SITZUNG VOM 4. OCTOBER 1855.

Eingesendete Abhandlungen.

Über die Messung der Strom-Intensität mit der Tangenten-Boussole.

Von **W. Zenger**,

Lehrer der Physik zu Neusohl.

(Vorgelegt in der Sitzung vom 19. April 1855.)

1.

Als Messinstrument für die Intensität galvanischer Ströme hat die Tangenten-Boussole den unbestreitbaren Vorzug der Bequemlichkeit der Beobachtung, und demselben verdankt sie auch ihre so allgemein verbreitete Verwendung, wiewohl sie der Sinus-Boussole in theoretischer Beziehung an Genauigkeit nachsteht.

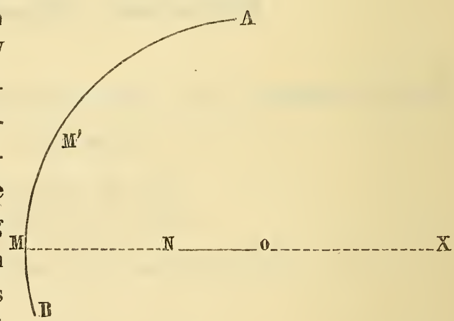
Der grösste Fehler dieses Messinstrumentes liegt bekanntlich darin, dass die Theorie desselben eine Voraussetzung macht, deren Erfüllung auch nicht angenähert genug in der Ausführung möglich ist, indem eine zu starke Verkürzung der Nadellänge, ebenso wie eine zu starke Vergrösserung des Kreisdurchmessers des Schliessungsleiters die Empfindlichkeit beeinträchtigen, ohne bei bedeutenderem Ablenkungswinkel die Ungenauigkeiten der Beobachtungsresultate in hinreichender Weise zu beseitigen.

Da die Construction des Apparates somit keine Mittel zur ausreichenden Beseitigung des Fehlers des Messinstrumentes darbietet, so steht nur noch der Weg offen denselben bei Benützung der Tangenten-Boussole zu genauen Messungen in Rechnung zu ziehen.

Um dahin zu gelangen ist vorerst die Wirkung des durch den Strom hervorgerufenen Magnetismus des Schliessungsleiters auf den innerhalb der Ebene desselben sich befindenden magnetischen Punkt zu betrachten.

Es sei (Fig. 1) AB ein Stück eines nach einer symmetrischen in sich zurückkehrenden Curve gekrümmten Schliessungsleiters, M sei eine Axe desselben und in N befinde sich ein magnetischer Punkt, der, mit O fix verbunden, sich um diesen Punkt frei bewegen kann. Ist M ein elementares Stückchen des Leiters, das in der Verlängerung der Geraden MO liegt, so wird dasselbe eine bestimmte, der Strom-Intensität und dem Magnetismus des Punktes N proportionale Wirkung hervorbringen. Ist diese Wirkung für die Einheit der Entfernung p, so wird für die Entfernung a die Wirkung $p' = pf(a)$ sein. Für ein anderes Theilchen M' des Schliessungsleiters ändert sich blos der Abstand, nicht aber die Grösse p, so dass $p'' = pf(a')$ wird, folglich ist

Fig. 1.



$$p' : p'' = f(a) : f(a') \quad \text{oder} \quad p'' = p' \frac{f(a')}{f(a)}.$$

Man kann sich daher auch die Sache so vorstellen, als ob das Theilchen M' von M aus jedoch mit der Intensität $p' \frac{f(a')}{f(a)}$ wirkte, d. i. man kann die Wirkung jedes Stromtheilchens auf die Axe reducirt denken.

Die Summe der Einzelwirkungen der magnetischen Stromtheilchen wird offenbar die Totalwirkung des Magnetismus des Schliessungsleiters auf den magnetischen Punkt darstellen; nennt man diese S, so ist dann:

$$S = pf(a) + pf(a') + pf(a'') + \cdots + pf(a_n) =$$
$$= p[f(a) + f(a') + f(a'') + \cdots + f(a_n)];$$

hebt man $f(a)$ heraus, so erhält man die auf die Axe reducirte Totalwirkung:

$$S = pfa\left[1 + \frac{f(a')}{f(a)} + \frac{f(a'')}{f(a)} + \ldots + \frac{f(a_n)}{f(a)}\right].$$

Setzen wir den von den Grössen in der Klammer gebildeten Ausdruck der Kürze wegen $\Sigma\,\varphi\,(a)$, so ist

$$S = pf(a)\Sigma\,\varphi\,(a) \text{ oder } S = p'\Sigma\,\varphi\,(a),$$

wo p' die Wirkung des Elementar-Theilchens M in der Axe auf den magnetischen Punkt N aus der Entfernung a bedeutet.

Die Wirkung des Stromleiters ist also dieselbe, wie die eines magnetischen Punktes M in der Axe, der mit dem reducirten Gesammtmagnetismus der einzelnen Stromelemente versehen ist. Hieraus folgt, dass sich die Totalwirkungen eines Stromes auf einen magnetischen Punkt

$$S : S' = p'\Sigma\,\varphi\,(a) : p''\Sigma\,\varphi\,(a)$$

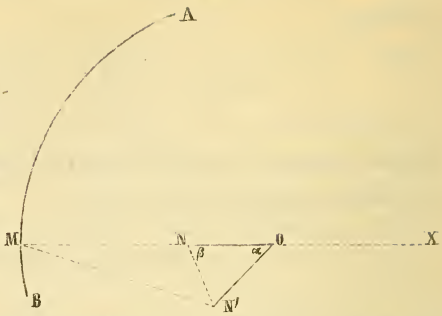
verhalten, d. h. $S:S' = p':p'$. Diese Proportionalität zwischen der Totalwirkung des Stromes und der Stromelemente findet aber nur so lange Statt, als der Punkt N nicht aus der Ebene des Schliessungsleiters heraustritt, daher die Tagenten-Boussole nie genaue Resultate geben kann, indem sich der Abstand des magnetischen Punktes vom Schliessungsleiter und mit ihm $\Sigma\,\varphi\,(a)$ fortwährend ändert.

2.

Da die Stromwirkung eine Ablenkung des magnetischen Punktes aus der Ebene des Schliessungsleiters hervorbringt, so wird sich die Entfernung des magnetischen Punktes von den einzelnen Stromtheilchen mit dieser Ablenkung ändern und daher eine Function des Winkels sein, den eine durch die Punkte O und N' gelegte Ebene mit der Ebene des Schliessungsleiters bildet, welcher zugleich der Ablenkungswinkel der Geraden $N'O$ aus ihrer Lage NO ist.

Um nun diese Function des Ablenkungswinkels a zu finden, dient die Betrachtung der beiden Dreiecke MNN' und $NN'O$ in Fig. 2.

Fig. 2.



Wir haben im Vorstehenden gesehen, dass jedes Stromtheilchen so wirkend gedacht werden kann, als ob es aus dem Punkte M mit seinem reducirten Magnetismus aus der Entfernung a wirken würde, und daher die Totalwirkung des Stromes gleichkomme der Summe der reducirten Einzelwirkungen der Stromtheilchen aus der Entfernung $a = MN$. Diese Entfernung ändert sich aber mit dem Heraustreten des Punktes N aus der Ebene des Schliessungsleiters. Die Erfahrung hat gelehrt, dass die $f(a) = \frac{1}{a^2}$, d. h. die Wirkung des Magnetismus mit dem Quadrate der Entfernungen abnimmt. Es wird somit die Wirkung aus der Entfernung a, welche der unabgelenkten Lage des Punktes N entspricht, gegen die aus der Entfernung a' bei der Lage N' im umgekehrten Verhältnisse der Quadrate der Entfernungen sich ändern. Ist p die Wirkung des Theilchens M aus der Entfernung $MN = a$ und p' die Wirkung aus der Entfernung $MN' = a'$, so folgt:

$$p : p' = \frac{1}{a^2} : \frac{1}{a'^2}, \quad \text{woraus} \quad p' = p\,\frac{a^2}{a'^2}$$

sich ergibt. Es kömmt nur darauf an, das Verhältniss $\frac{a^2}{a'^2}$ als Function des Ablenkungswinkels α darzustellen. Dazu dienen die erwähnten zwei Dreiecke. Setzt man

$$MN = a,\ MN' = a',\ NO = l,\ MO = r \ \text{und}\ NN' = b,$$

so gibt das Dreieck MNN' die Relation

(1) $$MN'^2 = MN^2 + NN'^2 + 2\,MN.NN' \cos\beta,$$

das Dreieck $NN'O$:

(2) $$NN'^2 = 2\,NO^2 - 2\,NO^2 \cos\alpha = 4\,NO^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha.$$

Substituirt man obige Buchstaben, so ist:

$$a'^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\beta \quad \text{und} \quad b^2 = 4l^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha$$

oder

$$b = 2l \sin \tfrac{1}{2}\alpha;$$

nun ist aber

$$\beta = 90 - \frac{\alpha}{2};$$

also

$$a'^2 = a^2 + b^2 + 2\,ab\ \sin \tfrac{1}{2}\alpha,$$

substituirt man noch für b den Werth, so ist:

$$a'^2 = a^2 + 4\,l^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha + 4\,a\,l \sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha = a^2 + 4\,l \sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha\,(a + l);$$

daher

$$\frac{a'^2}{a^2} = 1 + 4\,\frac{a+l}{a^2}\,l \sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha,$$

da

$$a + l = MN + NO = r$$

ist, so ist

$$\frac{a+l}{a^2} = \frac{r}{(r-l)^2},$$

daher

$$\frac{a'^2}{a^2} = 1 + \frac{4rl}{(r-l)^2} \sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha;$$

dieser Ausdruck enthält ausser α nur noch die Constanten r und l und somit ist

$$\frac{a'^2}{a^2} = f(\alpha)$$

dargestellt. Aus

$$p = p'\,\frac{a'^2}{a^2} = p'\left(1 + \frac{4rl}{(r-l)^2} \sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha\right)$$

ergibt sich somit der wahre Werth der Stromwirkung aus der Entfernung $MN = a$, wenn die Wirkung p' aus der Entfernung $M'N' = a'$ bekannt ist. Da die Wirkung jedes Theilchens des Schliessungsleiters in diesem Verhältnisse vermindert wird, also auch ihre Summe, so muss sich da $S : S' = p : p' = a'^2 : a^2$ verhalten, somit ist

$$S = \frac{a'^2}{a^2}\,S' = \left(1 + \frac{4rl}{(r-l)^2} \sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha\right) S';$$

setzt man die Constante

$$\frac{4rl}{(r-l)^2} = c,$$

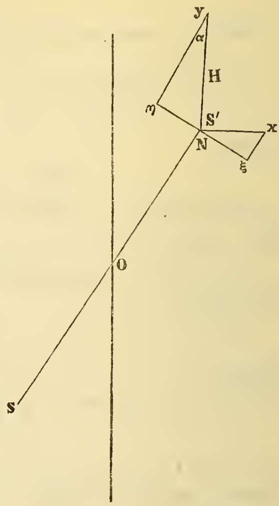
so ist

$$S = (1 + c \sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha)\, S'.$$

3.

Bisher wurde nur die Wirkung des Strommagnetismus auf den magnetischen Punkt in Betracht gezogen, aber wird nun die Ebene des Schliessungsleiters in die Meridianebene gebracht, fällt daher M mit der Richtung des magnetischen Meridians zusammen, und denkt man sich nun, es wirke auch die horizontale Componente des Erdmagnetismus auf den magnetischen Punkt, so ist, wenn man die Stromwirkung und die horizontale Componente in rechtwinkelige Componenten zerlegt (Fig. 3) Nx, Ny, d. h. $N\xi \cos\alpha = N\eta \sin\alpha$, woraus $N\xi = N\eta\, tg\,\alpha$ folgt. Die Stromwirkung ist aber nicht die ungeschwächte, sondern die aus der Entfernung a' wirkende verminderte Stromkraft S', daher $N\xi \cos\alpha = S' \cos\alpha$ mit der Componente $N\eta \sin\alpha$ der horizontalen Intensität des Erdmagnetismus das Gleichgewicht hält, also

Fig. 3.



(3) $$S' = H\, tg\,\alpha = \frac{S}{1 + c \sin^2 \frac{1}{2}\alpha}$$

ist; wo $N\eta = H$ der Intensität der horizontalen Componente des Erdmagnetismus gesetzt worden.

Dieser Ausdruck gibt sonach die wahre Stromstärke als Function des Ablenkungswinkels und einer vom Abstande des magnetischen Punktes vom Schliessungsleiter und Umdrehungspunkte O abhängigen Constanten. Die Stromschwächung nimmt somit mit dem Quadrate des Sinus des halben Ablenkungswinkels zu, und ist um so grösser, je grösser die Constante c ausfällt. Da

$$c = \frac{4rl}{(l-r)^2} = \frac{\frac{4l}{r}}{\left(1 - \frac{l}{r}\right)^2}$$

ist, so wird c um so grösser, je näher $\frac{l}{r} = 1$ wird, d. h. je grösser der Abstand des magnetischen Punktes N vom Umdrehungspunkte wird. Setzt man

$$\frac{r}{l} = n,$$

so ist
$$c = \frac{4n}{(n-1)^2}.$$
Ist l verschwindend klein gegen r, d. h. fällt N in den Punkt O, so ist $\frac{l}{r} = 0$, dann wird auch $c = 0$, und die Stromstärke bleibt für jede Ablenkung der Nadel dieselbe, dann ist also $S = H \, tg \, \alpha$, also genau der Tangente des Ablenkungswinkels proportional. Hat jedoch l eine angebbare Grösse, so erhält man die Proportion

$$S : S' = (1 + c \sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha) \, tg \, \alpha : (1 + c \sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha') \, tg \, \alpha'$$

zur Vergleichung zweier Strom-Intensitäten bei derselben Anordnung des Schliessungsleiters und magnetischen Punktes. Da die Quadrate der Sinuse der halben Ablenkungswinkel immer nur kleine Grössen sind, wenn die Ablenkungswinkel nicht zu gross sind, so wird in dem Ausdrucke

$$\frac{S}{S'} = \frac{1 + c \sin^2 \frac{1}{2}\alpha}{1 + c \sin^2 \frac{1}{2}\alpha'} \frac{tg \, \alpha}{tg \, \alpha'}$$
$$\frac{1 + c \sin^2 \frac{1}{2}\alpha}{1 + c \sin^2 \frac{1}{2}\alpha'} = 1 + \theta \tag{4}$$

sein, wo θ eine sehr kleine Grösse sein wird, wenn c oder $\frac{r}{l}$ nicht zu gross genommen wird; und daher findet näherungsweise das Gesetz der Tangenten für jede Tangenten-Boussole Statt, in der die Nadellänge nicht zu gross und die Ablenkungswinkel gewisse Grenzen nicht übersteigen. Soll c den unvermeidlichen Fehler nicht vergrössern, so muss es wenigstens nicht grösser als 1 sein; dieses in $c = \frac{4n}{(n-1)^2}$ gesetzt gibt $n = 5 \cdot 828426$ oder $\frac{l}{r} = \frac{1}{5 \cdot 828426}$; wählt man sonach die Länge der Magnetnadel, so dass der Abstand des Poles vom Punkte $^1/_5$ bis $^1/_6$ des Abstandes des Punktes M von O beträgt, so wird nahe genug

$$\frac{S}{S'} = \frac{1 + \sin^2 \frac{1}{2}\alpha}{1 + \sin^2 \frac{1}{2}\alpha'} \frac{tg \, \alpha}{tg \, \alpha'};$$

sind die Winkel nicht zu gross, so kann man

$$\frac{S}{S'} = \frac{(1 + \sin^2 \frac{1}{2}\alpha)(1 - \sin^2 \frac{1}{2}\alpha')}{1 - \sin^4 \frac{1}{2}\alpha'} \frac{tg \, \alpha}{tg \, \alpha'} = \frac{1 + \sin^2 \frac{1}{2}\alpha - \sin^2 \frac{1}{2}\alpha'}{tg \, \alpha'} \, tg \, \alpha$$

setzen, woraus

$$\frac{S}{S'} = \left(1 + \sin \tfrac{1}{2}(\alpha + \alpha') \sin \tfrac{1}{2}(\alpha - \alpha')\right) \frac{tg \, \alpha}{tg \, \alpha'}$$

folgt, daher

$$\theta = \sin\tfrac{1}{2}(\alpha - \alpha')\sin^2\tfrac{1}{2}(\alpha + \alpha').$$

Ist c nicht der Einheit gleich, oder sind die Winkel zu gross, so dass die Näherungsformel nicht genau genug ist, so kann man sie auf logarithmische Form bringen, indem man

$$1 + c\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha = c_0\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha$$

setzt, woraus

$$c_0 - 1 = (1 + c)\,tg^2\tfrac{1}{2}\alpha$$

folgt; man berechnet hiermit die Hilfsgrösse c_0 und hat dann

(5) $$\frac{S}{S'} = \frac{c_0\cos^2\frac{1}{2}\alpha}{c_0'\cos^2\frac{1}{2}\alpha'}\,\frac{tg\,\alpha}{tg\,\alpha'}.$$

Die Gleichung $c = \frac{4n}{(n-1)^2}$ zeigt, dass der Werth der Constante viel rascher mit n wächst, als es mit demselben abnimmt, so dass man durch Verringerung der Grösse l keineswegs viel gewinnt; will man z. B. $c = 0\cdot 1$ haben, so muss $\frac{l}{r} = \frac{1}{20\cdot 98}$, also nahezu schon $^1/_{21}$ sein, während $c = 10$ wird für $\frac{l}{r} = \frac{1}{1\cdot 859543}$, also nahezu $^1/_2$. Um also c zu $^1/_{10}$ herabzubringen, muss man l viermal nahezu kleiner machen, um es aber zehnmal grösser werden zu lassen, genügt schon eine zwei- bis dreimalige Vergrösserung der Länge l.

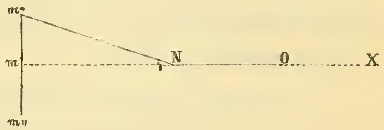
Der Quotient $\frac{1+c\sin^2\frac{1}{2}\alpha'}{1+c\sin^2\frac{1}{2}\alpha} = 1 + \theta$ weicht um so mehr von der Einheit ab, d. i. θ wird um so grösser, je mehr die Winkel α und α' von einander verschieden sind, es ist daher vortheilhaft, bei den Tangenten-Boussolen nicht zu ungleiche Strom-Intensitäten zu vergleichen, sondern entweder durch Einschaltung von zwischenliegenden Strom-Intensitäten und gegenseitige Vergleichung weit abstehende Intensitäten genauer zu bestimmen oder aber die Empfindlichkeit derselben nicht zu weit zu treiben, daher Multiplicatoren nur schwierig zu Messungen verwendbar sind. Zugleich ist ersichtlich, dass die Fehler in der Vergleichung der Stromstärke nicht von dem absoluten Werthe der Ablenkungswinkel sondern vielmehr von ihrem Unterschiede abhängig ist, wie die Näherungsformel

$$1 + c\sin\tfrac{1}{2}(\alpha' - \alpha)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha + \alpha') = 1 + \theta$$

zeigt, welche θ selbst für $\alpha = 90^0$ Null macht, wenn α und α' nicht weit abstehen und c nicht zu gross ist.

4.

Alles bisher Gesagte bezieht sich auf einen elementaren Ring; da jedoch jeder Schliessungsleiter als ein System solcher elementaren Ringe zu betrachten ist, so muss die Gesammtwirkung des Schliessungsleiters als die Summe der Wirkungen der einzelnen Elementarringe betrachtet werden.



Die Wirkung jedes Elementarringes lässt sich auf die eines Punktes M, der mit N und O in derselben Ebene liegt, reduciren, in welchem man den reducirten Gesammtmagnetismus der Stromelemente vereinigt denkt. Man wird somit ein System solcher mit N und O in einer Ebene liegenden Kraftpunkte erhalten, die zwar dieselbe Intensität besitzen, allein aus verschiedenen Entfernungen gegen den Punkt N wirken. Es lässt sich aber die Wirkung jedes solchen Kraftpunktes in zwei senkrechte Componenten zerlegen, wovon die eine parallel zur Richtung NO wirkend aufgehoben und nur die andere auf NO senkrecht wirkende thätig ist. Diese Componente aber nimmt offenbar um so mehr ab, je grösser der Winkel ist, den eine durch NO gelegte Verticalebene mit der durch O und einen dieser Punkte gelegten ebenfalls verticalen Ebene bildet, es muss diese Wirkung sonach irgend eine Function dieses Neigungswinkels sein. Nennt man die Intensität des in der durch NO gelegten Ebene liegenden Kraftpunktes M z. B. P, so wird die irgend eines andern Punktes $M' = Pf(\gamma)$ sein, wenn γ der Neigungswinkel beider Ebenen ist. Die Summe aller Wirkungen der elementaren Ringe wird sonach

$$S = P[f(\gamma) + f(\gamma') + f(\gamma'') + \ldots + f(\gamma_n)] = P\Sigma f(\gamma).$$

Da nach Früherem $P = p\Sigma f(\alpha)$, so ist

$$S = p\Sigma f(a)\Sigma f(\gamma),$$

welcher Ausdruck die reducirte Wirkung des magnetischen Schliessungsleiters für den in der Ebene MNO liegenden magnetischen Punkt darstellt. Tritt er jedoch aus dieser Ebene heraus, so ändert sich die Entfernung des Punktes N von jedem der Kraftpunkte und ihre Wirkung, daher auch die Summe derselben und wird im oben gefundenen Verhältnisse der Quadrate der Entfernungen geschwächt. Es findet sich daher die wahre Intensität

$$S = pf\Sigma(a)\Sigma f(\gamma) = S_0\,(1 + c\, sin^2\, \tfrac{1}{2}\alpha),$$

wo S_0 die Wirkung in der nun den Winkel α aus der Ebene MNO abgelenkten Lage des Punktes N bedeutet. Für dieselbe Anordnung des Schliessungsleiters und Punktes N bleibt aber sowohl $\Sigma f(a)$ als $f(\gamma)$ ungeändert, daher

$$S : S' = S_0\,(1 + c\, sin^2\, \tfrac{1}{2}\alpha) : S_0'(1 + c\, sin^2\, \tfrac{1}{2}\alpha') =$$
$$= p\Sigma f(a)\, \Sigma f\,(\gamma) : p'\,\Sigma f\,(a)\,\Sigma f\,(\gamma) = p : p';$$

es verhalten sich die Totalwirkungen wie die Wirkungen der Stromelemente. Da

$$S_0 = H\, tg\, \alpha, \text{ so ist } \quad S = H\,(1 + c\, sin^2\, \tfrac{1}{2}\alpha)\, tg\, \alpha$$

auch für einen nicht elementaren Schliessungsleiter giltig.

5.

Die Form des Schliessungsleiters ist in der Regel die kreisförmige, doch lässt sich zeigen, dass die elliptische Form vorzuziehen ist, indem sie bei gleicher Weite, d. h. bei einer dem Durchmesser des Kreisleiters gleich grossen Axe, empfindlicher und dennoch compendiöser wird.

Bezieht man beide Curven auf ihre Polarcoordinaten, so ist die Entfernung eines Stromelementes des Kreises a und einer Ellipse a' wenn man den Ursprung in den magnetischen Punkt legt, für zwei correspondirende Punkte

$$a = l\, cos\,\rho \pm \sqrt{r^2 - l^2 sin^2 \rho}\,; \quad a' = \frac{r^2 - l^2}{r + l\, cos\,\rho'},$$

wo r den Halbmesser oder die halbe grosse Axe und l die Länge NO vorstellt, die der Einfachheit wegen so angenommen wurde, dass N in den Brennpunkt fällt, also $l = e$ wird. Nennt man die Wirkung des elliptischen Stromtheilchens E und des Kreistheilchens K, so ist

$$E : K = \frac{1}{a'^2} : \frac{1}{a^2}\; \frac{E}{K} = \frac{a^2}{a'^2} = \frac{(l\, cos\,\rho \pm \sqrt{r^2 - l^2\, sin^2\rho})\,(r + l\, cos\rho)^2}{(r^2 - l^2)^2}.$$

Setzt man $\rho = 0$ und $\rho = 90$, so ist

$$\frac{E_0}{K_0} = \frac{(l - r)^2\,(r + l)^2}{(r^2 - l^2)^2} = 1,$$

weil hier die Abstände $a = a'$ sind, und

$$\frac{E_{90}}{K_{90}} = \frac{r^2(r^2-l^2)}{(r^2-l^2)^2} = \frac{r^2}{r^2-l^2} = \frac{1}{1-\varepsilon^2}, \text{ wo } \frac{l}{r} = \varepsilon$$

die Excentricität ausdrückt, ε also stäts $<$ als die Einheit ist. Somit ist für jedes Theilchen des elliptischen Leiters die Wirkung grösser als für das correspondirende des Kreises; indem sie zwischen den Grenzen 1 und $\frac{1}{1-\varepsilon^2}$ wächst, somit wird auch ihre Summe grösser sein. Allein da die Länge des elliptischen Leiters kleiner ist als die des Kreises bei derselben Axenlänge, so wird dieses Verhältniss dadurch verringert und zwar im Verhältniss des elliptischen Umfanges zum kreisförmigen, es verhalten sich aber diese Längen wie $2\pi r : 2\pi r(1-f(e))$, wo

$$f(e) = (\tfrac{1}{2}\varepsilon)^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\varepsilon^2\right)^2 + \frac{1}{5}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\varepsilon^3\right)^2 + \ldots.$$

Es wird sonach

$$\frac{E}{K} = \frac{1-f(e)}{1-\varepsilon^2} = \frac{1-\frac{1}{4}\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2},$$

wo demnach $1-\frac{1}{2}\varepsilon^2 > 1-\varepsilon^2$ ist, also dennoch ein Wachsthum für die elliptische Form des Leiters stattfindet und zwar um so grösseres, je kleiner ε wird.

Die Kreisform ist sonach nicht die vortheilhafteste für Schliessungsleiter an Tangenten-Boussolen, sondern die elliptische. Dies scheint auch der Grund zu sein, warum in Palmieri's Versuchen über erdmagnetische Induction, also im umgekehrten Falle, die elliptische Form der Drathspulen einen grösseren Effect gab als die kreisförmige.

6.

Es erübrigt noch an einigen Versuchen die oben entwickelten Correctionsformeln zu bestätigen. Der verwendete Apparat war eine aus einem kreisförmig gebogenen Kupferdrathe von 1 Millim. Dicke gebildete Tangenten-Boussole, die Nadellänge betrug 78·5 Millim., der Kreisdurchmesser war 202·5 Millim., daher $\frac{l}{r} = 0{\cdot}38766$ $c = 4{\cdot}135$; es war sonach die Nadellänge ungewöhnlich gross, und daher die Proportionalität der Intensitäten mit den Tangenten der Ablenkungswinkel so gut wie aufgehoben.

Nach den genauesten Versuchen ist das Verhältniss der elektromotorischen Kräfte einer Grove'schen und Daniell'schen Kette 470 : 829. Es wurden nun auf das Sorgfältigste zwei ganz gleiche Elemente vorgerichtet und ihre Stromkräfte gemessen. Die Ablenkung betrug für das Daniell'sche Element 31° 29', für das Grove'sche 42° 41', als Beispiel der Berechnung mögen nun diese zwei Beobachtungen hier stehen.

Es ist

$$\frac{S}{S'} = \frac{1 + c\, sin^2 \frac{1}{2}\alpha}{1 + c\, sin^2 \frac{1}{2}\alpha'} \frac{tg\,\alpha}{tg\,\alpha'}$$

und

$$c_0 - 1 = (1 + c)\, tg^2 \tfrac{1}{2}\alpha \qquad \frac{S}{S'} = \frac{c_0\, cos^2 \frac{1}{2}\alpha\, tg\, \alpha}{c_0'\, cos^2 \frac{1}{2}\alpha'\, tg\, \alpha'},$$

daher

$log\ c = 0{\cdot}61653$;	$log\ (1+c) = 0{\cdot}71041$
$log\ (1+A) = 0{\cdot}71041$	$0{\cdot}71041$
$2\,log\ tg\ \frac{1}{2}\alpha = 8{\cdot}89962$	$9{\cdot}18372$
$log\ (c_0 - 1) = 9{\cdot}61003$	$9{\cdot}89413$
$c_0 - 1 = 0{\cdot}40741$	$0{\cdot}78367$
$c_0 = 1{\cdot}40741$	$1{\cdot}78367$
$log\ c_0 = 0{\cdot}14841$	$0{\cdot}25132$
$2\,log\ cos\ \frac{1}{2}\alpha = 9{\cdot}96680$	$9{\cdot}93840$
$log\ c_0\ cos^2\ \frac{1}{2}\alpha = 0{\cdot}11521$	$0{\cdot}18972$
$log\ c_0\ cos^2\ \frac{1}{2}\alpha = 0{\cdot}11521$	$log\ tg\ \alpha = 9{\cdot}78704$
$log\ c_0'\ cos^2\ \frac{1}{2}\alpha = 0{\cdot}18972$	$log\ tg\ \alpha' = 9{\cdot}96484$
$log \frac{c_0\ cos^2\ \frac{1}{2}\alpha}{c_0'\ cos^2\ \frac{1}{2}\alpha'} = 9{\cdot}92549$	$log \frac{tg\ \alpha}{tg\ \alpha'} = \frac{9{\cdot}82220}{9{\cdot}92549}$
$log \frac{S_0}{S_0'} = 9{\cdot}82220$	$log \frac{S}{S'} = 9{\cdot}74769$
$\frac{S_0}{S_0'} = 0{\cdot}66405$	$\frac{S}{S'} = 0{\cdot}55936$
$log\ 470 = 2{\cdot}67210$	$\frac{470}{829} = 0{\cdot}56695$
$log\ 829 = 2{\cdot}91855$	
$log \frac{470}{829} = 9{\cdot}75355$	Fehler $= -0{\cdot}00759$

während der Fehler bei der Annahme, dass die Intensitäten den Tangenten proportional sind $+0{\cdot}09710$ nahezu 14mal grösser ist. Der Widerstand im Leitungsbogen wurde so genommen, dass der wesentliche Widerstand sehr klein wurde, und dieser blieb daher unberücksichtigt, der kleine Fehler kann daher auch von diesem nicht berücksichtigten Widerstande wenigstens theilweise herrühren.

Um jedoch eine noch schärfere Probe vorzunehmen, wurden Strom-Intensitäten von bereits bekannter Intensität mit einander an derselben Boussole, jedoch bei einer Nadellänge die ganz nahe dem Kreisringdurchmesser gleichkam, also bei vollkommen aufgehobener Proportionalität der Tangenten verglichen.

Zweite Versuchsreihe.

Nadellänge 190 Millim.; Kreisdurchmesser 202·5 Millim.;

	Ablenkung.				Ablenkung.		
Strom.	Nord.	Süd.	Mittel.	Strom.	Nord.	Süd.	Mittel.
1	15°0	195°5	15° 15′	6	25°2	205°4	25° 18′
2	17·2	197·5	17 21	7	26·2	206·7	26 41
3	20·0	200·4	20 12	8	27·5	208·0	27 45
4	22·5	202·5	22 39	9	28·5	209·0	28 45
5	24·0	204·5	24 15	10	29·8	210·2	29 54

$c = 985{\cdot}53\ \frac{l}{r} = 0{\cdot}93829$; $c + 1 = 986{\cdot}53$. Die berechneten corrigirten und uncorrigirten, so wie das wahre Intensitätsverhältniss der verglichenen Ströme gibt die nachstehende Tabelle:

Verglichene Ströme	$\frac{tg\,\alpha}{tg\,\alpha'} = \frac{S_0}{S_0'}$	Wahre Intensität	Corrigirte Werthe	Verglich. Ströme	$\frac{tg\,\alpha}{tg\,\alpha'} = \frac{S_0}{S_0'}$	Wahre Intensität	Corrigirte Werthe
1 u. 2	0·86029	0·50000	0·58750	10	0·63985	0·30000	0·30015
3	0·72750	0·33333	0·38273	4 u. 5	0·92636	0·80000	0·81235
4	0·65335	0·25000	0·27075	6	0·88891	0·66666	0·71356
5	0·60523	0·20000	0·21994	7	0·82970	0·57146	0·60444
6	0·57677	0·16666	0·19319	8	0·79314	0·50000	0·53638
7	0·54208	0·14286	0·16365	9	0·76061	0·44444	0·48053
8	0·51819	0·12500	0·14522	10	0·72569	0·40000	0·42409
9	0·49695	0·11111	0·13010	5 u. 6	0·92171	0·83333	0·87839
10	0·47412	0·10000	0·11482	7	0·85619	0·71429	0·74405
2 u. 3	0·86131	0·66666	0·66098	8	0·80240	0·62500	0·66026
4	0·75941	0·50000	0·46781	9	0·78339	0·55555	0·59152
5	0·70350	0·40000	0·38004	10	0·66640	0·50000	0·52205
6	0·67041	0·33333	0·33381	6 u. 7	5·90129	0·85715	0·84689
7	0·63009	0·28572	0·28276	8	0·83666	0·75000	0·75170
8	0·60233	0·25000	0·25093	9	0·78160	0·66666	0·67332
9	0·57763	0·22222	0·22480	10	0·72300	0·60000	0·59443
10	0·55110	0·20000	0·19840	7 u. 8	0·92830	0·87500	0·88740
3 u. 4	0·88170	0·75000	0·70775	9	0·86720	0·77777	0·79500
5	0·81678	0·60000	0·57495	10	0·80220	0·70000	0·70163
6	0·77836	0·50000	0·50468	8 u. 9	0·93419	0·88888	0·89589
7	0·73155	0·42857	0·42779	10	0·86416	0·80000	0·79066
8	0·69931	0·37500	0·37962	9 u. 10	0·92505	0·90000	0·88256
9	0·67065	0·33333	0·34009				

Die vorstehende Übersicht zeigt, dass die Übereinstimmung der corrigirten Werthe bis auf die zweite und dritte Decimale durchweg stattfindet, dass die Fehler am grössten sind, wo die Winkelablenkungen am verschiedensten waren; die nach dem Gesetze der Tangenten berechneten Werthe sind aber völlig unbrauchbar. Da die Mittel womit diese Versuche ausgeführt wurden, nur höchst unvollkommen waren, so konnte eine weitergehende Übereinstimmung nicht erzielt werden; doch ist nicht zu bezweifeln, dass eine genauer gearbeitete Boussole und weitergehende Kreisablesung eine viel vollkommenere Übereinstimmung mit der Theorie hervorbringen müsste. Durch diese Formel wird es möglich sein, selbst an Multiplicatoren genaue Messungen solcher Ströme noch vorzunehmen, bei denen man sich bisher begnügen musste ihr Vorhandensein constatirt zu haben. Ist bei einem Multiplicator oder einer Boussole n und daher auch c sehr gross, wie im vorliegenden Falle, so ist

$$1 + c \sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha = c \sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha$$

und dann wird

$$\frac{1+c \sin^2 \frac{1}{2}\alpha}{1+c \sin^2 \frac{1}{2}\alpha'} = \frac{\sin^2 \frac{1}{2}\alpha}{\sin^2 \frac{1}{2}\alpha}.$$

Man braucht dann also weder die Constante c durch Versuche oder durch Messung auszumitteln, indem nahe genug

$$\frac{S}{S'} = \frac{\sin^2 \frac{1}{2}\alpha}{\sin^2 \frac{1}{2}\alpha'} \, \frac{tg\, \alpha}{tg\, \alpha'}$$

sein wird.