

# Ein Beitrag zur Theorie ebener Magnetfeldröhren\*)

Von

Michael Auner

(Mit 7 Textfiguren)

(Vorgelegt in der Sitzung vom 16. Dezember 1943)

## Inhaltsverzeichnis

|   | Seite |
|---|-------|
| Einleitung  | 1     |
| Bezeichnungen und allgemeine Formeln  | 4     |
| 1. Bezeichnungen .....  | 4     |
| 2. Langmuir'sche Raumladungsformel  | 5     |
| 3. Energiesatz .....  | 5     |
| 4. Kritische Feldstärke .....   | 5     |
| 5. Geschwindigkeitsverteilung der Glühelktronen                                 | 6     |
| I. Vernachlässigung der statistischen Verteilung der Austrittsgeschwindigkeiten | 6     |
| 1. Anfangsgeschwindigkeit Null .....  | 6     |
| 2. Anfangsgeschwindigkeit von Null verschieden                                  | 11    |
| II. Vernachlässigung der Raumladung   | 15    |
| III. Ansätze zur Behandlung des allgemeinen Falles                              | 19    |
| Anhang  | 22    |
| Literaturnachweis   | 30    |

---

### Einleitung.

In den Anwendungen der Elektrophysik trifft man oft auf sogenannte Magnetfeldröhren (Lit. 1, 2, 3, 4), das sind Elektronenröhren, bei denen der Strom durch magnetische Felder gesteuert wird. Als Kennlinie einer Röhre bezeichnet man den Verlauf der Abhängigkeit des gesteuerten Stromes von der steuernden Größe, in diesem Fall vom Magnetfeld. Im Folgenden soll versucht

---

\*) Die Anregung zur Bearbeitung dieser Probleme geht zurück auf Aufgabenstellungen aus der technischen Entwicklungsarbeit der Siemens u. Halske-A. G.

werden, die Gestalt dieser Kennlinie für den Fall der ebenen Anordnung zu finden, d. h. das Elektroden-system der Röhre bestehe aus einer unbegrenzt gedachten, ebenen Glühkathode und einer parallelen Anode im Abstand  $D$ . In diesem Entladungsraum wirke ein homogenes Magnetfeld mit der Intensität  $H$  parallel zu den Elektroden (Fig. 1).

Der Verlauf der Kennlinie ist beim Magnetron ein typischer (Fig. 2): Bei bestimmter Anodenspannung und Heizung nimmt der Strom zunächst mit wachsender Intensität des Magnetfeldes nur wenig ab, fällt jedoch bei einer bestimmten Feldstärke, der sogenannten kritischen Feldstärke  $H_c$ , mehr oder weniger steil ab. Die qualitative Erklärung für dieses Verhalten ist einfach: Ein Elektron, das aus der Kathode austritt, wird aus seiner

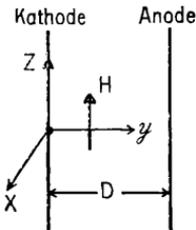


Fig. 1.

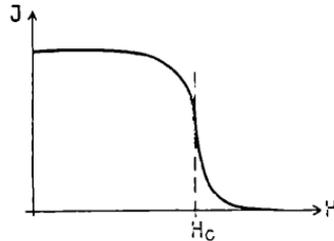


Fig. 2.

geraden Bahn um so mehr abgelenkt, je stärker das Magnetfeld ist. Ist der Krümmungsradius der Bahn schließlich kleiner als der Elektrodenabstand (was von einem gewissen Magnetfeld an der Fall sein wird), so kann das Elektron die Anode nicht mehr erreichen. Dies würde für alle austretenden Elektronen bei ein und demselben Magnetfeld stattfinden, wenn der Austritt aus der Kathode mit gleicher Anfangsgeschwindigkeit erfolgte. Der Strom würde dann offenbar bei Erreichen dieser Magnetfeldstärke ganz plötzlich auf Null fallen. In Wirklichkeit sind die Anfangsgeschwindigkeiten der Glühelctronen statistisch verteilt, und diese Streuung macht sich durch eine endliche Steilheit der Kennlinie an der kritischen Stelle bemerkbar.

Für eine quantitative Erklärung ist erstens diese Tatsache zu beachten, also die statistische Verteilung der Austrittsgeschwindigkeiten der Elektronen, zweitens das Vorhandensein einer Raumladung. Versucht man nun, das Problem ohne jede Vereinfachung ganz allgemein zu behandeln, so treten große Schwierigkeiten auf. Um daher weiterzukommen, führt man vereinfachende Annahmen ein. Nach dem oben Gesagten sind da zwei Möglich-

keiten naheliegend: Erstens könnte man annehmen, daß die Elektronen aus der Kathode alle mit der Geschwindigkeit Null oder doch wenigstens mit gleicher Geschwindigkeit austreten (also keine statistische Verteilung); diese Annahme besitzt insofern eine gewisse Berechtigung, als in Wirklichkeit die mittlere Austrittsgeschwindigkeit der Glühelektronen, in Volt ausgedrückt, gegenüber den in der Röhre üblicherweise auftretenden Potentialdifferenzen sehr klein ist. Eine zweite Möglichkeit wäre dadurch gegeben, daß man zwar eine statistische Geschwindigkeitsverteilung zuläßt, dafür aber den Einfluß der Raumladung vernachlässigt; dieser Vorgang ist gerechtfertigt, solange die Elektronenemission und damit die Raumladung klein bleibt.

Entsprechend den genannten Gesichtspunkten gliedert sich die vorliegende Arbeit in drei Teile: Im ersten Teil wird die Kennlinie des ebenen Magnetrons mit Berücksichtigung der Raumladung und unter der Annahme gleicher Anfangsgeschwindigkeit aller Elektronen untersucht, und zwar zuerst für die Anfangsgeschwindigkeit Null, dann für eine beliebige, senkrecht zur Kathodenoberfläche gerichtete Anfangsgeschwindigkeit. Der zweite Teil behandelt das Magnetron mit statistischer Verteilung der Austrittsgeschwindigkeiten bei Vernachlässigung der Raumladung. Schließlich ist noch ein dritter Teil angefügt, in dem gezeigt werden soll, wie weit man unter allgemeineren Voraussetzungen kommen kann. — In allen Fällen sei jedoch grundsätzlich angenommen, daß die beiden Elektroden des Magnetrons unbegrenzte Ebenen sind, daß also Randeinflüsse nicht zur Geltung kommen; ebenso sollen Störungen, die durch ungleichmäßige Emission der Kathode, ungleichmäßigen Elektrodenabstand oder inhomogenes Magnetfeld verursacht werden, von vornherein ausgeschlossen sein.

Für die rechnerische Behandlung unserer Probleme treffen wir ein für allemal folgende Festsetzungen:

1. Verwendung des Gauß'schen Maßsystems,
2. Verwendung eines Koordinatensystems nach Fig. 1,
3. Zählung des Potentials von der Kathode als Nullpunkt,
4. positive Zählung der Elektronenladung (Raumladung und Stromdichte sind dann ebenfalls positiv, die elektrische Feldstärke ist als  $+\text{grad } \varphi$  zu nehmen).

Zur formalen Anordnung der Arbeit sei bemerkt, daß Zwischenüberlegungen und Ableitungen von Formeln (soweit nicht unmittelbar für das Verständnis des Textes erforderlich) in einen Anhang am Schluß der Arbeit verwiesen wurden, ebenso das Literaturverzeichnis, auf das im Text mit fortlaufenden Ziffern Bezug genommen wird. Einige Grundformeln und Grundtatsachen

aus der Theorie der Elektronenröhren dagegen, die immer wieder gebraucht werden und auf die in allen drei Teilen der Arbeit zurückgegriffen wird, sind zusammen mit der Erklärung der wichtigsten Bezeichnungen in einem eigenen Abschnitt zusammengestellt.

### Bezeichnungen und allgemeine Formeln,

#### 1. Bezeichnungen:

|   |   |
|---|---|
| $e_1$   | Ladung des Elektrons  |
| $m$   | Masse des Elektrons   |
| $\varphi$   | Potential an der Stelle $y$<br>$\left( \varphi' = \frac{d\varphi}{dy}, \varphi'' = \frac{d^2\varphi}{dy^2} \right)$ |
| $U$ . . . . .   | Anodenspannung der Röhre  |
| $U_t = \frac{kT}{e_1}$                                  | Voltäquivalent der Kathodentemperatur<br>$T$ ( $k$ Boltzmann'sche Konstante)  |
| $\rho$  | Raumladungsdichte   |
| $J$   | Anodenstromdichte   |
| $J_s$   | Sättigungsstromdichte der Kathode   |
| $J_0$   | Langmuir'sche Stromdichte <sup>1</sup>  |
| $H$   | magnetische Feldstärke  |
| $H_{c0}$  | kritische magnetische Feldstärke <sup>2</sup>   |
| $D$   | Elektrodenabstand   |
| $u_0, v_0, w_0$   | Komponenten der Elektronenaustrittsgeschwindigkeit in der $x$ -, $y$ - und $z$ -Richtung                            |
| $\dot{y}$   | $y$ -Komponente der Elektronengeschwindigkeit an der Stelle $y$ ( $0 \leq y \leq D$ )                               |
| $\alpha = \frac{e_1 H}{m c}$                            | ( $c$ Lichtgeschwindigkeit)   |
| $\beta = \frac{m}{2kT} = \frac{1}{2 \frac{e_1}{m} U_t}$ |   |
| $e$   | Basis der natürlichen Logarithmen   |
| $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$   | Gauß'sches Fehlerintegral.  |

<sup>1</sup> Siehe 2. dieses Abschnitts.

<sup>2</sup> Siehe 4. dieses Abschnitts.

2. Für ebene Dioden ohne Magnetfeld, Anfangsgeschwindigkeit aller Elektronen gleich Null, berechnet sich die Anodenstromdichte  $J_0$  nach der bekannten Langmuir'schen Raumladungsformel:

$$J_0 = \frac{\sqrt{2 \frac{e_1}{m}}}{9 \pi} \frac{U^{3/2}}{D^2}. \quad (1)$$

Für ihre Ableitung sei auf die Literatur verwiesen (Lit. 5).

3. Wir betrachten eine Anordnung nach Fig. 1 und wollen für ein Elektron, das aus der Kathode mit den Geschwindigkeitskomponenten  $u_0, v_0, w_0$  (in der  $x$ - bzw.  $y$ - bzw.  $z$ -Richtung) austritt, den Energiesatz für die  $y$ -Richtung aufstellen. Dazu gehen wir von den Bewegungsgleichungen aus, die in vektorieller Form lauten ( $\ddot{\mathbf{x}}$  = Ortsvektor):

$$m \ddot{\mathbf{x}} = e_1 \mathfrak{E} + \frac{e_1}{c} [\dot{\mathbf{x}}, \mathfrak{H}],$$

mit den Anfangsbedingungen:

$$\mathbf{x}(0) = 0, \dot{\mathbf{x}}(0) = (u_0, v_0, w_0).$$

Beachtet man, daß der Vektor der elektrischen Feldstärke,  $\mathfrak{E}$ , die  $y$ -Richtung hat, daß also  $\mathfrak{E} = (0, \varphi', 0)$  ist, und daß der Vektor der magnetischen Feldstärke  $\mathfrak{H} = (0, 0, H)$  ist, so folgt durch Intregation (Anhang 1) das Ergebnis:

$$\dot{y}^2 = 2 \frac{e_1}{m} \varphi + v_0^2 - 2 u_0 \alpha y - \alpha^2 y^2. \quad (2)$$

Die  $z$ -Komponente der Anfangsgeschwindigkeit ist parallel zum Magnetfeld, kommt also in (2) nicht vor.

4. Kritische Feldstärke  $H_c$ : Wie schon in der Einleitung bemerkt, werden die Elektronen durch das Magnetfeld aus ihrer geraden Bahn abgelenkt, und zwar sind die Bahnen um so stärker gekrümmt, je stärker das Magnetfeld ist. Wir definieren nun ein für allemal als kritische Feldstärke  $H_c$  jenen Wert von  $H$ , für den ein aus der Kathode ohne Anfangsgeschwindigkeit austretendes Elektron gerade noch die Anode erreichen kann, für den also die Bahn eines solchen Elektrons die Anode gerade noch tangiert. Setzt man daher im Energiesatz (2)  $u_0 = v_0 = 0, y = D, \varphi = U, \dot{y} = 0$ , so erhält man eine Bedingung für  $\alpha$  und daraus

$$H_c = \sqrt{2 \frac{m}{e_1}} c \frac{\sqrt{U}}{D}. \quad (3)$$

5. Will man in der Theorie der Elektronenröhren die statistische Verteilung der Austrittsgeschwindigkeiten der Glühelktronen berücksichtigen, so ist es notwendig, die Anzahl der Elektronen zu kennen, die pro Zeit- und Flächeneinheit aus einer glühenden Metalloberfläche (im Vakuum) austreten und deren Austrittsgeschwindigkeitskomponenten in der  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Richtung zwischen  $u_0$  und  $u_0 + du_0$ ,  $v_0$  und  $v_0 + dv_0$ ,  $w_0$  und  $w_0 + dw_0$  liegen. Wird diese Anzahl mit  $dN$  bezeichnet, so ergibt sich (Anhang 2) aus der Annahme einer Maxwell'schen Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen im Metallinneren (Lit. 6):

$$dN = 2 \frac{J_s}{e_1} \frac{\beta^2}{\pi} v_0 e^{-\beta(u_0^2 + v_0^2 + w_0^2)} du_0 dv_0 dw_0. \quad (4)$$

Der Sättigungsstrom  $J_s$  läßt sich noch als Funktion der Temperatur  $T$  darstellen und ist auch vom Kathodenmaterial abhängig (Formel von Richardson und Dushman), doch ist dies für das Folgende nicht erforderlich. Die Geschwindigkeitskomponenten  $u_0$  und  $w_0$  können für ein austretendes Elektron alle Werte zwischen  $+\infty$  und  $-\infty$  annehmen, die Komponente  $v_0$  dagegen nur Werte zwischen 0 und  $\infty$ .

## I. Vernachlässigung der statistischen Verteilung der Austrittsgeschwindigkeiten.

1. Anfangsgeschwindigkeit aller austretenden Elektronen gleich Null:  $u_0 = v_0 = w_0 = 0$ . Unter dieser Annahme läßt sich für die Kennlinie ein geschlossener Ausdruck aufstellen. Wir kommen auf folgendem Wege zum Ziel: Aus dem Energiesatz, der Poisson'schen Gleichung und der Kontinuitätsgleichung für die elektrische Strömung erhalten wir durch Eliminieren der anderen Unbekannten eine (nichtlineare) Differentialgleichung für das Potential, in der als Parameter die Stromdichte  $J$  auftritt. Es liegt also ein Eigenwertproblem vor, bei dem der Eigenwert  $J$  noch von den gegebenen Verhältnissen, insbesondere vom Magnetfeld, abhängen wird. Diese Abhängigkeit stellt offenbar die gesuchte Kennlinie dar.

Wie die Erfahrung zeigt, sind tatsächlich Strömungszustände möglich, bei denen sich von selbst eine bestimmte Anodenstromdichte einstellt, vorausgesetzt, daß der Sättigungsstrom der Kathode genügend groß ist. Es gelangt also ein ganz bestimmter Teil aller emittierten Elektronen zur Anode, die übrigen kehren zur Kathode zurück. Damit dies möglich sei, muß irgendwo im Entladungsraum die Elektronengeschwindigkeit Null werden,

also  $\dot{y}^2 = 0$  gelten, sonst würden alle Elektronen die Anode erreichen;  $y^2$  muß dort sogar seinen kleinsten Wert haben, denn wäre es an irgendeiner Stelle negativ, so könnten überhaupt keine Elektronen die Anode erreichen. Es gilt daher für eine ganz bestimmte Stelle:

$$\dot{y}^2 = 0, \quad \frac{d(\dot{y}^2)}{dy} = 0. \quad (5)$$

Die Existenz einer solchen Stelle, die man als virtuelle Kathode bezeichnet (abgekürzt: v. K.), wollen wir voraussetzen und nehmen also die Bedingungen (5) noch zum Eigenwertproblem hinzu.

Wir schreiben nun die drei anfangs erwähnten Beziehungen an, wobei wir den Energiesatz (2) zu spezialisieren haben, indem wir voraussetzungsgemäß  $u_0 = v_0 = 0$  setzen ( $w_0$  kommt in (2) nicht vor):

$$\begin{aligned} \dot{y}^2 &= 2 \frac{e_1}{m} \varphi - \alpha^2 y^2 && \text{(Energiesatz)} \\ \varphi'' &= 4 \pi \rho && \text{(Poisson'sche Gleichung)} \\ J &= \rho \dot{y} && \text{(Kontinuitätsgleichung).} \end{aligned} \quad (6)$$

Nach Gleichung (5) erhalten wir für die v. K.:

$$\begin{aligned} 2 \frac{e_1}{m} \varphi &= \alpha^2 y^2 \\ \frac{e_1}{m} \varphi' &= \alpha^2 y. \end{aligned} \quad (7)$$

Aus (6) ergibt sich durch Elimination von  $\rho$  und  $\dot{y}$  das Eigenwertproblem für  $\varphi$ :

$$\varphi'' = \frac{4 \pi J}{\sqrt{2 \frac{e_1}{m} \varphi - \alpha^2 y^2}}, \quad (8)$$

mit den Randbedingungen:

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(D) = U,$$

zu denen noch die Bedingungsgleichungen (7) für die v. K. kommen.

Für das Weitere ist die Einführung homogener Größen zweckmäßig; gleichzeitig werde zur Vereinfachung des Wurzelausdruckes in der Differentialgleichung (8) eine Transformation vorgenommen. Wir setzen also:

$$\begin{aligned} 2 \frac{e_1}{m} \varphi - \alpha^2 y^2 &= 2 \frac{e_1}{m} U \cdot f, \\ \frac{y}{D} &= \eta, \quad \frac{H}{H_c} = n, \quad \frac{J}{J_0} = \lambda; \end{aligned}$$

damit erhalten wir unter Verwendung von (1) und (3) nach kurzer Rechnung (Anhang 3) aus (8) samt den Nebenbedingungen das folgende Eigenwertproblem für das bezogene Potential  $f$ :

$$\begin{aligned} f'' &= \frac{4}{9} \lambda \frac{1}{\sqrt{f}} - 2n^2 \\ f(0) &= 0, f(1) = 1 - n^2 \\ f(\eta_k) &= f'(\eta_k) = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Darin bedeutet  $\eta_k$  die Stelle der v. K. (homogen geschrieben). Für die unabhängige Veränderliche  $\eta$  gilt gemäß unserer Problemstellung:  $0 \leq \eta \leq 1$ , für den Parameter  $n$ :  $0 \leq n \leq 1$ .

Die Differentialgleichung (9) ist vom Typus  $f'' = F(f)$ , läßt sich also elementar integrieren:

$$\begin{aligned} f'' df &= f' df' = F(f) df, \\ f'^2/2 &= \int F(f) df + C; \end{aligned}$$

dabei ist aber  $f' \neq 0$  vorausgesetzt, d. h.  $f$  ist monoton. Man hat also nötigenfalls das Integrationsintervall  $0 \leq \eta \leq 1$  in einzelne Abschnitte zu zerlegen, in denen  $f$  monoton ist.

Ist  $f$  im ganzen Intervall  $0 \leq \eta \leq 1$  monoton, so folgt zunächst wegen  $f(\eta_k) = 0$ , daß  $\eta_k = 0$  sein muß, d. h. die v. K. fällt mit der wirklichen Kathode zusammen. Dann ist also auch  $f'(0) = 0$ , und die Integration von (9) ergibt:

$$\begin{aligned} f'^2/2 &= \frac{8}{9} \lambda \sqrt{f} - 2n^2 f, \\ f' &= +2 \sqrt{\frac{4}{9} \lambda \sqrt{f} - n^2 f}, \\ \lambda &= \frac{1}{2} \int_0^f \frac{dt}{\sqrt{\frac{4}{9} \lambda \sqrt{t} - n^2 t}}; \end{aligned}$$

daraus wegen der Randbedingung  $f(1) = 1 - n^2$ :

$$1 = \frac{1}{2} \int_0^{1-n^2} \frac{dt}{\sqrt{\frac{4}{9} \lambda \sqrt{t} - n^2 t}} \quad (10)$$

Wenn dagegen  $f$  im Intervallinnern ein Maximum besitzt (jedoch kein weiteres Maximum), so folgt zunächst wieder  $\eta_k = 0$ , also

$f'(0) = 0$ . Bezeichnen wir die Höhe und Lage des Maximums mit  $f_m$  und  $\eta_m$ , so hat man jetzt das Intervall in zwei Teile  $(0, \eta_m)$  und  $(\eta_m, 1)$  zu teilen, in denen  $f$  jeweils monoton verläuft. Die Grenzbedingungen in (9) sind dann folgendermaßen anzusetzen:

|                                   |                                   |
|-----------------------------------|-----------------------------------|
| für das Intervall $(0, \eta_m)$ : | für das Intervall $(\eta_m, 1)$ : |
| $f(0) = f'(0) = 0$                | $f(\eta_m) = f_m$                 |
| $f(\eta_m) = f_m$                 | $f'(\eta_m) = 0$                  |
| $f'(\eta_m) = 0$                  | $f(1) = 1 - n^2$ .                |

Die Integration ergibt daher

|   |   |
|---|---|
| für das Intervall $(0, \eta_m)$ :                                   | für das Intervall $(\eta_m, 1)$ :                                       |
| $f'^2/2 = \frac{8}{9} \lambda \sqrt{f - 2n^2 f}$ ,                  | $f'^2/2 = \frac{8}{9} \lambda \sqrt{\bar{f} - 2n^2 \bar{f}}$            |
| $f' = +2 \sqrt{\frac{4}{9} \lambda \sqrt{\bar{f} - n^2 \bar{f}}}$ , | $-\left(\frac{8}{9} \lambda \sqrt{\bar{f}_m - 2n^2 \bar{f}_m}\right) =$ |
| $\frac{4}{9} \lambda \sqrt{\bar{f}_m - n^2 \bar{f}_m} = 0$ ,        | $= \frac{8}{9} \lambda \sqrt{\bar{f} - 2n^2 \bar{f}}$                   |

(11)

wegen (11),

$$f' = -2 \sqrt{\frac{4}{9} \lambda \sqrt{\bar{f} - n^2 \bar{f}}}$$

$$\eta = \frac{1}{2} \int_0^f \frac{dt}{\sqrt{\frac{4}{9} \lambda \sqrt{t - n^2 t}}}, \quad \eta - \eta_m = -\frac{1}{2} \int_{f_m}^f \frac{dt}{\sqrt{\frac{4}{9} \lambda \sqrt{t - n^2 t}}}$$

daraus wegen  $f(\eta_m) = f_m$  bzw. wegen  $f(1) = 1 - n^2$ :

$$\eta_m = \frac{1}{2} \int_0^{f_m} \frac{dt}{\sqrt{\frac{4}{9} \lambda \sqrt{t - n^2 t}}}, \tag{12}$$

$$1 - \eta_m = \frac{1}{2} \int_{1-n^2}^{f_m} \frac{dt}{\sqrt{\frac{4}{9} \lambda \sqrt{t - n^2 t}}}. \tag{13}$$

Gleichung (10) liefert eine Beziehung zwischen  $\lambda$  und  $n$  für den Fall, daß  $f$  kein Maximum besitzt. Für den Fall eines Maximums erhält man eine entsprechende Beziehung, wenn man durch Addition von (12) und (13)  $\eta_m$  eliminiert und sich noch  $f_m$  mittels (11) durch  $\lambda$  ausgedrückt denkt. Nach Auswertung aller auftretenden Integrale (Anhang 4), bei der sich auch die genauen Grenzen für die Gültigkeit ergeben, nehmen die beiden Beziehungen die Form an:

$$2 = \frac{4}{9} \frac{\lambda}{n^3} \left[ \pi - \overline{\arccos(2a-1)} - 2\sqrt{a-a^2} \right] \quad (14a)$$

$$\text{für } n \leq \frac{\pi}{\sqrt{\pi^2+4}} \approx 0,844,$$

$$2 = \frac{4}{9} \frac{\lambda}{n^3} \left[ \pi + \overline{\arccos(2a-1)} + 2\sqrt{a-a^2} \right] \quad (14b)$$

$$\text{für } n \geq 0,844$$

mit der Hilfsgröße  $a = \frac{n^2\sqrt{1-n^2}}{4\lambda}$

und mit  $0 \leq \overline{\arccos x} \leq \pi$  (Hauptwert). Wie im Anhang 4 näher ausgeführt wird, erhält man den für  $n$  angegebenen Wert 0,844, der die Gültigkeitsbereiche von (14a) und (14b) trennt, aus der Forderung  $a = 1$ .

Die Gleichungen (14) stellen die gesuchte Kennlinie dar, und zwar in homogenen Größen geschrieben, d. h.  $\lambda$  als Stromdichte, bezogen auf die Stromdichte bei  $H = 0$ , die ja gleich  $J_0$  ist, und  $n$  als Magnetfeldstärke, bezogen auf die kritische Feldstärke  $H_c$  als Einheit. Fig. 3 zeigt die nach Gleichung (14) berechnete Kennlinie  $\lambda(n)$ .

Für die Steilheit der Kennlinie an der kritischen Stelle findet man (Anhang 5):

$$\lim_{n \rightarrow 1} \frac{d\lambda}{dn} = -\infty$$

die Kurve  $\lambda(n)$  fällt also bei  $n=1$  unmittelbar auf Null ab. (Für  $n=1$  hat  $\lambda$  selbst den Wert  $9/4\pi \approx 0,716$ .)

Die hier gefundene Kennlinie ist schon von Braude (Lit. 7) angegeben worden, allerdings in Parameterdarstellung (Elektronenlaufzeit als Parameter) und auf etwas anderem Wege abgeleitet. Nach den Angaben in der Braude'schen Arbeit scheinen sogar mehrere Autoren (Lit. 8, 9, 10) diese Lösung gefunden zu haben, zum

Teil auch für den Fall einer zylindrischen Elektrodenanordnung (Lit. 11, 12); eine Einsichtnahme in diese von Braude zitierten Arbeiten war nicht möglich.

2. Anfangsgeschwindigkeit aller austretenden Elektronen in der  $y$ -Richtung von Null verschieden;  $v_0 \neq 0$ ,  $u_0 = w_0 = 0$ . Auch in diesem Fall läßt sich für die Kennlinie eine — wenn auch umständlichere — implizite Darstellung angeben. Wir gehen genau so vor wie unter 1., nur müssen wir jetzt im Energiesatz (2) berück-

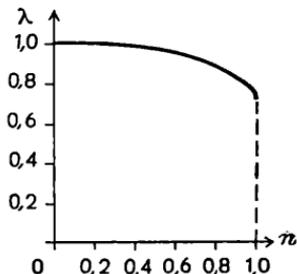


Fig. 3.

sichtigen, daß  $v_0 \neq 0$  ist. Es ist für das Folgende bequem, die Geschwindigkeit  $v_0$  durch ihr Voltäquivalent  $\varphi_0$  auszudrücken; wir setzen also:

$$\frac{m v_0^2}{2} = e_1 \varphi_0.$$

Dann haben wir analog zu (6) zunächst wieder:

$$\begin{aligned} \dot{y}^2 &= 2 \frac{e_1}{m} (\varphi + \varphi_0) - \alpha^2 y^2 \\ \varphi'' &= 4 \pi \rho \\ J &= \rho \dot{y}. \end{aligned} \tag{15}$$

Für die v. K. muß wieder nach (5) gelten:

$$\begin{aligned} 2 \frac{e_1}{m} (\varphi + \varphi_0) &= \alpha^2 y^2 \\ \frac{e_1}{m} \varphi' &= \alpha^2 y. \end{aligned} \tag{16}$$

Hier kann die v. K. offenbar nicht mit der wirklichen Kathode zusammenfallen ( $\varphi = 0$ ,  $y = 0$ ), da ja  $\varphi_0 \neq 0$  sein soll. Dann folgt aber aus der zweiten Gleichung (16), daß an der Stelle der

v. K.  $\varphi'$  positiv sein muß, es können also v. K. und Potentialminimum nicht zusammenfallen. Wie unter 1. ergibt sich die Differentialgleichung für das Potential  $\varphi$  durch Elimination von  $\rho$  und  $y$ :

$$\varphi'' = \frac{4 \pi J}{\sqrt{2 \frac{e_1}{m} (\varphi + \varphi_0) - \alpha^2 y^2}}, \quad (17)$$

mit den Randbedingungen:  $\varphi(0) = 0$ ,  $\varphi(D) = U$ , zu denen noch die Bedingungsgleichungen (16) für die v. K. treten.

Wir führen nun wieder homogene Größen ein und nehmen wie früher zur Vereinfachung der Differentialgleichung (17) eine Transformation vor; wir setzen:

$$2 \frac{e_1}{m} (\varphi + \varphi_0) - \alpha^2 y^2 = 2 \frac{e_1}{m} U f, \\ \frac{y}{D} = \eta, \quad \frac{H}{H_c} = n, \quad \frac{J}{J_0} = \lambda;$$

dann erhalten wir aus (17) samt den Zusatzbedingungen nach kurzer Rechnung ähnlich wie unter 1., wobei wieder (1) und (3) zu beachten sind (Anhang 6):

$$f'' = \frac{4}{9} \lambda \cdot \frac{1}{\sqrt{f}} - 2 n^2, \\ f(0) = \varphi_0 / U, \quad f(1) = 1 - n^2 + \varphi_0 / U, \quad (18) \\ f(\eta_k) = f'(\eta_k) = 0.$$

$\eta_k$  bedeutet wieder die Stelle der v. K.; nach der oben vorgenommenen Transformation fällt jetzt also die v. K. mit dem Minimum von  $f$  zusammen.

Nach dem unter 1. Gesagten kehrt ein Teil der emittierten Elektronen an der Stelle der v. K. um, der Rest gelangt zur Anode. Wir haben also zu beiden Seiten der v. K. verschiedene Stromdichten, daher auch verschiedene Raumladungen und müssen dementsprechend die formal angeschriebene Differentialgleichung (17) bzw. (18) durch zwei Differentialgleichungen mit verschiedenem  $J$  bzw.  $\lambda$  ersetzen, von denen die eine im Intervall  $(0, \eta_k)$  gilt, die zweite im Intervall  $(\eta_k, 1)$ . Der Zusammenhang zwischen beiden wird einerseits durch die gemeinsame Randbedingung an der Stelle  $\eta_k$  hergestellt, andererseits durch den Zusammenhang der Stromdichten in beiden Teilintervallen; bezeichnen wir nämlich diese Teilintervalle mit  $I$  bzw.  $II$ , die für die Raumladung in

ihnen maßgebende Stromdichte mit  $J_I$  bzw.  $J_{II}$  (so daß also in  $I$  gilt:  $J_I = \rho_I \dot{y}$ , in  $II$ :  $J_{II} = \rho_{II} \dot{y}$ ), ferner die Stromdichte der von der v. K. zur Kathode zurückkehrenden Elektronen mit  $J_r$ , so gilt offenbar:

$$\begin{aligned} J_I &= J_s + J_r \\ J_{II} &= J_s - J_r, \end{aligned}$$

da  $J_s$  die Dichte des insgesamt von der Kathode ausgehenden Stromes darstellt. Daher gilt auch:

$$J_I + J_{II} = 2 J_s,$$

bzw. in homogener Schreibung, mit den entsprechenden Bezeichnungen:

$$\lambda_I + \lambda_{II} = 2 J_s / J_0. \quad (19)$$

Mit diesen Bezeichnungen schreiben wir nun die Differentialgleichung (18) für die beiden Abschnitte  $I$  und  $II$  an, wobei wir noch die unabhängige Veränderliche von der v. K. aus zählen, d. h. wir setzen noch

$$\begin{aligned} \text{in } I: & \eta \text{ statt } (\eta - \eta_k), \\ \text{in } II: & \eta \text{ statt } (\eta - \eta_k). \end{aligned}$$

Wir erhalten dann

|   |  |
|---|--|
| für Abschnitt $I$ :                                     | für Abschnitt $II$ :                                       |
| $f'' = \frac{4}{9} \lambda_I \frac{1}{\sqrt{f}} - 2n^2$ | $f'' = \frac{4}{9} \lambda_{II} \frac{1}{\sqrt{f}} - 2n^2$ |
| $f(0) = f'(0) = 0$                                      | $f(0) = f'(0) = 0$   |
| $f(\eta_k) = \varphi_0 / U$                             | $f(1 - \eta_k) = 1 - n^2 + \varphi_0 / U$                  |

(20)

Diese Differentialgleichungen sind vom gleichen Typus wie die unter 1. angegebene; daß hier andere Randwerte vorgeschrieben sind, ändert nichts am grundsätzlichen Verhalten, so daß man entsprechend den in 1. auftretenden Gleichungen (10) bzw. (11), (12) und (13) erhält:

für Abschnitt  $I$  (vorausgesetzt, daß hier überhaupt kein Maximum von  $f$  auftritt, Anhang 7):

$$\eta_k = \frac{1}{2} \int_0^{\varphi_0 / U} \frac{dt}{\sqrt{\frac{4}{9} \lambda_I \sqrt{t} - n^2 t}}; \quad (21)$$

für Abschnitt *II*:

$$1 - \eta_k = \frac{1 - n^2 + \varphi_0/U}{2} \int_0^{\sqrt{t - n^2 t}} \frac{dt}{\sqrt{\frac{4}{9} \lambda_{II} \sqrt{t - n^2 t}}}, \quad (22)$$

wenn hier kein Maximum von  $f$  auftritt, und

$$\frac{4}{9} \lambda_{II} \sqrt{f_m - n^2 f_m} = 0, \quad (23)$$

$$\eta_m - \eta_k = \frac{1}{2} \int_0^{f_m} \frac{dt}{\sqrt{\frac{4}{9} \lambda_{II} \sqrt{t - n^2 t}}}, \quad (24)$$

$$1 - \eta_m = \frac{1}{2} \int_{1 - n^2 + \varphi_0/U}^{f_m} \frac{dt}{\sqrt{\frac{4}{9} \lambda_{II} \sqrt{t - n^2 t}}}, \quad (25)$$

wenn in *II* ein Maximum  $f_m$  an der Stelle  $\eta_m$  auftritt. Ähnlich wie in 1. eliminiert man  $\eta_m$  und  $\eta_k$  durch Addition von (21) und (22) bzw. von (21), (24) und (25) und setzt für  $f_m$  aus (23) ein. Es ergibt sich dann nach Ausführung aller auftretenden Integrale (Anhang 4 und 8):

$$2 = \frac{4}{9} \frac{\lambda_{II}}{n^3} \left[ \pi - \overline{\arccos(2a - 1)} - 2 \sqrt{a - a^2} \right] + \frac{4}{9} \frac{\lambda_I}{n^3} \left[ \pi - \overline{\arccos(2b - 1)} - 2 \sqrt{b - b^2} \right] \quad (26a)$$

für jene Werte von  $n$ , für die in *II* kein Maximum auftritt, und

$$2 = \frac{4}{9} \frac{\lambda_{II}}{n^3} \left[ \pi + \overline{\arccos(2a - 1)} + 2 \sqrt{a - a^2} \right] + \frac{4}{9} \frac{\lambda_I}{n^3} \left[ \pi - \overline{\arccos(2b - 1)} - 2 \sqrt{b - b^2} \right] \quad (26b)$$

für jene Werte von  $n$ , für die in *II* ein Maximum auftritt. Darin bedeutet:

$$a = \frac{n^2 \cdot \sqrt{1 - n^2 + \varphi_0/U}}{\frac{4}{9} \lambda_{II}}, \quad b = \sqrt{\frac{\varphi_0}{U}} \frac{n^2}{\frac{4}{9} \lambda_I},$$

$$0 \leq \overline{\arccos x} \leq \pi \text{ (Hauptwert).}$$

Die Abgrenzung der  $n$ -Werte, für die (26 a) oder (26 b) gilt, ist aus demselben Grund wie in 1. durch die Forderung  $a = 1$  gegeben (Anhang 4), also

$$\frac{4}{9} \lambda_{II} = n^2 \cdot \sqrt{1 - n^2 + \varphi_0/U};$$

setzt man noch in (26 a) oder (26 b)  $a = 1$ , so erhält man

$$2 = \frac{4}{9} \frac{\lambda_{II}}{n^3} \pi + \frac{4}{9} \frac{\lambda_I}{n^3} \left[ \pi - \arccos(2b-1) - 2\sqrt{b-b^2} \right];$$

aus diesen beiden Gleichungen bekommt man nach Elimination von  $\lambda_I$  (mittels Gleichung 19) und  $\lambda_{II}$  eine Beziehung zwischen  $n$  und  $\varphi_0$ , die die gesuchte Grenze festlegt. Die Gleichungen (26) stellen die gesuchte Kennlinie in impliziter Form dar, da durch sie die gesuchte Anodenstromdichte (bezogen auf  $J_0$  als Einheit) als Funktion von  $n$  gegeben ist; man hat hierzu nur  $\lambda_I$  mit Hilfe von (19) zu eliminieren. Zum Unterschied gegenüber der in 1. ermittelten Kennlinie (Anfangsgeschwindigkeit Null) ist das Ergebnis hier noch von den Parametern  $J_s$  und  $\varphi_0$  abhängig.

Der Fall der nichtverschwindenden Anfangsgeschwindigkeit entspricht den wirklichen Verhältnissen insofern besser als der in 1. behandelte Fall, als ja in Wirklichkeit die mittlere Austrittsenergie der Elektronen zwar klein, aber doch von Null verschieden ist. Die Kennlinie wird jetzt nicht bei  $n = 1$ , sondern erst für größere  $n$ -Werte senkrecht abfallen, so daß bei  $n = 1$  die Steilheit noch einen endlichen Wert besitzt.

Für  $\varphi_0 \rightarrow 0$  erhält man natürlich die schon in 1. gefundenen Ergebnisse wieder.

## II. Vernachlässigung der Raumladung.

Voraussetzung: Raumladungsdichte  $\rho = 0$ . Dagegen sei jetzt für die Glühelektronen eine statistische Verteilung der Anfangsgeschwindigkeiten nach (4) vorausgesetzt. Da die  $z$ -Komponente  $w_0$  der Austrittsgeschwindigkeit im Energiesatz nicht auftritt, kann man in (4) noch nach  $w_0$  über alle Werte von  $-\infty$  bis  $+\infty$  integrieren und erhält für die Anzahl der pro Sekunde und Quadratzentimeter emittierten Elektronen, deren Austrittsgeschwindigkeitskomponenten in der  $x$ - und  $y$ -Richtung zwischen  $u_0$  und  $u_0 + du_0$  bzw.  $v_0$  und  $v_0 + dv_0$  liegen:

$$M(u_0, v_0) du_0 dv_0 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{J_s}{e_1} \beta^{3/2} v_0 e^{-\beta(u_0^2 + v_0^2)} du_0 dv_0. \quad (27)$$

Wegen  $\rho = 0$  erhält man statt der Poisson'schen die Laplace'sche Gleichung  $\varphi'' = 0$  für das Potential  $\varphi$ , der Potentialverlauf ist also linear. Der frühere Weg zur Bestimmung des Stromes: Aufstellung eines Eigenwertproblems für  $\varphi$  mit der Stromdichte  $J$  als Eigenwert, führt hier offenbar nicht zum Ziel, weil jetzt der frühere Zusammenhang zwischen Poisson'scher Gleichung und Kontinuitätsgleichung nicht mehr gegeben ist.

Wir können die Anodenstromdichte aber dadurch bestimmen, daß wir abzählen, welche von den insgesamt pro Quadratcentimeter und Sekunde emittierten Elektronen die Anode entgegen dem Einfluß des Magnetfeldes erreichen. Für diese muß jedenfalls überall zwischen den Elektroden  $\dot{y}^2 \geq 0$  sein; und da aus (2) wegen

$$\frac{d^2(\dot{y}^2)}{dy^2} = -2\alpha < 0$$

(das Potential ist ja linear!) folgt, daß  $\dot{y}^2$  seinen kleinsten Wert am Rand des Intervalls  $(0, D)$  annimmt, so genügt es, an der Anode  $\dot{y}^2 = 0$  anzusetzen, um die Grenze zwischen jenen Elektronen zu erhalten, die die Anode erreichen, und jenen, die sie nicht erreichen. Wir finden also für diese Grenze:

$$v_0^2 = 2u_0\alpha D + \alpha^2 D^2 - 2\frac{e_1}{m}U. \quad (28)$$

Diese Beziehung zwischen  $u_0$  und  $v_0$ , als Kurve in der  $u_0$ - $v_0$ -Halbebene gedeutet, stellt eine Parabel dar, die das Gebiet  $\mathfrak{G}$  aller zur Anode gelangenden Elektronen von dem restlichen Gebiet der Elektronen trennt, die vor der Anode umkehren (Fig. 4). Für alle inneren Punkte von  $\mathfrak{G}$  und für den Rest der Berandung, der von einem Teil der  $u_0$ -Achse gebildet wird, ist  $\dot{y}^2$  an der Anode positiv.

Für die Stromdichte ergibt sich daher:

$$J = e_1 \iint_{\mathfrak{G}} M(u_0, v_0) du_0 dv_0. \quad (29)$$

Vor der Auswertung dieses Integrals führen wir wieder homogene Größen ein:

$$\frac{\varphi}{U_t} = f, \quad \frac{y}{D} = \eta, \quad \frac{H}{H_c} = n, \quad \frac{U}{U_t} = \tau^2;$$

außerdem transformieren wir das Doppelintegral auf neue Veränderliche  $s, t$ :

$$u_0 = \frac{s}{\sqrt{\beta}}, \quad v_0^2 = \frac{t}{\beta}.$$

Damit erhalten wir zunächst die Umformungen:

$$\alpha = \frac{e_1 H}{m c} = \frac{e_1}{m c} \cdot n H_c = \frac{n \tau}{D \sqrt{\beta}};$$

$$\begin{aligned} \dot{y}^2 &= 2 \frac{e_1}{m} \varphi + v_0^2 - 2 u_0 \alpha y - \alpha^2 y^2 = \\ &= 2 \frac{e_1}{m} U_t f + \frac{t}{\beta} - \frac{2 n \tau \eta s}{\beta} - \frac{n^2 \tau^2 \eta^2}{\beta} = \\ &= \frac{1}{\beta} (f + t - 2 n \tau \eta s - n^2 \tau^2 \eta^2); \end{aligned} \quad (30)$$

$$M(u_0, v_0) du_0 dv_0 = \frac{J_s}{e_1 \sqrt{\pi}} \cdot e^{-(s^2+t)} ds dt. \quad (31)$$

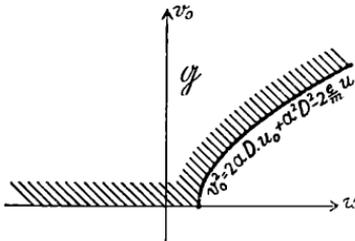


Fig. 4.

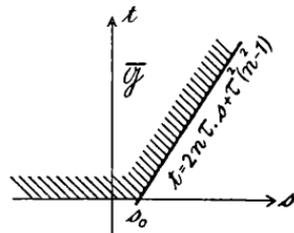


Fig. 5.

Aus (29) wird dann

$$J = \frac{J_s}{\sqrt{\pi}} \iint_{\bar{\mathfrak{G}}} e^{-(s^2+t)} ds dt. \quad (32)$$

$\bar{\mathfrak{G}}$  bedeutet das Bildgebiet von  $\mathfrak{G}$  in der  $s-t$ -Ebene; wir erhalten es entweder durch analoge Umformung der Gleichung (28) oder auch direkt aus (30), indem wir  $\dot{y}^2 = 0$ ,  $f = \tau^2$ ,  $\eta = 1$  setzen. Die Grenze von  $\bar{\mathfrak{G}}$  ist dann gegeben durch

$$t = 2 n \tau \cdot s + \tau^2 (n^2 - 1), \quad (33)$$

wozu als weitere Berandung noch der entsprechende Abschnitt der  $s$ -Achse kommt. Die Parabel aus Fig. 4 erscheint jetzt nach der Transformation als Gerade (Fig. 5).

Aus (33) folgt für den in Fig. 5 mit  $s_0$  bezeichneten Wert von  $s$ :

$$s_0 = \frac{\tau (1 - n^2)}{2n}. \quad (34)$$

Die Auswertung des Doppelintegrals in (32) ergibt (Anhang 9) für das Integrationsgebiet  $\bar{\mathcal{G}}$ :

$$\iint_{\bar{\mathcal{G}}} e^{-(s^2+t)} ds dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \left\{ 1 + \Phi(s_0) + e^{\tau^2} \cdot [1 - \Phi(s_0 + n\tau)] \right\}.$$

Wegen  $s_0 + n\tau = \frac{\tau(1+n^2)}{2n}$  wird die relative Stromdichte

$$\frac{J}{J_s} = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \Phi\left(\frac{\tau(1-n^2)}{2n}\right) + e^{\tau^2} \cdot \left[ 1 - \Phi\left(\frac{\tau(1+n^2)}{2n}\right) \right] \right\} \quad (35)$$

Da von vornherein die Raumladung vernachlässigt wurde, muß sich für  $n=0$  die volle Sättigungsstromdichte  $J_s$  als Anodenstromdichte ergeben. Dies folgt tatsächlich aus (35) wegen  $\lim_{x \rightarrow \infty} \Phi(x) = 1$ .

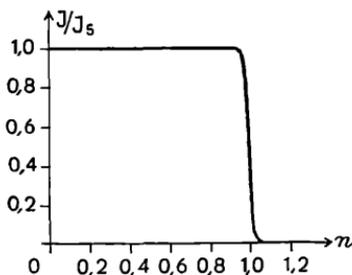


Fig. 6.

Für große Werte von  $\tau$ , wie sie praktisch oft von Bedeutung sind, kann man (35) durch die folgende Näherungsformel ersetzen:

$$\frac{J}{J_s} = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \Phi\left(\frac{\tau(1-n^2)}{2n}\right) \right\}. \quad (36)$$

In (35) nimmt nämlich das Glied in der eckigen Klammer für  $n=1$  seinen größten Wert an; dann erhält man aber aus der asymptotischen Entwicklung von  $\Phi$  (Lit. 13):

$$e^{\tau^2} \cdot [1 - \Phi(\tau)] = \frac{1}{\tau\sqrt{\pi}} \left[ 1 - \frac{1}{2\tau^2} + \frac{1 \cdot 3}{(2\tau^2)^2} - \dots \right] \approx \frac{1}{\tau\sqrt{\pi}}.$$

Der Fehler wird also nur etwa  $\frac{1}{2\tau\sqrt{\pi}}$  betragen. — Fig. 6 zeigt die Auswertung der Formel (36) für  $U = 80 V$ ,  $U_l = 0,08 V$  (entsprechend einer Kathodentemperatur  $T = 930^\circ$ ), also  $\tau^2 = 1000$ .

Die typische Form der Kennlinie ist zwar zu erkennen; die Vernachlässigung der Raumladung macht sich aber dadurch bemerkbar, daß die Kurve für  $n < 1$  fast horizontal verläuft und erst für Werte von  $n$ , die sehr nahe bei 1 liegen, abfällt.

Berechnung der Steilheit der Kennlinie durch Differentiation von (35):

$$\frac{d(J/J_s)}{dn} = -\frac{\tau}{2\sqrt{\pi}} \left[ e^{-\frac{\tau^2(1-n^2)^2}{4n^2}} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) - e^{-\tau^2} e^{-\frac{\tau^2(1+n^2)^2}{4n^2}} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \right]$$

für  $H = H_c$ , d. h. für  $n = 1$  ergibt sich:

$$\frac{d(J/J_s)}{dn} \Big|_{n=1} = -\frac{\tau}{\sqrt{\pi}}.$$

Für  $H > H_c$  ist unter ähnlichen Voraussetzungen wie in II. die Kennlinie des Magnetrons schon von Linder (Lit. 14) berechnet worden, allerdings für eine zylindrische Elektrodenanordnung, so daß sich die Ergebnisse nicht unmittelbar vergleichen lassen.

### III. Ansätze zur Behandlung des allgemeinen Falles.

Die Raumladung werde jetzt in Betracht gezogen; außerdem sei die Verteilung der Austrittsgeschwindigkeiten wieder durch (27) gegeben, oder besser gleich in der homogenen Schreibweise durch (34). Für die Stromdichte  $J$  gilt dann wieder die Gleichung (32). Das Integrationsgebiet  $\bar{\mathfrak{G}}$  umfaßt alle Elektronen, die zur Anode gelangen, für die also längs ihrer ganzen Bahn  $\dot{y}^2 \geq 0$  ist. Während es aber in II. genügte, diese Bedingung für die Anode als ungünstigste Stelle zu formulieren, ist dies hier nicht mehr möglich:  $\dot{y}^2$  muß seinen kleinsten Wert nicht notwendig am Rand annehmen, es kann also sein, daß  $\dot{y}^2$  an den Elektroden positiv ist, irgendwo in der Mitte aber negativ. Je nach ihrer Anfangsgeschwindigkeit können an jeder Stelle im Innern des Entladungsraumes Elektronen umkehren. Diese Elektronen liefern natürlich zum Strom keinen Beitrag.

Die Grenze von  $\bar{\mathfrak{G}}$  wird offenbar von jenen Elektronen gebildet, deren Anfangsgeschwindigkeiten  $u_0$  und  $v_0$  (bzw.  $s$  und  $t$  nach der Transformation) solche sind, daß an irgendeiner Stelle

der Bahn der kleinste Wert von  $y^2$  gerade gleich Null ist. Es gilt dort also:

$$y^2 = 0, \quad \frac{d(y^2)}{dy} = 0.$$

Verwenden wir den Energiesatz in der homogenen Gestalt (30), so erhalten wir:

$$\begin{aligned} f + t - 2n\tau\eta s - n^2\tau^2\eta^2 &= 0, \\ f' - 2n\tau s - 2n^2\tau^2\eta &= 0. \end{aligned} \quad (37)$$

Diese Gleichungen besagen aber, daß zu jedem bestimmten Wert von  $\eta$  zwischen 0 und 1, mit dem dann auch  $f$  und  $f'$  eindeutig festliegen, ganz bestimmte Werte von  $s$  und  $t$  gehören, also ein Punkt in der  $s$ — $t$ -Ebene, so daß wir in den Gleichungen (37) offenbar die Parameterdarstellung der gesuchten Grenzkurve haben:  $\eta$  ist der Parameter, der natürlich auch in  $f$  und  $f'$  enthalten ist. Geometrisch läßt sich dieser Sachverhalt auch so aussprechen, daß die Bedingung  $y^2 = 0$  eine Schar von Geraden in der  $s$ — $t$ -Ebene darstellt, mit  $\eta$  als Parameter. Der Bildung von (37) entspricht dann das Aufsuchen der Einhüllenden dieser Schar.

Die Schwierigkeit liegt nun für das Weitere darin, daß es nicht gelingt, den Parameter  $\eta$  zu eliminieren; auch ist die Potentialverteilung  $f(\eta)$  unbekannt. Man kann zwar für  $f$  eine Differentialgleichung (eigentlich eine Integrodifferentialgleichung) aufstellen, die man ähnlich wie in I. aus dem Energiesatz, der Poisson'schen Gleichung und einer Gleichung für die Raumladung gewinnt; für ihre Integration wäre aber wieder die Kenntnis der Begrenzung von  $\mathfrak{G}$  notwendig, so daß man auf diesem Weg nicht weiterkommt.

Dagegen läßt sich für die Stromdichte noch eine Näherung angeben, die gewissermaßen eine Verbesserung der in II. gefundenen Näherung darstellt. Es handelt sich dabei um die Ersetzung des Integrationsgebietes  $\mathfrak{G}$  durch ein einfacher berandetes Gebiet.

Man weiß, daß der Potentialverlauf im Magnetron kein linearer ist, daß vielmehr schon im Fall des verschwindenden Magnetfeldes ein Potentialminimum in der Nähe der Kathode auftritt (Lit. 15, 16) und daß bei wachsender Intensität des Magnetfeldes dieses Minimum tiefer wird und näher an die Kathode heranrückt: denn bei zunehmendem Magnetfeld werden mehr und mehr Elektronen zu einer frühzeitigen Umkehr gezwungen, die Raumladung zieht sich also immer mehr auf die Umgebung

der Kathode zusammen. Wir nehmen nun für das Folgende die Lage  $\eta_m$  und Tiefe  $f_m$  dieses Minimums von  $f$  als bekannt an ( $f_m < 0$ ).

Oben wurde bemerkt, daß ein emittiertes Elektron je nach seiner Anfangsgeschwindigkeit an jeder Stelle des Entladungsraumes umkehren kann. Um nun zu einer Vereinfachung zu kommen, ist die Annahme naheliegend, daß nur zwei Stellen für die Elektronenumkehr maßgebend sind, nämlich die Stelle des Potentialminimums und die Anode. Anders gefaßt: Wir nehmen willkürlich an, daß der Ausdruck für  $\dot{y}^2$  seinen kleinsten Wert nur an diesen beiden Stellen haben kann. Das bedeutet für den Strom, daß er sich aus allen Elektronen zusammensetzt, die sowohl die Potentialschwelle überwinden als auch, entgegen dem Einfluß des Magnetfeldes allein, zur Anode gelangen. Das Gebiet

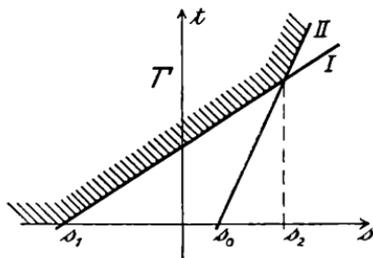


Fig. 7.

dieser Elektronen sei in der  $s-t$ -Ebene mit  $\Gamma$  bezeichnet. Um also die Grenze von  $\Gamma$  zu bestimmen, haben wir anzusetzen, daß  $\dot{y}^2$  an der Stelle des Minimums und an der Anode gerade Null wird; wir erhalten so aus (30) die beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} t_I &= 2n\tau\eta_m \cdot s + n^2\tau^2\eta_m^2 - f_m, \\ t_{II} &= 2n\tau \cdot s + \tau^2(n^2 - 1). \end{aligned} \quad (38)$$

Diese beiden Geraden  $I$  und  $II$  bilden also (zusammen mit einem Teil der  $s$ -Achse, Fig. 7) die Begrenzung von  $\Gamma$ , und zwar offenbar so, daß in  $\Gamma$  nur Punkte liegen, für die an beiden kritischen Stellen  $\dot{y}^2 \geq 0$  ist.

Wir bemerken noch, daß die Gerade  $II$  schon in (33) als Grenzlinie auftritt (siehe Fig. 5). Damals hatten wir für die Stromberechnung von vornherein die Raumladung vernachlässigt und gefunden, daß dann für  $\dot{y}^2$  überhaupt nur eine einzige Stelle, die Anode, maßgebend ist. Dieser früher behandelte Fall stellt also eine noch weitergehende Vereinfachung des Problems dar.

Zur Abkürzung führen wir mit den Bezeichnungen der Fig. 7 noch ein:

$$\begin{aligned} s_0 &= \frac{\tau(1-n^2)}{2n}, \\ s_1 &= \frac{f_m - n^2 \tau^2 \eta_m^2}{2n\tau\eta_m}, \\ s_2 &= \frac{\tau^2[1-n^2(1-\eta_m^2)] - f_m}{2n\tau(1-\eta_m)}. \end{aligned} \quad (39)$$

Die Ausführung der Integration in (32) über das Gebiet  $\Gamma$  ergibt nach Anhang 10 für die Stromdichte  $J$ :

$$J = \frac{J_s}{2} \cdot \{1 + \Phi(s_1) + e^{f_m} [\Phi(s_2 + n\tau\eta_m) - \Phi(s_1 + n\tau\eta_m)] + e^{s_2} [1 - \Phi(s_2 + n\tau)]\}. \quad (40)$$

Zusatzbemerkung: Man sieht leicht ein, daß für  $n \rightarrow 0$  gilt:  $s_0 \rightarrow +\infty$ ,  $s_1 \rightarrow -\infty$ ,  $s_2 \rightarrow +\infty$ ;<sup>1</sup> dann folgt aus (40):

$$\lim_{n \rightarrow 0} J = J_s \cdot e^{f_m} = J_s \cdot e^{\varphi_m / U_t}, \quad (\varphi_m = f_m \cdot U_t);$$

das ist aber die Stromdichte im Fall des fehlenden Magnetfeldes (Lit. 16).

In (40) sind zwar  $f_m$  und  $\eta_m$  unbekannt, doch könnte man etwa, vom magnetfeldfreien Fall als Anhaltspunkt ausgehend, diese Größen so wählen, daß die berechnete Stromdichte mit den vorhandenen Messungen oder auch mit den auf andere Weise gefundenen Werten möglichst gut übereinstimmt.

### Anhang 1.

$$\dot{\mathfrak{g}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}, \quad \ddot{\mathfrak{g}} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi' \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ H \end{pmatrix}; \quad [\dot{\mathfrak{g}}, \mathfrak{S}] = \begin{pmatrix} H\dot{y} \\ -H\dot{x} \\ 0 \end{pmatrix};$$

die Bewegungsgleichungen lauten also in Komponentenform:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \alpha \dot{y} \\ \ddot{y} &= \frac{e_1}{m} \varphi' - \alpha \dot{x} \\ \ddot{z} &= 0, \end{aligned}$$

mit den Anfangsbedingungen:

$$\begin{aligned} x(0) &= y(0) = z(0) = 0, \\ \dot{x}(0) &= u_0, \quad \dot{y}(0) = v_0, \quad \dot{z}(0) = w_0. \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Dabei streben natürlich  $f_m$  und  $\eta_m$  gegen die Werte, die im Fall des fehlenden Magnetfeldes Lage und Tiefe des Potentialminimums angeben.

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= u_0 + \alpha y, \\ \dot{y} &= \frac{e_1}{m} \varphi' - \alpha u_0 - \alpha^2 y;\end{aligned}$$

wegen  $\dot{y} dy = \dot{y} d\dot{y}$  und wegen  $\varphi = 0$  für  $y = 0$  ergibt Integration der letzten Gleichung nach  $y$ :

$$\dot{y}^2 = 2 \frac{e_1}{m} \varphi + v_0^2 - 2 u_0 \alpha y - \alpha^2 y^2.$$

## Anhang 2.

Nach Becker (Lit. 6) ist die Zahl der pro Sekunde und Quadratcentimeter austretenden Elektronen, deren Geschwindigkeitskomponenten im Metallinnern zwischen  $u$  und  $u + du$ ,  $v$  und  $v + dv$ ,  $w$  und  $w + dw$  liegen ( $v$  ist die zur Oberfläche senkrechte Komponente), gegeben durch

$$dN = K \cdot v \cdot e^{-\beta(u^2 + v^2 + w^2)} du dv dw,$$

mit  $-\infty < u, w < +\infty$  und mit  $v \geq v_{min}$ , Austrittsarbeit

$$A = \frac{m v_{min}^2}{2}$$

Zur Transformation auf den Außenraum (Geschwindigkeitskomponenten  $u_0, v_0, w_0$ ) ist zu beachten, daß

$$\begin{aligned}u_0 &= u \\ v_0^2 + v_{min}^2 &= v^2 \quad \left( \text{wegen } \frac{m v^2}{2} - \frac{m v_{min}^2}{2} = \frac{m v_0^2}{2} \right) \\ w_0 &= w\end{aligned}$$

ist, daher  $du = du_0$ ,  $v dv = v_0 dv_0$ ,  $dw = dw_0$ , so daß man erhält:

$$dN = K \cdot e^{-\beta v_{min}^2} \cdot v_0 \cdot e^{-\beta(u_0^2 + v_0^2 + w_0^2)} du_0 dv_0 dw_0,$$

wobei jetzt  $-\infty < u_0, w_0 < +\infty$ ;  $0 \leq v_0 < +\infty$ .

Die Konstante  $K \cdot e^{-\beta v_{min}^2}$  ergibt sich aus der Bedingung

$$e_1 \cdot \int dN = J_s \quad \text{zu} \quad 2 \frac{J_s}{e_1} \frac{\beta^2}{\pi}.$$

## Anhang 3.

$$\varphi = U \cdot f + \frac{\alpha^2}{2 \frac{e_1}{m}} y^2;$$

$$\begin{aligned} \frac{\alpha^2}{2 \frac{e_1}{m}} y^2 &= \frac{e_1^2 H^2}{m^2 c^2} y^2 = \frac{H^2}{2 \frac{m}{e_1} c^2} y^2 = \frac{n^2 H_c^2}{2 \frac{m}{e_1} c^2} \gamma_1^2 D^2 = \\ &= U \quad n^2 \gamma_1^2 \quad \frac{H_c^2}{2 \frac{m}{e_1} c^2} \frac{U}{D^2} = U \cdot n^2 \gamma_1^2 \text{ wegen (3);} \end{aligned}$$

daher:  $\varphi = U (f + n^2 \gamma_1^2)$ ;

$$\varphi'' = \frac{d^2 \varphi}{d y^2} = \frac{U}{D^2} \cdot \left( \frac{d^2 f}{d \gamma_1^2} + 2 n^2 \right) = \frac{U}{D^2} (f'' + 2 n^2);$$

$$\frac{U}{D^2} \cdot (f'' + 2 n^2) = \frac{4 \pi J}{\sqrt{2 \frac{e_1}{m} U \cdot f}};$$

$$f'' + 2 n^2 = \frac{4 J \cdot 9 \pi D^2}{9 \sqrt{2 \frac{e_1}{m} U^{3/2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{f}} = \frac{4 J}{9 J_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{f}} \text{ wegen (1).}$$

#### Anhang 4.

Zunächst ist allgemein:  $\int_A^B \frac{2u \, du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \int_{2A-1}^{2B-1} \sqrt{\frac{1+v}{1-v}} \, dv =$   
 $(2u = 1 + v, \quad (v = \cos 2\varphi)$   
 $2 \, du = dv)$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \overline{\arccos(2B-1)} \quad \frac{1}{2} \overline{\arccos(2A-1)} \quad (0 \leq \overline{\arccos x} \leq \pi) \\ &= -4 \int \cos^2 \varphi \, d\varphi = 2 \int (1 + \cos 2\varphi) \, d\varphi = \\ &\frac{1}{2} \overline{\arccos(2A-1)} \quad \frac{1}{2} \overline{\arccos(2B-1)} \end{aligned}$$

$$= [2\varphi + \sin 2\varphi] \left| \begin{array}{l} \frac{1}{2} \overline{\arccos(2A-1)} \\ \frac{1}{2} \overline{\arccos(2B-1)} \end{array} \right. =$$

$$= \overline{\arccos(2A-1)} + \sin[\overline{\arccos(2A-1)}] -$$

$$- \overline{\arccos(2B-1)} - \sin[\overline{\arccos(2B-1)}] =$$

$$= \overline{\arccos(2A-1)} + 2\sqrt{A-A^2} - \overline{\arccos(2B-1)} - 2\sqrt{B-B^2};$$

$$\text{daher: } \int_0^{f_m} \frac{dt}{\sqrt{\frac{4}{9}\lambda\sqrt{t-n^2}t}} = \frac{\sqrt{f_m}}{n} \int_0^1 \frac{2u du}{\sqrt{u-u^2}} = \frac{\sqrt{f_m}}{n} \cdot \pi = \frac{4}{9} \frac{\lambda}{n^3} \cdot \pi$$

$$(t = u^2 \cdot f_m, \\ dt = 2u du \cdot f_m)$$

$$(\text{wegen (11) gilt: } \frac{4}{9}\lambda = n^2\sqrt{f_m} \quad \sqrt{f_m} = \frac{4}{9} \frac{\lambda}{n^2} );$$

$$\int_{1-n^2}^{f_m} \frac{dt}{\sqrt{\frac{4}{9}\lambda\sqrt{t-n^2}t}} = \frac{\sqrt{f_m}}{n} \int_{\frac{\sqrt{1-n^2}}{\sqrt{f_m}}}^1 \frac{2u du}{\sqrt{u-u^2}} = \frac{\sqrt{f_m}}{n} \int_a^1 \frac{2u du}{\sqrt{u-u^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{f_m}}{n} [\overline{\arccos(2a-1)} + 2\sqrt{a-a^2}] =$$

$$= \frac{4}{9} \frac{\lambda}{n^3} \cdot [\overline{\arccos(2a-1)} + 2\sqrt{a-a^2}],$$

$$\text{wobei } a = \sqrt{\frac{1-n^2}{f_m}} = \frac{n^2\sqrt{1-n^2}}{\frac{4}{9}\lambda}, \text{ also } a \leq 1 \text{ wegen}$$

$$f_m \geq 1-n^2 = \text{Randwert von } f;$$

$$\int_0^{1-n^2} \frac{dt}{\sqrt{\frac{4}{9}\lambda\sqrt{t-n^2}t}} = \frac{\sqrt{f_m}}{n} \int_0^{\frac{\sqrt{1-n^2}}{\sqrt{f_m}}} \frac{2u du}{\sqrt{u-u^2}} = \frac{\sqrt{f_m}}{n} \int_0^a \frac{2u du}{\sqrt{u-u^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{f_m}}{n} \cdot [\pi - \overline{\arccos(2a-1)} - 2\sqrt{a-a^2}] =$$

$$= \frac{4}{9} \frac{\lambda}{n^3} \cdot [\pi - \overline{\arccos(2a-1)} - 2\sqrt{a-a^2}].$$

Tritt das Maximum  $f_m$  gerade am Rande auf ( $\eta = 1$ ), so gilt offenbar:

$$f_m = 1 - n^2, \text{ d. h. } a = 1, \text{ also}$$

$$\frac{4}{9} \lambda = n^2 \sqrt{1 - n^2};$$

aus (14) folgt aber für  $a = 1$ :

$$2 = \frac{4}{9} \frac{\lambda}{n^3} \cdot \pi;$$

daher aus den beiden letzten Gleichungen:

$$n = \frac{\pi}{\sqrt{\pi^2 + 4}} \approx 0,844 \text{ für } a = 1;$$

dieser Wert trennt den Geltungsbereich von (14 a) und (14 b). Aus (12) folgt mit dem früher berechneten Integral:

$$\eta_m = \frac{2}{9} \frac{\lambda}{n^3} \pi,$$

$\eta_m$  nimmt also mit wachsendem  $n$  ab. Für  $n > 0,844$  liegt also das Maximum im Innern, für  $n < 0,844$  liegt kein Maximum im Innern.

### Anhang 5.

Gleichung (14 b) ist von der Form  $2 = F(n, \lambda)$ ; daher ist:

$$\frac{\partial F}{\partial n} + \frac{\partial F}{\partial \lambda} \cdot \frac{d\lambda}{dn} = 0; \quad \frac{d\lambda}{dn} = - \frac{\partial F / \partial n}{\partial F / \partial \lambda}.$$

$$\text{Zunächst gilt: } a = \frac{n^2 \sqrt{1 - n^2}}{\frac{4}{9} \lambda} \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow 1;$$

$$\frac{\partial a}{\partial n} = \frac{2n - 3n^3}{\frac{4}{9} \lambda \cdot \sqrt{1 - n^2}}; \quad \frac{\partial a}{\partial \lambda} = - \frac{n^2 \sqrt{1 - n^2}}{\frac{4}{9} \lambda^2};$$

$$\frac{d}{da} \left[ \pi + \arccos(2a - 1) + 2\sqrt{a - a^2} \right] = - \frac{2a}{\sqrt{a - a^2}};$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial n} &= -\frac{4}{3} \frac{\lambda}{n^4} [\cdot/\cdot] + \frac{4}{9} \frac{\lambda}{n^3} \frac{d[\cdot/\cdot]}{da} \frac{\partial a}{\partial n} = \\ &= -\frac{4}{3} \frac{\lambda}{n^4} \cdot [\cdot/\cdot] - \frac{4}{9} \frac{\lambda}{n^3} \frac{2a}{\sqrt{a-a^2}} \frac{n(2-3n^2)}{\frac{4}{9} \lambda \sqrt{1-n^2}} = \\ &= -\frac{4}{3} \frac{\lambda}{n^4} \cdot [\cdot/\cdot] - \frac{4}{9} \frac{\lambda}{n^3} \frac{2n^2 \sqrt{1-n^2}}{\frac{4}{9} \lambda \sqrt{a-a^2}} \frac{n(2-3n^2)}{\frac{4}{9} \lambda \sqrt{1-n^2}} \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

für  $n \rightarrow 1$ , weil  $\sqrt{a-a^2} \rightarrow 0$ ;

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \lambda} &= \frac{4}{9n^3} [\cdot/\cdot] + \frac{4}{9} \frac{\lambda}{n^3} \frac{d}{da} [\cdot/\cdot] \cdot \frac{\partial a}{\partial \lambda} = \\ &= \frac{4}{9n^3} \cdot [\cdot/\cdot] + \frac{4}{9} \frac{\lambda}{n^3} \frac{2a}{\sqrt{a-a^2}} \frac{n^2 \sqrt{1-n^2}}{\frac{4}{9} \lambda^2} \rightarrow \frac{8}{9} \pi \end{aligned}$$

für  $n \rightarrow 1$ , weil  $\frac{a}{\sqrt{a-a^2}} \rightarrow 0$ ; daher  $\frac{d\lambda}{dn} \rightarrow -\infty$ .

### Anhang 6.

Unter Verwendung von Anhang 3 ergibt sich sofort:

$$\begin{aligned} \varphi + \varphi_0 &= U (f + n^2 \eta^2), \\ \varphi'' &= \frac{U}{D^2} \cdot (f'' + 2n^2), \end{aligned}$$

daher schließlich:

$$\frac{U}{D^2} \cdot (f'' + 2n^2) = \frac{4\pi J}{\sqrt{2 \frac{e_1}{m} U \cdot f}},$$

die Differentialgleichung für  $f$  hat also auch die in Anhang 3 gefundene Gestalt.

### Anhang 7.

Die Annahme, daß im Abschnitt I kein Maximum von  $f$  auftritt, rechtfertigt sich dadurch, daß jedenfalls für die praktisch wichtigen Werte von  $n$  und  $\varphi_0$  ( $\varphi_0 / U \ll 1$ ,  $n \sim 1$ )  $\lambda_I \gg 1$  gilt. Aus

$$f''' = \frac{4}{9} \lambda_I \frac{1}{\sqrt{f}} - 2n^2$$

folgt dann, daß wegen  $f''' > 0$  kein Maximum auftreten kann.

**Anhang 8.**

$$\int_0^{\varphi_0/U} \frac{dt}{\sqrt{\frac{4}{9} \lambda_I \sqrt{t-n^2 t}}} = \frac{\sqrt{p}}{n} \int_0^{\sqrt{\frac{\varphi_0}{pU}}} \frac{2u du}{\sqrt{u-u^2}},$$

(Abkürzung:  $\frac{4}{9} \lambda_I / n^2 = \sqrt{p}$ ; Substitution:  $t = u^2 p$ ,

$$dt = 2u du \cdot p),$$

daher nach Anhang 4:

$$\int_0^{\varphi_0/U} \frac{dt}{\sqrt{\frac{4}{9} \lambda_I \sqrt{t-n^2 t}}} = \frac{4}{9} \frac{\lambda_I}{n^3} \left[ \pi - \arccos(2b-1) - 2\sqrt{b-b^2} \right],$$

$$\text{wobei } b = \sqrt{\frac{\varphi_0}{pU}} = \sqrt{\frac{\varphi_0}{U}} \frac{n^2}{\frac{4}{9} \lambda_I}$$

**Anhang 9.**

$$\iint_{\overline{\Theta}} e^{-(s+t)} ds dt = \int_{-\infty}^{s_0} e^{-s^2} ds \int_0^{\infty} e^{-t} dt + \int_{s_0}^{\infty} e^{-s^2} ds \int_{t(s)}^{\infty} e^{-t} dt =$$

$$t(s) = 2n\tau \cdot s + \tau^2(n^2 - 1)$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left\{ 1 + \Phi(s_0) + \int_{s_0}^{\infty} e^{-s^2} \cdot e^{-t(s)} ds \right\} =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left\{ 1 + \Phi(s_0) + e^{\tau^2} [1 - \Phi(s_0 + n\tau)] \right\}$$

$$\text{wegen } \int_{s_0}^{\infty} e^{-s^2} \cdot e^{-t(s)} ds = \int_{s_0}^{\infty} e^{-s^2 - 2n\tau s + (1-n^2)\tau^2} ds =$$

$$= e^{\tau^2} \int_{s_0}^{\infty} e^{-(s+n\tau)^2} ds = e^{\tau^2} \int_{s_0+n\tau}^{\infty} e^{-\sigma^2} d\sigma = e^{\tau^2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot [1 - \Phi(s_0 + n\tau)];$$

$$\left( \begin{array}{l} s + n\tau = \sigma \\ ds = d\sigma \end{array} \right)$$

beachtet man noch, daß

$$s_0 = \frac{\tau(1-n^2)}{2n}, \quad s_0 + n\tau = \frac{\tau(1+n^2)}{2n}$$

ist, so folgt (35).

### Anhang 10.

$$J = \frac{J_s}{\sqrt{\pi}} \iint_{\Gamma} e^{-(s^2+t)} ds dt;$$

$$\begin{aligned} \iint_{\Gamma} e^{-(s^2+t)} ds dt &= \int_{-\infty}^{s_1} e^{-s^2} ds \int_0^{\infty} e^{-t} dt + \int_{s_1}^{s_2} e^{-s^2} ds \int_{t_I(s)}^{\infty} e^{-t} dt + \\ &+ \int_{s_2}^{\infty} e^{-s^2} ds \int_{t_{II}(s)}^{\infty} e^{-t} dt \end{aligned}$$

$$a) \int_{-\infty}^{s_1} e^{-s^2} ds \int_0^{\infty} e^{-t} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot [1 + \Phi(s_1)];$$

$$\begin{aligned} b) \int_{s_1}^{s_2} e^{-s^2} ds \int_{t_I(s)}^{\infty} e^{-t} dt &= \int_{s_1}^{s_2} e^{-[s^2+t_I(s)]} ds = \\ &= \int_{s_1}^{s_2} e^{-(s^2+2n\tau\eta_m s+n^2\tau^2\eta_m^2-t_m)} ds = \\ &= e^{t_m} \int_{s_1}^{s_2} e^{-(s+n\tau\eta_m)^2} ds = e^{t_m} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot [\Phi(s_2+n\tau\eta_m) - \\ &- \Phi(s_1+n\tau\eta_m)]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) \int_{s_2}^{\infty} e^{-s^2} ds \int_{t_{II}(s)}^{\infty} e^{-t} dt &= \int_{s_2}^{\infty} e^{-[s^2+t_{II}(s)]} ds = \\ &= \int_{s_2}^{\infty} e^{-(s^2+2n\tau s+n^2\tau^2-t^2)} ds = e^{t^2} \int_{s_2}^{\infty} e^{-(s+n\tau)^2} ds = \\ &= e^{t^2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot [1 - \Phi(s_2+n\tau)] \end{aligned}$$

### Literaturnachweis.

1. Barkhausen, Lehrbuch der Elektronenröhren, Bd. I (4. Aufl. 1931), S. 64.
  2. Hollmann, Physik und Technik der ultrakurzen Wellen, Bd. I (1936), S. 242.
  3. H. G. Möller, Grundlagen und mathematische Hilfsmittel der Hochfrequenztechnik (1940), S. 146.
  4. Vilbig, Lehrbuch der Hochfrequenztechnik (3. Aufl. 1942), Bd. I, S. 595.
  5. Barkhausen, Lehrbuch der Elektronenröhren, Bd. I (4. Aufl.), S. 39.
  6. Becker, Theorie der Elektrizität, Bd. II (1933), S. 211.
  7. S. J. Braude, Zur Wirkung eines Magnetfeldes auf die Raumladung in einer flachen und in einer zylindrischen Diode, 1. Teil, Journ. Techn. Phys. USSR., 10/3 (1940).
  8. Benham, Proc. Phys., 47 (1935), 1.
  9. Braude, Sow. Phys., 7 (1935), 565; JTF., 5 (1935), 621.
  10. Tonks, Sow. Phys., 8 (1935), 577.
  11. Braude, Sow. Phys., 8 (1935), 667; JTF., 6 (1936), 1048.
  12. Grünberg u. Wolkenstein, Journ. Techn. Phys. USSR., 4 (1937), 179.  
(Eine Einsichtnahme in die unter 8. bis 12. genannten Arbeiten, die sämtlich in 7. zitiert sind, war nicht möglich.)
  13. Jahnke-Emde, Funktionentafeln (2. Aufl., 1933), S. 98.
  14. E. G. Linder, Effect of high energy Electron random motion upon the shape of the Magnetron cut-off curve, Journ. of Applied Phys., 9 (1938), 331.
  15. Rothe-Kleen, Grundlagen und Kennlinien der Elektronenröhren (1940), S. 23.
  16. I. Langmuir, The effect of initial velocities on the potential distribution and thermionic current between parallel plane electrodes, Phys. Rev., 21 (1923), 419.
-

# ZOBODAT - [www.zobodat.at](http://www.zobodat.at)

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften  
mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse](#)

Jahr/Year: 1943

Band/Volume: [152\\_2a](#)

Autor(en)/Author(s): Auner Michael

Artikel/Article: [Ein Beitrag zur Theorie ebener Magnetfeldröhren. 143-172](#)