkte haben eine besondere Lage in  $\mathfrak{P}$ :  $M_i$  und  $N_i$  vertauschen sich durch  $\Sigma$ , je zwei Punkte  $M_i$  und ebenso je zwei Punkte  $N_i$  liegen auf einer Geraden durch eine Ecke von  $\Pi$ . In  $\mathfrak{D}$  gilt daher: je zwei Kegelschnitte  $m_i$  und  $n_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) sind zueinander polar bezüglich  $k$ ,  $m_1$  und  $m_2$  (ebenso  $n_1$  und  $n_2$ ) berühren sich auf  $o_3$  (und zyklisch weiter).

Die Koinzidenzkurve der Verwandtschaft in  $\mathfrak{P}$  ist jene  $C_4$ , die in diesen sechs Punkten die Verbindungsgeraden mit  $K$  berührt und in  $K$  einen Doppelpunkt hat. Man erhält als Gleichung der Koinzidenzkurve

$$\frac{\alpha_1^4 + \alpha_2^4 + \alpha_3^4 + 5(\alpha_1^3 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_2^3 + \alpha_2^3 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_3^3 + \alpha_3^3 \alpha_1 + \alpha_3 \alpha_1^3) - 36(\alpha_1^2 \alpha_2^2 + \alpha_2^2 \alpha_3^2 + \alpha_3^2 \alpha_1^2) + 25\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)}{=} = 0. \quad (11)$$

Diese hyperelliptische  $C_4$  ist projektiv speziell, denn die Tangenten ihres Doppelpunkts  $K$  gehen durch die Berührungspunkte  $K^1, K^2$  einer der 16 Doppeltangenten, nämlich  $\Delta_e$ .

Die Hauptkurve von  $K$  ist die  $C_3$  mit dem Doppelpunkt  $K$  und den einfachen Punkten  $M_i, N_i$ , sie ist die erste Polare von  $K$  bezüglich der Koinzidenzkurve. Ihre Gleichung ist daher

$$\frac{7(\alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3) - 16(\alpha_1^2 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_2^2 + \alpha_2^2 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_3^2 + \alpha_3^2 \alpha_1 + \alpha_3 \alpha_1^2) + 75 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}{+ \alpha_3^2 \alpha_1 + \alpha_3 \alpha_1^2} + 75 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 = 0. \quad (12)$$

Sie hat ebenfalls den Doppelpunkt  $K$  mit den Tangenten  $[K K^i]$  und geht außerdem durch die Punkte  $K_1^{00}$ .

Man könnte nun die Gleichungen der Verwandtschaft so gewinnen, daß man zu einem angenommenen Punkt  $\alpha$  in  $\mathfrak{P}$  die Gerade  $[K\alpha]$  mit der Koinzidenzkurve schneidet und den 4. harmonischen Punkt zu  $\alpha$  bezüglich der beiden von  $K$  verschiedenen Schnittpunkte bestimmt. Einfacher ist es jedoch, die Gerade  $\alpha_1 = 0$  zu transformieren. Einer Geraden in  $\mathfrak{P}$  entspricht eine  $C_4$  mit dem dreifachen Punkt  $K$ , die einfach durch die sechs einfachen Hauptpunkte und durch die Schnittpunkte der gegebenen Geraden mit der Koinzidenzkurve geht. Die Gleichung der  $\alpha_1 = 0$  entsprechenden  $C_4$  gibt dann den Ausdruck für  $\alpha'_1$  an; man erhält

$$\alpha'_1 = \frac{-6\alpha_1^4 + \alpha_2^4 + \alpha_3^4 + 24\alpha_1^3\alpha_2 + 24\alpha_1^3\alpha_3 - 2\alpha_2^3\alpha_1 - 2\alpha_3^3\alpha_1 - 5\alpha_2^3\alpha_3 + 5\alpha_3^3\alpha_2 - 20\alpha_1^2\alpha_2^2 - 20\alpha_1^2\alpha_3^2 - 36\alpha_2^2\alpha_3^2 + 44\alpha_1\alpha_2^2\alpha_3 + 44\alpha_1\alpha_2\alpha_3^2 - 50\alpha_1^2\alpha_2\alpha_3}{+ \alpha_3^2 \alpha_1 + \alpha_3 \alpha_1^2} \quad (13)$$

Die Ausdrücke für  $\alpha'_2$  und  $\alpha'_3$  folgen daraus durch zyklisches Vorrücken. Dem Punkt  $P_1$  in  $\mathfrak{P}$  entspricht also der Punkt  $(-6, 1, 1)$ ; da sich die Linienelemente beider Punkte in  $\mathfrak{P}$  paarweise entsprechen, bilden sich in  $\mathfrak{D}$  die Geradenpaare mit dem Träger  $O_1$  auf die Tangentenquadrupel des Kegelschnitts  $x_1^2 - 6x_2^2 - 6x_3^2 = 0$  ab, deren Diagonaldreieck  $\Omega$  ist.

In  $\mathfrak{P}$  geht  $\Theta_e$  in sich über (Involution mit den Festpunkten  $K^i$ ), in  $\mathfrak{D}$  vertauschen sich also die  $k$  eingeschriebenen Kegelschnitte. Der Verbindungsgeraden von zwei einfachen Hauptpunkten entspricht in  $\mathfrak{P}$  der Kegelschnitt durch die übrigen fünf Hauptpunkte. Die beiden Schnittpunkte der Geraden mit dem Kegelschnitt gehören der Koinzidenzkurve an; die in  $K$  gelegte Tangente des Kegelschnitts schneidet die Gerade in einem Punkt der Hauptkurve von  $K$ . Da man somit in  $\mathfrak{P}$  auf jeder Geraden  $g$  durch  $K$  mehrere Paare der Involution auf  $g$  gegeben hat, läßt sich die Verwandtschaft in  $\mathfrak{P}$  leicht linear vervollständigen, ohne daß die Koinzidenzkurve vorliegen muß.

Die weitere Behandlung der Verwandtschaft wird zu kompliziert. Es sei nur noch erwähnt, daß in  $\mathfrak{P}$  jede Kurve 3. Ordnung  $C_3$  durch die sechs einfachen Hauptpunkte und durch  $K$  in sich übergeht; denn es entspricht ihr eine  $C_{12}$ , von der sich die sechs Hauptgeraden und die Hauptkurve von  $K$  abspalten, also eine  $C'_3$ , die ebenfalls durch die Punkte  $M_i, N_i, K$  geht; da die gegebene  $C_3$  die entsprechende  $C'_3$  noch in vier weiteren Punkten schneidet, die auf der Koinzidenzkurve liegen, sind  $C_3$  und  $C'_3$  miteinander identisch.

In  $\mathfrak{S}_1$  wird aus der Verwandtschaft  $\Lambda^4$  nach 9. E. die projektive Inversion mit dem Zentrum  $K$  an dem Geradenpaar  $6\beta_1^2 - 6\beta_1\beta_2 - \beta_2^2 = 0$ , das aus der Koinzidenzkurve (11) nach Abspaltung der doppeltgezählten Geraden  $[P_3 K]$  hervorgeht, nämlich

$$\frac{\beta'_1 : \beta'_2 : \beta'_3}{: (-9\beta_1 + 7\beta_2) \beta_3} = \frac{(\beta_1 - 2\beta_2)(3\beta_1 + \beta_2) : 3(\beta_1 - 2\beta_2)(2\beta_1 - \beta_2)}{(14)} \quad (14)$$

In  $\mathfrak{P}$  entspricht dem Punkt  $K$  jeder Punkt der Polaren  $9\beta_1 - 7\beta_2 = 0$  von  $K$  bezüglich des Geradenpaares, während dem Punkt  $P_3$  jeder Punkt von  $[P_3 K]$  entspricht. Die  $k$  entsprechenden Kegelschnitte bilden also eine lineare Schar von Kegelschnitten, die sich hyperoskulieren, dem doppeltgezählten Punkt  $O_3$  entspricht jeder  $k$  hyperoskulierende Kegelschnitt. Anders als im System  $\mathfrak{S}$  entspricht hier der Geraden  $\Theta_e$  die Gerade  $p_2$ , d. h. in  $\mathfrak{D}_1$  entsprechen den  $k$  eingeschriebenen Kegelschnitten die aus  $O_3$  und einem weiteren Punkt von  $o_2$  bestehenden Punktepaare.

Im System  $\mathfrak{S}_2$  wird die Verwandtschaft  $\Lambda^4$ , wie sich aus 10. C. ergibt, singular.

#### D. Die Kegelschnittverwandtschaft $\Lambda^{22}$ .

Zu einer Verwandtschaft, bei der sich die Umlinien in  $\mathfrak{P}$  bzw. die Kegelschnittbüschel in  $\mathfrak{D}$  in einfacherer Weise transformieren, gelangt man im Fall  $n = 4$ , wenn man die Voraussetzung aufgibt, daß die einfachen Hauptpunkte getrennt sind.

Wir lassen also die sechs einfachen Hauptpunkte paarweise zusammenfallen, am zweckmäßigsten in die Punkte  $P_i$ , und nennen die so entstehende Verwandtschaft  $\Lambda^{22}$ . Die Koinzidenzkurve hat dann Doppelpunkte in  $K$  und  $P_i$ , sie zerfällt also in zwei Kegelschnitte, von denen wir den einen noch durch  $K^1$ , den anderen noch durch  $K^2$  gehen lassen, also  $C_1(K, P_i, K^1)$  und  $C_2(K, P_i, K^2)$  mit den Gleichungen

$$\underline{C_1 \equiv \alpha_2 \alpha_3 + \varepsilon^2 \alpha_3 \alpha_1 + \varepsilon \alpha_1 \alpha_2 = 0, \quad C_2 \equiv \alpha_2 \alpha_3 + \varepsilon \alpha_3 \alpha_1 + \varepsilon^2 \alpha_1 \alpha_2 = 0,} \quad (15)$$

$$\underline{\left( \varepsilon = \frac{-1 \pm i \sqrt{3}}{2} = \sqrt[3]{1} \right)}$$

Einem Punkt  $\alpha$  in  $\mathfrak{P}$  entspricht dann auf der Geraden  $[K\alpha]$  der 4. harmonische Punkt zu  $\alpha$  bezüglich der von  $K$  verschiedenen Schnittpunkte von  $[K\alpha]$  mit  $C_1$  und  $C_2$ . Setzt man  $(1+t\alpha_i)$  ( $t =$  veränderlicher Parameter der Geraden  $[K\alpha]$ ) in die Gleichungen von  $C_1$  und  $C_2$  ein, so ergeben sich für die Schnittpunkte mit  $C_1$  und  $C_2$  die Werte

$$t_1 = \frac{\alpha_1 + \varepsilon^2 \alpha_2 + \alpha_3}{\alpha_2 \alpha_3 + \varepsilon^2 \alpha_3 \alpha_1 + \varepsilon \alpha_1 \alpha_2} \quad \text{bzw.} \quad t_2 = \frac{\alpha_1 + \varepsilon \alpha_2 + \varepsilon^2 \alpha_3}{\alpha_2 \alpha_3 + \varepsilon \alpha_3 \alpha_1 + \varepsilon^2 \alpha_1 \alpha_2},$$

so daß die Schnittpunkte lauten:

$$Z_1((\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3), \varepsilon^2(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_3), \varepsilon(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_2)),$$

$$Z_2((\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3), \varepsilon(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_3), \varepsilon^2(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_2)).$$

Bestimmt man nun  $t'$  so, daß  $Z_1 + t'Z_2$  der Punkt  $(\alpha_i)$  wird, so ist  $Z_1 - t'Z_2$  wegen  $(Z_1 Z_2 \alpha \alpha') = -1$  der Punkt  $(\alpha'_i)$ . So ergibt sich

$$\underline{\alpha'_1 = (\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_1) / (-2\alpha_2 \alpha_3 + \alpha_3 \alpha_1 + \alpha_1 \alpha_2)} \quad (16)$$

( $\alpha'_2$  und  $\alpha'_3$  daraus durch zyklisches Vorrücken in den Indizes). Es wird  $\alpha'_1 = 1, \alpha'_2 = \alpha'_3 = 0$ , wenn  $\alpha_2 - \alpha_3 = 0$  ist, also ist  $P_1$  einfacher Hauptpunkt mit der Hauptgeraden  $[P_1 K]$  (und zyklisch weiter). Setzt man ferner  $\alpha'_1 = \alpha'_2 = \alpha'_3$ , so folgt aus diesen Gleichungen die Hauptkurve des dreifachen Hauptpunkts  $K(1, 1, 1)$ , nämlich

$$\underline{\alpha_1 \alpha_2 (\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_2 \alpha_3 (\alpha_2 + \alpha_3) + \alpha_3 \alpha_1 (\alpha_3 + \alpha_1) - 6\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 = 0,} \quad (17)$$

die wir schon in 13. B. als Koinzidenzkurve der dort behandelten Verwandtschaft verwendet haben. Sie hat in  $K$  einen Doppelpunkt mit den Tangenten  $[KK^1]$  und  $[KK^2]$ , die Tangente im Punkt  $P_i$  geht durch  $K_i^{00}$ . Die Punkte der Hauptkurve entsprechen zufolge der perspektiven Zuordnung eineindeutig den Linienelementen des Punktes  $K$  in  $\mathfrak{P}$ . In  $\mathfrak{D}$  entspricht daher jedem Linienelementquadrupel von  $k$ , dessen Diagonaldreieck  $\Omega$  ist, ein Kegelschnitt mit dem Bildpunkt auf dieser Hauptkurve.

Der Geraden  $p_1$  in  $\mathfrak{P}$  entspricht nach Abspaltung der Hauptgeraden von  $P_2$  und  $P_3$  die Umlinie  $-2\alpha_2 \alpha_3 + \alpha_3 \alpha_1 + \alpha_1 \alpha_2 = 0$ , die durch  $K$  geht und  $\Delta_u$  in  $P_1$  berührt. Setzt man in (16)  $\alpha_1 = 0$ , so folgt  $\alpha'_2 : \alpha'_3 = -\alpha_2 : \alpha_3$ , d. h. entsprechende Punkte von  $p_1$

und  $-2\alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1 + \alpha_1\alpha_2 = 0$  liegen auf Geraden durch  $P_1$ , die harmonisch liegen zu  $p_2$  und  $p_3$ . Dem Punkte  $K_1^0(0, 1, 1)$  entspricht  $P_3$ . In  $\mathfrak{D}$  entspricht daher dem Punktepaar  $k_1^0$ , in dem  $k$  von  $o_1$  geschnitten wird, das Geradenpaar mit dem Träger  $Q_1$ , das dem Büschel  $\Delta_u$  der  $k$  harmonisch umschriebenen Kegelschnitte angehört. Den Punktepaaren auf  $o_1$  entsprechen die Kegelschnitte des Büschels, das durch  $k$  und jenes Geradenpaar bestimmt ist. Ein Punktepaar auf  $o_1$  und die Schnittpunkte des ihm entsprechenden Kegelschnitts mit  $o_1$  bilden vier harmonische Punkte.

Einer allgemeinen Geraden in  $\mathfrak{P}$  entspricht eine  $C_4$ . Die Tangenten ihres dreifachen Punktes  $K$  gehen durch die Schnittpunkte der gegebenen Geraden mit der Hauptkurve von  $K$ , die  $C_4$  berührt ferner in  $P_i$  die Gerade  $[P_i K_i^{00}]$ , sie geht weiters durch die Schnittpunkte der gegebenen Geraden mit  $C_1$  und  $C_2$ .

Einem allgemeinen Kegelschnitt in  $\mathfrak{P}$  entspricht eine  $C_3$  mit Berührungsknoten  $P_i$  (herrührend von den zwei Schnittpunkten des Kegelschnitts mit der Hauptgeraden  $[P_i K]$ ) und sechsfachem Punkt  $K$  (wegen der sechs Schnittpunkte des Kegelschnitts mit der Hauptkurve von  $K$ ). Einer Umlinie in  $\mathfrak{P}$  entspricht daher (nach Abspaltung der Hauptgeraden  $[P_i K]$  von der  $C_3$ ) eine  $C_5$  mit dreifachem Punkt  $K$  und Doppelpunkten  $P_i$ . Die Tangenten des dreifachen Punktes  $K$  gehen nach den von  $P_i$  verschiedenen Schnittpunkten der Umlinie mit der Hauptkurve von  $K$ . In  $P_i$  ist die eine Tangente fest, nämlich  $[P_i K_i^{00}]$ , die andere bildet mit der Tangente an die Umlinie ein Paar einer Involution; die Doppelstrahlen dieser Involution sind die Tangenten an  $C_1$  und  $C_2$  in  $P_i$ , sie gehen durch die Schnittpunkte von  $p_i$  mit  $[KK^1]$  und  $[KK^2]$ . Wenn also insbesondere  $\Delta_u$  transformiert wird, gehen in jedem Punkt  $P_i$  die einen Doppelpunkt tangente durch den dreifachen Punkt  $K$ , sie spalten sich daher von der  $C_5$  ab und es bleibt  $\Delta_u$ . In  $\mathfrak{D}$  werden also die  $k$  harmonisch umschriebenen Kegelschnitte vertauscht, festbleiben die mit  $k$  verbundenen Kegelschnitte  $k^1$  und  $k^2$ .

Wenn die Umlinie durch  $K$  geht, spaltet sich die Hauptkurve des Punktes  $K$  von der  $C_5$  ab und es bleibt eine Umlinie durch  $K$ . Im Umlinienbüschel durch  $K$  findet also eine Involution statt, in der die Umlinien  $C_1$  und  $C_2$  festbleiben. Durch diese Involution werden auch die Tangenten der Umlinien in  $K$  involutorisch vertauscht, die festbleibenden Tangenten an  $C_1$  und  $C_2$  gehen durch  $K^2$  bzw.  $K^1$ . (In  $P^0$  bilden also die Tangenten entsprechender Umlinien durch  $K$  in diesem Punkt die Paare der Rechtwinkelinvolution.) Diese Eigenschaften ermöglichen eine leichte Vervollständigung der Kegelschnittverwandtschaft  $\Lambda^{22}$  in  $\mathfrak{D}$ .

Die Isologe eines Punktes  $\lambda$  in  $\mathfrak{P}$  ist seine Verbindungsgerade mit  $K$ . Die Dualisologe eines Punktes  $\bar{\lambda}$  in  $\mathfrak{P}$  ist die  $C_3$

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_2 \bar{\lambda}_3 \alpha_1 (-2\alpha_2 \alpha_3 + \alpha_3 \alpha_1 + \alpha_1 \alpha_2) + \bar{\lambda}_3 \bar{\lambda}_1 \alpha_2 (-2\alpha_3 \alpha_1 + \alpha_1 \alpha_2 + \\ + \alpha_2 \alpha_3) + \bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_2 \alpha_3 (-2\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_3 \alpha_1) = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Sie berührt  $\Delta_u$  in  $P_i$ , ferner zeigt sich, daß die Tangente der  $C_3$  in  $K$  durch den Bildpunkt des zu  $\bar{\lambda}'$  bezüglich  $k$  polaren Kegelschnitts geht. Die  $C_3$  berührt in  $\bar{\lambda}$  die durch  $\bar{\lambda}$  und  $\bar{\lambda}'$  gelegte Umlinie. Der letzte Schnittpunkt der  $C_3$  z. B. mit  $p_1$  liegt harmonisch zur Projektion von  $\bar{\lambda}$  aus  $P_1$  auf  $p_1$  bezüglich  $P_2$  und  $P_3$ .

Wie sich nach 9. E. ergibt, ist die Verwandtschaft in  $\mathfrak{S}_1$  singular, die Punkte auf  $\beta_3 = 0$  in  $\mathfrak{P}_1$  sind Hauptpunkte, ihre Hauptgeraden sind die Verbindungsgeraden mit  $P_3$ . Ebenso ist die Verwandtschaft in  $\mathfrak{S}_2$  singular, jeder Punkt der Ebene  $\mathfrak{P}_2$  entspricht dem Punkt  $P_3$  in  $\mathfrak{P}_2$ .

#### E. Die zu $\Lambda^{22}$ duale Kegelschnittverwandtschaft.

Es lohnt sich, noch einen Blick auf die zu  $\Lambda^{22}$  duale Verwandtschaft zu werfen. Ihre Gleichungen erhält man aus denen von  $\Lambda^{22}$ , indem man die  $\alpha_i$  und  $\alpha'_i$  durch die reziproken Werte ersetzt, nämlich

$$\underline{\alpha'_1 : \alpha'_2 : \alpha'_3 = \alpha_1 (\alpha_2 - \alpha_3) (\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3) (\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3) : \dots} \quad (19)$$

Den einfachen Hauptpunkten  $P_i$  entsprechen die Hauptgeraden  $[KK_i^{00}]$ , den einfachen Hauptpunkten  $K_i^{00}$  die Hauptgeraden  $[P_i K]$ .  $K$  ist dreifacher Hauptpunkt mit derselben Hauptkurve wie bei  $\Lambda^{22}$ . Die Koinzidenzkurve besteht aus den Geraden  $[KK^i]$ .  $\Delta_e$  bleibt fest, die Punkte von  $\Delta_e$  erfahren eine Involution mit den Festpunkten  $K^i$ . Auf den Festgeraden  $p_i$  befindet sich eine Involution, deren Festpunkte zugleich auf den Koinzidenzgeraden  $[K K^i]$  liegen.

Die Geraden durch  $K$  bilden eine Involution, deren Feststrahlen die Koinzidenzgeraden  $[KK^i]$  sind. Es liegt hier ein Beispiel jener anderen Art Jonquièresscher Transformationen in  $\mathfrak{P}$  vor, bei der die Strahlen durch den  $(n-1)$ -fachen Hauptpunkt  $K$  sich vertauschen (nichtperspektive Jonquièressche Transformationen).

Jede durch  $K$  gehende Umlinie bleibt fest (das Zentrum der Involution entsprechender Punkte der Umlinie liegt auf  $\Delta_e$ ). Jede durch  $K$  gehende Umlinie ist die Dualisologe jedes ihrer Punkte.

## 14. Die Kegelschnittverwandtschaften, die sich auf Geisersche Punktverwandtschaften in $\mathfrak{P}$ abbilden.

### A. Die Geisersche Punktverwandtschaft.

Zunächst einiges über die von Geiser gefundene involutorische Punktverwandtschaft.<sup>1</sup> Alle durch 8 Punkte der Ebene gehenden Kurven 3. Ordnung gehen auch noch durch einen neunten Punkt. Solche 9 Punkte der Ebene, durch die mehr als eine einzige  $C_3$  hindurchgehen, heißen 9 assoziierte Punkte jeder durch sie hindurchgehenden  $C_3$ . Sind 7 feste Punkte gegeben, der achte aber veränderlich, so ist auch der neunte Punkt veränderlich, der sie zu 9 assoziierten Punkten einer  $C_3$  ergänzt. Die Geisersche Punktverwandtschaft besteht darin, daß sich 2 Punkte der Ebene entsprechen, wenn sie 7 gegebene Punkte zu 9 assoziierten Punkten einer  $C_3$  ergänzen. Bei allgemeiner Lage der 7 gegebenen Punkte ist diese involutorische Verwandtschaft vom Grad 8, sie besitzt eine Koinzidenzkurve 6. Ordnung mit Doppelpunkten in den 7 gegebenen Punkten. Diese sind dreifache Hauptpunkte der Verwandtschaft, jedem von ihnen entspricht als Hauptkurve die Kurve 3. Ordnung, die in diesem Hauptpunkt einen Doppelpunkt hat und einfach durch die übrigen 6 Hauptpunkte geht. Einer Geraden entspricht eine  $C_3$  mit dreifachen Punkten in den 7 Hauptpunkten; sie schneidet die gegebene Gerade in deren 6 Schnittpunkten mit der Koinzidenzkurve und in dem einzigen auf der Geraden gelegenen Punktepaar der Verwandtschaft (d. h. die Klasse der Verwandtschaft ist 1).

Von Interesse sind die Ausartungsfälle der Verwandtschaft, die sich bei besonderer Lage der Hauptpunkte ergeben.

a) Wenn 3 Hauptpunkte auf einer Geraden  $g$  liegen, so schneidet  $g$  die einer allgemeinen Geraden entsprechende  $C_3$  in  $3 \cdot 3 = 9$  Punkten,  $g$  spaltet sich also von der  $C_3$  ab und die Ordnung der Verwandtschaft vermindert sich um 1.  $g$  spaltet sich ebenso von den Hauptkurven der auf  $g$  gelegenen Hauptpunkte ab, die Hauptkurve eines auf  $g$  gelegenen Hauptpunktes ist also der Kegelschnitt durch diesen Hauptpunkt und durch die nicht auf  $g$  gelegenen 4 Hauptpunkte. Weiters spaltet sich  $g$  von der Koinzidenzkurve ab.

b) Wenn 6 Hauptpunkte auf einem Kegelschnitt  $l$  liegen, so schneidet  $l$  die einer allgemeinen Geraden ent-

<sup>1</sup> Geiser, „Über zwei geometrische Probleme“, Journal f. Math., Bd. 67 (1897), S. 78—89, siehe auch R. Sturm, Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften, Bd. IV (1909), S. 96—105, 120—130.

sprechende  $C$  in  $6 \cdot 3 = 18$  Punkten,  $l$  spaltet sich zweimal von der  $C_8$  ab (denn bei nur einmaligem Abspalten bliebe von der  $C_8$  eine nichtrationale  $C_6$  übrig) und die Ordnung der Verwandtschaft vermindert sich um 4.  $l$  spaltet sich auch von den Hauptkurven der auf  $l$  gelegenen Hauptpunkte ab, diese werden einfache Hauptpunkte und ihre Hauptgeraden sind ihre Verbindungsgeraden mit dem nicht auf  $l$  gelegenen Hauptpunkt. Weiters spaltet sich  $l$  von der Koinzidenzkurve ab, es bleibt eine  $C_4$ , die einfach durch die einfachen Hauptpunkte geht und im letzten Hauptpunkt einen Doppelpunkt hat. (Liegen mehr als drei Hauptpunkte auf einer Geraden oder mehr als sechs Hauptpunkte auf einem Kegelschnitt, so wird die Verwandtschaft unbestimmt.)

Soll das Bild einer Kegelschnittverwandtschaft eine Geisersche Punktverwandtschaft in  $\mathfrak{P}$  sein, so müssen die 7 Hauptpunkte der Verwandtschaft in  $\mathfrak{P}$  allein mit Hilfe des Punktes  $K$  und des Dreiecks  $\Pi$  definiert sein. Also wird man  $K$  als Hauptpunkt nehmen, die übrigen 6 Hauptpunkte liegen dann triangulär-symmetrisch bzw.  $\Pi$ .

## B. Die bisher behandelten Kegelschnittverwandtschaften als Geisersche Punktverwandtschaften in $\mathfrak{P}$ .

Wir zeigen nun, daß sich die bisher behandelten Verwandtschaften als spezielle Geisersche Punktverwandtschaften in  $\mathfrak{P}$  auffassen lassen. Für  $\Sigma$ ,  $\Gamma$  und  $\Delta$  ist dies schon in 5. bewiesen.

a) Um zur Verwandtschaft  $\Lambda^1$  zu gelangen, kann man  $K, P_i, L_i$  als Hauptpunkte der Geiserschen Verwandtschaft nehmen. Da  $P_i$  und  $L_i$  auf einem Kegelschnitt  $\Delta_u$  liegen, ferner drei Dreipunktgeraden  $[K P_i L_i]$  ( $i = 1, 2, 3$ ) auftreten, vermindert sich die Ordnung der Verwandtschaft um 7, die Verwandtschaft ist also eine Kollineation in  $\mathfrak{P}$ . Sie führt jede  $C_3$  durch  $K, P_i, L_i$  in sich über, also auch jede aus  $\Delta_u$  und einer Geraden  $[K \alpha]$  bestehende zerfallene  $C_3$ , daher liegt auch  $\alpha'$  auf  $[K \alpha]$ , die Kollineation ist perspektiv mit dem Zentrum  $K$ . Da sie involutorisch ist, hat sie die Achse  $\Delta_e$  und ist daher mit  $\Lambda^1$  identisch.

b) Um zur Verwandtschaft  $\Lambda^2$  zu gelangen, nehmen wir zunächst  $K$  als einen Hauptpunkt der Geiserschen Verwandtschaft in  $\mathfrak{P}$ . Die übrigen 6 Hauptpunkte lassen wir zu je drei in die Krümmungselemente von  $\Delta_u$  in  $K^1$  und  $K^2$  zusammendrücken. Dann liegen 6 Hauptpunkte auf dem Kegelschnitt  $\Delta_u$ , ferner enthalten die Tangenten von  $\Delta_u$  in  $K^1$  und  $K^2$ , weil sie durch  $K$  gehen, je 3 Hauptpunkte, also hat die Verwandtschaft die Ord-

nung 2. Wie bei  $\Lambda^1$  folgt, daß jede Gerade durch  $K$  in sich übergeht. Die volle Koinzidenzkurve 6. Ordnung hat in den Hauptpunkten Doppelpunkte, sie besteht aus  $\Delta_u$ , den Geraden  $[K K^i]$  und einem noch festzulegenden Kegelschnitt. Weiters spaltet sich von der vollen Hauptkurve von  $K$  das Geradenpaar  $[K K^i]$  ab, es bleibt als Hauptkurve von  $K$  die Gerade  $\Delta_e$ . Für den Koinzidenzkegelschnitt ist also  $\Delta_e$  die Polare von  $K$ . Nimmt man an, daß im Krümmungselement von  $\Delta_u$  in  $K^1$  die Hauptpunkte  $H_1, H_2, H_3$  zusammengerückt sind, wobei  $H_1$  und  $H_2$  die Tangente  $[K K^1]$  von  $\Delta_u$  in  $K^1$  angeben, so muß, damit die volle Koinzidenzkurve auch in  $H_3$  einen Doppelpunkt hat, der Koinzidenzkegelschnitt durch  $H_3$  gehen; er ist also mit  $\Delta_u$  identisch.

c) Um zur Verwandtschaft  $\Delta^3$  zu gelangen, bedenke man, daß bei  $\Lambda^3$  einer allgemeinen  $C_3$  eine  $C_9$  entspricht. Soll daher eine  $\bar{C}_3$  in sich übergehen, so muß sich von der  $C_9$  eine  $C_6$ , bestehend aus Hauptkurven von  $\Lambda^3$ , abspalten. Da das Geradenpaar  $[K K^i]$  die einzige Hauptkurve der Verwandtschaft ist, muß es sich dreimal von der  $C_9$  abspalten, die  $\bar{C}_3$  muß einen dreifachen Punkt in  $K$  haben, sie muß also in drei Geraden durch  $K$  zerfallen.  $\Lambda^3$  ist also eine Geisersche Verwandtschaft, bei der sämtliche Hauptpunkte in  $K$  vereinigt sind.

d) Um zur Verwandtschaft  $\Lambda^4$  zu gelangen, hat man die Hauptpunkte der Geiserschen Verwandtschaft in die Punkte  $\bar{K}, M_i$  und  $N_i$  zu verlegen. Es spaltet sich  $\Theta_e$  von der Koinzidenzkurve, von den Hauptkurven der Punkte  $M_i$  und  $N_i$  und von der einer Geraden entsprechenden vollen  $C_8$  ab, die Verwandtschaft ist von der Ordnung 4 und aus demselben Grund wie bei  $\Lambda^1$  perspektiv. Da die Koinzidenzkurve 4. Ordnung in  $K$  einen Doppelpunkt hat, entsprechen sich auf jeder Geraden durch  $K$  je zwei Punkte, die harmonisch zu den beiden letzten Schnittpunkten der Geraden mit der Koinzidenzkurve liegen. Auf den Hauptgeraden  $[K M_i]$  und  $[K N_i]$  der einfachen Hauptpunkte ist diese Involution entsprechender Punkte singular, daher fallen die Schnittpunkte mit der Koinzidenzkurve dort zusammen, die Tangenten der Koinzidenzkurve in  $M_i$  und  $N_i$  gehen also durch  $K$ , d. h. die Verwandtschaft ist mit  $\Lambda^4$  identisch.

e) Um zur Verwandtschaft  $\Lambda^{22}$  zu gelangen, muß man einen Hauptpunkt der Geiserschen Verwandtschaft nach  $K$  verlegen und die übrigen zu je zwei in  $P_i$  zu Linienelementen ( $P_i$ , Gerade  $[P_i K_i^{0i}]$ ) zusammenrücken lassen. Denn nach 13. D. ist jede  $C_3$  durch  $\bar{K}$ , die in  $P_i$  die Gerade  $[P_i K_i^{0i}]$  berührt, Dualisologe eines Punktes  $\bar{\lambda}$ , geht also bei  $\Lambda^{22}$  in sich über und schneidet jede andere Dualisologe von  $\Lambda^{22}$  in einem Punktepaar von  $\Lambda^{22}$ .

In ähnlicher Weise läßt sich zeigen, daß die bisher behandelten Verwandtschaften auch in den Systemen  $\mathfrak{S}_1$  und  $\mathfrak{S}_2$  als Sonderfälle der Geiserschen Verwandtschaft in der Bildebene  $\mathfrak{P}_1$  bzw.  $\mathfrak{P}_2$  aufgefaßt werden können, wenn sie nicht singular sind.

### C. Bestimmung aller durch $K$ und $\Pi$ definierbaren Geiserschen Punktverwandtschaften in $\mathfrak{P}$ .

Es liegt daher nahe, nach der Gesamtheit der Kegelschnittverwandtschaften in  $\mathfrak{D}$  zu fragen, deren Bilder in  $\mathfrak{P}$  als Sonderfälle der Geiserschen Verwandtschaft aufgefaßt werden können. Dazu ist erforderlich, daß die 7 Hauptpunkte der Verwandtschaft in  $\mathfrak{P}$  durch  $K$  und  $\Pi$  allein definierbar sind, d. h. die 7 Hauptpunkte müssen bezüglich  $\Pi$  triangulär-symmetrisch angeordnet sein.  $K$  muß daher einer der Hauptpunkte sein; ist weiters  $(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$  einer der übrigen 6 Hauptpunkte, so müssen auch jene Hauptpunkte sein, deren Koordinaten hieraus durch Permutationen entstehen, also  $(\eta_1 \eta_3 \eta_2)$ ,  $(\eta_2 \eta_1 \eta_3)$ ,  $(\eta_2 \eta_3 \eta_1)$ ,  $(\eta_3 \eta_1 \eta_2)$ ,  $(\eta_3 \eta_2 \eta_1)$ . Hier ergeben sich mehrere Möglichkeiten.

Sind diese 6 Punkte voneinander verschieden, so sind alle restlichen 6 Hauptpunkte festgelegt (z. B.  $\Lambda^1, \Lambda^4, \Lambda^{22}$ ). Sind nicht alle 6 Punkte voneinander verschieden, so läßt sich durch entsprechende Numerierung erreichen, daß entweder  $(\eta_1 \eta_2 \eta_3) = (\eta_2 \eta_3 \eta_1)$  oder  $(\eta_1 \eta_2 \eta_3) = (\eta_1 \eta_3 \eta_2)$  ist. Im Fall  $(\eta_1 \eta_2 \eta_3) = (\eta_2 \eta_3 \eta_1)$  folgt  $\eta_1 : \eta_2 = \eta_2 : \eta_3$ ,  $\eta_2 : \eta_3 = \eta_3 : \eta_1$ ,  $\eta_3 : \eta_1 = \eta_1 : \eta_2$ , daher liegen die Hauptpunkte in  $\mathfrak{P}$  auf den drei Kegelschnitten  $\alpha_1^2 - \alpha_2 \alpha_3 = 0$ ,  $\alpha_2^2 - \alpha_3 \alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_3^2 - \alpha_1 \alpha_2 = 0$ . Diese Kegelschnitte schneiden sich aber nur in  $K$  und  $K^i$ , so daß auch die 6 Hauptpunkte in diese Punkte fallen müssen, also ergeben sich hier die Sonderfälle  $\Lambda^3$  (wenn alle Hauptpunkte in  $K$  vereinigt sind) und  $\Lambda^2$  (wenn  $K$  einfacher Hauptpunkt ist, während  $K^1$  und  $K^2$  dreifache Hauptpunkte sind); es ist also z. B.  $(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = (1, \varepsilon, \varepsilon^2) = K^1$ , dann sind auch  $(\eta_2 \eta_3 \eta_1) = (\eta_3 \eta_1 \eta_2) = K^1$  und  $(\eta_1 \eta_3 \eta_2) = (\eta_2 \eta_1 \eta_3) = (\eta_3 \eta_2 \eta_1) = (1, \varepsilon^2, \varepsilon) = K^2$ .

Im Fall  $(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = (\eta_1, \eta_3, \eta_2)$  folgt dagegen  $\eta_1 : \eta_2 = \eta_1 : \eta_3$ ,  $\eta_2 : \eta_3 = \eta_3 : \eta_2$ ,  $\eta_3 : \eta_1 = \eta_2 : \eta_1$ , also ist entweder  $\eta_1 = 0$ ,  $\eta_2 = -\eta_3$  oder  $\eta_2 = \eta_3$ ,  $\eta_1$  beliebig. Ist  $\eta_1 = 0$ ,  $\eta_2 = -\eta_3$ , so ist dies der Punkt  $K_1^{00}$  und wir haben wegen der triangulären Symmetrie die Hauptpunkte  $K_i^{00}$ , so daß ebenfalls noch ein Tripel von Hauptpunkten wählbar ist (z. B. bei der zu  $\Lambda^{22}$  dualen Verwandtschaft  $\Sigma \Lambda^{22} \Sigma$ , wo die Punkte  $P_i$  hinzutreten). Ist aber  $\eta_2 = \eta_3$  und  $\eta_1$  beliebig, so ist  $(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$  irgendein Punkt auf  $[P_1 K]$ , wir haben also wegen der triangulären Symmetrie die drei Hauptpunkte

$(\eta_{11}, \eta_{22}, \eta_{33}), (\eta_{22}, \eta_{11}, \eta_{33}), (\eta_{33}, \eta_{22}, \eta_{11})$ , so daß noch ein Tripel von Hauptpunkten wählbar ist, das ebenfalls triangulär-symmetrisch liegen muß (z. B.  $\Sigma, \Gamma, \Delta, \Lambda^1$ ).

Abgesehen von den schon behandelten Sonderfällen  $\Lambda^2$  und  $\Lambda^3$  haben wir also folgende drei Fälle in der Ebene  $\mathfrak{P}$ :

$\Lambda^I$ :  $K$  ist ein Hauptpunkt, die übrigen 6 Hauptpunkte bilden ein bezüglich  $\Pi$  triangulär-symmetrisches Sextupel (wie bei  $\Lambda^1, \Lambda^4, \Lambda^{22}$ );

$\Lambda^{II}$ :  $K$  ist ein Hauptpunkt,  $K_i^{00}$  sind Hauptpunkte, es kommt noch ein bezüglich  $\Pi$  triangulär-symmetrisches Tripel von Hauptpunkten hinzu (wie bei  $\Sigma \Lambda^{22} \Sigma$ );

$\Lambda^{III}$ :  $K$  ist ein Hauptpunkt, die übrigen 6 Hauptpunkte verteilen sich auf zwei Tripel triangulär-symmetrisch gelegener Punkte, die auf den Geraden  $[P_i K]$  liegen (wie bei  $\Sigma, \Gamma, \Delta, \Lambda^1$ ).

## 15. Erster Fall: Die Kegelschnittverwandtschaft, die sich auf die Geisersche Punktverwandtschaft $\Lambda^I$ in $\mathfrak{P}$ abbildet.

### A. Die Kegelschnittverwandtschaft $\Lambda^I$ in $\mathfrak{C}$ .

$K$  ist einer der Hauptpunkte der Verwandtschaft  $\Lambda^I$  in  $\mathfrak{P}$ ,  $E_{123}(\eta_{11}, \eta_{22}, \eta_{33})$  ( $\eta_{11} \mp \eta_{22} \mp \eta_{33} \mp \eta_{11}$ ) und die daraus durch Koordinatenpermutation entstehenden 5 Punkte  $E_{132}, E_{213}, E_{231}, E_{312}, E_{321}$  sind die weiteren 6 Hauptpunkte. Sie liegen auf dem Kegelschnitt  $l \equiv \rho \Delta_u - \sigma \Delta_e^2 = 0$ , wobei  $\rho : \sigma = (\eta_{11} + \eta_{22} + \eta_{33})^2 : (\eta_{22} \eta_{33} + \eta_{33} \eta_{11} + \eta_{11} \eta_{22})$  ist.  $l$  spaltet sich doppelt von der  $C_8$  ab, die einer Geraden in  $\mathfrak{P}$  entspricht, die Verwandtschaft hat die Ordnung 4.  $l$  spaltet sich auch von der Koinzidenzkurve  $C_6$  ab, diese hat also in  $K$  einen Doppelpunkt und geht einfach durch die Punkte  $E_{ihl}$ .  $l$  spaltet sich ferner von den Hauptkurven der Punkte  $E_{ihl}$  ab, die  $E_{ihl}$  sind also einfache Hauptpunkte, die zugehörigen Hauptgeraden sind die Verbindungsgeraden mit  $K$ . Dagegen ist  $K$  dreifacher Hauptpunkt, die Hauptkurve von  $K$  ist eine  $C_3$  mit Doppelpunkt in  $K$  und einfachen Punkten  $E_{ihl}$ . Da die Verwandtschaft in  $\mathfrak{P}$  (laut Definition der Geiserschen Verwandtschaft) jede  $C_3$  durch die 7 Hauptpunkte in sich überführt, insbesondere jede  $C_3$ , die in  $l$  und eine Gerade durch  $K$  zerfällt, folgt, daß jede Gerade durch  $K$  in sich übergeht, d. h. die Verwandtschaft ist perspektiv mit dem Zentrum  $K$ . Es liegt also in  $\mathfrak{P}$  die allgemeine Jonquièressche Verwandtschaft 4. Ordnung vor, wie sie in einem Sonderfall bereits in 13. C. behandelt wurde.

Entsprechende Punkte der Verwandtschaft liegen auf einem Strahl durch  $K$  harmonisch zu den beiden von  $K$  verschiedenen Schnittpunkten des Strahls mit der Koinzidenzkurve  $C$ . Man kann die Verwandtschaft in  $\mathfrak{B}$  aber auch konstruktiv vervollständigen, ohne daß  $C$  gezeichnet vorliegt: in  $\mathfrak{B}$  geht  $l$  in sich über, ferner entspricht z. B. der Geraden  $[E_{123} E_{132}]$  der Kegelschnitt  $[E_{213} E_{231} E_{312} E_{321} K]$  (da sich von der entsprechenden  $C_4$  die Hauptgeraden der Punkte  $E_{123}$  und  $E_{132}$  abspalten). Hiedurch sind auf jedem Strahl durch  $K$  zwei Paare entsprechender Punkte gegeben.

Die Koinzidenzkurve  $C$  geht einfach durch die Punkte  $E_{ihl}$  ( $\eta_i \eta_h \eta_l$ ) und hat in  $K$  einen Doppelpunkt. Setzt man ihre Gleichung in der Form

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha_i) \equiv & \underline{A(\alpha_1^4 + \alpha_2^4 + \alpha_3^4) + B(\alpha_1^3 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_2^3 + \alpha_2^3 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_3^3 +} \\ & \underline{+ \alpha_3^3 \alpha_1 + \alpha_3 \alpha_1^3) + C(\alpha_1^2 \alpha_2^2 + \alpha_2^2 \alpha_3^2 + \alpha_3^2 \alpha_1^2) +} \\ & \underline{+ D(\alpha_1^2 \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_1 \alpha_2^2 \alpha_3 + \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3^2)} = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

an, so muß also  $\Phi(\eta_i) = 0$ ,  $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_k}\right)_{(1,1,1)} = 0$  ( $k = 1, 2, 3$ ) sein.

Aus diesen vier linearen Gleichungen für  $A, B, C, D$  folgt mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} s_{111} &= \eta_{11} \eta_{12} \eta_{13} \\ s_i &= \eta_{11}^i + \eta_{12}^i + \eta_{13}^i \\ s_{ii} &= \eta_{11}^i \eta_{12}^i + \eta_{12}^i \eta_{13}^i + \eta_{13}^i \eta_{11}^i \\ s_{ih} &= \underline{\eta_{11}^i \eta_{12}^h + \eta_{11}^h \eta_{12}^i + \eta_{12}^i \eta_{13}^h + \eta_{12}^h \eta_{13}^i + \eta_{13}^i \eta_{11}^h + \eta_{13}^h \eta_{11}^i} \end{aligned} \quad (2)$$

$$A = -2s_3 s_{22} + s_{21} (s_{31} - s_{22}) + s_{111} (2s_3 s_1 - s_{21} s_1 - 6s_{31} + 12s_{22}) \text{ usw.}$$

Hier kann man die Ausdrücke  $s_i, s_{ii}, s_{ih}$  usw. wieder durch die  $\eta_i$  ausdrücken und erhält dadurch die einfacheren Formeln

$$\begin{aligned} A &= \quad \quad \quad - s_{52} \quad \quad + s_{111}. \quad (4s_4 - 5s_{31} + 12s_{22} - 4s_{111} s_1) \\ B &= \quad \quad - s_{61} + 3s_{52} - s_{43} + 2s_{111}. \quad (s_4 - 2s_{31} - s_{22} + 3s_{111} s_1) \\ C &= \quad 2s_7 - 3s_{61} + 2s_{52} - s_{43} + s_{111} (-4s_4 + 11s_{31} - 12s_{22} - 4s_{111} s_1) \\ D &= \underline{-2s_7 + 5s_{61} - 7s_{52} + 3s_{43} + 2s_{111} (-2s_4 + s_{31} + 2s_{22} - 2s_{111} s_1)}, \end{aligned} \quad (3)$$

wobei  $D = -(A + 2B + C)$  ist. Die Koinzidenzkurve hat dieselben Eigenschaften wie im Sonderfall  $\Lambda^4$ : sie ist hyperelliptisch, die Tangenten von  $C$  in den einfachen Haupt-

punkten  $E_{ikl}$  von  $\Lambda^I$  gehen durch  $K$ , die Tangenten des Doppelpunkts  $K$  von  $C$  gehen durch  $K^i$ . Diese Punkte  $K^1, K^2$  sind die Berührungspunkte der Doppeltangente  $\Delta_e$  von  $C$ .  $C$  ist also eine projektiv spezielle hyperelliptische  $C_4$ .

Die zum dreifachen Hauptpunkt  $K$  gehörige Hauptkurve erhält man als Polare von  $K$  bez.  $C$ , also  $\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_3} = 0$  und es ergibt sich (nach Kürzung durch  $s_4 - 2s_{31} + 3s_{22}$ )

$$\frac{(s_{21} - 6s_{111})(\alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3) - (s_3 - 3s_{111})(\alpha_1^2 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_2^2 + \alpha_2^2 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_3^2 + \alpha_3^2 \alpha_1 + \alpha_3 \alpha_1^2) + 3(2s_3 - s_{21})\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}{s_4 - 2s_{31} + 3s_{22}} = 0. \quad (4)$$

Die Hauptkurve von  $K$  ist also eine  $C_3$ , die durch die einfachen Hauptpunkte  $E_{ikl}$  geht und in  $K$  einen Doppelpunkt (Tangenten  $[KK^i]$ ) hat. Sie geht überdies durch die Punkte  $K_i^{00}$ .

Es vereinfacht die Aufstellung der Gleichungen der Verwandtschaft  $\Lambda^I$ , wenn man zunächst die den Punkten  $P_i$  entsprechenden Punkte berechnet. Schneidet man die Koinzidenzkurve mit der Geraden  $[P_1K]$ , setzt man also  $\alpha_2 = \alpha_3$  in der Gleichung von  $C$ , so ergibt sich (nach Potenzen von  $\alpha_1$  geordnet)  $A\alpha_1^4 + 2B\alpha_1^3\alpha_2 + \dots = 0$  und diese Gleichung muß, wenn  $(l', 1, 1)$  und  $(l'', 1, 1)$  die von  $K$  verschiedenen Schnittpunkte von  $[P_1K]$  mit  $C$  sind, die Produktform  $(\alpha_1 - \alpha_2)^2(\alpha_1 - l'\alpha_2)(\alpha_1 - l''\alpha_2) = \alpha_1^4 - (2 + l' + l'')\alpha_1^3\alpha_2 + \dots = 0$  haben. Durch Vergleich folgt  $2 + l' + l'' = -\frac{2B}{A}$ , daher  $l' + l'' = -\frac{2A - 2B}{A}$ ; nun ist  $(l', 1, 1) - (l'', 1, 1) = (l' - l'', 0, 0)$  der Punkt  $P_1$ . Der Bildpunkt von  $P_1$  liegt harmonisch dazu bez. der Punkte  $(l', 1, 1)$  und  $(l'', 1, 1)$ ; er lautet  $(l', 1, 1) + (l'', 1, 1) \equiv (l' + l'', 2, 2) = (-A - B, A, A)$ . In  $\mathfrak{D}$  entsprechen also den Geradenpaaren mit dem Träger  $O_1$  jene Linienelementquadrupel des Kegelschnitts

$$Ax_1^2 - (A + B)(x_2^2 + x_3^2) = 0,$$

deren Diagonaldreieck  $\Omega$  ist.

Ist die Verwandtschaft  $\Lambda^I$  durch  $\alpha'_1 : \alpha'_2 : \alpha'_3 = f(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3) : f(\alpha_2 \alpha_3 \alpha_1) : f(\alpha_3 \alpha_1 \alpha_2)$  dargestellt, so gibt  $f(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3) = 0$  die Bildkurve der Geraden  $p_1 = [P_2 P_3]$  an. Diese Bildkurve geht einfach durch die Punkte  $E_{ikl}$ , hat in  $K$  einen dreifachen Punkt und geht durch die soeben bestimmten Bildpunkte von  $P_2$  und  $P_3$ . Daraus erhält man nach einer einfachen Rechnung

$$\begin{aligned}
 \alpha'_1 = f(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3) = & \frac{-(A+B)\alpha_1^4 + A(\alpha_2^4 + \alpha_3^4) +}{\frac{A+B-C}{2}\alpha_1^3(\alpha_2 + \alpha_3) - 2A\alpha_1(\alpha_2^3 + \alpha_3^3) +} \\
 & \frac{+ B\alpha_2\alpha_3(\alpha_2^2 + \alpha_3^2) + \frac{A-B+C}{2}\alpha_1^2(\alpha_2^2 + \alpha_3^2) + C\alpha_2^2\alpha_3^2 +}{+ 2(A+B+C)\alpha_1^2\alpha_2\alpha_3 - \frac{A+5B+3C}{2}\alpha_1\alpha_2\alpha_3(\alpha_2 + \alpha_3)}. \quad (5)
 \end{aligned}$$

Einer allgemeinen Geraden in  $\mathfrak{P}$  entspricht demnach eine rationale  $C_4$  mit dem dreifachen Punkt  $K$ , dessen Tangenten durch die Schnittpunkte der Geraden mit der Hauptkurve von  $K$  gehen. Diese  $C_4$  geht weiters durch die einfachen Hauptpunkte  $E_{ihl}$ , ferner durch die Schnittpunkte der Geraden mit der Koinzidenzkurve  $C$ . Weitere Punkte dieser  $C_4$  ergeben sich, wenn man die Schnittpunkte der gegebenen Geraden z. B. mit den Verbindungsgeraden zweier Punkte  $E_{ihl}$  oder mit den Kegelschnitten durch fünf Hauptpunkte oder mit  $l$  aufsucht, deren Bilder sich leicht konstruktiv ermitteln lassen.

Während sich danach die Geraden in  $\mathfrak{P}$ , d. h. die Kegelschnittscharen in  $\mathfrak{D}$  in einfacher Weise transformieren, ist dies bei den Kegelschnittbüscheln in  $\mathfrak{D}$  nicht mehr der Fall, denn einer Umlinie entspricht i. a. eine rationale  $C_8$ . Diese Komplikation liegt daran, daß die zu  $\Lambda^I$  duale Kegelschnittverwandtschaft nicht mehr durch eine Geisersche Verwandtschaft in  $\mathfrak{P}$  dargestellt wird.

Die Isologe eines Punktes  $\lambda$  in  $\mathfrak{P}$  ist bei  $\Lambda^I$  seine Verbindungsgerade mit  $K$ . Die Dualisologe eines Punktes  $\bar{\lambda}$  bei  $\Lambda^I$  ist eine  $C_6$ , die aus einer  $C_{10}$  durch Abspaltung der Koinzidenzkurve entsteht.

## B. Die Verwandtschaft $\Lambda^I$ in $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ .

Im System  $\mathfrak{E}_1$  wird nach 9. E. aus  $\Lambda^I$  die Verwandtschaft

$$\begin{aligned}
 \beta'_1 : \beta'_2 : \beta'_3 = & \frac{2[(A+B)\beta_1 + 2A\beta_2](\beta_1 - 2\beta_2)}{-[2A + 2B + C]\beta_1 + 2(A+B)\beta_2}(\beta_1 - 2\beta_2) : \\
 & : \frac{2[(3A + 3B + C)\beta_1 + 2(2A + B)\beta_2]\beta_3}{\phantom{2[(3A + 3B + C)\beta_1 + 2(2A + B)\beta_2]}} \quad (6)
 \end{aligned}$$

und dies ist die projektive Inversion mit dem Zentrum  $K$  am Geradenpaar

$$\underline{(2A + 2B + C) \beta_1^2 + 4(A + B) \beta_1 \beta_2 + 4A \beta_2^2 = 0}, \quad (7)$$

das beim Grenzübergang  $\mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{S}_1$  aus der Koinzidenzkurve  $C$  nach zweimaliger Abspaltung von  $[P_3 K]$  entsteht. Demnach ist die Hauptkurve von  $K$  in  $\mathfrak{P}_1$  der 4. harmonische Strahl zu  $[P_3 K]$  bez. des Geradenpaares, also

$$(3A + 3B + C) \beta_1 + 2(2A + B) \beta_2 = 0. \quad (8)$$

Im System  $\mathfrak{S}_2$  wird die Verwandtschaft, wie sich aus 10. C. ergibt, singular. Einem Punkt  $\gamma$  in  $\mathfrak{P}_2$  entspricht der Schnittpunkt von  $[K\gamma]$  mit  $p_1$ , insbesondere entspricht  $K$  jedem Punkt von  $p_1$ .

### C. Einige Sonderfälle von $\Lambda^I$ .

1. Ist  $\eta_3 = 0$ ,  $\eta_1 \neq \eta_2$ , so treten in den Formeln bedeutende Vereinfachungen ein; nach einigen Kürzungen folgt

$$\left. \begin{aligned} A &= && -\eta_1^2 \eta_2^2 \\ B &= && -\eta_1^3 \eta_2 + 3\eta_1^2 \eta_2^2 - \eta_1 \eta_2^3 \\ C &= && 2\eta_1^4 - 3\eta_1^3 \eta_2 + 2\eta_1^2 \eta_2^2 - 3\eta_1 \eta_2^3 + 2\eta_2^4 \\ D &= && -2\eta_1^4 + 5\eta_1^3 \eta_2 - 7\eta_1^2 \eta_2^2 + 5\eta_1 \eta_2^3 - 2\eta_2^4 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

und die Verwandtschaft lautet

$$\alpha'_1 = [(\eta_1 - \eta_2) \alpha_1 + \eta_2 \alpha_2 - \eta_1 \alpha_3] [(\eta_1 - \eta_2) \alpha_1 - \eta_1 \alpha_2 + \eta_2 \alpha_3] [\eta_1 \eta_2 (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2) - (\eta_1^2 + \eta_2^2) (\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3) + (2\eta_1^2 - 3\eta_1 \eta_2 + 2\eta_2^2) \alpha_2 \alpha_3], \quad (10)$$

daraus  $\alpha'_2$  und  $\alpha'_3$  durch zyklisches Vorrücken in den Indizes der  $\alpha_i$ . Die  $p_1$  entsprechende  $C_4$  zerfällt hier in die Geraden  $[K, (0, \eta_1, \eta_2)]$  und  $[K, (0, \eta_2, \eta_1)]$  und in den Kegelschnitt durch  $K$  und die auf  $p_2$  und  $p_3$  gelegenen restlichen vier einfachen Hauptpunkte.

2. Es können je zwei einfache Hauptpunkte auf dem Kegelschnitt  $l$  zusammenrücken, sie bilden dann drei Linienelemente (Punkt auf  $[P_i K]$ , Gerade = Tangente in diesen Punkten an  $l$ ). Ein solcher Fall ist  $\Lambda^{22}$ , dort waren je zwei einfache Hauptpunkte in ein Linienelement (Punkt  $P_i$ , Gerade = Tangente in  $P_i$  an  $\Delta_u$ ) zusammengerückt. Man erhält  $\Lambda^{22}$  aus

dem vorstehenden Sonderfall 1, indem man  $(\eta_1, \eta_2, 0)$  gegen  $P_1$  rücken läßt, d. h. indem man in den Formeln  $\eta_1$  über alle Grenzen wachsen läßt.

3. Schließlich fragen wir noch, wodurch die spezielle Lage der 6 einfachen Hauptpunkte bei  $\Lambda^4$  bedingt ist.

a) Wann liegen zwei einfache Hauptpunkte auf einer Geraden durch  $P_1$ ? Es muß  $\zeta_2 : \zeta_3 = \eta_2 : \eta_3$  sein, wo die Zahlen  $\zeta_i$  irgendeine Permutation der gegebenen Zahlen  $\eta_k$  sind. Ist  $(\zeta_i) = (\eta_2 \eta_3 \eta_1)$ , dann folgt  $\eta_3^2 - \eta_1 \eta_2 = 0$ , d. h.  $E_{123}(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$  liegt in  $\mathfrak{P}$  auf einer der drei Hauptkurven von  $\Lambda^2$ , nämlich z. B. auf einem Kegelschnitt durch  $K$ , der  $p_1$  in  $P_2$  und  $p_2$  in  $P_1$  berührt. Ist aber  $(\zeta_i) = (\eta_1 \eta_3 \eta_2)$ , so folgt  $\eta_2^2 - \eta_3^2 = 0$ , das ist aber der zweite Fall  $\Lambda^{II}$  oder der dritte Fall  $\Lambda^{III}$  einer Geiserschen Verwandtschaft. Da  $P_1$  hier ausgezeichnet ist, muß man noch in Erwägung ziehen, daß  $(\zeta_i) = (\eta_2 \eta_1 \eta_3)$  ist. Es folgt  $\eta_2 = \eta_1$  (Fall  $\Lambda^{III}$ ) oder  $\eta_3 = 0$  (der oben besprochene Sonderfall 1).

b) Wann gehen irgendwelche einfachen Hauptpunkte von  $\Lambda^I$  durch  $\Sigma$  ineinander über? Durch  $\Sigma$  geht  $(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$  über in  $(\eta_2 \eta_3, \eta_3 \eta_1, \eta_1 \eta_2)$  und dieser Punkt muß entweder identisch sein mit  $(\eta_2 \eta_3 \eta_1)$  (dann folgt, daß alle einfachen Hauptpunkte in  $K$  vereinigt sind wie bei  $\Lambda^3$ ) oder mit  $(\eta_1 \eta_3 \eta_2)$  (dann folgt  $\eta_1^2 - \eta_2 \eta_3 = 0$  wie bei a)).

Also folgt: Sind die 6 einfachen Hauptpunkte in  $\mathfrak{P}$  die (von  $K^i$  verschiedenen) Schnittpunkte eines Kegelschnitts  $l$  (der  $[K K^i]$  in  $K^i$  berührt) mit je einem der drei Kegelschnitte, die durch  $K$ ,  $K^i$  und zwei der Punkte  $P_i$  gelegt werden können, so liegen je zwei einfache Hauptpunkte entweder auf einer Geraden durch einen Punkt  $P_i$  oder sie gehen durch  $\Sigma$  ineinander über. (In  $\mathfrak{P}^0$  liegen die 6 einfachen Hauptpunkte in den Schnittpunkten eines Kreises  $l$ , dessen Mitte  $K$  ist, mit den drei Kreisen, die man durch  $K$  und zwei der Punkte  $P_i$  legen kann und die zwei Seiten  $p_i$  berühren). In  $\mathfrak{D}$  berühren sich die zugehörigen Kegelschnitte entweder doppelt auf einer Seite von  $\Omega$  oder sie gehen durch die Polarität an  $k$  ineinander über.

## 16. Zweiter Fall: Die Kegelschnittverwandtschaft, die sich auf die Geisersche Punktverwandtschaft $\Lambda^{II}$ in $\mathfrak{P}$ abbildet.

### A. Die Kegelschnittverwandtschaft $\Lambda^{II}$ .

Hier ist  $K$  ein Hauptpunkt, ferner sind die Punkte  $K_i^{00}$  einfache Hauptpunkte. Die restlichen drei Haupt-

punkte liegen auf je einer Geraden  $[P_i K]$ .<sup>1</sup> Ist  $E_1(\eta, 1, 1)$  einer dieser restlichen Hauptpunkte, so lauten die übrigen  $E_2(1, \eta, 1)$  und  $E_3(1, 1, \eta)$ . Wir haben die 4 Dreipunktgeraden  $[K_1^{00} E_2 E_3]$ ,  $[E_1 K_2^{00} E_3]$ ,  $[E_1 E_2 K_3^{00}]$  und  $\Delta_2 = [K_1^{00} K_2^{00} K_3^{00}]$ , die Verwandtschaft hat daher den Grad 4. Von der einer allgemeinen Geraden entsprechenden  $C_3$  (mit dreifachen Punkten in den Hauptpunkten) spalten sich die Dreipunktgeraden ab und es bleibt als Bild einer allgemeinen Geraden in  $\mathfrak{P}$  eine  $C_4$  mit dreifachem Punkt  $K$  und einfachen Punkten in den übrigen Hauptpunkten.

Die Hauptkurve des Punktes  $K$  in  $\mathfrak{P}$  ist die  $C_3$  mit dem Doppelpunkt  $K$  und einfachen Punkten in den übrigen Hauptpunkten, nämlich

$$\frac{2(\alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3) - (\eta + 2)(\alpha_1^2 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_2^2 + \alpha_2^2 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_3^2 + \alpha_3^2 \alpha_1 + \alpha_3 \alpha_1^2) + 6(\eta + 1) \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}{=} = 0.$$

Die Tangente in  $E_i$  geht durch  $K_i^{00}$ , die Tangenten des Doppelpunkts  $K$  gehen durch  $K^i$ , die Punkte  $K_i^{00}$  sind Wendepunkte der Hauptkurve. Die Hauptkurve von  $K_i^{00}$  ist die Gerade  $[K E_i]$ , denn von der vollen Hauptkurve spalten sich die beiden durch  $K_i^{00}$  gehenden Dreipunktgeraden ab. Ebenso ist die Hauptkurve von  $E_i$  die Gerade  $[K K_i^{00}]$ . Einer Geraden durch  $K$  entspricht eine  $C_4$ , von der sich aber die Hauptkurve von  $K$  abspaltet, so daß als Bild wiederum eine Gerade durch  $K$  bleibt. Da nicht jede Gerade durch  $K$  sich selbst entspricht (z. B.  $[K E_i]$  entspricht dem Punkt  $K_i^{00}$ ), bilden die Paare entsprechender Geraden durch  $K$  eine Involution, deren Doppelstrahlen die Geraden  $[K K^i]$  sind (denn den Strahlen  $[K E^i]$  entsprechen die Strahlen  $[K K_i^{00}]$ ).

Die Koinzidenzkurve ist (nach Abspaltung der 4 Dreipunktgeraden) ein Kegelschnitt, der in  $K$  einen Doppelpunkt hat, also kann die Koinzidenzkurve nur aus den Geraden  $[K K^i]$  bestehen, sie lautet

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 - \alpha_2 \alpha_3 - \alpha_3 \alpha_1 - \alpha_1 \alpha_2 = 0. \quad (1)$$

Daraus folgt wiederum, daß bei der  $C_4$ , die einer allgemeinen Geraden  $g$  in  $\mathfrak{P}$  entspricht, die Tangenten des dreifachen Punktes  $K$  harmonisch liegen zu den Geraden von  $K$  nach den Schnittpunkten

<sup>1</sup> Es wäre auch denkbar, daß sich die restlichen drei Hauptpunkte mit den Hauptpunkten  $K_i^{00}$  zu Linienelementen (Punkt  $K_i^{00}$ , Gerade  $[K K_i^{00}]$ ) vereinigen, aber dies führt zu einer uninteressanten Kegelschnittverwandtschaft in  $\mathfrak{Q}$ .

von  $g$  mit der Hauptkurve von  $K$  bez. der Geraden  $[KK^i]$ . Ebenso folgt, daß die Tangente z. B. in  $E_1$  harmonisch liegt zum Strahl von  $E_1$  nach dem Schnittpunkt von  $g$  mit  $[KK_1^{00}]$  bez.  $[E_1E_2]$  und  $[E_1E_3]$ .

Die  $C_4$  schneidet  $g$  in den Schnittpunkten von  $g$  mit den Geraden  $[KK^i]$  und in einem auf  $g$  gelegenen Punktepaar von  $\Lambda^{\text{II}}$ . Die Klasse der Verwandtschaft  $\Lambda^{\text{II}}$  ist also 1.

Die Dreipunktgeraden  $[E_iE_k]$  und  $\Delta_e$  gehen je in sich über, auf ihnen bilden die Paare entsprechender Punkte je eine Involution, deren Doppelpunkte von den Geraden  $[KK^i]$  ausgeschnitten werden.

In  $\mathfrak{B}$  bleibt ferner jeder Kegelschnitt durch  $E_i$  und  $K$  fest, denn von der entsprechenden  $C_8$  spalten sich die Hauptgeraden von  $E_i$  und die Hauptkurve von  $K$  ab, der Restkegelschnitt ist mit dem gegebenen identisch, weil er mit ihm außer  $E_i$  und  $K$  noch die Schnittpunkte mit der Koinzidenzkurve  $[KK^i]$  gemein hat. Die Paare entsprechender Punkte auf jedem Kegelschnitt durch  $E_i$  und  $K$  bilden je eine Involution, die von der Involution entsprechender Strahlen durch  $K$  ausgeschnitten wird. (Das Zentrum der Involution liegt, wie man leicht erkennt, auf  $\Delta_e$ .)

Um zur Darstellung

$$\alpha'_1 : \alpha'_2 : \alpha'_3 = f(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3) : f(\alpha_2 \alpha_3 \alpha_1) : f(\alpha_3 \alpha_1 \alpha_2)$$

von  $\Lambda^{\text{II}}$  zu gelangen, suchen wir die Bildkurve  $f(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3) = 0$  von  $p_1$  auf. Diese besteht aus der Hauptgeraden  $[P_1K]$  von  $K_1^{00}$  und einer  $C_3$  durch die Schnittpunkte von  $[KK^i]$  mit  $p_1$ , ferner durch  $E_2, E_3, K_1^{00}$  und mit Doppelpunkt in  $K$ . Daraus ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} \alpha'_1 = & \frac{(\alpha_2 - \alpha_3) [(\eta + 4) \alpha_1^3 + 2(\alpha_2^3 + \alpha_3^3) - (\eta + 2) \alpha_1^2(\alpha_2 + \alpha_3) - \\ & - 2(\eta + 2) \alpha_1(\alpha_2^2 + \alpha_3^2) + (5\eta + 4) \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3],}{\quad} \end{aligned} \right\} (2)$$

$\alpha'_2$  und  $\alpha'_3$  folgen daraus durch zyklisches Vorrücken in den Indizes.

Diese Isologe eines Punktes  $\lambda$  in  $\mathfrak{B}$  ist bei  $\Lambda^{\text{II}}$  die  $C_3$

$$\begin{aligned} \lambda_1 [ & \alpha_1^2(\alpha_2 + \alpha_3) - (\alpha_2^3 + \alpha_3^3) + (\eta + 1) \alpha_2 \alpha_3 (-2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)] + \\ & + \lambda_2 [\dots] + \lambda_3 [\dots] = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Die Ausdrücke in den Klammern bei  $\lambda_2$  und  $\lambda_3$  entstehen aus dem bei  $\lambda_1$  durch zyklisches Vorrücken in den Indizes der  $\alpha_i$ . Die Isologe geht durch  $K, K_1^{00}, E_i, \lambda$  und  $\lambda'$ . Die Tangente in  $K$  liegt harmonisch zu  $[K\lambda]$  bez. der Geraden  $[KK^i]$ ,

d. h. sie geht durch  $\lambda'$ . Die Tangente in  $\lambda$  geht ebenfalls durch  $\lambda'$ . Die Tangente in  $E_1$  liegt harmonisch zu  $[E_1\lambda]$  bez.  $[E_1E_2]$  und  $[E_1E_3]$ .

In den Systemen  $\mathfrak{S}_1$  und  $\mathfrak{S}_2$  wird die Verwandtschaft singular. Einem Kegelschnitt, der  $k$  in einem Punkt  $O_3$  berührt oder oskuliert, entspricht jeder Kegelschnitt, der  $k$  in  $O_3$  hyperoskuliert.

### B. Einige Sonderfälle von $\Lambda^{\text{II}}$ .

1. Ist  $E_i \equiv P_i$ , d. h. wächst  $\eta$  über alle Grenzen, so erhält man die schon in 13. D. behandelte zu  $\Lambda^{22}$  duale Verwandtschaft  $\Sigma^2 \Lambda^{22} \Sigma$ .

2. Wenn sich die Hauptpunkte  $E_i$  mit  $K$  vereinigen ( $\eta \rightarrow 1$ ), dann zerfällt die Hauptkurve von  $K$  in die drei Geraden  $[KK_i^{00}]$ . Die einer Geraden entsprechende  $C_4$  hat daher in  $K$  einen dreifachen Punkt mit den festen Tangenten  $[K P_i]$  und geht weiters durch  $K_i^{00}$  sowie durch die Schnittpunkte der gegebenen Geraden mit den beiden Koinzidenzgeraden  $[K K^i]$ .

Die Isologe eines Punktes  $\lambda$  in  $\mathfrak{P}$  ist hier eine rationale  $C_3$  durch die Punkte  $K_i^{00}$ ,  $\lambda$ ,  $\lambda'$ . Die Tangenten des Doppelpunkts  $K$  liegen harmonisch zu den Geraden  $[K K^i]$ . (Dieser Fall, bei dem die Isologen drei Punkte einer Geraden gemein haben und die Tangenten des gemeinsamen Doppelpunkts einer Involution angehören, ergibt sich sonst nur im System  $\mathfrak{S}_1$ .)

### 17. Dritter Fall: Die Kegelschnittverwandtschaft, die sich auf die Geislersche Punktverwandtschaft $\Lambda^{\text{III}}$ in $\mathfrak{P}$ abbildet.

#### A. Die Kegelschnittverwandtschaft $\Lambda^{\text{III}}$ in $\mathfrak{S}$ .

Hier wird  $K$  als einer der Hauptpunkte in  $\mathfrak{P}$  angenommen, die übrigen sechs Hauptpunkte verteilen sich auf zwei Tripel triangulär-symmetrisch gelegener Punkte, die auf den Geraden  $[P_i K]$  liegen. Sie mögen lauten

$$E_1(\eta, 1, 1), E_2(1, \eta, 1), E_3(1, 1, \eta),$$

$$\underline{\bar{E}_1(\bar{\eta}, 1, 1), \bar{E}_2(1, \bar{\eta}, 1), \bar{E}_3(1, 1, \bar{\eta})}.$$

Wir haben also die drei Dreipunktgeraden  $[E_i \bar{E}_i K]$ , die Ordnung der Verwandtschaft in  $\mathfrak{P}$  ist 5 (wenn nicht infolge speziellerer Lage der Hauptpunkte  $E_i$  und  $\bar{E}_i$  ein weiterer Zerfall eintritt). Die Hauptkurve von  $E_1$  entsteht aus einer  $C_3$  mit Doppelpunkt in  $E_1$  und einfachen Punkten in den übrigen

Hauptpunkten durch Abspaltung von  $[E_1K]$ , es bleibt also der Kegelschnitt  $[E_i\bar{E}_2\bar{E}_3]$ . Ebenso entspricht dem Hauptpunkt  $\bar{E}_1$  der Kegelschnitt  $[\bar{E}_iE_2E_3]$  als Hauptkurve. Von der Hauptkurve von  $K$  spalten sich die drei Dreipunktgeraden ab, so daß  $K$  hier nicht mehr Hauptpunkt, sondern Koinzidenzpunkt ist. Die Koinzidenzkurve  $C$  ist (nach Abspaltung der drei Dreipunktgeraden) eine  $C_3$  durch  $E_i$  und  $\bar{E}_i$ .

Einer allgemeinen Geraden in  $\mathfrak{B}$  entspricht eine  $C_5$  mit Doppelpunkten in  $E_i$  und  $\bar{E}_i$  (herrührend von den Schnittpunkten der Geraden mit den Hauptkurven von  $E_i$  und  $\bar{E}_i$ ) oder in leicht verständlicher Schreibweise  $g \rightarrow C_5 [2E_i, 2\bar{E}_i]$ .  $g$  schneidet die  $C_5$  außer in den Schnittpunkten von  $g$  mit der Koinzidenzkurve noch in einem auf  $g$  gelegenen Punktepaar von  $\Lambda^{\text{III}}$ ; die Klasse der Verwandtschaft ist also 1.

Geht  $g$  durch  $K$ , so vereinigen sich die beiden Schnittpunkte von  $g$  mit der entsprechenden  $C_5$  in  $K$ ,  $g$  berührt die  $C_5$  in  $K$ , d. h. es bleibt in  $\mathfrak{D}$  jedes Linienelement von  $k$  fest.

Für die Gerade  $[P_1K]$  folgt ebenso  $\rightarrow C_5 [2E_i, 2\bar{E}_i] - [E_i\bar{E}_2\bar{E}_3] - [\bar{E}_iE_2E_3] = [E_1\bar{E}_1]$ , die Gerade  $[P_1K]$  geht also in sich über, auf ihr bilden die Paare entsprechender Punkte eine Involution, in der z. B.  $E_1$  dem zweiten Schnittpunkt mit  $[E_iE_2E_3]$  und  $\bar{E}_1$  dem zweiten Schnittpunkt mit  $[\bar{E}_iE_2E_3]$  entspricht. Die Festpunkte der Involution auf  $[P_1K]$  sind offenbar  $K$  und der von  $E_1$  und  $\bar{E}_1$  verschiedene (letzte) Schnittpunkt der Koinzidenzkurve mit  $[P_1K]$ . Weiters gilt  $[E_1\bar{E}_2] \rightarrow C_5 [2E_i, 2\bar{E}_i] - [E_i\bar{E}_2\bar{E}_3] - [\bar{E}_iE_3E_1] = [E_2\bar{E}_1]$ , zwischen den Geraden  $[E_1\bar{E}_2]$  und  $[E_2\bar{E}_1]$  besteht eine perspektive Zuordnung, denn der Schnittpunkt beider Geraden entspricht sich selbst, weil er auf  $[P_3K]$  liegt und diese Gerade in sich übergeht. Der Schnittpunkt gehört der Koinzidenzkurve an. Ferner gilt  $[E_1E_2] \rightarrow C_5 [2E_i, 2\bar{E}_i] - [E_i\bar{E}_2\bar{E}_3] - [\bar{E}_i\bar{E}_3\bar{E}_1] = [\bar{E}_1\bar{E}_2]$ , die Geraden  $[E_1E_2]$  und  $[\bar{E}_1\bar{E}_2]$  entsprechen also einander projektiv und da die Verwandtschaft involutorisch ist, muß das Bild des Schnittpunkts  $K_i^{00}$  beider Geraden wieder auf beiden Geraden liegen, d. h. mit  $K_i^{00}$  identisch sein; daher ist auch die Zuordnung dieser beiden Geraden perspektiv und die Punkte  $K_i^{00}$  gehören der Koinzidenzkurve an.

Damit läßt sich die Koinzidenzkurve  $C$  näher bestimmen. Sie ist jedenfalls triangulär-symmetrisch zum Dreieck  $\Pi$  gelegen, daher gehen die Tangenten von  $C$  in  $E_i$  und  $\bar{E}_i$  aus Symmetriegründen durch  $K_i^{00}$  (es käme sonst nur  $[P_iK]$  als Tangente in Frage, aber dann zerfiel  $C$  in die Geraden  $[P_iK]$ , während diese Geraden nicht lauter Koinzidenzpunkte enthalten).

Ebenfalls aus Symmetriegründen muß die Tangente im dritten Schnittpunkt von  $C$  mit  $[P_i K]$  durch  $K_i^{00}$  gehen und da aus  $K_i^{00}$  vier Tangenten an  $C$  gehen, bleibt eine übrig, die wiederum aus Symmetriegründen nur in  $K_i^{00}$  selbst berühren kann, also sind die Punkte  $K_i^{00}$  Wendepunkte von  $C$ .

In  $\mathfrak{P}$  entspricht irgendeinem Kegelschnitt durch die Punkte  $E_1, E_2, \bar{E}_1, \bar{E}_2$  wegen  $C_2 [E_1 E_2 \bar{E}_1 \bar{E}_2] \rightarrow C_{10} [4 E_i, 4 \bar{E}_i] - [E_i \bar{E}_2 \bar{E}_3] - [E_i \bar{E}_3 \bar{E}_1] - [\bar{E}_i E_2 E_3] - [\bar{E}_i E_3 E_1] = C_2 [E_1 E_2 \bar{E}_1 \bar{E}_2]$  wieder ein solcher Kegelschnitt, und da außerdem die beiden von  $E_1, E_2, \bar{E}_1, \bar{E}_2$  verschiedenen Schnittpunkte des gegebenen Kegelschnitts mit  $C$  festbleiben, folgt, daß in  $\mathfrak{P}$  jeder Kegelschnitt durch die Punkte  $E_1, E_2, \bar{E}_1, \bar{E}_2$  in sich übergeht. Dies gibt eine Möglichkeit zur linearen Vervollständigung der Verwandtschaft  $\Lambda^{III}$  in  $\mathfrak{P}$ ; ist der Punkt  $\alpha$  in  $\mathfrak{P}$  gegeben, so ist  $\alpha'$  z. B. der linear konstruierbare vierte Schnittpunkt der Kegelschnitte  $[\alpha E_1 E_2 \bar{E}_1 \bar{E}_2]$  und  $[\alpha E_2 E_3 \bar{E}_2 \bar{E}_3]$ .

Ebenso findet man, daß in  $\mathfrak{P}$  einem Kegelschnitt durch  $E_i$  und  $\bar{E}_1$  ein Kegelschnitt durch  $E_1$  und  $\bar{E}_i$  entspricht, so daß die beiden Kegelschnittbüschel  $[E_i \bar{E}_1]$  und  $[E_1 \bar{E}_i]$  einander projektiv zugeordnet sind. Je zwei entsprechende Kegelschnitte schneiden sich außer in  $E_1$  und  $\bar{E}_1$  in zwei Punkten der Koinzidenzkurve  $C$ .

Nun zur Aufstellung der Gleichungen von  $\Lambda^{III}$ . Die Koinzidenzkurve  $C$  läßt sich, da sie triangulär-symmetrisch zum Dreieck  $\Pi$  gelegen ist, in der Form

$$\frac{A(\alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3) + B(\alpha_1^2 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_2^2 + \alpha_2^2 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_3^2 + \alpha_3^2 \alpha_1 + \alpha_3 \alpha_1^2) + C \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}{+ C \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} = 0 \quad (1)$$

ansetzen. Setzt man hier die Punkte  $E_1(\gamma, 1, 1)$  und  $\bar{E}_1(\bar{\gamma}, 1, 1)$  ein, so ergeben sich zwei lineare Gleichungen für  $A : B : C$ . Man erhält

$$\frac{A : B : C = 2[\gamma \bar{\gamma} - 1] : [-\gamma \bar{\gamma}(\gamma + \bar{\gamma}) + 2] : [\gamma^2 \bar{\gamma}^2 + \gamma \bar{\gamma}(\gamma + \bar{\gamma}) + \gamma^2 + \gamma \bar{\gamma} + \bar{\gamma}^2 - 2(\gamma + \bar{\gamma}) - 2],}{+ \gamma^2 + \gamma \bar{\gamma} + \bar{\gamma}^2 - 2(\gamma + \bar{\gamma}) - 2}, \quad (2)$$

woraus sich die obigen Angaben über die Koinzidenzkurve bestätigen lassen.

Um die Gleichungen von  $\Lambda^{III}$  aufzustellen, geht man zweckmäßig in  $\mathfrak{P}$  zu neuen Koordinaten  $\delta_i$  über, deren Grundpunkte in die Punkte  $\bar{E}_i$  fallen und deren Einheitspunkt wieder  $K$  ist. Sie hängen durch

$$\alpha_1 \alpha_2 : \alpha_3 = (\bar{\gamma} \delta_1 + \delta_2 + \delta_3) : (\delta_1 + \bar{\gamma} \delta_2 + \delta_3) : (\delta_1 + \delta_2 + \bar{\gamma} \delta_3) \quad (3)$$

mit den alten Koordinaten zusammen.

Bezeichnet vorübergehend  $e_1 = 0$  die Gleichung der Geraden  $[E_2 E_3]$  in den neuen Koordinaten, ebenso  $f_2 = 0$  bzw.  $f_3 = 0$  die Gleichung des Hauptkegelschnitts  $[\bar{E}_i E_3 E_1]$  bzw.  $[\bar{E}_i E_1 E_2]$  von  $\bar{E}_2$  bzw.  $\bar{E}_3$ , so ist in den neuen Koordinaten offenbar  $\delta'_1 = e_1 f_2 f_3$  (und zyklisch weiter), denn die Bildkurve von  $[\bar{E}_2 \bar{E}_3]$  ( $\delta_1 = 0$ ) zerfällt in die Hauptkurven von  $\bar{E}_2$  und  $\bar{E}_3$  und in die  $[\bar{E}_2 \bar{E}_3]$  entsprechende Gerade  $[E_2 E_3]$ .

Daher ist in den alten Koordinaten

$$\alpha'_1 = \bar{\eta} \delta'_1 + \delta'_2 + \delta'_3 = \bar{\eta} e_1 f_2 f_3 + e_2 f_3 f_1 + e_3 f_1 f_2,$$

wo jetzt für  $e_i = 0$  und  $f_i = 0$  die Gleichungen in den alten Koordinaten  $\alpha_i$  genommen werden können, nämlich

$$[E_2 E_3] \quad e_1 \equiv (\eta + 1) \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 = 0,$$

$$[\bar{E}_i E_2 E_3] \dots f_1 \equiv (-2\eta \bar{\eta} - \eta + 3) \alpha_1^2 + (\bar{\eta} - 1) (\alpha_2^2 + \alpha_3^2) + (-\eta \bar{\eta}^2 - \bar{\eta}^2 - 2\eta \bar{\eta} + 2\bar{\eta} + 2) \alpha_2 \alpha_3 + (\eta \bar{\eta}^2 + \eta \bar{\eta} + \eta - \bar{\eta} - 2) \alpha_1 (\alpha_2 + \alpha_3) = 0$$

( $e_2$  und  $e_3$  bzw.  $f_2$  und  $f_3$  daraus durch zyklisches Vorrücken). Setzt man dies ein, so ergibt sich nach längerer Rechnung die Darstellung der Verwandtschaft  $\Lambda^{III}$ , nämlich

$$\begin{aligned} \underline{\alpha}'_1 = & (\eta \bar{\eta} + \eta + \bar{\eta} - 3) \alpha_1^5 + 2(\eta \bar{\eta} - 1) (\alpha_2^5 + \alpha_3^5) + \\ & + (-\eta \bar{\eta}^2 - \eta^2 \bar{\eta} - \eta^2 - \bar{\eta}^2 - 2\eta \bar{\eta} + 2\eta + 2\bar{\eta} + 2) \alpha_1^4 (\alpha_2 + \alpha_3) + \\ & + (-2\eta^2 \bar{\eta}^2 - 3\eta \bar{\eta}^2 - 3\eta^2 \bar{\eta} + 5\eta \bar{\eta} + 3\eta + 3\bar{\eta} - 3) \alpha_1 (\alpha_2^4 + \alpha_3^4) + \\ & + (2\eta^2 \bar{\eta}^2 - \eta \bar{\eta}^2 - \eta^2 \bar{\eta} - 6\eta \bar{\eta} + 6) \alpha_2 \alpha_3 (\alpha_2^3 + \alpha_3^3) + \\ & + (-\eta^3 \bar{\eta}^3 - 2\eta^2 \bar{\eta}^3 - 2\eta \bar{\eta}^3 + \eta^2 \bar{\eta}^2 - \eta \bar{\eta}^3 - \eta^3 \bar{\eta} + 5\eta \bar{\eta}^2 + \\ & + 5\eta^2 \bar{\eta} + 2\eta^2 + 2\bar{\eta}^2 + 2\eta \bar{\eta} - 4\eta - 4\bar{\eta} - 2) \alpha_1^3 (\alpha_2^2 + \alpha_3^2) + \\ & + (\eta^2 \bar{\eta}^3 + \eta^3 \bar{\eta}^2 + \eta \bar{\eta}^3 + \eta^3 \bar{\eta} + 4\eta^2 \bar{\eta}^2 - \eta \bar{\eta}^2 - \eta^2 \bar{\eta} - 8\eta \bar{\eta} - \eta^2 - \\ & - \bar{\eta}^2 - 2\eta - 2\bar{\eta} + 8) \alpha_1^2 (\alpha_2^3 + \alpha_3^3) + \\ & + (-\eta^2 \bar{\eta}^3 - \eta^3 \bar{\eta}^2 + \eta \bar{\eta}^2 + \eta^2 \bar{\eta} + 4\eta \bar{\eta} - 4) \alpha_2^2 \alpha_3^2 (\alpha_2 + \alpha_3) + \\ & + (2\eta^3 \bar{\eta}^3 + 4\eta^2 \bar{\eta}^3 + 4\eta \bar{\eta}^3 + 2\eta^2 \bar{\eta}^2 + 3\eta \bar{\eta}^3 + 3\eta^3 \bar{\eta} + \eta^3 + \bar{\eta}^3 - \\ & - 5\eta \bar{\eta}^2 - 5\eta^2 \bar{\eta} - 3\eta^2 - 3\bar{\eta}^2 - 8\eta \bar{\eta} + 4) \alpha_1^3 \alpha_2 \alpha_3 + \\ & + (\eta \bar{\eta}^3 + \eta^3 \bar{\eta} + 4\eta^2 \bar{\eta}^2 + 2\eta \bar{\eta}^2 + 2\eta^2 \bar{\eta} + \eta^2 + \bar{\eta}^2 - 4\eta - 4\bar{\eta} - \\ & - 4) \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 (\alpha_2^2 + \alpha_3^2) + \\ & + (-2\eta^2 \bar{\eta}^3 - 2\eta^3 \bar{\eta}^2 - 2\eta \bar{\eta}^3 - 2\eta^3 \bar{\eta} - 6\eta^2 \bar{\eta}^2 - \eta^3 - \bar{\eta}^3 - \eta \bar{\eta}^2 - \\ & - \eta^2 \bar{\eta} + 3\eta^2 + 3\bar{\eta}^2 + 16\eta \bar{\eta} + 2\eta + 2\bar{\eta} - 8) \alpha_1^2 \alpha_2 \alpha_3 (\alpha_2 + \alpha_3) + \\ & + (\eta^3 \bar{\eta}^3 + \eta^2 \bar{\eta}^3 + \eta^3 \bar{\eta}^2 + 2\eta \bar{\eta}^3 + 2\eta^3 \bar{\eta} + \eta^2 \bar{\eta}^2 - 6\eta \bar{\eta}^2 - 6\eta^2 \bar{\eta} - \\ & - 2\eta^2 - 2\bar{\eta}^2 - 10\eta \bar{\eta} + 2\eta + 2\bar{\eta} + 14) \alpha_1 \alpha_2^2 \alpha_3^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Setzt man  $\alpha_1 = 0$  in der Gleichung  $\alpha'_1 = 0$  der Bildkurve von  $p_1$ , so erhält man eine Gleichung für die fünf Schnittpunkte dieser Bildkurve mit  $p_1$ . Setzt man ebenso  $\alpha_1 = 0$  in der Gleichung der Koinzidenzkurve, so erhält man deren drei Schnittpunkte mit  $p_1$ , die unter den obigen fünf Schnittpunkten enthalten sind. Dividiert man die erste Gleichung durch die zweite, so erhält man die Gleichung des auf  $p_1$  liegenden Punktepaares von  $\Lambda^{\text{III}}$ , nämlich

$$\underline{\alpha_2^2 + (\eta \bar{\eta} - 2) \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_3^2 = 0},$$

die wir sofort zur Berechnung der Isologen verwenden.

Ist nämlich  $\lambda_1 \Phi_1 + \lambda_2 \Phi_2 + \lambda_3 \Phi_3 = 0$  die Gleichung der Isologen eines Punktes  $\lambda$  in  $\mathfrak{K}$  bei  $\Lambda^{\text{III}}$ , so stellt  $\Phi_1 = 0$  die Gleichung der Isologen des Punktes  $P_1$  dar. Nun besteht die Isologe von  $P_1$  aus der Dreipunktgeraden  $[P_1 K]$  und einem Kegelschnitt, der durch die auf  $p_2$  und  $p_3$  gelegenen Punktepaare geht (denn  $p_2$  und  $p_3$  sind zwei Strahlen durch  $P_1$ ), ferner durch  $E_2, \bar{E}_2, E_3$  und  $\bar{E}_3$ . Daraus ergibt sich als Isologe von  $\lambda$

$$\underline{\lambda_1 (\alpha_2 - \alpha_3) [\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + (\eta \bar{\eta} - 2) (-\alpha_2 \alpha_3 + \alpha_3 \alpha_1 + \alpha_1 \alpha_2) - (\eta + \bar{\eta}) \alpha_2 \alpha_3] + \dots = 0.} \quad (5)$$

Diese  $C_3$  geht durch  $K, E_i, \bar{E}_i, \lambda$  und  $\lambda'$ ; jede Isologe schneidet die Koinzidenzkurve außer in  $E_i$  und  $\bar{E}_i$  noch in drei Punkten; in diesen Punkten und im Koinzidenzpunkt  $K$  geht die Tangente der Isologe durch  $\lambda$ . Weiters geht die Tangente der Isologe in  $\lambda$  durch  $\lambda'$ .

### B. Die Kegelschnittverwandtschaft $\Lambda^{\text{III}}$ in $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ .

Im System  $\mathfrak{S}_1$  der Kegelschnitte, die  $k$  im Punkt  $O_3$  berühren (Tangente  $\alpha_1$ ) und für die der Punkt  $O_2$  auf  $\alpha_1$  und die Gerade  $\alpha_2$  durch  $O_3$  Pol und Polare sind, wird aus  $\Lambda^{\text{III}}$  nach 9. E. die kubische Verwandtschaft

$$\underline{\beta'_1 : \beta'_2 : \beta'_3 = (\eta \beta_1 - 2\beta_2) (\bar{\eta} \beta_1 - 2\beta_2) [\eta \bar{\eta} + \eta + \bar{\eta} - 3] \beta_1 - 4 (\eta \bar{\eta} - 1) \beta_2 : (\eta \beta_1 - 2\beta_2) (\bar{\eta} \beta_1 - 2\beta_2) [(\eta + \bar{\eta} - 2) \beta_1 - (\eta \bar{\eta} + \eta + \bar{\eta} - 3) \beta_2] : [(\eta \bar{\eta} + \eta + 2\bar{\eta} - 4) \beta_1 - 2(2\eta \bar{\eta} + \bar{\eta} - 3) \beta_2] [(\eta \bar{\eta} + 2\eta + \bar{\eta} - 4) \beta_1 - 2(2\eta \bar{\eta} + \eta - 3) \beta_2] \cdot \beta_3.} \quad (6)$$

Die Koinzidenzkurve reduziert sich in  $\mathfrak{S}_1$  auf die Gerade

$$\underline{(\eta + \bar{\eta} - 2) \beta_1 - 2(\eta \bar{\eta} - 1) \beta_2 = 0} \quad (7)$$

von  $P_3$  nach dem Punkt  $F(2(\eta\bar{\eta}-1), \eta+\bar{\eta}-2, 0)$ . Auf der Festgeraden  $[P_3K]$  in  $\mathfrak{P}_1$  bilden die Paare entsprechender Punkte eine Involution mit den Festpunkten  $P_3$  und  $K$ . Auf der Festgeraden  $p_3$  bilden die Paare entsprechender Punkte eine Involution mit den Festpunkten  $F$  und  $K$ . Die Punkte  $E(2, \eta, 0)$  und  $\bar{E}(2, \bar{\eta}, 0)$  sind einfache Hauptpunkte, ihnen entsprechen die Hauptgeraden

$$\begin{aligned} (\eta\bar{\eta}+\eta+2\bar{\eta}-4)\beta_1-2(2\eta\bar{\eta}+\bar{\eta}-3)\beta_2 &= 0, \\ (\eta\bar{\eta}+2\eta+\bar{\eta}-4)\beta_1-2(2\eta\bar{\eta}+\eta-3)\beta_3 &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

die durch  $P_3$  und den vierten harmonischen Punkt zu  $E$  (bzw. zu  $\bar{E}$ ) bezüglich  $F$  und  $K$  gehen. Der Punkt  $P_3$  ist zweifacher Hauptpunkt, seine Hauptkurve zerfällt in die Geraden  $[P_3E]$  und  $[P_3\bar{E}]$ .

Einer Geraden durch  $P_3$  entspricht daher wieder eine Gerade, und zwar jene, die harmonisch zur gegebenen Geraden liegt bez.  $[P_3K]$  und  $[P_3F]$ . Einer allgemeinen Geraden  $g$  in  $\mathfrak{P}_1$  entspricht eine  $C_3$ , die in  $P_3$  einen Doppelpunkt hat, dessen feste Tangenten die Hauptgeraden von  $E$  und  $\bar{E}$  sind. Diese  $C_3$  geht weiters durch  $\bar{E}$  und  $\bar{E}$ , sie schneidet  $g$  im Schnittpunkt von  $g$  mit der Koinzidenzgeraden  $[P_3F]$  und einem auf  $g$  gelegenen Punktepaar.

Einer Umlinie  $h$  in  $\mathfrak{P}_1$  entspricht (nach Abspaltung der Hauptkurve von  $P_3$ ) eine  $C_4$ , die in  $P_3$  einen dreifachen Punkt hat. Dessen Tangenten sind die Bildgerade von  $\beta_2 = 0$  und die Hauptgeraden von  $E$  und  $\bar{E}$ . Die  $C_4$  geht ferner durch  $E$  und  $\bar{E}$  und durch den Bildpunkt von  $P_2$ . Die gegebene Umlinie  $h$  und ihre Bild- $C_4$  schneiden sich in  $P_3$  (dreifach), im zweiten Schnittpunkt von  $h$  mit der Koinzidenzgeraden  $[P_3F]$  und in zwei auf der Umlinie liegenden Punktepaaren der Verwandtschaft  $\Lambda^{\text{III}}$ .

Die Isologe eines Punktes  $\lambda$  in  $\mathfrak{P}_1$  ist bei  $\Lambda^{\text{III}}$  die rationale  $C_3$

$$\begin{aligned} &\frac{\lambda_1[\eta\bar{\eta}\beta_1^2-4(\eta\bar{\eta}+\eta+\bar{\eta}-2)\beta_1\beta_2+4(2\eta\bar{\eta}+\eta+\bar{\eta}-3)\beta_2^2]\beta_3+}{+ \lambda_2[2(\eta\bar{\eta}+\eta+\bar{\eta}-4)\beta_1^2-8(\eta\bar{\eta}-2)\beta_1\beta_2-8\beta_2^2]\beta_3-} \\ &\quad \frac{-\lambda_3(\eta\beta_1-2\beta_2)(\bar{\eta}\beta_1-2\beta_2)(\beta_1-2\beta_2)}{=} 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Sie geht durch  $K, E, \bar{E}, \lambda, \lambda'$  und hat in  $P_3$  einen Doppelpunkt, dessen Tangenten harmonisch zu den beiden Festgeraden  $[P_3K]$  und  $[P_3F]$  liegen. Die Tangente in  $K$  und in dem von  $P_3$  verschiedenen Schnittpunkt der Iso-

logon mit der Koinzidenzgeraden gehen durch  $\lambda$ , die Tangente in  $\lambda$  geht durch  $\lambda'$ .

Im System  $\mathfrak{S}_2$  der Kegelschnitte, die  $k$  in einem Punkt  $O_3$  oskulieren, wird (nach dem Verfahren von 10. C.) aus  $\Lambda^{\text{III}}$  eine singuläre quadratische Verwandtschaft in  $\mathfrak{P}_2$ , nämlich

$$\begin{aligned} \gamma'_1 : \gamma'_2 : \gamma'_3 &= \gamma_1^2 : \gamma_2^2 : \gamma_3^2 - \gamma_1 \gamma_2 : (\rho \gamma_2^2 - \gamma_1 \gamma_3), \\ \rho &= (4\eta \bar{\eta} + 2\eta + 2\bar{\eta} - 8) : (\eta \bar{\eta} - \eta - \bar{\eta} + 1). \end{aligned} \quad (10)$$

Einer Geraden durch  $P_3$  entspricht die zu ihr bez.  $p_1$  und  $p_2$  harmonische Gerade, d. h. in  $\mathfrak{D}$  geht eine Schar von Kegelschnitten, die  $k$  oskulieren und sich untereinander hyperoskulieren, in eine ebensolche Schar über.

Die Isologe eines Punktes  $\lambda$  in  $\mathfrak{P}_2$  ist bei  $\Lambda^{\text{III}}$  die rationale  $C_3$ .

$$\lambda_1 \rho \gamma_2^3 + \lambda_2 \gamma_1 (2\gamma_1 \gamma_3 - \rho \gamma_2^2) - 2\lambda_3 \gamma_1^2 \gamma_2 = 0. \quad (11)$$

Sie hat in  $P_3$  eine Spitze mit der Tangente  $p_1$  und geht durch  $K = P_{11}$ ,  $\lambda$  und  $\lambda'$ . Die Tangente in  $K$  geht durch  $\lambda$ , die in  $\lambda$  durch  $\lambda'$ .

### C. Die Kegelschnittverwandtschaft $\Lambda^{\text{III}}$ .

Ein von der allgemeinen Verwandtschaft  $\Lambda^{\text{III}}$  wesentlich verschiedener Sonderfall entsteht, wenn drei der einfachen Hauptpunkte von  $\Lambda^{\text{III}}$ , etwa die Punkte  $\bar{E}_i$ , nach  $K$  rücken. Man hat in den vorstehenden Formeln überall  $\bar{\eta} = 1$  zu setzen. Die Verwandtschaft lautet

$$\begin{aligned} \alpha'_1 &= 2\alpha_1^5 - (2\eta + 3)\alpha_1^4(\alpha_2 + \alpha_3) + (-4\eta^2 + 2\eta + 4)\alpha_1^3(\alpha_2^2 + \alpha_3^2) + \\ &+ (10\eta^2 + 8\eta - 2)\alpha_1^3\alpha_2\alpha_3 + (2\eta^2 + 5\eta - 5)\alpha_1^2(\alpha_2^3 + \alpha_3^3) + \\ &+ (-5\eta^2 - 11\eta + 4)\alpha_1^2\alpha_2\alpha_3(\alpha_2 + \alpha_3) - 5\eta\alpha_1(\alpha_2^4 + \alpha_3^4) + \\ &+ (\eta^2 + 8\eta + 7)\alpha_1\alpha_2\alpha_3(\alpha_2^2 + \alpha_3^2) + (4\eta^2 - 2\eta - 14)\alpha_1\alpha_2^2\alpha_3^2 + \\ &+ 2(\alpha_2^5 + \alpha_3^5) + (\eta - 6)\alpha_2\alpha_3(\alpha_2^3 + \alpha_3^3) + \\ &+ (-\eta^2 - \eta + 4)\alpha_2^2\alpha_3^2(\alpha_2 + \alpha_3), \quad \alpha'_2 = \dots, \quad \alpha'_3 = \dots \end{aligned} \quad (12)$$

Ihre Koinzidenzkurve ist die elliptische  $C_3$

$$\begin{aligned} 2(\alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3) - (\eta + 2)(\alpha_1^2\alpha_2 + \alpha_1\alpha_2^2 + \alpha_2^2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3^2 + \alpha_3^2\alpha_1 + \\ + \alpha_3\alpha_1^2) + 3(\eta + 1)\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Der Punkt  $K$  in  $\mathfrak{P}$  ist dreifacher Hauptpunkt, seine Hauptkurve zerfällt in die Geraden  $[P_i K]$ , so daß sich in  $\mathfrak{D}$  jeder  $l$  doppelt berührende Kegelschnitt auf  $k$  abbildet. Die Punkte  $E_i$  sind zweifache Hauptpunkte, die Hauptkurve z. B. von  $E_1$  ist ein Kegelschnitt durch  $E_i$  und  $K$ , der in  $K$  die Gerade  $[K K_i^{00}]$  berührt. Daraus ergibt sich alles Weitere über die Abbildung von Geraden und Umlinien in  $\mathfrak{P}$  bzw. von Kegelschnittscharen und -büscheln in  $\mathfrak{D}$ .

Die Isologe eines Punktes  $\lambda$  in  $\mathfrak{P}$  ist bei  $\Lambda_1^{\text{III}}$  die rationale  $C_3$

$$\lambda_1(\alpha_2 - \alpha_3)[\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 - (2\eta - 1)\alpha_2\alpha_3 + (\eta - 2)\alpha_1(\alpha_2 + \alpha_3)] + \dots = 0. \quad (14)$$

Sie hat im Doppelpunkt  $K$  das Tangentenpaar  $(\lambda_2 - \lambda_3)\alpha_1^2 + \dots - 4(\lambda_2 - \lambda_3)\alpha_2\alpha_3 - \dots = 0$  und geht durch die Punkte  $E_i$ , sowie  $\lambda$  und  $\lambda'$ , wobei die Tangente in  $\lambda$  durch  $\lambda'$  geht.

Im System  $\mathfrak{S}_1$  wird  $\Lambda_1^{\text{III}}$  singularär, zufolge

$$\beta'_1 : \beta'_2 : \beta'_3 = 2(\eta\beta_1 - 2\beta_2) : (\eta\beta_1 - 2\beta_2) : 6(\eta - 1)\beta_3 \quad (15)$$

entspricht in  $\mathfrak{D}_1$  jedem  $k$  berührenden Kegelschnitt ein  $k$  hyperoskulierender Kegelschnitt.

Ebenso wird  $\Lambda_1^{\text{III}}$  im System  $\mathfrak{S}_2$  singularär, da hier  $\rho$  über alle Grenzen wächst.

Wollte man eine Verwandtschaft festlegen, in der nicht nur die Punkte  $\bar{E}_i$ , sondern auch  $E_i$  nach  $K$  rücken, so ergäbe sich eine triviale Verwandtschaft: jeder Punkt in  $\mathfrak{P}$  bildete sich auf  $K$  ab.

#### D. Vier Entartungsfälle von $\Lambda^{\text{III}}$ .

1. Wenn  $\bar{\eta} = -2$  ist, liegen die Punkte  $\bar{E}_i$  auf  $\Delta_e$ , es tritt also außer den Dreipunktgeraden  $[P_i K]$  noch die Dreipunktgerade  $\Delta_e$  auf, die die Ordnung von  $\Lambda^{\text{III}}$  in diesem Unterfall auf 4 erniedrigt. Die Paare entsprechender Punkte auf  $\Delta_e$  bilden dabei eine Involution mit den Festpunkten  $K^1$  und  $K^2$ . Diese Verwandtschaft soll aber hier nicht weiter behandelt werden, zumal sich zeigen läßt, daß sie aus den beiden folgenden Verwandtschaften  $\Lambda_2^{\text{III}}$  und  $\Lambda^1$  in der Form  $\Lambda^1 \Lambda_2^{\text{III}} \Lambda^1 \Lambda_2^{\text{III}} \Lambda^1$  zusammensetzbar ist. Unterwirft man ein Punktepaar von  $\Lambda^1$  der Verwandtschaft  $\Lambda_2^{\text{III}}$  und das entstehende Punktepaar wieder der Verwandtschaft  $\Lambda^1$  in  $\mathfrak{P}$ , so erhält man ein Punktepaar der Verwandtschaft, die sich für  $\bar{\eta} = -2$  ergibt.

2. Wenn die Hauptpunkte  $E_i$  und  $\bar{E}_i$  so gelegen sind, daß z. B.  $\bar{E}_1, E_2, E_3$  auf einer Geraden liegen, so treten außer den Dreipunktgeraden  $[E_i \bar{E}_i K] \equiv [P_i K]$  noch drei weitere Dreipunktgeraden  $[\bar{E}_1 E_2 E_3]$ ,  $[E_1 \bar{E}_2 E_3]$ ,  $[\bar{E}_1 E_2 \bar{E}_3]$  auf, so daß  $\Lambda^{\text{III}}$  in diesem Unterfall zu einer involutorischen quadratischen Verwandtschaft  $\Lambda_2^{\text{III}}$  in  $\mathfrak{P}$  wird.  $\bar{E}_i$  sind die Hauptpunkte,  $E_i$  und  $K$  die Koinzidenzpunkte derselben.

Führt man vorübergehend in  $\mathfrak{P}$  neue Koordinaten  $\delta_i$  ein, deren Grundpunkte in die Punkte  $E_i$  fallen und deren Einheitspunkt wieder  $K$  ist, so ergeben sich die Transformationsgleichungen

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_1 : \delta_2 : \delta_3 = [(1+\eta) \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3] : [-\alpha_1 + (1+\eta) \alpha_2 - \alpha_3] : \\ \quad : [-\alpha_1 - \alpha_2 + (1+\eta) \alpha_3] \\ \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 = (\eta \delta_1 + \delta_2 + \delta_3) : (\delta_1 + \eta \delta_2 + \delta_3) : (\delta_1 + \delta_2 + \eta \delta_3). \end{array} \right.$$

Die Verwandtschaft in  $\mathfrak{P}$  lautet daher

$$\underline{\alpha'_1 = \eta \delta'_1 + \delta'_2 + \delta'_3 = \eta \delta_2 \delta_3 + \delta_3 \delta_1 + \delta_1 \delta_2 = \frac{\eta [\alpha_1 - (1+\eta) \alpha_2 + \alpha_3] [\alpha_1 + \alpha_2 - (1+\eta) \alpha_3] + [(1+\eta) \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3] [-2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3]}{+ \eta (\alpha_2 + \alpha_3)}} \quad (16)$$

Die Gleichung der Isologen erhält man aus der Isologengleichung der Verwandtschaft  $\Lambda^{\text{III}}$ , indem man dort  $\bar{\eta} = 2 : (\eta + 1)$  setzt. (Diese Beziehung zwischen  $\eta$  und  $\bar{\eta}$  drückt aus, daß z. B.  $\bar{E}_1, E_2$  und  $E_3$  auf einer Geraden liegen.)

Im System  $\mathfrak{S}_1$  wird aus dieser Verwandtschaft in  $\mathfrak{P}$  die singuläre quadratische Verwandtschaft

$$\underline{\beta'_1 : \beta'_2 : \beta'_3 = \frac{[\beta_1 - (\eta + 1) \beta_2] [(\eta + 1) \beta_1 - 4 \beta_2] : [\beta_1 - (\eta + 1) \beta_2] + 1 \beta_2] [\eta \beta_1 - (\eta + 1) \beta_2] : (\eta - 1) [(\eta + 1) \beta_1 - (\eta + 3) \beta_2] \beta_3.}{}} \quad (17)$$

$p_3$  geht in sich über, die Paare entsprechender Punkte auf  $p_3$  bilden eine Involution mit den Festpunkten  $K$  und  $E(2, \eta, 0)$ . Einer Geraden durch  $P_3$  entspricht die zu ihr bez. der Festgeraden  $[P_3 K]$  und  $[P_3 E]$  harmonische Gerade. Dem Hauptpunkt  $P_3$  entspricht die Hauptgerade  $\beta_1 - (\eta + 1) \beta_2 = 0$ . Diese Hauptgerade geht auch durch den Punkt  $(\eta + 1, 1, 0)$ , der wegen  $\bar{\eta} = 2 : (\eta + 1)$  aus dem Hauptpunkt  $\bar{E}(2, \bar{\eta}, 0)$  von  $\Lambda^{\text{III}}$  entsteht.

Im System  $\mathfrak{S}_2$  ist diese Verwandtschaft wie im Fall  $\Lambda^{\text{III}}$  singulär quadratisch, nimmt den Wert  $\rho = -2(\eta + 2) : (\eta - 1)$  an.

3. Wenn die Hauptpunkte  $E_i$  und  $\bar{E}_i$  in  $\mathfrak{P}$  auf einem Kegelschnitt liegen (der dann wegen der triangulären Symmetrie die Umlinie  $\Delta_u$  in  $K^1$  und  $K^2$  berühren muß), so erniedrigt sich die Ordnung von  $\Lambda^{\text{III}}$  um 4 und es bleibt die schon in 12. untersuchte harmonische Kollineation  $\Lambda^1$  in  $\mathfrak{P}$ . Eine kurze Rechnung zeigt, daß  $E_i$  und  $\bar{E}_i$  auf einem solchen Kegelschnitt liegen, wenn  $2\eta\bar{\eta} + \eta + \bar{\eta} - 4 = 0$  ist.

4. Wenn die Punkte  $E_i$  und  $\bar{E}_i$  auf der Geraden  $[P_i K]$  zusammenrücken, also ein Linienelement bilden, dessen Gerade durch  $K$  geht, erniedrigt sich zwar die Ordnung 5 der Verwandtschaft in  $\mathfrak{P}$  nicht, aber man wird diesen Fall  $E_i = \bar{E}_i \neq K$  dennoch als Entartungsfall ansehen. Es zerfällt hier die Koinzidenzkurve in die Geraden  $[E_i E_k]$  und man erhält auch alle anderen speziellen Eigenschaften der Verwandtschaft  $\Delta$  in  $\mathfrak{P}$ , nur hat man statt deren Hauptpunkten  $P_i$  die Punkte  $E_i$  zu nehmen.

### E. Die Kegelschnittverwandtschaft $\Lambda_{\infty}^{\text{III}}$ .

Von besonderem Interesse ist nun der Fall, daß die Punkte  $\bar{E}_i$  mit den Punkten  $P_i$  identisch sind. Hier transformieren sich die Umlinien in  $\mathfrak{P}$  bzw. die Kegelschnittbüschel in  $\mathfrak{D}$  in einfacherer Weise. Es existieren hier die zweifachen Hauptpunkte  $E_i$  und  $P_i$ , der Punkt  $K$  ist wie im allgemeinen Fall  $\Lambda^{\text{III}}$  Koinzidenzpunkt. In diesem Sonderfall  $\bar{E}_i \equiv P_i$  sind die eingangs untersuchten Kegelschnittverwandtschaften  $\Sigma$ ,  $\Gamma$  und  $\Delta$  als Ausartungsfälle enthalten, sie ergeben sich für  $\eta = -1$  bzw.  $\eta = 0$  bzw.  $\eta = \infty$ .

Wir sehen zunächst von diesen Ausartungsfällen ab. Alle früheren Aussagen über  $\Lambda^{\text{III}}$  gelten dann auch für  $\Lambda_{\infty}^{\text{III}}$ , wenn man berücksichtigt, daß  $E_i = P_i$  ist, bzw. in den Formeln  $\bar{\eta} = \infty$  werden läßt. Wir heben hier nur einige Besonderheiten des Falles  $\bar{\eta} = \infty$  hervor.

In der Ebene  $\mathfrak{D}$  haben wir die  $k$  doppelt berührenden „Hauptkegelschnitte“  $e_i$  (Bildpunkte  $E_i$ ), während die Geradenpaare des Bundes zusammengenommen die Hauptpunkte  $E_i = P_i$  in  $\mathfrak{P}$  bestimmen. Dem zweifachen Hauptpunkt  $E_1$  in  $\mathfrak{P}$  entspricht als Hauptkurve der Kegelschnitt  $[E_1 E_2 E_3]$ . Dem zweifachen Hauptpunkt  $P_1$  entspricht als Hauptkurve die Umlinie, die durch die Punkte  $E_2$  und  $E_3$  geht, so daß sich in  $\mathfrak{D}$  die im Bund enthaltenen Geradenpaare mit dem Träger  $O_1$  auf die Kegelschnitte des durch  $e_2$  und  $e_3$  bestimmten Büschels eineindeutig abbilden. Das bedeutet, daß bei der Kegelschnittverwandtschaft  $\Lambda_{\infty}^{\text{III}}$  in  $\mathfrak{D}$  im

Gegensatz zu  $\Lambda^{\text{III}}$  die Geradenpaare gar nicht mehr die singuläre Rolle von Hauptelementen spielen.

In der Verwandtschaft  $\Lambda_{\infty}^{\text{III}}$  in  $\mathfrak{P}$  entspricht der Geraden  $[P_1 E_2]$  perspektiv die Gerade  $[P_2 E_1]$ , d. h. in  $\mathfrak{D}$  entsprechen den Kegelschnitten, die  $e_2$  in den Schnittpunkten mit  $o_1$  doppelt berühren, die Kegelschnitte, die  $e_1$  in den Schnittpunkten mit  $o_2$  doppelt berühren. Dabei umhüllen die gemeinsamen Tangenten entsprechender Kegelschnitte selbst einen Kegelschnitt, der bei  $\Lambda_{\infty}^{\text{III}}$  festbleibt.

Ferner entspricht der Geraden  $[P_1 P_2]$  perspektiv die Gerade  $[E_1 E_2]$ . In  $\mathfrak{D}$  entsprechen also den auf  $o_3$  gelegenen Punktepaaren des Bundes die Kegelschnitte der durch  $e_1$  und  $e_2$  bestimmten Schar. Auch hier umhüllen die gemeinsamen Tangenten entsprechender Kegelschnitte einen Kegelschnitt, der bei  $\Lambda_{\infty}^{\text{III}}$  festbleibt.

Während bei  $\Lambda^{\text{III}}$  einer linearen Kegelschnittschar in  $\mathfrak{D}$  eine rationale (10,5)-Reihe entsprach, entspricht bei  $\Lambda_{\infty}^{\text{III}}$  einer allgemeinen linearen Kegelschnittschar in  $\mathfrak{D}$  eine rationale (4,5)-Reihe, da die Bildkurve in  $P_i$  je einen Doppelpunkt hat. Dabei liegen die Tangenten des Doppelpunktes z. B. in  $P_i$  harmonisch zu den Geraden von  $P_i$  nach den Schnittpunkten der gegebenen Geraden mit der Hauptkurve von  $P_i$  bez.  $[P_i K]$  und  $[P_i K^{00}]$ . Insbesondere entspricht einem Berührungsbüschel in  $\mathfrak{D}$  (in  $\mathfrak{P}$  dargestellt durch eine Gerade durch einen der Punkte  $P_i$ ) eine rationale (3,3)-Reihe, da ihre Bildkurve in  $\mathfrak{P}$  eine rationale  $C_3$  mit dem Doppelpunkt in  $E_i$  und einfachen Punkten in den übrigen Hauptpunkten ist. Einer Umlinie in  $\mathfrak{P}$  entspricht bei  $\Lambda_{\infty}^{\text{III}}$  eine rationale  $C_4$  mit einfachen Punkten in  $P_i$  und Doppelpunkten in  $E_i$ . In  $\mathfrak{D}$  entspricht daher einem Büschel eine rationale (5,4)-Reihe.

Als Gleichung der Koinzidenzkurve ergibt sich bei  $\Lambda_{\infty}^{\text{III}}$  die  $C_3$

$$\frac{\eta(\alpha_1^2 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_2^2 + \alpha_2^2 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_3^2 + \alpha_3^2 \alpha_1 + \alpha_3 \alpha_1^2) -}{-(\eta^2 + \eta + 1) \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} = 0; \quad (18)$$

sie geht auch durch  $\Sigma$  in sich über.

Da sich bei  $\Lambda_{\infty}^{\text{III}}$  von der Bildkurve von  $p_1$  ( $\alpha_1 = 0$ ) die Hauptkegelschnitte von  $P_2$  und  $P_3$  abspalten und die Gerade  $[E_2 E_3] \equiv -(\eta + 1)\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$  als Bildgerade von  $p_1$  übrigbleibt, erhält man für  $\Lambda_{\infty}^{\text{III}}$  die Gleichungen

$$\frac{\alpha'_1 = [-(\eta+1)\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3][\eta\alpha_2\alpha_3 - (\eta+1)\alpha_3\alpha_1 + \eta\alpha_1\alpha_2]}{[\eta\alpha_2\alpha_3 + \eta\alpha_3\alpha_1 - (\eta+1)\alpha_1\alpha_2]}, \alpha'_2 = \dots, \alpha'_3 = \dots \quad (19)$$

( $\alpha'_2$  und  $\alpha'_3$  daraus durch zyklisches Vorrücken in den Indizes der  $\alpha_i$ ).

Die Isologe eines Punktes  $\lambda$  in  $\mathfrak{P}$  lautet bei  $\Lambda_{\infty}^{\text{III}}$

$$\lambda_1(\alpha_2 - \alpha_3)[\eta(-\alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1 + \alpha_1\alpha_2) - \alpha_2\alpha_3] + \dots = 0. \quad (20)$$

Diese elliptische  $C_3$  geht durch  $K, P_i, E_i, \lambda$  und  $\lambda'$ . Sie schneidet die Koinzidenzkurve außer in  $P_i$  und  $E_i$  noch in drei Punkten; in diesen Punkten und im Koinzidenzpunkt  $K$  gehen die Tangenten der Isologe durch  $\lambda$ . Weiters geht die Tangente der Isologe in  $\lambda$  durch  $\lambda'$ .

Der Fall  $\Lambda_{\infty}^{\text{III}}$  zeigt noch die Besonderheit, daß hier das Netz der Dualisologen mit dem der Isologen zusammenfällt. Während die Dualisologe eines Punktes  $\bar{\lambda}$  in  $\mathfrak{P}$  bei der allgemeineren Verwandtschaft  $\Lambda^{\text{III}}$  eine Kurve 9. Ordnung ist, spalten sich bei  $\Lambda_{\infty}^{\text{III}}$  die Hauptkurven der Punkte  $P_i$  ab und es bleibt die (durch  $\bar{\lambda}$  und  $\lambda'$  gehende) elliptische  $C_3$

$$\bar{\lambda}_2\bar{\lambda}_3\alpha_1(\alpha_2 - \alpha_3)[-(\eta+1)\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3] + \dots = 0. \quad (21)$$

Durch Koeffizientenvergleich findet man, daß die Isologe eines Punktes  $\lambda$  in  $\mathfrak{P}$  zugleich die Dualisologe eines anderen Punktes  $\bar{\lambda}$  in  $\mathfrak{P}$  ist, wobei zwischen  $\lambda$  und  $\bar{\lambda}$  die (nicht-involutorische) quadratische Verwandtschaft

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1:\lambda_2:\lambda_3 = [-\eta\bar{\lambda}_2\bar{\lambda}_3 + (\eta+1)\bar{\lambda}_3\bar{\lambda}_1 + (\eta+1)\bar{\lambda}_1\bar{\lambda}_2]: \\ \bar{\lambda}_1:\bar{\lambda}_2:\bar{\lambda}_3 = (\eta\lambda_1 - \lambda_2 + \eta\lambda_3)(\eta\lambda_1 + \eta\lambda_2 - \lambda_3): \dots : \dots \end{array} \right. \quad (22)$$

besteht. In der Ebene der  $\lambda$  sind die Hauptpunkte  $(-\eta, \eta+1, \eta+1), \dots$ , ihnen entsprechen die Hauptgeraden  $p_i$ . In der Ebene der  $\bar{\lambda}$  sind  $P_i$  die Hauptpunkte, die zugehörigen Hauptgeraden gehen durch zwei der Punkte  $(2\eta, 1, 1), (1, 2\eta, 1), (1, 1, 2\eta)$ . Die Festpunkte der Verwandtschaft  $\lambda \rightarrow \bar{\lambda}$  sind  $K$  und  $E_i$ . Beschreibt  $\lambda$  die Gerade  $\Delta_e$ , so durchläuft  $\bar{\lambda}$  die Umlinie  $\Delta_u$ . Die gemeinsamen Punkte von  $\Delta_e$  und  $\Delta_u$ , nämlich  $K^1$  und  $K^2$ , bilden das einzige involutorische Punktepaar der Verwandtschaft  $\lambda \rightarrow \bar{\lambda}$  in  $\mathfrak{P}$ .

Im System  $\mathfrak{S}_1$  wird aus  $\Lambda_{\infty}^{\text{III}}$  die kubische Verwandtschaft

$$\frac{\beta'_1:\beta'_2:\beta'_3 = \beta_1(\eta\beta_1 - 2\beta_2)[(\eta+1)\beta_1 - 4\eta\beta_2]: \beta_1(\eta\beta_1 - 2\beta_2)[\beta_1 - (\eta+1)\beta_2]: [(\eta+1)\beta_1 - 4\eta\beta_2][(\eta+2)\beta_1 - 2(2\eta+1)\beta_2]\beta_3}{\dots} \quad (23)$$

Hier ist  $F(2\eta, 1, 0)$ , so daß die Koinzidenzkurve die Gerade  $\beta_1 - 2\eta\beta_2 = 0$  ist. Auf den Festgeraden  $[P_3K]$  und  $p_3$  erzeugt  $\Lambda_{\infty}^{III}$  Involutionen mit den Festpunkten  $P_3$  und  $K$  bzw.  $F$  und  $K$ . Die Punkte  $E(2, \eta, 0)$  und  $\bar{E} = P_2$  sind einfache Hauptpunkte, ihnen entsprechen die Hauptgeraden  $(\eta+2)\beta_1 - 2(2\eta+1)\beta_2 = 0$  bzw.  $(\eta+1)\beta_1 - 4\eta\beta_2 = 0$ .  $P_3$  ist zweifacher Hauptpunkt, seine Hauptkurve zerfällt in die Geraden  $[P_3E]$  und  $p_1$ . Im übrigen tritt keine Änderung gegenüber  $\Lambda^{III}$  ein.

Die Isologe eines Punktes  $\lambda$  in  $\mathfrak{P}_1$  ist die rationale  $C_3$

$$\lambda_1 [\eta \beta_1^2 - 4(\eta+1)\beta_1\beta_2 + 4(2\eta+1)\beta_2^2] \beta_3 + 2\lambda_2 \beta_1 \beta_3 [(\eta+1)\beta_1 - 4\eta\beta_2] - \lambda_3 \beta_1 (\beta_1 - 2\beta_2) (\eta\beta_1 - 2\beta_2) = 0. \quad (24)$$

Sie hat dieselben Eigenschaften wie im Fall  $\Lambda^{III}$ .

Die Dualisologe eines Punktes  $\bar{\lambda}$  in  $\mathfrak{P}_1$  ist die rationale  $C_3$

$$\frac{\bar{\lambda}_2 \bar{\lambda}_3 \beta_1 (\eta\beta_1 - 2\beta_2) (\beta_1 - 2\beta_2) + 2\bar{\lambda}_1^2 \beta_2 \beta_3 [\beta_1 - (\eta+1)\beta_2]}{-\bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_2 \beta_3 [(\eta+2)\beta_1^2 - 4(\eta+1)\beta_1\beta_2 + 4\beta_2^2]} = 0 \quad (25)$$

und man findet durch Koeffizientenvergleich mit der Isologengleichung, daß sie zugleich die Isologe eines Punktes  $\lambda$  in  $\mathfrak{P}_1$  ist.  $\lambda$  und  $\bar{\lambda}$  gehen auseinander durch die singuläre quadratische Verwandtschaft

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 = 2\bar{\lambda}_1 [(\eta+1)\bar{\lambda}_1 + 2\bar{\lambda}_2] : \bar{\lambda}_1 [-\eta\bar{\lambda}_1 + 4(\eta+1)\bar{\lambda}_2] : 4(2\eta+1)\bar{\lambda}_2 \bar{\lambda}_3, \\ \bar{\lambda}_1 : \bar{\lambda}_2 : \bar{\lambda}_3 = 4(2\eta+1)[(\eta+1)\lambda_1 - \lambda_2] : [\eta\lambda_1 + 2(\eta+1)\lambda_2] : (2\eta+1)[\eta\lambda_1 + 2(\eta+1)\lambda_2]^2 : 4[2(\lambda+1)^2 + \eta][(\eta+1)\lambda_1 - \lambda_2]\lambda_3 \end{array} \right. \quad (26)$$

hervor.<sup>1</sup> Hier ist  $P_3$  doppeltzählender Festpunkt,  $(2, \eta, 0)$  und  $K$  sind einfache Festpunkte. Die Hauptpunkte in der Ebene der  $\lambda$  sind  $(2(\eta+1), -\eta, 0)$  und  $P_3$ . Die Hauptpunkte in der Ebene der  $\bar{\lambda}$  sind  $P_2$  und  $P_3$ .

Im System  $\mathfrak{S}_2$  hat  $\Lambda_{\infty}^{III}$  dieselben Eigenschaften wie  $\Lambda^{III}$ ,  $\rho$  nimmt hier den Wert  $\rho = (4\eta+2) : (\eta-1)$  an. Die Isologe eines Punktes  $\lambda$  in  $\mathfrak{P}_2$  lautet wieder

$$\lambda_1 \rho \gamma_2^3 + \lambda_2 \gamma_1 (2\gamma_1 \gamma_3 - \rho \gamma_2^2) - 2\lambda_3 \gamma_1^2 \gamma_2 = 0. \quad (27)$$

Die Dualisologe eines Punktes  $\bar{\lambda}$  in  $\mathfrak{P}_2$  lautet

$$2(\bar{\lambda}_2^2 - \bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_3) \gamma_1^2 \gamma_2 - \bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_2 \gamma_1 (\rho \gamma_2^2 - 2\gamma_1 \gamma_3) + (\rho - 2) \bar{\lambda}_1^2 \gamma_2^3 = 0. \quad (28)$$

Sie ist zugleich die Isologe eines Punktes  $\lambda$ ; zwischen  $\lambda$  und  $\bar{\lambda}$  besteht die singuläre quadratische Verwandtschaft

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 = \frac{\rho - 2}{\rho} \bar{\lambda}_1^2 : \bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_2 : (\bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_3 - \bar{\lambda}_2^2), \\ \bar{\lambda}_1 : \bar{\lambda}_2 : \bar{\lambda}_3 = \rho^2 \lambda_1^2 : \rho(\rho - 2) \lambda_1 \lambda_2 : [(\rho - 2)^2 \lambda_2^2 + \rho(\rho - 2) \lambda_1 \lambda_3]. \end{array} \right. \quad (29)$$

Wir fragen uns schließlich, wie sich die in 18. D. (1, 2, 3) genannten Entartungsfälle von  $\Lambda^{\text{III}}$  im Sonderfall  $\Lambda_{\infty}^{\text{III}}$  auswirken.

1. Ist  $\bar{E}_i = P_i$  und liegen die Punkte  $E_i$  auf  $\Delta_e$ , so erhält man die zu  $\Lambda^{22}$  duale Verwandtschaft  $\Sigma \Lambda^{22} \Sigma$ , die schon in 13. E. untersucht wurde.

2. Wenn außer  $[P_i K]$  drei weitere Dreipunktgeraden auftreten sollen, können dies bei  $\Lambda_{\infty}^{\text{III}}$  nur die Geraden  $p_i$  oder die Geraden  $[P_i K_i^{00}]$  sein. Im einen Fall muß dann  $E_i = K_i^0$  sein und man erhält die Verwandtschaft  $\Gamma$ , im anderen Fall muß dann  $E_i = K_i$  sein und man kommt zur Verwandtschaft  $\Sigma$ .

3. Wenn  $\bar{E}_i = P_i$  ist und die  $E_i$  die zweiten Schnittpunkte der Geraden  $[P_i K]$  mit der Umlinie  $\Delta_u$  sind, erhält man wieder die harmonische Kollineation  $\Lambda^1$  in  $\mathfrak{B}$ .

4. Wenn schließlich auch die Punkte  $E_i$  nach  $P_i$  rücken, also auch  $\eta$  über alle Grenzen wächst, erhält man die Verwandtschaft  $\Delta$ .

## 18. Die Kegelschnittverwandtschaften, die sich auf Bertinische Punktverwandtschaften in $\mathfrak{B}$ abbilden.

Es bleibt noch die Frage zu beantworten, wann eine Bertinische Verwandtschaft in  $\mathfrak{B}$  (vgl. 11, 4.) als Kegelschnittverwandtschaft in  $\mathfrak{D}$  gedeutet werden kann, die mit Hilfe eines festen Kegelschnitts  $k$  definiert ist. Die acht Hauptpunkte der Bertinischen Verwandtschaft in  $\mathfrak{B}$  müssen dann allein durch den Punkt  $K$  und das Dreieck  $\Pi$  definiert sein. Man überlegt nun leicht, daß sich acht Punkte in  $\mathfrak{B}$  nur triangulär-symmetrisch anordnen lassen, indem man sechs dieser Punkte triangulär-symmetrisch anordnet und die restlichen zwei Punkte in die Bildpunkte  $K^1, K^2$  der mit  $k$  verbundenen Kegelschnitte legt. (Es ist allerdings auch der Fall möglich, daß in  $K^1$  und  $K^2$  je zwei oder je vier der acht Hauptpunkte zusammenrücken, aber die beiden so entstehenden Kegelschnittverwandtschaften verdienen kein besonderes Interesse.)

Dann scheidet aber der Fall aus, daß die ersten sechs Punkte auf einem Kegelschnitt in  $\mathfrak{P}$  liegen (wie dies bei  $\Lambda^I$  der Fall war), denn hier lägen alle acht Hauptpunkte der Bertinischen Verwandtschaft auf diesem Kegelschnitt und von jeder  $C_6$  mit Doppelpunkten in diesen acht Hauptpunkten würde sich jener Kegelschnitt abspalten. Ebenso scheidet der Fall aus, daß drei der ersten sechs Hauptpunkte der Bertinischen Verwandtschaft in  $\mathfrak{P}$  in die Punkte  $K_i^{00}$  fallen (wie dies bei  $\Lambda^{II}$  der Fall war), da hier auf der Geraden  $\Delta_e$  die fünf Hauptpunkte  $K_i^{00}$ ,  $K^1$ ,  $K^2$  lägen und  $\Delta_e$  sich aus diesem Grund von jeder  $C_6$  mit Doppelpunkten in den acht Hauptpunkten abspalten würde.

Daher bleibt nur der einzige Fall übrig, daß die ersten sechs Hauptpunkte der Bertinischen Verwandtschaft wie bei  $\Lambda^{III}$  aus zwei Tripeln triangulär-symmetrischer Punkte bestehen. Tatsächlich läßt sich jede Verwandtschaft  $\Lambda^{III}$  (ebenso jeder ihrer Entartungsfälle) als Sonderfall einer Bertinischen Verwandtschaft in  $\mathfrak{P}$  auffassen:  $K^1$  und  $K^2$  sind ein Punktepaar von  $\Lambda^{III}$ , daher geht durch Anwendung von  $\Lambda^{III}$  eine  $C_6$  mit Doppelpunkten in  $E_i$ ,  $\bar{E}_i$ ,  $K^1$ ,  $K^2$  zunächst in eine  $C_{30}$  mit zwölffachen Punkten in  $E_i$  und  $\bar{E}_i$  und Doppelpunkten in  $K^1$  und  $K^2$  über. Da die  $C_6$  aber Doppelpunkte in  $E_i$  und  $\bar{E}_i$  hat, spalten sich von der  $C_{30}$  die Hauptkegelschnitte  $[E_1 E_2 E_3 \bar{E}_2 \bar{E}_3]$ ,  $\dots$ ,  $[\bar{E}_1 \bar{E}_2 \bar{E}_3 E_2 E_3]$ ,  $\dots$  doppelt ab und es bleibt eine  $C'_6$  mit Doppelpunkten in  $E_i$ ,  $\bar{E}_i$ ,  $K^1$ ,  $K^2$ .  $C_6$  und  $C'_6$  haben in den Punkten  $E_i$ ,  $\bar{E}_i$ ,  $K^1$  und  $K^2$  32 Schnittpunkte vereinigt. Da außerdem die von  $E_i$  und  $\bar{E}_i$  verschiedenen sechs Schnittpunkte der  $C_6$  mit der Koinzidenzkurve von  $\Lambda^{III}$  festbleiben, also auch der  $C'_6$  angehören, sind 38 Schnittpunkte von  $C_6$  und  $C'_6$  bekannt, also ist  $C_6 = C'_6$ . Daher geht jede der  $\infty^3 C_6$  mit Doppelpunkten in  $E_i$ ,  $\bar{E}_i$ ,  $K^1$  und  $K^2$ , die sich durch einen angenommenen Punkt  $\alpha$  in  $\mathfrak{P}$  legen lassen, durch  $\Lambda^{III}$  in sich über, alle diese  $C_6$  haben daher noch einen Punkt gemein und dieser ist der Bildpunkt von  $\alpha$  in der Verwandtschaft  $\Lambda^{III}$ .

# ZOBODAT - [www.zobodat.at](http://www.zobodat.at)

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse](#)

Jahr/Year: 1943

Band/Volume: [152\\_2a](#)

Autor(en)/Author(s): Hohenberg Fritz

Artikel/Article: [Eineindeutige involutorische Kegelschnittverwandtschaften, die sich mit Hilfe eines festen Kegelschnitts definieren lassen. 15-101](#)