SITZUNG VOM 8. FEBRUAR 1855.

Bericht

über die folgende Abhandlung des Dr. A. Winckler, betreffend das Problem der vier Punkte bei Anwendung des Messtisches.

Von dem w. M. S. Stampfer.

(Mit I Tafel.)

Wir besitzen bereits eine grosse Zahl von Bearbeitungen und Lösungen dieses berühmten Problems, welches lautet: Wenn drei Punkte auf dem Messtische gegeben sind, denen drei Punkte auf dem Felde entsprechen, und das Instrument auf einem vierten Punkte aufgestellt wird, diesen letztern Punkt auf dem Messtische zu bestimmen.

Die Auflösungen sind entweder directe oder indirecte und bestehen meistens darin, den Messtisch auf dem vierten Punkte zu orientiren, d. h. das Dreieck auf dem Tische mit jenem auf dem Felde parallel zu stellen.

Sei Fig. 1 A, B, C das gegebene Dreieck, D der gesuchte vierte Punkt. Orientirt man den Messtisch nach dem Augenmaasse, und zieht die Visuren über A, B, C nach den correspondirenden Punkten auf dem Felde, so werden sich diese in drei Punkten 1, 2, 3 schneiden, wenn der Tisch nicht richtig orientirt ist; die Winkel m', n' aber sind bei der graphischen Behandlung fast immer ohne merklichen Fehler den wahren m, n gleich. Hieraus folgt, dass der Punkt D in dem Durchschnitte der Kreise liegen müsse, welche den Dreiecken $AB3$, $BC1$, $AC2$, sich umschreiben lassen.

Das Construiren zweier solcher Kreise ist als zu mühsam, wenig genau und oft unanwendbar, ganz ausser Gebrauch.

Einfacher ist die von Bohnenberger und Bessel gegebene directe Auflösung. Sie beruht darauf, dass jeder der drei obigen

Kreise die wahre Visur nach jener Ecke, welche der betreffenden Dreiecksseite gegenübersteht, ausserhalb D nochmals schneidet. Praktisch meistens am zweckmässigsten ist hierzu der Kreis durch die äusseren Punkte A, C, welcher demnach die wahre Visur DB in E schneidet.

Denkt man sich AE, CE gezogen, so sieht man, dass $\sphericalangle ACE = m = m'$, $\sphericalangle CAE = n = n'$; construirt man demnach diese Winkel, was bekanntlich mit dem Diopterlineal selbst am einfachsten und genauesten geschieht, so erhält man E, und BE gibt die Orientirung nach dem mittleren Punkte auf dem Felde.

Werden jetzt die drei Visuren gezogen, so sollten sie sich genau in einem Punkte schneiden. Allein meistens ist dieses nicht ganz der Fall, sondern es entsteht, wenn auch ein sehr kleines Fehlerdreieck, und der Geometer hat kein Mittel, seine Arbeit zu verbessern, ausser der Wiederholung, wobei dieselbe Schwierigkeit eintreten kann. Hierin liegt der Grund, warum die Praktiker den directen Auflösungen die indirecten vorziehen, bei welchen man aus entstehenden Fehlerdreiecken selbst Nutzen ziehen und dem wahren Punkte mit beliebiger Schärfe sich nähern kann.

Das Verfahren, welches in der vorliegenden Abhandlung vorgeschlagen wird, besteht nun im Folgenden. Hat man anfangs den Messtisch nach dem Augenmaasse orientirt und ein Fehlerdreieck 1, 2, 3 erhalten, so wird der Tisch im Sinne der einfachen, von Lehmann gegebenen Regel etwas gedreht und man erhält ein zweites, ebenso ein drittes etc. Fehlerdreieck.

Man zieht nun durch drei gleichnamige Punkte 1, 1′, 1″ einen Bogen mit freier Hand, und eben so einen zweiten Bogen z. B. 3, 3′, 3″, so gibt der Durchschnitt beider Bögen den wahren Punkt D. Sollte dieser noch ein merkliches Fehlerdreieck geben, so wird dieses auf dieselbe Art mit den früheren verbunden, und der wahre Punkt wohl immer mit gewünschter Schärfe erhalten. Es ist nicht zu bezweifeln, dass dieses Verfahren zum Ziele führt, auch ist es in soferne neu, als man es bisher meines Wissens nicht angewendet hat, obschon es allgemein bekannt ist, dass die Eckpunkte des Fehlerdreieckes bei seinem Fortschreiten Bögen beschreiben, die als Kreisbögen angesehen werden können.

Gegenwärtig ist folgendes Verfahren am meisten in Anwendung. Nachdem auf obige Weise zwei Fehlerdreiecke erhalten sind, werden je zwei correspondirende Punkte, wozu sich die auf der mittleren Visur liegenden (1.1'); (3.3') gewöhnlich am besten eignen, durch gerade Linien verbunden, die demnach Sehnen der Bögen sind. Der Durchschnitt der Sehnen gibt dann einen genäherten Punkt D um so genauer, je kürzer dieselben bis zum Durchschnitte sind. Wird mit diesem Punkte die mittlere Visur orientirt, so wird ein viel kleineres Fehlerdreieck entstehen, welches auf gleiche Weise mit einem der früheren verbunden wird.

Der jetzt erhaltene Punkt wird bei einiger Übung selten merklich vom wahren Punkte verschieden sein.

Da demnach zwei Fehlerdreiecke ein Mittel an die Hand geben, das dritte verhältnissmässig klein zu machen, so erscheint dies offenbar besser, als mit Dr. Winckler dasselbe willkürlich zu bilden. Hingegen wird es vortheilhafter sein, das dritte Fehlerdreieck nicht mit einem der früheren durch gerade Linien, sondern mit beiden nach Winckler's Vorschlag durch Bögen zu verbinden. Denn, da der wahre Punkt dem dritten Fehlerdreiecke schon bedeutend nahe liegt, so gibt das Ziehen der Bögen mit freier Hand die gehörige Sicherheit.

Obschon dieses Problem schon so vielseitig bearbeitet ist, so erlaube ich mir doch bei dieser Gelegenheit ein Paar Sätze anzuführen, welche dasselbe betreffen.

Hat man ein Fehlerdreieck auf dem Messtische erhalten, so lässt sich immer ein zweites construiren von der Eigenschaft, dass die Geraden, welche correspondirende Punkte der beiden Fehlerdreiecke verbinden, sich genau auf der mittleren Visur schneiden.

Die Eckpunkte des Fehlerdreieckes, welche den Visuren nach A, B, C gegenüberstehen, seien mit 1, 2, 3 bezeichnet; u der Fehler der Orientirung. Bezieht man die Eckpunkte des Fehlerdreieckes (Fig. 1) durch Coordinaten auf BD, und setzt $BD = d$, so ist

$$x_1 = \frac{d \sin(N+u) \cos u}{\sin N}$$

$$y_1 = \frac{d \sin(N+u) \sin u}{\sin N};$$

für eine zweite Stellung des Tisches geht blos u in u' über.

Bezeichnet X_1 den Abstand des Durchschnittes der (1.1') mit BD von D gegen B gezählt, so findet man

$$X_1 = -\frac{d \,.\, sin\, u \,.\, sin\, u'}{sin\, N \,.\, sin\,(N + u + u')}$$

ganz auf gleiche Art

$$X_3 = -\frac{d \,.\, sin\, u \,.\, sin\, u'}{sin\, M \,.\, sin\,(M - u - u')}$$

und auf etwas weitläufigerem Wege

$$X_2 = -\frac{d \,.\, sin\, \alpha \,.\, sin\, u \,.\, sin\, u'}{sin\, N \,.\, sin\, M'\, sin\,(\alpha + N - M' + u + u')}$$

wo $M' = \sphericalangle\, CAD$, und $N' = \sphericalangle\, ACD$.

Hiernach können diese Verbindungslinien nie durch D gehen, ausser es ist u oder $u' = o$, wo es sich dann von selbst versteht, da eines der Fehlerdreiecke $= o$ ist. Da obige Ausdrücke negativ sind, so liegen die Durchschnitte nicht zwischen D und B, sondern unter D, wenn u, u' einerlei Zeichen haben, oder die Fehlerdreiecke auf derselben Seite der mittleren Visur liegen, hingegen sind obige X positiv, wenn u, u' verschiedene Zeichen haben.

Sollen z. B. (1.1') und (3.3') sich auf der mittleren Visur BD schneiden, so muss $X_1 = X_3$ sein; dies gibt die Bedingung

$$sin\,(M+N)\, sin\,(N-M+u+u') = o,$$

$sin\,(M+N) = o$, oder $M+N = 180^0$ gibt den unbestimmten Fall, wenn die vier Punkte A, B, C, D in einem Kreise liegen, welcher Fall demnach unbrauchbar. Unser Ausdruck wird aber auch $=o$, wenn $N+u' = M-u$ oder $N+u = M-u'$. Es ist also (Fig. 2) $\sphericalangle BA2' = \sphericalangle BC2$, oder auch $BC2' = BA2$ zu machen, oder die Winkel in A und C, welche der mittleren Visur gegenüberstehen, sind mit einander zu vertauschen. Da die Summe dieser Winkel constant bleibt, so ist nur einer derselben überzutragen.

Macht man z. B. $\sphericalangle\, BA2' = \sphericalangle\, BC2$, und orientirt mit $A2'$ den Tisch nach A, so erhält man das Fehlerdreieck 1', 2', 3' von der Eigenschaft, dass die Geraden (1.1'), (3.3') sich auf BD schneiden.

Dem Übertragen eines Winkels sind die Praktiker jedoch in der Regel sehr abgeneigt, allein da selbst blos willkürlich entstandene Fehlerdreiecke den Durchschnitt schon nahe an der mittleren Visur geben, so genügt hier auch eine wenig genaue Übertragung, etwa mit

Hilfe eines Stückes Strohpapier u. dgl., um den Durchschnittspunkt hinreichend genau zu erhalten. Gehen u, u' nicht über 20° und liegen sie auf verschiedener Seite, so kann, wie die Rechnung zeigt, der übertragene Winkel um $^1/_2$ Grad unrichtig sein, ohne dass der erhaltene Punkt erheblich (etwa über $^1/_{100}$ Zoll) unrichtig wird. Übrigens lässt sich diese Übertragung auch mit dem Diopterlineal ausführen.

Sei (Fig. 2) der Tisch in jener Lage, bei welcher das Fehlerdreieck 1, 2, 3 entstanden ist.

Man lege das Diopterlineal an BC und merke sich die Richtung dieser Visur in der Ferne.

Wird hierauf das Lineal an AB gelegt, nach C orientirt und über A nach dem erwähnten Richtpunkte visirt, so erhält das Diopterlineal die Lage $A\,2'$, mit welcher man den Tisch nach A orientiren und das zweite Fehlerdreieck bilden kann.

Eben so lassen sich die Bedingungen angeben, unter welchen sich (1.1′), (2.2′) oder (2.2′), (3.3′) auf der mittleren Visur schneiden.

Es ist näml. $X_1 - X_2 = o$, wenn $sin\,(N' - \beta)\; sin\,(N' - M + u + u') = o$
und $X_2 - X_3 = o$, wenn $sin\,(M' - \alpha)\; sin\,(N - M' + u + u') = o$

$N' = \beta$, und $M' = \alpha$, enthalten die Bedingung, dass die vier Punkte in einem Kreise, was hier unbrauchbar.

Es ist somit im erstern Falle $M - u' = N' + u$ oder $M - u = N' + u'$
„ zweiten „ $M' - u' = N + u$ „ $M' - u = N + u'$

zu machen. Die allgemeine Regel für alle drei Fälle ist demnach:

Man vertausche in A und C die Winkel der äusseren Visuren mit jenen Dreieckseiten, welche den Winkeln oder Ecken des Fehlerdreieckes gegenüberstehen, die man verbinden will.

Der Durchschnitt fällt dann immer auf die mittlere Visur.

Falls man eine praktische Anwendung hiervon machen will, kann je nach Umständen die eine oder andere Combination der Punkte zweckmässiger sein, nämlich jene, wobei die zu vertauschenden Winkel nicht gar zu sehr verschieden sind.

Eben so kann vom zweiten Fehlerdreiecke die Eigenschaft verlangt werden, dass die Verbindungslinien gleichnamiger Eckpunkte sich auf DA oder DC schneiden. Die Ausdrücke, worauf ich indessen hier nicht weiter eingehe, sind jenen in (1) ähnlich. Auf beiden

Seiten ergeben sich wieder drei Fälle, je nachdem man die Punkte combinirt, so dass zu einem gegebenen Fehlerdreiecke sich neun verschiedene Fehlerdreiecke angeben lassen, von denen jedes in Verbindung mit dem gegebenen die Orientirung des Messtisches bestimmt.

Andere und zum Theil einfachere Relationen ergeben sich, wenn auch das erste Fehlerdreieck nach einer gegebenen Bedingung construirt wird. Wir wollen die correspondirenden Punkte auf dem Felde mit A', B', C' bezeichnen. Orientirt man z. B. AB nach C' und bildet bei dieser Lage das erste Fehlerdreieck; ebenso das zweite, während CB nach A' orientirt ist, so schneiden sich $(1.1')$, $(3.3')$ auf der wahren Visur BD. Diese Auflösung wird praktisch mehr brauchbar, wenn der Punkt D, wie Figur 1, ausser dem Dreiecke ABC einer Seite gegenüber liegt, weil dann das Viereck $ABCD$ sich einem Parallelogramme mehr oder weniger nähert, mithin nur geringe Drehungen des Tisches erforderlich sind, um die Orientirungen AB nach C' und CB nach A' zu erhalten. Die gegebene Vorschrift bleibt giltig, wenn die Buchstaben A, B, C an den Ecken des Dreieckes beliebig verwechselt werden.

Ähnliche Eigenschaften der Fehlerdreiecke lassen sich noch mehrere finden, indem man z. B. auch die Durchschnitte untersucht, welche sich ergeben, wenn nicht correspondirende Punkte zweier Fehlerdreiecke verbunden werden. Diese Verbindungslinien können durch den Punkt D gehen. Macht man z. B. Fig. 1 beim zweiten Fehlerdreiecke $N + u' = 180^0 - (M - u)$, so geht $(1'.3)$ durch D; hingegen geht $(1.3')$ durch D, wenn $M - u' = 180^0 - (N + u)$ gemacht wird, wodurch dann D bestimmt ist. Von praktischem Nutzen ist dieses jedoch nicht, da die bekannten Auflösungen einfacher sind.

Die einfachste und desshalb vorzüglichste directe Auflösung bleibt wohl immer die Bessel'sche. Es ist dabei nicht nöthig, den Orientirungspunkt E, Figur 1, auf die mittlere Visur DB zu beschränken, wie es bisher üblich zu sein scheint, sondern man kann ihn nach Umständen vortheilhafter auf DA oder DC legen.

Die einfache Vorschrift hierzu ist folgende. Man nehme z. B. die Seite AB, orientire sie nach A' so, dass A nach vorne gegen A' zu liegen kommt, und ziehe durch den hinteren Punkt B eine Visur nach dem dritten Punkte C'; hierauf wird AB nach B'

orientirt, wobei also *B* nach vorne zu liegen kommt, und durch den hinteren Punkt *A* eine Visur nach *C'* gezogen. Beide Visuren schneiden sich auf der wahren Visur *DC*. Diese Vorschrift bleibt giltig, wenn die Buchstaben *A*, *B*, *C* an den Ecken des Dreieckes beliebig verwechselt werden. Allgemein könnte sie etwa so lauten:

Man wähle eine beliebige Seite des Dreieckes *ABC*, orientire sie einmal nach dem einen und dann nach dem andern ihrer Punkte so, dass der vordere Punkt mit dem auf dem Felde gleichnamig ist, und ziehe jedesmal durch den hintern Punkt eine Visur nach dem dritten Punkte auf dem Felde. Beide Visuren schneiden sich auf der wahren Visur nach diesem dritten Punkte.

Meines Erachtens kann man auch die Bessel'sche Auflösung zweckmässig mit den Fehlerdreiecken verbinden. Eine auch nur flüchtige Bestimmung des Orientirungspunktes genügt, um ein ganz kleines Fehlerdreieck zu erhalten. Wird hierauf der Tisch etwas gedreht, und ein zweites Fehlerdreieck gebildet, so wird die Verbindung beider den wahren Punkt fast immer mit gewünschter Schärfe geben.

Man vermeidet auf diese Art die Gefahr, das erste Mal ein zu ungeschicktes Fehlerdreieck zu erhalten.

Stampfer. Das Problem der vier Punkte bei Anwendung des Messtisches.

Fig. 1.

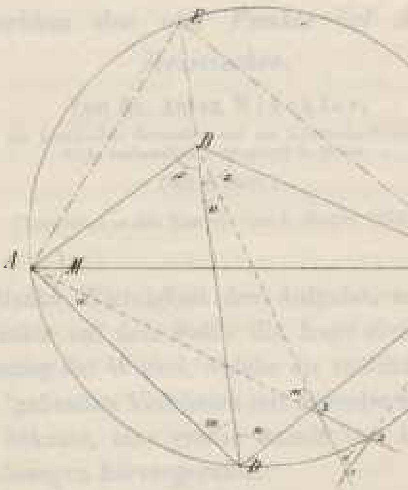
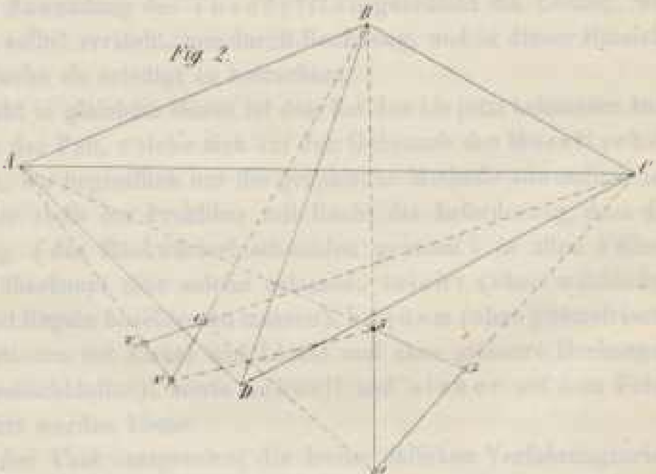


Fig. 2.



Aus d. k. k. Hof-u. Staatsdruckerei

Sitzungsb. d. k. Akad. d. W. math. naturw. Cl. XV Bd. 2 Heft. 1855.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1855

Band/Volume: 15

Autor(en)/Author(s): Stampfer Simon

Artikel/Article: Sitzung vom 8. Februar 1855. Bericht über die folgende Abhandlung des Dr. A. Winckler, betreffend das Problem der vier Punkte bei Anwendung des Messtisches. 210-216