dass eine solche Correction nicht genau sein kann, auch abgesehen davon, dass die damaligen Localitäten der Sternwarte eine oftmalige Änderung des Ortes des Barometers sehr wahrscheinlich machen. Es scheint mir also gerathener das allgemeine Mittel aus den Jahresmitteln der letzten 31 Jahre allein abzuleiten.

Aus diesen 31 Jahren (1823—1853) findet man den mittleren Barometerstand Wien's in der Meereshöhe von 95·41 Toisen (101·7 W. Fuss über dem mittleren Spiegel der Donau) gleich 330‴290 = 27″524 Par. M., wenn die oft genannten vier Jahre corrigirt, oder 330‴335 = 27″528 Par. M., wenn man jene Correction nicht gelten lassen will; also im ersten Falle 0‴38 im letzten 0‴34 kleiner als die dafür gewöhnlich angenommene Zahl.

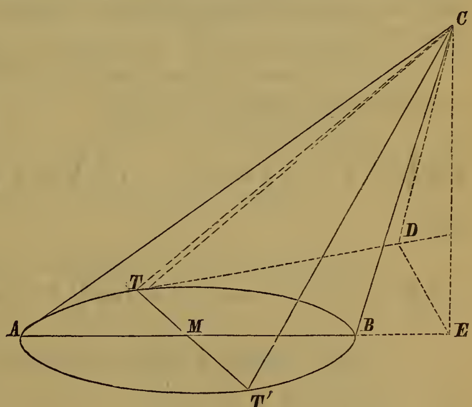
Die Complanation des schiefen Kegels durch Vermittelung der Integrale $\int d\varphi \sin^{2n}\varphi\,(1-k\sin^2\varphi)^m$ und $\int d\varphi \cos^{2n}\varphi\,(1-k.\cos^2\varphi)^m$ und Auflösung dieser Integrale in trigonometrische, durch einen stäten logarithmischen Calcul berechenbare Factoren.

Von **Karl Schönbichler.**

(Vorgelegt in der Sitzung vom 26. April 1855.)

I.

Es sei ABC (Fig. 1) der Durchschnitt eines schiefen Kegels, durch seine Spitze, den Mittelpunkt seiner Grundfläche und senkrecht auf diese gedacht.



Der Halbmesser seiner Grundfläche (eines Kreises) sei $AM = MT = a$, seine Höhe $CE = h$ und die Entfernung des Mittelpunktes M von der Projection E der Spitze, $ME = e$; ferner sei TMA ein veränderlicher Winkel $= \varphi$; so ist das unendlich kleine Dreieck, dass seine Grundlinie an der Peripherie in T und seine Spitze in C hat $= \frac{a}{2}\, d\varphi \sqrt{h^2 + (a + e\,.\cos\varphi)^2}$.

Denn, ist TD eine Tangente zu dem Punkte T und DE senkrecht auf diese in der Ebene der Grundfläche, so ist $DE = a + e . \cos \varphi$, mithin die Höhe des unendlich kleinen Dreiecks

$$DC = \sqrt{h^2 + (a + e . \cos \varphi)^2}$$

und die halbe Grundlinie bei $T = \frac{a . d\varphi}{2}$.

Werden dagegen, die Winkel von der kleinsten Seite BC des Kegels angefangen, gemessen und heisst $BMT' = \varphi$, so ist der Flächeninhalt des unendlich kleinen Dreieckes an der Grundlinie T'

$$= \frac{a . d\varphi}{2} \sqrt{h^2 + (a - e . \cos \varphi)^2}.$$

Die Oberfläche eines jeden Mantelstückes, an der grössten sowohl als an der kleinsten Seite des schiefen Kegels, wie z. B. das Stück ATC ist daher durch das Integral

(1) $$\frac{a}{2} \int d\varphi \sqrt{h^2 + (a \pm e \cos \varphi)^2}$$

dargestellt.

Will man nun dieses Integral, so wie es ist, durch den binomischen oder polinomischen Lehrsatz in eine Reihe verwandeln und diese, entweder nach den Potenzen von $\cos \varphi$ oder auch nach den Sinusen der Vielfachen von φ ordnen, so wird diese Reihe nicht nur ein sehr unklares Fortgangsgesetz enthalten, sondern der Beweis ihrer Convergenz wird sehr schwierig, wo nicht gar unmöglich.

Um ein klares Fortgangsgesetz und eine vollständig convergirende Reihe zu erhalten, setze man

(2) $$\int d\varphi \sqrt{h^2 + (a + e \cos \varphi)^2} = \int d\varphi \sqrt{h^2 + \left(a + e \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}\right)\right)}$$

und

(3) $$\int d\varphi \sqrt{h^2 + (a - e \cos \varphi)^2} = \int d\varphi \sqrt{h^3 + \left(a - e \left(2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} - 1\right)\right)}.$$

Aus der Formel 2 erhält man für $s^2 = h^2 + (a + e)^2$; $k^2 = \frac{(a + e)}{s^2}$ und $k' = \frac{e}{a + e}$

(4) $$s \int d\varphi \sqrt{1 - k^2\, 4 k' \sin^2 \frac{\varphi}{2} \left(1 - k' \sin^2 \frac{\varphi}{2}\right)}.$$

Aus der Formel 3 dagegen für dieselben Werthe von s, k und k'

$$s\int d\varphi \sqrt{1 - k^2\, 4k'\, cos^2\frac{\varphi}{2}\left(1 - k'\, cos^2\frac{\varphi}{2}\right)}. \tag{5}$$

Der Kürze wegen nenne man noch, sowohl $4k'\, sin^2\frac{\varphi}{2}\left(1-k'\, sin^2\frac{\varphi}{2}\right)$ als auch $4k'\, cos^2\frac{\varphi}{2}\left(1-k'\, cos^2\frac{\varphi}{2}\right)$ durch den Ausdruck $f\varphi$, so hat man allgemein

$$\int d\varphi \sqrt{h^2 + (a \pm e\, cos\,\varphi)^2} = s\int d\varphi \sqrt{1 - k^2 f\varphi}. \tag{6}$$

In dieser Wurzel $\sqrt{1-k^2 f\varphi}$ ist k^2 ein echter constanter, und $f\varphi$ ein echter veränderlicher, positiver Bruch.

Dass $k^2 = \frac{(a+e)^2}{s^2} = \frac{(a+e)^2}{h^2 + (a+e)^2}$ ein echter, constanter, positiver Bruch ist, bedarf keines Beweises. Dass aber, sowohl $f\varphi = 4k'\, sin^2\frac{\varphi}{2}\left(1-k'\, sin^2\frac{\varphi}{2}\right)$ als auch $f\varphi = 4k'\, cos^2\frac{\varphi}{2}\left(1-k'\, cos^2\frac{\varphi}{2}\right)$ ein echter positiver Bruch sein muss, lässt sich folgenderweise zeigen: Weil $\frac{e}{a+e} = k'$ ein echter positiver Bruch ist, so ist auch sowohl $k'\, sin^2\frac{\varphi}{2}$ als auch $k'\, cos^2\frac{\varphi}{2}$ jeder ein echter positiver Bruch, und es ist erlaubt $k'\, sin^2\frac{\varphi}{2} = sin^2\frac{\psi}{2}$ oder auch $k'\, cos^2\frac{\varphi}{2} = sin^2\frac{\psi}{2}$ zu setzen, dadurch wird

$$f\varphi = 4\, sin^2\frac{\psi}{2}\left(1 - sin^2\frac{\psi}{2}\right) = 4\, sin^2\frac{\psi}{2}\, cos^2\frac{\psi}{2}; \tag{7}$$

es ist aber allgemein $2\, sin\frac{\psi}{2}\, cos\frac{\psi}{2} = sin\,\psi$, mithin

$$f\varphi = sin^2\psi = 4k'\, sin^2\frac{\varphi}{2}\left(1 - k'\, sin^2\frac{\varphi}{2}\right), \tag{8}$$

oder auch

$$f\varphi = sin^2\psi = 4k'\, cos^2\frac{\varphi}{2}\left(1 - k'\, cos^2\frac{\varphi}{2}\right). \tag{9}$$

Aber $sin^2\psi$ ist in jedem Falle ein echter positiver Bruch, wenn auch für irgend einen Werth von φ die Function $sin\,\psi$ ein negativer Bruch sein sollte.

II.

Wenn $f\varphi$ für jeden Werth von φ ein echter positiver Bruch bleibt, so lässt sich das Integral $\int d\varphi\sqrt{1-k^2 f\varphi}$ immer durch eine convergirende Reihe berechnen sobald auch k ein echter Bruch und $\int d\varphi(f\varphi)^m$ ein angebliches Integral ist.

Denn es ist:

$$\sqrt{1-k^2 f\varphi} = 1 - \frac{1}{2}k^2 f\varphi - \frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}k^4(f\varphi)^2 - \frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}k^6(f\varphi)^3 -$$

also auch

$$(10)\quad \int d\varphi\sqrt{1-k^2 f\varphi} = \int d\varphi - \frac{1}{2}k^2\int d\varphi f\varphi - \frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}k^4\int d\varphi(f\varphi)^2 - \dots \\ \dots \frac{1.1.3\,\dots\,.2m-3}{2.\,46\,\dots\dots\,2m}k^{2m}\int d\varphi(f\varphi)^m - . -$$

wo sämmtliche Integrale für $\varphi = 0$ verschwinden sollen. Was nun auch das Integral $\int d\varphi(f\varphi)^m$ sein mag, so lässt es sich als eine Summe unendlich kleiner Elemente, immer durch die Reihe ausdrücken:

$$(11)\quad \int d\varphi(f\varphi)^m = d\varphi(f\varphi')^m + d\varphi(f2\varphi')^m + d\varphi(f3\varphi')^m \dots\dots \\ + d\varphi(fr\varphi')^m,$$

in welcher φ' die beständige unendlich kleine Zunahme von φ bedeutet und r unendlich gross werden kann, so dass $r\varphi' = \varphi$ wird. Man multiplicire $d\varphi(fr\varphi')^m$ mit $(fr\varphi')$ und entwickle aus dem allgemeinen Glied $d\varphi(fr\varphi')^m(fr\varphi')$ indem man statt r die natürlichen Zahlen einführt die Reihe

$$(12)\quad d\varphi(f\varphi')^m(f\varphi') + d\varphi(f2\varphi')^m(f2\varphi') + d\varphi(f3\varphi')^m(f3\varphi') + \dots\dots \\ = d\varphi(f\varphi')^{m+1} + d\varphi(f2\varphi')^{m+1} + d\varphi(f3\varphi')^{m+1} + \dots\dots \\ = \int d\varphi(f\varphi)^{m+1}.$$

Ich behaupte dass die Summe der Reihe 12 nämlich $\int d\varphi(f\varphi)^{m+1}$ kleiner sein wird als die Summe der Reihe 11 des Integrals $\int d\varphi(f\varphi)^m$. Denn, wenn was immer für positiver Werth $d\varphi(f\varphi)^m$ mit einem echten positiven Bruch [was $(f\varphi)$ für jeden Werth von φ sein soll] multiplicirt wird, so wird das Product $d\varphi(f\varphi)^{m+1}$ positiv aber kleiner sein als $d\varphi(f\varphi)^m$ war, es ist daher

$$d\varphi\,(f\;\varphi')^m > d\varphi\,(f\,\varphi')^{m+1}$$
$$d\varphi\,(f2\varphi')^m > d\varphi\,(f2\varphi')^{m+1}$$
$$d\varphi\,(f3\varphi')^m > d\varphi\,(f3\varphi')^{m+1}$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$d\varphi\,(fr\varphi')^m > d\varphi\,(fr\varphi')^{m+1}$$

mithin ist auch, da alle diese Ausdrücke positiv sind, die Summe aller linksstehenden grösser als die Summe aller rechtsstehenden Glieder, d. i. $\int d\varphi\,(f\varphi)^m > \int d\varphi\,(f\varphi)^{m+1}$ und dieses gilt für jeden ganzen positiven Werth von m, auch für $m = o$, so dass $\int d\varphi = \varphi$ grösser ist als jedes Integral $\int d\varphi\,(f\varphi)$; $\int d\varphi\,(f\varphi)^2$; $\int d\varphi\,(f\varphi)^3$ u. s. w.

Es sind also die Ausdrücke

$$\frac{\int d\varphi\,(f\varphi)}{\varphi};\ \frac{\int d\varphi\,(f\varphi)^2}{\varphi};\ \frac{\int d\varphi\,(f\varphi)^3}{\varphi}\ \ldots\ldots\ \frac{\int d\varphi\,(f\varphi)^m}{\varphi}$$

lauter echte positive Brüche und weil die Zähler dieser Brüche fort und fort abnehmen, so sind sie überdies abnehmende (kleiner werdende) echte positive Brüche, da nun

$$1 - \frac{1}{2}k^2 - \frac{1.1}{2.4}k^4 - \frac{1.1.3}{2.4.6}k^6 - \ldots\ldots \tag{13}$$

ganz gewiss für jeden echten Bruch k eine convergirende Reihe ist, die sich immer mehr ihrem rechten Werth $\sqrt{1-k^2}$ nähert, so wird um so mehr die in 10 ersichtliche Reihe

$$\varphi\Big[1 - \frac{1}{2}k^2\frac{\int d\varphi\,(f\varphi)}{\varphi} - \frac{1.1}{2.4}k^4\,\frac{\int d\varphi\,(f\varphi)^2}{\varphi} - \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ \frac{1.1.3\ldots\ldots 2m-3}{2.4.6\ldots\ldots\ldots .2m}k^{2m}\frac{\int d\varphi(f\varphi)^m}{\varphi}\Big] \tag{14}$$

eine Reihe sein, die gegen ihren rechten Werth $\int\limits^{\varphi} d\varphi\sqrt{1-k^2 f\varphi}$ noch schneller convergirt als die Reihe 13 gegen $\sqrt{1-k^2}$.

Es erhellet hieraus, dass φ der grössere und $\varphi\sqrt{1-k^2}$ der kleinere unter zweien Grenzwerthen sind, zwischen welchen der rechte Werth des Integrals $\int\limits_0^{\varphi} d\varphi\sqrt{1-k^2 f\varphi}$ liegen muss.

Setzt man in der Reihe 14 statt $f\varphi$ die Werthe aus den Formeln 8 und 9, die beide echte Brüche sind, so wird jede der zwei folgenden Reihen

(15) $$\varphi\Big[1-\frac{1}{2}k^2\frac{4k'}{\varphi}\int d\varphi\, sin^2\frac{\varphi}{2}\Big(1-k'\,sin^2\frac{\varphi}{2}\Big)-\ldots$$
$$\ldots\ldots\frac{1.1.3\ldots.2m-3}{2.4.6\ldots\ldots 2m}k^{2m}\frac{4^m k'}{\varphi}\int d\varphi\, sin^{2m}\frac{\varphi}{2}\Big(1-k'\,sin^2\frac{\varphi}{2}\Big)^m\Big]$$

(16) $$\varphi\Big[1-\frac{1}{2}k^2\frac{4k'}{\varphi}\int d\varphi\, cos^2\frac{\varphi}{2}\Big(1-k'\,cos^2\frac{\varphi}{2}\Big)-\ldots.$$
$$\ldots-\frac{1.1.3\ldots.2m-3}{2.4.6\ldots\ldots 2m}k^{2m}\frac{4\;\,k'^m}{\varphi}\int d\varphi\, cos^{2m}\frac{\varphi}{2}\Big(1-k'\,cos^2\frac{\varphi}{2}\Big)^m\Big]$$

eine vollständig convergirende.

Nach 1 und 6 gibt daher die Reihe 15 wenn sie noch mit $\frac{as}{2}$ multiplicirt wird, stäts einen berechenbaren Werth für die Oberfläche eines schiefen Kegelstückes an seiner grössten Seite (wie *ATC*, Fig. 1), und eben so gibt die Reihe 16 einen solchen für die Oberfläche eines Stückes an der kleinsten Seite des schiefen Kegels (wie *BT'C*, Fig. 1).

Bevor ich zu einer Entwickelungs-Methode der Integrale

$$\int d\varphi\, sin^{2m}\frac{\varphi}{2}\Big(1-k'\,sin^2\frac{\varphi}{2}\Big)^m \text{ und } \int d\varphi\, cos^{2m}\frac{\varphi}{2}\Big(1-k'\,cos^2\frac{\varphi}{2}\Big)^m$$

schreite, will ich noch zwei ziemlich nahe liegende Grenzwerthe der Reihen 15 und 16 angeben.

Es ist nämlich, für $k^2=1$, bezüglich der Reihe 15

$$\int d\varphi\sqrt{1-k^2 f\varphi}=\int d\varphi\sqrt{1-k^2 4k'\,sin^2\frac{\varphi}{2}\Big(1-k'\,sin^2\frac{\varphi}{2}\Big)}$$
$$=\int d\varphi\sqrt{1-f\varphi}=\int d\varphi\Big(1-2k'\,sin^2\frac{\varphi}{2}\Big)$$

also auch, nach 10

(17) $$\int d\varphi-2k'\int d\varphi\, sin^2\frac{\varphi}{2}=\int d\varphi-\frac{1}{2}\int d\varphi(f\varphi)-\frac{1.1}{2.4}\int d\varphi\,(f\varphi)^2\ldots.$$

hieraus folgt:

$$2k'\int d\varphi\, sin^2\frac{\varphi}{2}=\frac{1}{2}\int d\varphi f\varphi+\frac{1.1}{2.4}\int d\varphi\,(f\varphi)^2+\frac{1.1.3}{2.4.6}\int d\varphi\,(f\varphi)^3+\ldots$$

Man multiplicire die ganze Gleichung mit $\frac{k^2}{\varphi}$ so bleibt

(18) $$\frac{2k'k^2}{\varphi}\int d\varphi\, sin^2\frac{\varphi}{2}=\frac{1}{2}\frac{k^2}{\varphi}\int d\varphi f\varphi+\frac{1.1}{2.4}\frac{k^2}{\varphi}\int d\varphi\,(f\varphi)^2+$$
$$+\frac{1.1.3}{2.4.6}\frac{k^2}{\varphi}\int d\varphi(f\varphi)^3+$$

wenn man aber das zweite Glied der Reihe, nämlich $\frac{1.1}{2.4}\frac{k^2}{\varphi}\int d\varphi (f\varphi)^2$ noch mit k^2, das dritte mit k^4, das vierte mit k^6 u. s. w. multiplicirt, so wird, wenn k^2 ein echter positiver sein sollte aus der Reihe 18

$$2\frac{k^2}{\varphi}k'\int d\varphi \sin^2\frac{\varphi}{2} > \frac{1}{2}\frac{k^2}{\varphi}\int d\varphi f\varphi + \frac{1.1}{2.4}\frac{k^4}{\varphi}\int d\varphi (f\varphi)^2 + \qquad (19)$$
$$+ \frac{1.1.3}{2.4.6}\frac{k^6}{\varphi}\int d\varphi (f\varphi)^3 +$$

Man führe in das erste Glied der rechtsstehenden Reihe der Formel 19, statt $f\varphi$ seinen Werth $= 4k'\sin^2\frac{\varphi}{2}\left(1 - k'\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)$ ein, so wird dieses:

$$\frac{1}{2}\frac{k^2}{\varphi}\int d\varphi f\varphi = \frac{1}{2}\cdot\frac{k^2}{\varphi}4k'\int d\varphi \sin^2\frac{\varphi}{2}\left(1 - k'\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)$$
$$= 2\frac{k^2 k'}{\varphi}\int d\varphi \sin^2\frac{\varphi}{2} - 2\frac{k^2 k'}{\varphi}\int d\varphi \sin^4\frac{\varphi}{2}. \qquad (20)$$

Es ist also der erste Theil des ersten Gliedes der Reihe 19 grösser als die ganze Reihe zusammengenommen.

Da nun beide Theile des ersten Gliedes zusammen, oder das ganze erste Glied (20) offenbar kleiner als die ganze, lauter positive Glieder enthaltende, Reihe ist: so sind durch das erste Glied allein zwei Grenzen des rechten Werthes der Reihe 19 geboten.

Es ist daher auch $\varphi s\left[1 - 2\frac{k^2}{\varphi}k'\int d\varphi \sin^2\frac{\varphi}{2}\right]$ der kleinere und

$$\varphi s\left[1 - 2\frac{k^2 k'}{\varphi}\int d\varphi \sin^2\frac{\varphi}{2}\left(1 - k'\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)\right]$$

der grössere Werth, zwischen welchen beiden der rechte des Integrals $\int d\varphi \sqrt{h^2 + (a + e\cos\varphi)^2}$ liegt, denn die eben betrachtete Reihe der Formel 19 ist dieselbe wie die in 15. Ebenso findet man dass

$$\varphi s\left[1 - 2k^2\frac{k'}{\varphi}\int d\varphi \cos^2\frac{\varphi}{2}\right]$$

der kleinere, und

$$\varphi s\left[1 - k^2\frac{k'}{\varphi}\int d\varphi \cos^2\frac{\varphi}{2}\left(1 - k'\cos^2\frac{\varphi}{2}\right)\right]$$

der grössere Grenzwerth ist, zwischen welchen der rechte Werth des Integrals

$$s\int d\varphi \sqrt{1 - k^2 4k'\cos^2\frac{\varphi}{2}\left(1 - k'\cos^2\frac{\varphi}{2}\right)} =$$
$$\int d\varphi \sqrt{h^2 + (a - a\cos\varphi)^2}$$

fallen muss.

Diese Grenzwerthe fallen um so näher zusammen, je kleiner der Bruch $k' = \frac{e}{a+e}$ wird, also je kleiner die Excentricität des Kegels ist.

III.

Bei näherer Entwickelung des allgemeinen Gliedes der Reihen 15 und 16 leistet, was Zeit- und Müh-Ersparniss im numerischen Calcul betrifft, eine Zerfällung der Hilfsintegrale $\int d\varphi \sin^{2m} \varphi$ und $\int d\varphi \cos^{2m} \varphi$ in Factoren, die sich einer stäten logarithmischen Behandlung unterwerfen lassen, vorzügliche Dienste. Man setze zu diesem Ende

$$\int d\varphi \sin^{2m} \varphi = \varphi . f(1) . f(2) . f(3) \ldots . f(r) . f(r+1) \ldots f(m),$$

und betrachte dieses Integral als ein Product aus dem Factor φ, und m anderer Factoren, welche Functionen ihres Indexes und von φ sein werden. Ist unter diesen Factoren der r^{te} gefunden, so findet man den $(r+1)^{\text{ten}}$ durch folgenden Satz.

Wenn $\int d\varphi \sin^{2m} \varphi = \varphi . f(1) . f(2) . f(3) \ldots f(r) . f(r+1) \ldots f(m)$ unter der Bedingung ist, dass für jeden ganzen positiven Werth von r der zwischen 0 und m liegt $\int d\varphi \sin^{2r} = f(r) \int d\varphi \sin^{2r-2} \varphi$, und bei jedem bestimmten Werth der Veränderlichen φ innerhalb des ersten Quadranten $f(r) = \frac{2r-1}{2r} \cos^2 \psi$ gesetzt werden kann, so ist

$$f(r+1) = \frac{2r+1}{2r+2} \left(1 - \frac{2r}{2r+1} \sin^2 \varphi \, tang^2 \psi\right).$$

Denn, nach dem Fundamental-Integral $\int dxy = xy - \int dyx$ findet man $\int d\varphi \sin^{2r} \varphi = \int d\varphi \sin \varphi . \sin^{2r-1} \varphi$

$$= - \cos \varphi \sin^{2r-1} \varphi + (2r-1) \int d\varphi \sin^{2r-2} \varphi \cos^2 \varphi .$$
$$= - \cos \varphi \sin^{2r-1} \varphi + (2r-1) \int d\varphi \sin^{2r-2} \varphi \, (1 - \sin^2 \varphi)$$

und hieraus, wenn man die Glieder nach den gleichen Exponenten ordnet

$$\int d\varphi \sin^{2r} \varphi = \frac{2r-1}{2r} \int d\varphi \sin^{2r-2} \varphi - \frac{1}{2r} \cos \varphi \sin^{2r-1} \varphi,$$

welches sich auch schreiben lässt

$$(21) \quad \int d\varphi \sin^{2r} \varphi = \frac{2r-1}{2r} \left(1 - \frac{1}{2r-1} \frac{\cos \varphi . \sin^{2r-1} \varphi}{\int d\varphi \sin^{2r-2} \varphi}\right) \int d\varphi \sin^{2r-2} \varphi.$$

Es soll aber (nach der Bedingung des Satzes) auch sein

$$\int d\varphi \, sin^{2r} \varphi = f(r) \int d\varphi \, sin^{2r-2} \varphi \tag{22}$$

mithin aus 21 und 22

$$f(r) \int d\varphi \, sin^{2r-2} \varphi = \frac{2r-1}{2r} \left(1 - \frac{1}{2r-1} \frac{cos \varphi \, . \, sin^{2r-1} \varphi}{\int d\varphi \, sin^{2r-2} \varphi}\right) \int d\varphi \, sin^{2r-2} \varphi \tag{23}$$

und

$$f(r) = \frac{2r-1}{2r} \left(1 - \frac{1}{2r-1} \frac{cos \varphi \, sin^{2r-1} \varphi}{\int d\varphi \, sin^{2r-2} \varphi}\right). \tag{24}$$

Man setze in diese Formel $(r+1)$ statt r so wird

$$f(r+1) = \frac{2r+1}{2r+2} \left(1 - \frac{1}{2r+1} \frac{cos \varphi \, . \, sin^{2r+1} \varphi}{\int d\omega \, sin^{2r} \varphi}\right) \tag{25}$$

und wenn man statt $\int d\varphi \, sin^{2r} \varphi$ den Werth $f(r) \int d\varphi \, sin^{2r-2} \varphi$ aus der Gleichung 22 in die Gleichung 25 bringt

$$\begin{aligned} f(r+1) &= \frac{2r+1}{2r+2} \left(1 - \frac{1}{2r+1} \frac{cos \varphi \, sin^{2r+1} \varphi}{f(r) \int d\varphi \, sin^{2r-2} \varphi}\right) \\ &= \frac{2r+1}{2r+2} \left(1 - \frac{1}{2r+1} \frac{sin^2 \varphi}{f(r)} \cdot \frac{cos \varphi \, sin^{2r-1} \varphi}{\int d\varphi \, sin^{2r-2} \varphi}\right). \end{aligned} \tag{26}$$

Nun setze man es sei $f(r) = \frac{2r-1}{2r} cos^2 \psi$ und bringe diesen Werth in die Gleichung 26, so wird

$$f(r+1) = \frac{2r+1}{2r+2} \left(1 - \frac{2r}{2r+1} \frac{sin^2 \varphi}{cos^2 \psi} \cdot \frac{1}{2r-1} \frac{cos \varphi \, . \, sin^{2r-1} \varphi}{\int d\varphi \, sin^{2r-2} \varphi}\right) \tag{27}$$

und wenn man denselben Werth für $f(r)$ in die Gleichung 24 setzt

$$\frac{2r-1}{2r} cos^2 \psi = \frac{2r-1}{2r} \left(1 - \frac{1}{2r-1} \frac{cos \varphi \, sin^{2r-1} \varphi}{\int d\varphi \, sin^{2r-2} \varphi}\right)$$

mithin

$$cos^2 \psi = 1 - \frac{1}{2r-1} \frac{cos \varphi \, sin^{2r-1} \varphi}{\int d\varphi \, sin^{2r-2} \varphi} \tag{28}$$

und

$$sin^2 \psi = \frac{1}{2r-1} \frac{cos \varphi \, sin^{2r-1} \varphi}{\int d\varphi \, sin^{2r-2} \varphi} \tag{29}$$

welcher letzte Ausdruck in die Gleichung 27 gesetzt, ergibt:

(30)
$$f(r+1) = \frac{2r+1}{2r+2}\left(1 - \frac{2r}{2r+1}\,\frac{sin^2\varphi}{cos^2\psi}\,.\,sin^2\psi\right) = \frac{2r+1}{2r+2}\left(1 - \frac{2r}{2r+1}\,sin^1\varphi\;tang^2\psi\right)$$

was immer stattfinden wird, sobald es erlaubt ist $f(r) = \frac{2r}{2r-1}\,cos^2\psi$ zu setzen. Das ist aber erlaubt bei jedem Werthe von φ innerhalb des ersten Quadrates. Denn jedes Integral $\int d\varphi\; sin^{2r}\varphi$ und auch $\int d\varphi\; sin^{2r-2}\varphi$ ist für jeden Werth φ positiv, wenn r einen ganzen positiven Werth hat; es ist also in der Gleichung 22 jedes Glied mithin auch $f(r)$ positiv; mithin ist auch die Gleichung 24 aus lauter positiven Gliedern: denn es ist in ihr $\frac{2r-1}{2r}$ für jeden ganzen Werth von r positiv, also ist auch der andere Factor

$$\left(1 - \frac{1}{2r-1}\,\frac{cos\,\varphi\; sin^{2r-1}\varphi}{\int d\varphi\; sin^{2r-2}\varphi}\right)$$

positiv; wenn aber das der Fall ist, so muss $\frac{1}{2r-1}\,\frac{cos\,\varphi\; sin^{2r-1}\varphi}{\int d\varphi\; sin^{2r-2}}$ entweder negativ, oder es muss positiv und kleiner als 1 sein. Negativ kann aber dieser Ausdruck nicht sein, weil jeder Factor desselben positiv wird, sobald $\varphi < 90^0$ und r positiv und eine ganze Zahl ist, so zwar dass $(2r-1)$, dann $cos\,\varphi$, dann $sin^{2r-1}\varphi$ und eben so $\int d\varphi\; sin^{2r-2}\varphi$ jedes für sich positiv wird. Es ist also $\frac{1}{2r-1}\,\frac{cos\,\varphi\; sin^{2r-1}\varphi}{\int d\varphi\; sin^{2r-2}\varphi}$ unter den bedingten Werthen von r und φ immer positiv und muss dabei kleiner als 1 sein. Es ist also $\frac{1}{2r-1}\,\frac{cos\,\varphi\; sin^{2r-1}\varphi}{\int d\varphi\; sin^{2r-2}\varphi}$ ein echter positiver Bruch und kann $= sin^2\psi$ gesetzt werden, wobei sich jederzeit ein Bogen ψ denken oder finden lässt, welcher der Gleichung $sin^2\psi = \frac{1}{2r-1}\,\frac{cos\,\varphi\; sin^{2r-1}\varphi}{\int d\varphi\; sin^{2r-2}\varphi}$ Genüge leistet. Sonach ist aber $1 - \frac{1}{2r-1}\,\frac{cos\,\varphi\; sin^{2r-1}\varphi}{\int d\varphi\; sin^{2r-2}\varphi} = cos^2\psi$ und (man siehe die Gleichung 24)

(31)
$$f(r) = \frac{2r-1}{2r}\,cos^2\psi.$$

Weil daher zum Bestand der Factorenreihe

$$\int d\varphi . sin^{2m}\varphi = \varphi . f(1) . f(2) . f(3) \ldots f(r) . f(r+1) \ldots\ldots f(m)$$

für jeden ganzen positiven Werth von r zwischen o und m immer $\int d\varphi\, sin^{2r}\varphi = f(r)\int d\varphi\, sin^{2r-2}\varphi$, und bei jedem bestimmten Winkel φ innerhalb des ersten Quadranten $f(r) = \frac{2r-1}{2r} cos^2 \psi$ wirklich gesetzt werden kann, so ist auch erwiesen:

$$f(r+1) = \frac{2r+1}{2r+2}\left(1 - \frac{2r}{2r+1} sin^2\varphi\, tang^2\psi\right). \tag{32}$$

Weil $\int d\varphi\, sin^2\varphi = \frac{1}{2}\varphi\left(1 - \frac{sin\,2\varphi}{2\varphi}\right)$ und $\frac{sin\,2\varphi}{2\varphi}$ sowohl eine Function von 2φ als auch für jeden Werth φ innerhalb des ersten Quadranten ein echter positiver Bruch ist, so setze man $\frac{sin\,2\varphi}{2\varphi} =$ $= sin^2(2\varphi)_2$ also $1 - \frac{sin\,2\varphi}{2\varphi} = cos^2(2\varphi)_2$ und $\int d\varphi\, sin^2\varphi =$ $= \frac{1}{2}\varphi\left(1 - \frac{sin\,2\varphi}{2\varphi}\right) = \frac{1}{2}\varphi . cos^2(2\varphi)_2$ so wird das Symbol $(2\varphi)_2$ einerseits einen Winkel oder natürlichen Kreisbogen vorstellen, der eine Function von 2φ ist, andererseits aber wird es in dem rechts angehängten Stellenzeiger 2 den Exponenten desjenigen Integrals anfweisen, als dessen letzter veränderlicher Factor $cos^2(2\varphi)_2$ zu betrachten ist. Consequent erscheint im Integral mit dem Exponenten $2r$, nämlich in $\int d\varphi\, sin^{2r}\varphi$, der Factor $cos^2(2\varphi)^{2r}$ als der letzte veränderliche, sobald (in der Bedingungsgleichung 31) $cos^2(2\varphi)_{2r}$ statt $cos^2\psi$ also $f(r) = \frac{2r-1}{2r} cos^2\psi = \frac{2r-1}{2r} cos^2(2\varphi)_{2r}$ gesetzt, und durch Einführung der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 .... für r die Functionen $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ .... entwickelt werden; denn sonach wird

$$\int d\varphi\, sin^{2r}\varphi = \varphi . f(1) . f(2) . f(3) \ldots f(r)$$

$$= \varphi . \frac{1}{2} cos^2(2\varphi)_2 . \frac{3}{4} . cos^2(2\varphi)_4 . \frac{5}{6} cos^2(2\varphi)_6 \ldots$$
$$\ldots \frac{2r-1}{2r} cos^2(2\varphi)_{2r}.$$

Weil aber aus der Gleichung $f(r) = \frac{2r-1}{2r} cos^2(2\varphi)_{2r}$ für $(r+1)$ statt r auch fliesst $f(r+1) = \frac{2r+1}{2r+2} cos^2(2\varphi)_{2r+2}$ und nach der

Formel 32, $f(r+1) = \frac{2r+1}{2r+2}\left(1 - \frac{2r}{2r+1} \sin^2\varphi \tan^2\psi\right)$

also auch

$cos^2(2\varphi)_{2r+2} = 1 - \frac{2r}{2r+1} \sin^2\varphi \, tang^2(2\varphi)_{2r}$ ist, so kann man jederzeit

$$\int d\varphi \sin^{2m}\varphi = \varphi \frac{1}{2} cos^2(2\varphi)_2 \cdot \frac{3}{4} cos^2(2\varphi)_4 \ldots$$

(33) $$\ldots \frac{2r+1}{2r+2} cos^2(2\varphi)_{2r+2} \ldots \frac{2m-1}{2m} cos^2(2\varphi)_{2m}$$

unter der Bedingung setzen dass, sobald

(34) $$cos^2(2\varphi)_2 = 1 - \frac{\sin 2\varphi}{2\varphi}$$

besteht, auch immer

(35) $$cos^2(2\varphi)_{2r+2} = 1 - \frac{2r}{2r+1} \sin^2\varphi \, tang^2(2\varphi)_{2r}$$

bestehen wird, und zwar für alle ganzen positiven Werthe r von $r = 1$ bis $r = m$.

Aus der Formel 35 findet man für $r = 1$, $r = 2$, $r = 3$

$$cos^2(2\varphi)_4 = 1 - \frac{2}{3} \sin^2\varphi \, tang^2(2\varphi)_2$$

$$cos^2(2\varphi)_6 = 1 - \frac{4}{5} \sin^2\varphi \, tang^2(2\varphi)_4$$

$$cos^2(2\varphi)_8 = 1 - \frac{6}{7} \sin^2\varphi \, tang^2(2\varphi)_6$$

u. s. w.

Es erhellet hieraus deutlich, dass, wenn m und n positive ganze aber ungleich grosse Zahlen wären, die ersten r veränderlichen Factoren des Integrals

$$\int d\varphi \sin^{2m}\varphi = \varphi \cdot \frac{1}{2} cos^2(2\varphi)_2 \cdot \frac{3}{4} cos^2(2\varphi)_4 \ldots \frac{2r-1}{2r} cos^2(\varphi)_{2r} \ldots$$
$$\ldots \frac{2m-1}{2m} cos^2(2\varphi)_{2m}$$

den ersten r veränderlichen Factoren des Integrals $\int d\varphi \sin^{2n}\varphi$ nicht nur der Form nach, sondern bei gleich gross bestimmten φ auch dem Werthe nach vollkommen gleich sein werden. Ist nun $m = r + p$ und $n = r + q$, so ist $\int d\varphi \sin^{2m}\varphi$

$$= \int d\varphi \, sin^{2r+2p}\varphi = \left(\frac{2r+1}{2r+2} cos^2 (2\varphi)_{2r+2} \cdot \frac{2r+3}{2r+4} cos^2 (2\varphi)_{2r+4} \cdot \right. \quad (36)$$
$$\left. \ldots . \frac{2r+2p-1}{2r+2p} cos^2 (2\varphi)_{2r+2p}\right) \int d\varphi \, sin^{2r}\varphi .$$

und $\int d\varphi \, sin^{2n}\varphi$

$$= \int d\varphi \, sin^{2r+2q} = \left(\frac{2r+1}{2r+2} cos^2 (2\varphi)_{2r+2} \cdot \frac{2r+3}{2r+4} cos^2 (2\varphi)_{9r+4} \ldots \right. \quad (37)$$
$$\left. \ldots . \frac{2r+2q-1}{2r+2q} cos^2 (2\varphi)_{2r+2q}\right) \int d\varphi \, sin^{2r}\varphi .$$

und je zwei und zwei gleichlautende Factoren der Formeln 36 und 37 sind einander auch dem Werthe nach vollkommen gleich, sobald in beiden Formeln sowohl r und r als auch φ und φ einander gleich genommen werden.

Auch $\int d\varphi \, . \, cos^{2m}\varphi$ lässt sich in eine ähnliche Factorenreihe wie Form 33 zerlegen. Zu diesem Ende leite man aus

$$\int d\varphi \, cos\varphi . cos^{2r-1}\varphi \text{ und} \int d\varphi \, cos^{2r}\varphi = f(r) \int d\varphi \, cos^{2r-2}\varphi$$

die mit den Formeln 21 bis 27 analogen Gleichungen ab, setze

$$f(r) = \frac{2r-1}{2r} sec^2 \psi = \frac{2r-1}{2r}\left(1 + \frac{1}{2r-1} \frac{cos^{2r-1}\varphi \, sin \, \varphi}{\int d\varphi \, cos^{2r-2}\varphi}\right)$$

also

$$tang^2\psi = \frac{1}{2r-1} \frac{cos^{2r-1}\varphi \, sin\varphi}{\int d\varphi \, cos^{2r-2}\varphi}$$

so erhält man

$$f(r+1) = \frac{2r+1}{2r+2}\left(1 + \frac{2r}{2r+1} cos^2\varphi \, sin^2\psi\right).$$

Wenn daher $\int d\varphi \, cos^{2m}\varphi = \varphi . f(1) . f(2) \ldots . f(r) f(r+1) \ldots . f(m)$ unter der Bedingung gilt, dass für jeden ganzen positiven Werth r der zwischen o und m liegt $\int d\varphi \, cos^{2r}\varphi = f(r) \int d\varphi \, cos^{2r-2}\varphi$ und bei jedem bestimmten Werth der Veränderlichen φ innerhalb des ersten Quadranten $f(r) = \frac{2r-1}{2r} sec^2 \psi$ gesetzt werden kann, so ist $f(r+1) = \frac{2r+1}{2r+2}\left(1 + \frac{2r}{2r+1} cos^2\varphi \, sin^2\psi\right)$.

Setzt man ferner

$$\int d\varphi \, cos^{2m}\varphi = \varphi . \frac{1}{2} sec^2 (2\varphi)_2 \frac{3}{4} sec^2 (2\varphi)_4 \ldots . \frac{2r-1}{2r} sec^2 (2\varphi)_{2r} \ldots \quad (38)$$
$$\ldots . \frac{2m-1}{2m} sec^2 (2\varphi)_{2m} ,$$

so wird diese Factorenreihe wieder unter der Bedingung gelten, dass sobald $sec^2(2\varphi)_2 = 1 + \frac{sin\, 2\varphi}{2\varphi}$ gesetzt wird, jedesmal auch

(39) $$sec^2(2\varphi)_{2r+2} = 1 + \frac{2r}{2r+1} cos^2\varphi\, sin^2(2\varphi)_2$$

gesetzt werden kann.

Aus 39 fliessen sofort die Werthe für $r = 1$, $r = 2 \ldots .$

$$sec^2(2\varphi)_4 = 1 + \frac{2}{3} cos^2\varphi\, sin^2(2\varphi)_2$$

$$sec^2(2\varphi)_6 = 1 + \frac{4}{5} cos^2\varphi\, sin^2(2\varphi)_4$$

u. s. w.

Auch gilt von den Integralen $\int d\varphi\, cos^{2r+2p}\varphi$ und $\int d\varphi\, cos^{2r+2q}\varphi$ dasselbe analog, was unter 36 und 37 bemerkt wurde.

IV.

In solche Factorenreihen wie 33 und 38 lassen sich alle Integrale von der Form $\int_0^\varphi d\varphi\, sin^{2m}\nu\varphi$ und $\int_0^\varphi d\varphi\, cos^{2m}\nu\varphi$ auflösen, sobald ν eine ganze oder gebrochene positive Zahl und $\nu\varphi$ ein Winkel innerhalb des ersten Quadranten ist. Denn, weil allgemein

(40) $$\int_0^\varphi d\varphi\, sin^{2m}\nu\varphi = \frac{1}{\nu}\int_0^{\nu\varphi} d\varphi\, sin^{2m}\varphi$$

und

(41) $$\int_0^\varphi d\varphi\, cos^{2m}\nu\varphi = \frac{1}{\nu}\int_0^{\varphi} d\varphi\, cos^{2m}\varphi$$

ist, so setze man, es sei

$$\int_0^\varphi d\varphi\, sin^{2m}\varphi \text{ oder } \int_0^\varphi d\varphi\, cos^{2m}\varphi = F(\varphi),$$

so wird

$$\int_0^{\nu\varphi} d\varphi\, sin^{2m}\varphi \text{ oder } \int_0^{\nu\varphi} d\varphi\, cos^{2m}\varphi = F(\nu\varphi),$$

also (aus 40 und 41)

(42) $$\int_0^\varphi d\varphi\, sin^{2m}\nu\varphi \text{ oder } \int_0^\varphi d\varphi\, cos^{2m}\nu\varphi = \frac{1}{\nu} F(\nu\varphi).$$

Nun ist für $\int_0^\varphi d\varphi\, sin^{2m}\varphi$

$$F(\varphi) = \varphi\, \frac{1}{2} cos^2(2\varphi)_2\, \frac{3}{4} cos^2(2\varphi)_4 \ldots \frac{2r+1}{2r+2} cos^2(2\varphi)_{2r+2} \ldots \frac{2m-1}{2m} cos^2(2\varphi)_{2m},$$

daher (nach 42)

$$\int_0^\varphi d\varphi \sin^{2m} \nu\varphi = \frac{\nu\varphi}{\nu} \cdot \frac{1}{2} \cos^2 (2\nu\varphi)_2 \frac{3}{4} \cos^2 (2\nu\varphi)_4 \ldots \frac{2m-1}{2m} \cos^2 (2\nu\varphi)_{2m} \tag{43}$$

$$= \varphi \cdot \frac{1}{2} \cos^2 (2\nu\varphi)_2 \frac{3}{4} \cos^2 (2\nu\varphi)_4 \ldots \frac{2m-1}{2m} \cos^2 (2\nu\varphi)_{2m}$$

und diese Reihe gilt wieder unter der Bedingung dass, sobald

$$\cos^2 (2\nu\varphi)_2 = 1 - \frac{\sin 2\nu\varphi}{2\nu\varphi} \tag{44}$$

auch immer

$$\cos^2 (2\nu\varphi)_{2r+2} = 1 - \frac{2r}{2r+1} \sin^2\nu\varphi \, tang^2 (2\nu\varphi)_{2r} \tag{45}$$

sein wird.

Aus der Formel 43 ergibt sich für $\nu = \frac{1}{2}$

$$\int_0^\varphi d\varphi \sin^{2m} \frac{\varphi}{2} = \varphi \cdot \frac{1}{2} \cos^2 (\varphi)_2 \frac{3}{4} \cos^2 (\varphi)_4 \frac{5}{6} \cos^2 (\varphi)_6 \ldots \ldots \frac{2m-1}{2m} \cos^2 (\varphi)_{2m} \tag{46}$$

und zur Berechnung dieser Factoren, aus 44 und 45 für $r = 1$, $r = 2 \ldots$

$$\cos^2 (\varphi)_2 = 1 - \frac{\sin \varphi}{\varphi} \tag{47}$$

$$\cos^2 (\varphi)_4 = 1 - \frac{2}{3} \sin^2 \frac{\varphi}{2} \, tang^2 (\varphi)_2 \tag{48}$$

$$\cos^2 (\varphi)_6 = 1 - \frac{4}{5} \sin^2 \frac{\varphi}{2} \, tang^2 (\varphi)_4 \tag{49}$$

u. s. w.

Für $\int_0^\varphi d\varphi \cos^{2m} \frac{\varphi}{2}$ erhält man analog mit 46 die Reihe

$$= \varphi \, \frac{1}{2} \sec^2 (\varphi)_2 \cdot \frac{3}{4} \sec^2 (\varphi)_4 \cdot \frac{5}{6} \sec^2 (\varphi)_6 \ldots \frac{2m-1}{2m} \sec^2 (\varphi)_{2m} \tag{50}$$

sodann aus 39 und analog mit 47, 48, 49

$$\sec^2 (\varphi)_2 = 1 + \frac{\sin \varphi}{\varphi} \tag{51}$$

$$\sec^2 (\varphi)_4 = 1 + \frac{2}{3} \cos^2 \frac{\varphi}{2} \sin^2 (\varphi)_2 \tag{52}$$

$$\sec^2 (\varphi)_6 = 1 + \frac{4}{5} \cos^2 \frac{\varphi}{2} \sin^2 (\varphi)_4 \tag{53}$$

u. s. w.

Weil nun diese Formeln (von 40 bis 53) so lange Giltigkeit haben als $\nu\varphi$ den ersten Quadranten nicht überschreitet, und hier $\nu\varphi = \frac{1}{2}\varphi$ ist, so kann auch $\varphi = 180^0$ angenommen und sonach bis zu den Integralen

$$\int_0^\pi d\varphi\, sin^{2m}\frac{\varphi}{2} \text{ und } \int_0^\pi d\varphi\, cos^{2m}\frac{\varphi}{2}$$

mit diesen Formeln ausgereicht werden. Für $\varphi = \pi$ wird aber (47 und 51) $\frac{sin\,\varphi}{\varphi} = \frac{sin\,\pi}{\pi} = 0$, also sowohl $cos^2(\varphi)_2 = 1$ (in 47) als auch $sec^2(\varphi)_2 = 1$ (in 51), mithin wird auch

$$cos^2(\varphi)_4 = 1\,,\ cos^2(\varphi)_6 = 1\ \ldots\ cos^2(\varphi)_{2m} = 1$$

und eben so

$$sec^2(\varphi)_4 = 1\,,\ sec^2(\varphi)_6 = 1\ \ldots\ sec^2(\varphi)_{2m} = 1\,.$$

Es ist daher

(54) $$\int_0^\pi d\varphi\, sin^{2m}\frac{\varphi}{2} = \int_0^\pi d\varphi\, cos^{2m}\frac{\varphi}{2} = \pi\,.\frac{1.3.5\ldots 2m-1}{2.4.6\ldots 2m}$$

weil sämmtliche veränderliche Factoren in 46 und 50 in diesem Falle $= 1$ werden, mit Ausnahme des Factors φ, welcher in beiden Formeln $= \pi$ wird. Dass für $\varphi = 0$ diese Integrale verschwinden, leuchtet schon aus dem Umstande ein, dass von den Factorenreihen 46 und 50 jede auch den Factor φ aufweiset.

Die Integrale

$$\int_0^\pi d\varphi\, sin^{2m}\frac{\varphi}{2} \text{ und } \int_0^\pi d\varphi\, sin^{2m}\frac{\varphi}{2}$$

sind es eben, welche numerisch angegeben werden müssen, wenn die ganze Oberfläche (oder eine seiner gleichen Hälften) des schiefen Kegels nach der Formel 15 oder 16 berechnet werden soll.

In der Reihe 15 ist das erste Glied für $\varphi = \pi$

$$\tfrac{1}{2}k^2\frac{4k'}{\pi}\int_0^\pi d\varphi\, sin^2\frac{\varphi}{2}\left(1 - k'\, sin^2\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}k^2\frac{4k'}{\pi}\left[\int_0^\pi d\varphi\, sin^2\frac{\varphi}{2} - k'\int_0^\pi d\varphi\, sin^4\frac{\varphi}{2}\right]$$

mithin nach 54 für $m = 1$ und $m = 2$ das erste Glied in 15

(55) $$= \tfrac{1}{2}k^2\frac{4k'}{\pi}\left[\tfrac{1}{2}\pi - k'\,.\frac{1.3}{2.4}\pi\right] = \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 4k'\,[1 - \tfrac{3}{4}k']$$

und eben dasselbe gibt auch für $\varphi = \pi$ das erste Glied in 16.

Das zweite Glied der Reihe 15 ist für $\varphi = \pi$

$$\frac{1.1}{2.4} k^4 \frac{4^2 k'^2}{\pi} \int_0^\pi d\varphi \, sin^4 \frac{\varphi}{2} \left(1 - k' sin^2 \frac{\varphi}{2}\right)^2; \tag{56}$$

und weil

$$\int_0^\pi d\varphi \, sin^4 \frac{\varphi}{2}\left(1 - k' sin^2 \frac{\varphi}{2}\right)^2 = \int_0^\pi d\varphi \, sin^4 \frac{\varphi}{2} - 2k' \int_0^\pi d\varphi \, sin^6 \frac{\varphi}{2} + k'^2 \int_0^\pi d\varphi \, sin^8 \frac{\varphi}{2} = \pi . \frac{1.3}{2.4} - 2k' \pi . \frac{1.3.5}{2.4.6} + k'^2 \pi . \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8},$$

so ist (nach 56) das zweite Glied:

$$\frac{1.1}{2.4} . \frac{1.3}{2.4} k^4 4^2 k'^2 \left[1 - \frac{2}{1} . \frac{5}{6} k' + \frac{5.7}{6.8} k'^2\right] = \tag{57}$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 k^4 4^2 k'^2 \left[1 - \frac{2}{1} . \frac{5}{6} k' \left(1 - \frac{1}{2} . \frac{7}{8} k'\right)\right]$$

und eben so ist das zweite Glied in 16.

Das dritte Glied der Reihe 15 für $\varphi = \pi$ ist

$$\frac{1.1.3}{2.4.6} k^6 \frac{4^3 k'^3}{\pi} \int_0^\pi d\varphi \, sin^6 \frac{\varphi}{2} \left(1 - k' sin^2 \frac{\varphi}{2}\right)^3, \tag{58}$$

und wenn man $\left(1 - k' sin^2 \frac{\varphi}{2}\right)^3$ zur dritten Potenz wirklich erhebt, und so wie in 56 vorgeht, das dritte Glied:

$$\frac{1}{5} \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 k^6 4^3 k'^3 \left[1 - \frac{3}{1} . \frac{7}{8} k' \left(1 - \frac{2}{2} . \frac{9}{10} k' \left(1 - \frac{1}{3} . \frac{11}{12} k'\right)\right)\right] \tag{59}$$

und eben dasselbe gibt das dritte Glied in 16.

Es ist mithin die ganze Oberfläche des schiefen Kegels (durch die ersten drei in 55, 57 und 59 ersichtlichen Glieder) annäherungsweise complanirt durch die Reihe:

$$a \pi s \left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 4 k' \left[1 - \frac{3}{4} k'\right] - \frac{1}{3} \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 k^4 4^2 k'^2 \times \right. \tag{60}$$

$$\left[1 - \frac{2}{1} . \frac{5}{6} k' \left(1 - \frac{1}{2} . \frac{7}{8} k'\right)\right] - \frac{1}{5} \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 k^6 4^3 k'^3 \times$$

$$\left. \left[1 - \frac{3}{1} . \frac{7}{8} k' \left(1 - \frac{2}{2} . \frac{9}{10} k' \left(1 - \frac{1}{3} . \frac{11}{12} k'\right)\right)\right] - \ldots\ldots \right\} =$$

$$= 2 . \frac{a}{2} s \int_0^\pi d\varphi \sqrt{1 - k^2 f\varphi} = 2 \frac{a}{2} \int_0^\pi d\,\varphi \sqrt{h^2 + (a \pm e \cos \varphi)^2}.$$

Diese Reihe ist in ihren ersten drei Gliedern, hier derart völlig bestimmt, dass nur mehr die numerisch anzugebenden Werthe für $s^2 = h^2 + (a+e)^2$; für $k^2 = \frac{(a+e)^2}{s^2}$ und für $k' = \frac{e}{a+e}$ in sie eingesetzt zu werden brauchen, um sie selbst in ihrem gesammten numerischen Werthe zu finden. Das allgemeine Glied der Reihe 60 ist seiner Form nach schon aus dem Fortgangsgesetz dieser ersten drei Glieder ersichtlich; doch soll es für jeden Werth von φ (also für jedes Kegelmantelstück) im nächsten Abschnitt dieser Abhandlung entwickelt werden, zu dessen Einleitung noch Folgendes hier Platz finden mag:

Man kann die Integrale $\int_0^\varphi d\varphi \, sin^{2m} \nu\varphi$ und $\int_0^\varphi d\varphi \, cos^{2m} \nu\varphi$ oder überhaupt auch das Integral $\int_0^\varphi d\varphi \, sin^{2m} \psi$ wo ψ was immer für eine Function von φ, also auch $\psi = \nu\varphi$ und $\psi = 90^0 - \nu\varphi$, sein kann, unter folgende allgemeine Auflösungsformel bringen, in welcher $\overset{r}{(\varphi)}$ einen allgemeinen Factor vorstellen soll der eine Function von φ ist

(61) $$\int_0^\varphi d\varphi \, sin^{2m} \psi = \varphi \overset{1}{(\varphi)} \cdot \overset{2}{(\varphi)} \cdot \overset{3}{(\varphi)} \cdot \overset{4}{(\varphi)} \ldots \overset{r}{(\varphi)} \ldots \overset{m}{(\varphi)}$$

und eben so, für $m = n + r$ (man sehe 36 und 37)

(62) $$\int_0^\varphi d\varphi \, sin^{2n+2r} \psi = \overset{n+1}{(\varphi)} \cdot \overset{n+2}{(\varphi)} \cdot \overset{n+3}{(\varphi)} \ldots \overset{n+r}{(\varphi)} \cdot \int_0^\varphi d\varphi \, sin^{2n} \psi.$$

Für $\psi = \nu\varphi$ ist sonach dieser allgemeine Factor

(63) $$\overset{r}{(\varphi)} = \frac{2r-1}{2r} cos^2 (2\nu\varphi)_{2r}$$

und für $\psi = 90^0 - \nu\varphi$ (in welchem Falle $\int d\varphi \, sin^{2m} \psi = \int d\varphi \, cos^{2m} \nu\varphi$ wird) ist

(64) $$\overset{r}{(\varphi)} = \frac{2r-1}{2r} sec^2 (2\varphi\nu)_{2r}.$$

V.

Entwickelt man $(1 - k' sin^2 \psi)^m$ durch den binomischen Lehrsatz in eine Reihe und multiplicirt jedes Glied mit $sin^{2n}\psi$, so erhält man $sin^{2n}\psi (1 - k' sin^2 \psi)^m = sin^{2n}\psi - \frac{m}{1} k' sin^{2n+2}\psi$.

$$+ \frac{m}{1} \frac{m-1}{2} k'^2 sin^{2n+4}\psi - \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} k'^3 sin^{2n+6}\psi + \ldots - \ldots$$

also auch

$$\int_0^\varphi d\varphi \sin^{2n}\psi\,(1 - k' \sin^2\psi)^m \tag{65}$$

$$= \int_0^\varphi d\varphi \sin^{2n}\psi - \frac{m}{1}.k' \int_0^\varphi d\varphi \sin^{2n+2}\psi + \frac{m}{1}.\frac{m-1}{2}\,k'^2 \int_0^\varphi d\varphi \sin^{2n+4}\psi -$$

$$\ldots + \ldots - \ldots \pm \frac{m}{1}.\frac{m-1}{2}\ldots\frac{1}{m}\,k'^m \int_0^\varphi d\varphi \sin^{2n+2m}\varphi\;.$$

Nun ist (nach 62)

$$\int_0^\varphi d\varphi \sin^{2n+2}\psi = \overset{n+1}{(\varphi)} \int_0^\varphi d\varphi \sin^{2n}\psi$$

$$\int_0^\varphi d\varphi \sin^{2n+4}\psi = \overset{n+1}{(\varphi)}\,\overset{n+2}{(\varphi)} \int_0^\varphi d\varphi \sin^{2n}\psi$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\int_0^\varphi d\varphi \sin^{2n+2r}\psi = \overset{n+1}{(\varphi)}\,\overset{n+2}{(\varphi)}\,\overset{n+3}{(\varphi)}\ldots\ldots\overset{n+r}{(\varphi)} \int_0^\varphi d\varphi \sin^{2n}\psi.$$

Setzt man nun diese Factorenausdrücke statt ihrer gleichen unentwickelten Integrale in die Reihe 65, so wird man sogleich bemerken, dass das erste Glied $\int_0^\varphi d\varphi \sin^{2n}\psi$ allen übrigen Gliedern als ein Factor gemein ist; der Factor $\overset{n+1}{(\varphi)}$ und $\frac{m}{1}k'$ allen Gliedern vom zweiten angefangen; der Factor $\overset{n+2}{(\varphi)}$ und $\frac{m-1}{2}k'$ allen Gliedern vom dritten angefangen u. s. f., der Factor $\overset{n+r}{(\varphi)}$ und $\frac{m-r+1}{r}k'$ allen Gliedern, von dem r^{ten} angefangen, gemein ist. Man nehme daher $\int_0^\varphi d\varphi \sin^{2n}\psi$ aus der ganzen Reihe heraus und schreibe es ausserhalb einer Hauptklammer; den Factor $\overset{n+1}{(\varphi)}$ nebst $\frac{m}{1}k'$ vor eine zweite Klammer; $\overset{n+2}{(\varphi)}$ nebst $\frac{m-1}{2}k'$ vor eine dritte; $\overset{n+3}{(\varphi)}$ nebst $\frac{m-2}{3}k'$ vor eine vierte und überhaupt $\overset{n+r}{(\varphi)}$ nebst $\frac{m-r+1}{r.}k'$ als einen Factor vor eine $(r+1)^{\text{te}}$ Klammer derart, dass immer die r^{te} über die $(r+1)^{\text{te}}$ Klammer greift, nach dem Beispiel der Formeln 57 und 59. Auf diese Weise erhält man aus 65

$$\int_0^\varphi d\varphi\, sin^{2n}\psi\,(1-k'\,sin^2\psi)^m$$

(66) $$=\Big[1-\frac{m}{1}\,k'\,\overset{n+1}{(\varphi)}\Big(1-\frac{m-1}{2}\,k'\,\overset{n+2}{(\varphi)}\Big(1-\frac{m-2}{3}\,k'\,\overset{n+3}{(\varphi)}\Big(1-\ldots$$

$$-\frac{m-r+1}{r}\,k'\,\overset{n+r}{(\varphi)}\Big(1-\frac{m-r}{r+1}\,k'\,\overset{n+r+1}{(\varphi)}\Big(1-\ldots$$

$$-\frac{2}{m-1}\,k'\,\overset{n+m-1}{(\varphi)}\Big(1-\frac{1}{m}\,k'\,\overset{n+m}{(\varphi)}\Big]^m\int_0^\varphi d\varphi\, sin^{2n}\psi.$$

Die rechts stehende grosse Klammer soll hier, mit dem darauf gestellten m anzeigen, dass an dieser Stelle eigentlich m übereinander greifende Klammern stehen sollen. Das Fortgangsgesetz dieser Reihe ist, eben durch diese Klammermethode (Einschachtlung) so klar, dass ich wohl nicht nöthig habe, es in Worten deutlicher zu machen, ihre praktische Anwendung aber so dehnsam als es das Integral selbst ist, welches sie entwickeln soll.

Man setze in ihr $\psi = \nu\,\varphi$, so erhält man (nach 63):

$$\int_0^\varphi d\varphi\, sin^{2n}\nu\varphi\,(1-k'\,\nu.sin^2\varphi)^m$$

(67) $$=\Big[1-\frac{m}{1}.\frac{2n+1}{2n+2}\,cos^2(\nu\varphi)_{2n+2}k'\Big(1-\frac{m-1}{2}.\frac{2n+3}{2n+4}\,cos^2(\nu\varphi)_{2n+4}k'$$

$$\Big(1-\frac{m-r+1}{r}\cdot\frac{2n+2r-1}{2n+2r}\,cos^2(\nu\varphi)_{2n+2r}k'\,(1-\ldots\ldots$$

$$1-\frac{1}{m}.\frac{2n+2m-1}{2n+2m}\,cos^2(\nu\varphi)_{2n+2m}\,k'\Big]^m\int_0^\varphi d\varphi\, sin^{2n}.\nu\varphi$$

Für $\nu = \frac{1}{2}$ und $n = m$ gibt aber diese Reihe wieder

(68) $$\int_0^\varphi d\varphi\, sin^{2m}\frac{\varphi}{2}\Big(1-sin^2\frac{\varphi}{2}\Big)^m$$

$$=\Big[1-\frac{m}{1}.\frac{2m+1}{2m+2}\,cos^2(\varphi)_{2m+2}k'\Big(1-\frac{m-1}{2}.\frac{2m+3}{2m+4}\,cos^2(\varphi)_{2m+4}\,k'$$

$$\ldots.\Big(1-\frac{m-r+1}{r}.\frac{2m+2r-1}{2m+2r}\,cos^2(\varphi)_{2m+2r}\,k'\,(1-\ldots\ldots$$

$$1-\frac{1}{m}\,.\,\frac{4m-1}{4m}\,cos^2(\varphi)_{4m}k'\Big]^m\int_0^\varphi d\varphi\, sin^{2m}\frac{\varphi}{2},$$

und macht sogleich das e n t w i c k e l t e a l l g e m e i n e G l i e d der Reihe 15 ersichtlich, wozu nur mehr für $\int_0^\varphi d\varphi\, sin^{2m}\frac{\varphi}{2}$ die Factorenreihe aus 46 eingeführt und für jede Zahl $2m + 2r$ die veränderlichen Factoren aus der Formel 45 für $\nu = \frac{1}{2}$ abgeschrieben zu werden brauchen. Vertauscht man dagegen in 68 das Integral $\int_0^\varphi d\varphi \sin^{2m} \frac{\varphi}{2}$ ausser der Hauptklammer mit dem Integral $\int_0^\varphi d\varphi \cos^{2m} \frac{\varphi}{2}$ und eben so die veränderlichen Factoren

$$\begin{array}{lcl} \cos^2(\varphi)_{2m+2} & \text{mit} & \sec^2(\varphi)_{2m+2} \\ \cos^2(\varphi)_{2m+4} & ,, & \sec^2(\varphi)_{2m+4} \\ \dots & & \dots \\ \cos^2(\varphi)_{2m+2r} & ,, & \sec^2(\varphi)_{2m+2r}, \end{array}$$

so gibt die so umgestaltete Reihe sogleich das entwickelte allgemeine Glied der Reihe 16, und dieses wird völlig entwickelt, durch Einführung der Factorenreihe 50 statt $\int_0^\varphi d\varphi \cos^{2m} \frac{\varphi}{2}$ und durch Abschreibung der Werthe für $\sec^2(\varphi)_{2m+2r}$ von den Formeln 51 bis 53 oder der allgemeineren Formel

$$\sec^2(\varphi)_{2r+2} = 1 + \frac{2r}{2r+1} \cos^2 \frac{\varphi}{2} \sin^2(\varphi)_{2r}$$

(nach 39). Für $\cos^2(\varphi)_{2m+2} = 1$ und überhaupt $\cos^2(\varphi)_{2m+2r} = 1$ verschwinden aus der Reihe 68 alle veränderlichen Factoren; das Integral ausser der Klammer wird

$$\int_0^\pi d\varphi \sin^{2m} \frac{\varphi}{2} = \pi . \frac{1.3.5....2m-1}{2.4.6.......2m}$$

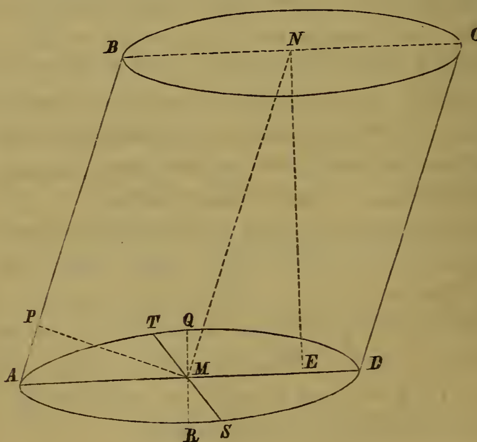
und die Reihe 68 selbst stellt sonach das allgemeine Glied der Reihe 60 für die Complanation des ganzen schiefen Kegels vor.

Für $m = 1$, $m = 2$, $m = 3\dots$ gibt die Reihe 68 die ersten Glieder der Reihe 15 entwickelt und zwar mit denselben constanten Coëfficienten wie die Formeln 55, 57, 59 sie aufweisen, nur dass neben diesen Coëfficienten noch die veränderlichen Factoren $\cos^2(\varphi)_2$; $\cos^2(\varphi)_4$; $\cos^2(\varphi)_6 \dots$ Platz nehmen werden.

In den bisherigen Beispielen der Reihen 66 und 67 war m eine ganze positive Zahl, diese Reihen gelten aber auch für jedes andere m, das ein echter positiver oder negativer Bruch sein kann. Von den vielen praktischen Anwendungen der Reihe 67 will ich nur noch ein einziges Beispiel aufführen: Man setze (in 67) $n = 0$, $\nu = 1$, $m = \frac{1}{2}$ und $k' = k^2$, so wird aus 67, wenn man noch die ganze Gleichung mit as multiplicirt

$$(69)\quad as\int_0^{\varphi} d\varphi\, \sqrt{1-k^2 \sin^2\varphi} = as\,\varphi \cdot \Big[1 - \frac{1.1}{2.2}\, k^2 \cos^2(2\varphi)_2 \Big(1 + \frac{1.3}{4.4}\, k^2 \cos^2(2\varphi)_4 \Big(1 + \frac{3.5}{6.6}\, k^2 \cos^2(2\varphi)_6 \Big(1 + \ldots 1 + \frac{(2r-3)\,(2r-1)}{2r.2r}\, k^2 \cos^2(2\varphi)_{2r} \Big(1 + \ldots\ldots\Big]^{\infty}.$$

Diese ins Unendliche fortlaufende Reihe würde man auch aus 15 und 16 erhalten, wenn man dort $k' = 1$ setzt, weil in diesem Falle $4\int_0^{\varphi} d\varphi\, \sin^{2m}\frac{\varphi}{2}\left(1 - \sin^2\frac{\varphi}{2}\right)^m = 4\int_0^{\varphi} d\varphi\, \cos^{2m}\frac{\varphi}{2}\left(1 - \cos^2\frac{\varphi}{2}\right)^m = \int_0^{\varphi} d\varphi\, \sin^{2m}\varphi$ wird; nur müsste man noch die Factorenreihen (nach 33) statt der Integrale $\int d\varphi\, \sin^{2r}\varphi$ einführen und die gleichen Factoren ausserhalb von Klammern bringen. — Für $s = 1$ lässt die Reihe 69 den Bogen einer Ellipse berechnen, deren grosse Halbaxe $= a$, und kleine Halbaxe $= a\sqrt{1-k^2}$ ist, und der Winkel φ den einen Schenkel in der kleinen Axe hat. Stellt dagegen s die Seite eines schiefen Cylinders vor, dessen Grundflächen-Halbmesser $= a$ ist, so kann durch diese Reihe die krumme Querfläche eines prismatischen Stückes des schiefen Cylinders gefunden werden, wenn dieses Stückes gleiche Grundflächen einen Winkel $AMT = \varphi$ (siehe Fig. 2) innerhalb des ersten Quadranten haben, sodann seine



Excentricität $ME = e$, seine Seite $MN = DC = s$ und $k^2 = \frac{e^2}{s^2}$ gesetzt wird. Weil im letzteren Falle für $k^2 = \frac{e^2}{s^2}$, auch gefunden wird

$$\frac{e^2}{s^2} = \frac{\overline{ME}^2}{\overline{MN}^2} = \frac{\overline{PA}^2}{\overline{AM}^2} = \frac{a^2 \cos^2 MAP}{a^2} = \frac{a^2 - a^2 \sin^2 MAP}{a^2} = \frac{a^2 - \overline{MP}^2}{a^2},$$

so erhellet auch aus diesen gleichen Ausdrücken für die Ellipticität des Cylinders, dass: wenn von einem schiefen Cylinder seine Seite oder Axe $MN = AB = s$, sein Halbmesser $AM = a$ und der Winkel PAM gegeben ist, den in der durch die Mittelpunkte seiner beiden Grundflächen auf sie senkrecht geführten Ebene die Seite mit dem Durchmesser macht; oder statt dieses Winkels auch die kleine Halbaxe $MP = b$ der Ellipse, welche die Seiten des Cylinders senkrecht schneidet; in beiden Fällen sämmtliche Stücke zu seiner Complanationsreihe (69) vorhanden sind. Denn, wenn der Winkel MAP gegeben ist, so ist $k^2 = \cos^2 MAP$, und wenn $MP = b$ (die kleine Halbaxe) gegeben ist, so ist $k^2 = \frac{a^2 - MP^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$ und es ermangelt in keinem Falle eine weitere Bedingung als die Grösse des Winkels φ zu kennen [1]). Wäre $\varphi = \frac{\pi}{2}$, so wird $\cos^2 (2\varphi)_2 = 1$, $\cos^2 (2\varphi)_4 = 1$, und überhaupt $\cos^2 (2\varphi)_{2r} = 1$ (siehe die Formeln 34, 35), man erhält sonach den Inhalt eines Cylindermantelstückes, dessen Grundfläche ein Quadrant wie AMQ ist, für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ aus der Reihe 69 durch die einfachere Reihe

$$s\,a \frac{\pi}{2} \left[1 - \frac{1.1}{2.2} k^2 \left(1 + \frac{1.3}{4.4} k^2 \left(1 + \frac{3.5}{6.6} k^2 \left(1 + \ldots \right.\right.\right.\right]^{\infty}.$$

und den ganzen Cylindermantel durch das Vierfache dieses Werthes. Die vier Cylinderstücke, deren Grundflächen die Quadranten AMQ, QMD, DMR und RMA sind, haben nämlich vollkommen gleiche Oberflächen, wenn gleich die Stücke von den entgegengesetzten Quadranten, wie AMQ und DMR, wie sie auch immer umge-

1) Auch im schiefen Kegel ist $k^2 = \frac{(a+e)^2}{s^2} = \frac{\overline{AE}^2}{\overline{AC}^2} = \cos^2 CAE$ (siehe Fig. 1), d. h. k (in den Formeln 4 bis 9) ist der Cosinus des Winkels, der in der Ebene der kürzesten und längsten Seite die längste Seite mit dem Durchmesser macht. Die Bezeichnung der Module mit dem Buchstaben k ist also (für Deutsche wenigstens) in mehr als einer Hinsicht passend, denn k bezeichnet nicht nur immer eine Constante, sondern in den meisten Fällen auch den Cosinus eines augenfälligen Winkels.

wendet werden, sich nicht decken mögen. Auch zwei Cylindermantelstücke, deren Grundflächen, wie *AMT* und *DMS*, gleiche Winkel haben, sind einander gleich: sobald diese Mantelstücke an jenen Seiten *AB* und *CD* des Cylinders liegen, die durch die Pole der kleinen Axe jeder Ellipse gehen, welche senkrecht alle Seiten des Cylinders durchschneidet. Denn in solchen Lagen ist der elliptische Bogen auf dem einen Mantelstück dem elliptischen Bogen auf dem andern gleich; der Inhalt dieser Mantelstücke ist aber eben nichts anders als das Product ihres elliptischen Bogens in irgend eine ihrer gleichen Seiten.

VI.

Bei der Auflösung der Integrale $\int d\varphi\ sin^{2m}\nu\varphi$ und $\int d\varphi\ cos^{2m}\nu\varphi$ in die veränderlichen Factoren von der allgemeinen Form $cos^2\ (\nu\varphi)_{2r}$ und $sec^2\ (\nu\varphi)_{2r}$ hatte ich die Absicht, den numerischen Calcul zu den Integralen

$$\int d\varphi\ sin^{2n}\nu\varphi\ (1-k'\ sin^2\nu\varphi)^m \text{ und } \int d\varphi\ cos^{2n}\nu\varphi\ (1-k'\ cos^2\nu\varphi)^m$$

mit Hilfe der allerleichtesten Rechnungsoperationen — der Addition und Subtraction — zu bewerkstelligen. Ich erreiche diese Absicht in der That durch die zugänglichsten tabellarischen Hilfsmittel der Mathematik, nämlich einfach durch die Logarithmen der Sinus und Tangenten, die in allen, auch in den wohlfeilsten logarithmischen Tafeln anzutreffen sind. Einige Beispiele dieses Calculs an den entwickelten Reihen 68 und 69 werden geeigneter sein, ihn kennen zu lernen, als eine ganz allgemeine Darstellung desselben.

Es sei (in der Reihe 69) der Modul k^2 so klein, dass man das Glied mit der Potenz k^8, also das vierte Glied, schon vernachlässigen und demnach setzen kann

$$(70)\ \int_0^\varphi d\varphi \sqrt{1-k^2\ sin^2\ \varphi} =$$

$$\varphi\left[1-\frac{1.1}{2.2}k^2 cos^2(2\varphi)_2\left(1+\frac{1.3}{4.4}k^2 cos^2(2\varphi)_4\left(1+\frac{3.5}{6.6}k^2 cos^2(2\varphi)_6\right)\right)\right],$$

so kann zunächst $\frac{3.5}{6.6}\ k^2\ cos^2(2\varphi)_6$, da es für jedes φ positiv ist, dem Quadrat einer Tangente gleich gesetzt werden, und man wird schreiben können $\frac{3.5}{6.6}\ k^2\ cos^2\ (2\varphi)_6 = tang^2\ \alpha_1$, mithin

$$1+\frac{3.5}{6.6}\ k^2\ cos^2(2\varphi)_6 = 1 + tang^2\ \alpha_1 = sec^2\ \alpha_1 = \frac{1}{cos^2\ \alpha_1},$$

und die Formel 70 reducirt sich auf den kürzeren Ausdruck

$$\varphi\left[1-\frac{1.1}{2.2}k^2 \cos^2(2\varphi)_2\left(1+\frac{1.3}{4.4}k^2\frac{\cos^2(2\varphi)_4}{\cos^2\alpha_1}\right)\right]. \qquad (71)$$

Weil nun wieder $\frac{1.3}{4.4}k^2\frac{\cos^2(2\varphi)_4}{\cos^2\alpha_1}$ für jeden Werth von φ positiv bleibt, so setze man es $= tang^2\,\alpha_2$ also

$$1+\frac{1.3}{4.4}k^2\frac{\cos^2(2\varphi)_4}{\cos^2\alpha_1} = 1 + tang^2\,\alpha_2 = \frac{1}{\cos^2\alpha_2}$$

und die ganze Formel 71 kommt wieder auf den kürzeren Ausdruck

$$\varphi\left[1-\frac{1.1}{2.2}k^2\frac{\cos^2(2\varphi)_2}{\cos^2\alpha_2}\right]. \qquad (72)$$

Da aber das ganze Integral $\int d\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$, also auch der Ausdruck 72 nur positiv sein kann, sobald φ positiv ist, so muss auch der umklammerte Ausdruck $\left[1-\frac{1.1}{2.2}k^2\frac{\cos^2(2\varphi)_2}{\cos^2\alpha_2}\right]$ in 72 für jeden Werth von φ positiv sein, mithin muss $\frac{1.1}{2.2}k^2\frac{\cos^2(2\varphi)_2}{\cos^2\alpha_2}$ ein echter positiver Bruch sein, weil es für jedes φ nur positiv aber niemals grösser als 1 werden kann; denn, würde es grösser als 1 werden, so wäre $1-\frac{1.1}{2.2}k^2\frac{\cos^2(2\varphi)}{\cos^2\alpha_2}$ negativ, also auch der Ausdruck 72 negativ, was unmöglich ist. Man setze daher

$$\frac{1.1}{2.2}k^2\frac{\cos^2(2\varphi)}{\cos^2\alpha_2} = \sin^2\alpha_3,\ \text{mithin}\ 1-\frac{1.1}{2.2}k^2\frac{\cos^2(2\varphi)}{\cos^2\alpha_2} = \cos^2\alpha_3,$$

so wird der gesammte Werth von 72 durch den noch kürzeren Ausdruck $\varphi\,.\,\cos^2\alpha_3$ dargestellt, es ist also annäherungsweise

$$\int d\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} = \varphi\cos^2\alpha_3. \qquad (73)$$

Gesetzt nun, es wären die Logarithmen der Functionen $\cos^2(2\varphi)_2$; $\cos^2(2\varphi)_4$; $\cos^2(2\varphi)_6$ schon bekannt und man setzte:

$\log\cos(2\varphi)_2 = \lambda_1$; und der Kürze wegen $\log\sqrt{\frac{1.1}{2.2}} = l_1$

$\log\cos(2\varphi)_4 = \lambda_2$; „ „ „ $\log\sqrt{\frac{1.3}{4.4}} = l_2$

$\log\cos(2\varphi)_6 = \lambda_3$; „ „ „ $\log\sqrt{\frac{3.5}{6.6}} = l_3$, so wird der numerische Calcul zur Erlangung von $cos^2\,\alpha_3$ auf folgende Art geführt werden können. Es ist:

$$log\,.\,tang\,\alpha_1 = \sqrt{\frac{3.5}{4.6}\,k^2\,cos^2\,(2\varphi)_6} = log\,k + l_3 + \lambda_3$$

nach der eben erklärten Bedeutung von l_3 und λ_3. Man addire nun diese drei Logarithmen, bringe ihre Summe auf die negative Charakteristik 10, betrachte den sogestalteten Logarithmus als einen Tangenten-Logarithmus, suche in einer Tafel der Logarithmen den Sinus und Tangenten, den gleichgrossen Logarithmus unter den Tangenten und schreibe endlich den auf derselben Zeile befindlichen Logarithmus des Cosinus heraus: dieser, weniger Charakteristik 10, ist der Logarithmus von $cos\,\alpha_1$.

Nachdem nun $log\,.\,cos\,\alpha_1$ bekannt ist, so erhält man

$$log\,.\,tang\,\alpha_2 = \sqrt{\frac{1.3}{4.4}\,k^2\,\frac{cos^2\,(2\varphi)_4}{cos^2\,\alpha_1}} = log\,k + l_2 + \lambda_3 - log\,cos\,\alpha_1.$$

Man addire nun wieder diese vier Logarithmen, bringe ihre Summe auf die negative Charakteristik 10, betrachte den sogestalteten Logarithmus wieder als einen Tangenten-Logarithmus, suche in der Tafel der Tangenten-Logarithmen den gleichgrossen und schreibe wieder den auf derselben Zeile stehenden Logarithmus des Cosinus (weniger Charakteristik 10) heraus, welcher sonach $= log\,.\,cos\,\alpha_2$ ist.

Nachdem $log\,cos\,\alpha_2$ bekannt ist, so erhält man

$$log\,sin\,\alpha_3 = \sqrt{\frac{1.1}{2.2}\,k^2\,\frac{cos^2\,(2\varphi)_2}{cos^2\,\alpha_2}} = log\,k + l_1 + \lambda_1 - log\,cos\,\alpha_2,$$

und nun addire man wieder diese vier Logarithmen, bringe ihre Summe auf die negative Charakteristik 10, betrachte den sogestalteten Logarithmus aber als einen Sinus-Logarithmus. Nachdem man in der Tafel der Sinus-Logarithmen einen gleichgrossen aufgesucht und den auf derselben Zeile stehenden Cosinus-Logarithmus (weniger Charakt. 10) $= log\,cos\,\alpha_3$ herausgeschrieben hat, multiplicire man diesen mit 2 und bringe ihn auf seine natürliche Charakteristik, so hat man

$$2\,log\,.\,cos\,\alpha_3 = log\,.\,cos^2\,\alpha_3,\ \text{also (man sehe 73)}$$
$$log\,.\,\varphi\,.\,cos^2\alpha_3 = log\,\varphi + 2\,log\,.\,cos\,\alpha_3,$$

und nach Addition dieser beiden Logarithmen den Zahlenwerth der gegebenen dreigliedrigen Reihe 70, durch Hilfe jeder Tafel der vulgären Zahlen-Logarithmen [1]).

Dieser Calcul setzt voraus, dass die Logarithmen der Wurzeln der Functionen $cos^2\ (2\varphi)_2$, $cos^2\ (2\varphi)_4$, $cos^2\ (2\varphi)_6$ bekannt seien, aber gerade diese Bedingung ist am leichtesten zu erfüllen. Denn, es sei $log\ cos\ (2\varphi)_2$; $log\ cos\ (2\varphi)_4$; $log\ cos\ (2\varphi)_6$ zu berechnen. Nach den aus 35 abgeleiteten Formeln ist

$$cos^2\ (2\varphi)_2 = 1 - \frac{sin\ 2\varphi}{2\varphi} = 1 - sin^2\ (2\varphi)_2 \tag{74}$$

$$cos^2\ (2\varphi)_4 = 1 - \frac{2}{3}\, sin^2\ \varphi\ tang^2\ (2\varphi)_2 = 1 - sin^2\ (2\varphi)_4 \tag{75}$$

$$cos^2\ (2\varphi)_6 = 1 - \frac{4}{5}\, sin^2\ \varphi\ tang^2\ (2\varphi)_4 = 1 - sin^2\ (2\varphi)_6 \tag{76}$$

man setze $log \sqrt{\frac{2}{3}} = L_1$; $log \sqrt{\frac{4}{5}} = L_2$; $log \sqrt{\frac{6}{7}} = L_3$ u. s. w., die man sich ohnedem, wenn dergleichen Rechnungen öfter zu machen sind, gleich wie die obigen Logarithmen $l_1 = \sqrt{\frac{1.1}{2.2}}$, $l_2 = \sqrt{\frac{1.3}{4.4}}$, l_3 u. s. w. im Vorhinein berechnen und in eine Tafel (vielleicht bis L_{20} und l_{20}) eintragen wird. Nun findet man aus 74

$$log\ sin\ (2\varphi)_2 = \frac{1}{2}\,(log\ .\ sin\ 2\varphi - log\ .\ 2\varphi),$$

mit diesem Logarithmus gehe man in die Tafel der Sinus-Logarithmen, suche den gleichgrossen dort auf, schreibe den Logarithmus des Cosinus auf derselben Zeile des Buches (von demselben Winkel) als den Werth des gesuchten $log\ .\ cos\ (2\varphi)_2 = \lambda_1$ heraus, und addire sogleich den auf derselben Zeile stehenden Logarithmus der Tangente zu $L_1 + log\ .\ sin\ \varphi$, so erhält man nach 75

---

[1]) Die Functionen $cos\,(2\varphi)_2$; $cos\,(2\varphi)_4 \ldots tang\ a_1$; $tang\ a_2 \ldots$ sind hier trigonometrische Linien eines Kreises vom Halbmesser $= 1$. Man betrachte daher die Logarithmen der Sinus und Tangenten in unseren üblichen Tafeln gerade so, als ob sie für den Halbmesser 1 eingerichtet wären, dass mithin jeder solche Logarithmus ausser seiner sichtbaren positiven Charakteristik noch eine (aber nicht beigesetzte) negative Charakteristik $= 10$ habe. — In der That! wollte man eine Logarithmentafel der Sinus und Tangenten für den Halbmesser 1 einrichten, welche andere gleiche negative Charakteristik als 10 könnte man geben? Da aber heutzutage von allen Analysten, mit ganzem Recht, die trigonometrischen Formeln für den Halbmesser 1 eingerichtet werden, so erscheint die Zeile auf den Titelblättern „für den $sin\ tot = 10000000000$" als ein Zopf in Nullen.

$$L_1 + log\ sin\ \varphi + log\ tang\ (2\varphi)_2 = log \sqrt{\frac{2}{3} sin^2\ \varphi\ tang^2\ (2\varphi)_2} = log\ sin\ (2\varphi)_4.$$

Mit diesem Logarithmus gebe man wieder (nach gehöriger Reduction seiner Charakteristik) in die Tafel, suche unter den Sinus-Logarithmen den gleichgrossen, schreibe den Logarithmus des Cosinus, der auf derselben Zeile steht, heraus, so ist dieser wieder $log\ .\ cos\ (2\varphi)_4 = \lambda_2$; den Logarithmus der Tangente, der auf derselben Zeile steht, addire man aber sofort zu $L_2 + log\ sin\ \varphi$, so ist

$$L_2 + log\ sin\ \varphi + log\ tang\ (2\varphi)_4 = log \sqrt{\frac{4}{5} sin^2\ \varphi\ tang^2\ \varphi\ (2\varphi)_4} =$$
$log\ sin\ (2\varphi)_6$ u. s. w., u. s. w.

Auf ganz ähnlichen Weg, jedoch für andere Winkel $(2\varphi)_2$; $(2\varphi)_4$; . . . . . . erhält man nach 39 die Functionen $sec\ (2\varphi)_2$; $sec\ (2\varphi)_4$ . . . . . durch $log\ sec\ (2\varphi)_2 = 10 - log\ cos\ (2\varphi)_2$
$log\ sec\ (2\varphi)_4 = 10 - log\ cos\ (2\varphi)_4$ u. s. f.

Noch nützlicher scheint die Anwendung dieses stäten logarithmischen Calculs bei der numerischen Berechnung der Reihen 67 und 68, wenn m eine ganze positive Zahl ist. Es sei z. B. das dritte Glied der Reihe 15, welches durch 68 für $m = 3$ näher entwickelt wird, nämlich

$$\frac{1.1.3}{2.4.6} k^6 \frac{4^3 k'^3}{\varphi} \int_0^\varphi d\varphi\ sin^6\ \frac{\varphi}{2}\ (1 - k'\ sin^2\ \varphi)^3$$

(77) $$= \frac{1}{5} \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 k^6 4^3 k'^3\ cos^2\ (\varphi)_2\ cos^2\ (\varphi)_4\ cos^2\ (\varphi)_6 \times$$
$$\left[1 - \frac{3}{1} . \frac{7}{8} k'\ cos^2 (\varphi)_8 \left(1 - \frac{2.9}{2.10} k'\ cos^2\ (\varphi)_{10} \left(1 - \frac{1}{3} . \frac{11}{12} k'\ cos^2 (\varphi)_{12}\right)\right)\right]$$

mit Hilfe schon bekannter Logarithmen für $cos\ (\varphi)_2$; $cos\ (\varphi)_4$ . . . . bis $cos\ (\varphi)_{12}$ zu berechnen. — Man setze, weil $\frac{1}{3} . \frac{11}{12} k'\ cos^2\ (\varphi)_{12}$ augenscheinlich ein echter positiver Bruch ist, diesen $= sin^2\ \alpha_1$, so ist $1 - \frac{1}{3} . \frac{11}{12} k'\ cos^2\ (\varphi)_{12} = cos^2\ \alpha_1$ und

$$\frac{2}{2} . \frac{9}{10} k'\ cos^2\ (\varphi)_{10} \left(1 - \frac{1}{3} . \frac{11}{12} k'\ cos^2\ (\varphi)_{12}\right) = \frac{9}{10} . k'\ cos^2 (\varphi)_{10}\ cos^2\ \alpha_1.$$

Da nun dieser Ausdruck wieder ein echter positiver Bruch ist, so sei $\frac{9}{10} k' \cos^2 (\varphi)_{10} \cos^2 \alpha_1 = \sin^2 \alpha_2$, und es reducirt sich der ganze umklammerte Ausdruck in 77 auf den einfacheren

$$\left[1 - \frac{3}{1} \cdot \frac{7}{8} k' \cos^2 (\varphi)_8 \cos^2 \alpha_2\right] \tag{78}$$

und dieser Ausdruck muss nothwendig positiv sein, weil die ganze Formel 77 positiv sein soll, vor der Klammer aber, in dem Product

$$\frac{1}{5} \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 k^6 4^3 k'^3 \cos^2 (\varphi)_2 \cos^2 (\varphi)_4 \cos^2 (\varphi)_6$$

kein negativer Factor erscheint. Wenn aber die Formel 78 positiv ist, und auch in $\frac{3.7}{1.8} k' \cos^2 (\varphi)_8 \cos^2 \alpha_2$ kein negativer Factor erscheint, so ist dieses Product gleichfalls ein echter positiver Bruch. Man setze daher $\frac{3}{1} \cdot \frac{7}{8} k' \cos^2 (\varphi)_8 \cos^2 \alpha_2 = \sin^2 \alpha_3$, so wird aus 77 der kürzere Ausdruck

$$\frac{1}{5} \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 k^6 k'^3 4^3 \cos^2 (\varphi)_2 \cos^2 (\varphi)_4 \cos^2 (\varphi)_6 \cos^2 \alpha_3 = A \text{ und}$$

$$\log A = 2\left(\log . \cos (\varphi)_2 + \log . \cos (\varphi)_4 + \log . \cos (\varphi)_6 + \log \cos \alpha_3\right) + \log \left(\frac{1}{3} \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 k^6 k'^3 4^3\right). \tag{79}$$

Die Logarithmen für $\cos \alpha_1$; $\cos \alpha_2$; $\cos \alpha_3$ werden in den Tafeln der Sinus-Logarithmen, nach vorher berechneten $\sin \alpha_1$; $\sin \alpha_2$; $\sin \alpha_3$, noch weit leichter gefunden, als die gleichbenannten Functionen in 71, 72, 73 nach vorberechneten $tang\ \alpha_1$, $tang\ \alpha_2$, $tang\ \alpha_3$ gefunden werden, da unsere üblichen Tafeln so eingerichtet sind, dass gleich neben dem Logarithmus des Sinus der Logarithmus des Cosinus von gleichem Winkel steht. Ausserdem wird hier der Logarithmus von $\cos \alpha_1$, $\cos \alpha_2$, ... zu einer Summe von Logarithmen blos addirt, während er dort (in 71—73) subtrahirt, oder doch seine dekadische Ergänzung gesucht und addirt werden muss. Diese Vortheile mögen klein sein, aber sie wachsen mit der Gliederanzahl.

So wie das dritte Glied der Reihe 15 hier berechnet wurde, lassen sich, wie leicht ersichtlich, das erste und zweite Glied dieser Reihe gleichfalls behandeln. Ob aber auch die numerische Berechnung des vierten, fünften, sechsten und überhaupt des $m$ten Gliedes der Reihen 15 und 16 dieser ununterbrochenen Reduction auf Sinus-Logarithmen sich unterwerfen lässt? das muss erwiesen werden. Vielleicht komme ich in die Lage, in einer andern Abhandlung zu erweisen, dass sich dieser Calcul, den ich den „stätigen“ nennen möchte, wirklich auf diese und noch weit mehr Fälle anwenden lässt, welche sämmtlich in der Reihe 66 einen allgemeinen Ausdruck finden. Es lässt sich mit aller Evidenz zeigen, dass die Form folgender Gleichungen (der einzelnen Glieder der Reihe 66) erlaubt und statthaft ist, sobald m eine ganze positive Zahl und k' ein echter positiver Bruch ist:

$$\frac{1}{m} k' \overset{n+m}{(\varphi)} = \sin^2 \alpha_1, \text{ mithin } 1 - \frac{1}{m} k' \overset{n+m}{(\varphi)} = \cos^2 \alpha_1$$

$$\frac{2}{m-1} k' \overset{n+m-1}{(\varphi)} \cos^2 \alpha_1 = \sin^2 \alpha_2, \text{ mithin } 1 - \frac{2}{m-1} k' \overset{n+m-1}{(\varphi)} \cos^2 \alpha_1 = \cos^2 \alpha$$

und allgemein

$$\frac{m-r+1}{r} k' \overset{n+r}{(\varphi)} \cos^2 \alpha_{m-r} = \sin^2 \alpha_{m-r+1}.$$

Die Giltigkeit dieser allgemeinen Gleichung ist, was ihre Form betrifft, wie gross auch immer m werden möge, vollständig erweislich.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1855

Band/Volume: 16

Autor(en)/Author(s): Schönbichler Karl

Artikel/Article: Die Complanation des schiefen Kegels durch Vermittelung der Integrale....und Aufläsung dieser Intergrale in trigonometrische, durch einen stäten logarithmischen Calcul berechenbare Factoren. 447-476