Ableitung der Cassinoide aus dem Schnitte eines Rotations-körpers.

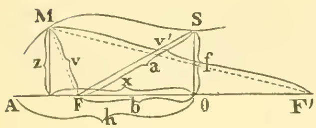
(Durch eine Annahme gefunden.)

Von **Alois Seidl**,

Assistent der Bauwissenschaften am k. k. polytechnischen Institute in Wien.

Die Cassinoide ist eine krumme Linie vierter Ordnung, und führt, wie bekannt, den Namen ihres Gründers.

Fig. 1.



Das Gesetz dieser Curve ist ebenfalls bekannt, nämlich $v : v = a^2$, d.h. die Abstände *(radien-vectoren,* Leitstrahlen) der Curvenpunkte von 2 Fixpunkten geben ein constantes Product. Für die Leitstrahlen der Curve findet aber auch die Gleichung

$$(x - b)^2 + z^2 = v^2$$

und

$$(x + b)^2 + z^2 = v^2$$

Statt, wir haben somit als allgemeine Gleichung der Curve

$$\{(x - b)^2 + z^2\} \cdot \{(x + b)^2 + z^2\} = a^4,$$

welche nach gehöriger Auflösung und Ordnung übergeht in

$$(x^2 - b^2)^2 + 2z(x^2 + b^2) + z^2 = a^4.$$

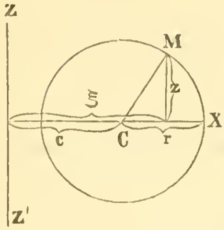
Dies ist das Nöthige, was wir uns ins Gedächtniss zurückrufen mussten um unsere eigentliche Ableitung, mit der wir jetzt beginnen wollen, geltend zu machen.

Ist die Entfernung des Mittelpunktes C Fig. 2 eines Kreises von der Axe $Z\,Z'$ gleich c, so ist für diesen Fall die Gleichung des Kreises

$$(\xi - c)^2 + z^2 = r^2:$$

denkt man sich diesen Kreis nun auch aus der Ebene der XZ heraus-

Fig. 2.

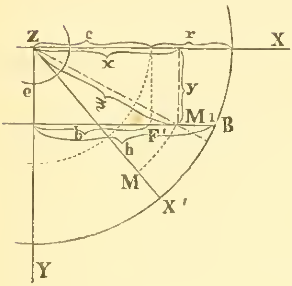


bewegt in irgend einer Lage $X'Z$ Fig. 3 oder mit andern Worten gesagt, den Kreis um die Axe ZZ' rotirend, so erhält man noch die Gleichung

$$\xi = x^2 + y^2,$$

d. h. die Bedingung für irgend einen Punkt des Kreises auch noch auf ein zweites Axensystem bezogen, welches senkrecht steht auf dem ersteren; bildet man aus diesen beiden Gleichungen durch Wegschaffung des ξ eine einzige

Fig. 3.



$$(\sqrt{x^2 + y^2} - c)^2 + z^2 = r^2,$$

so hat man die Gleichung eines Körpers von welchem sich wohl Jedermann sehr leicht eine Vorstellung macht. Dieser Körper nun ist es, welcher eine Cassinoide als Schnittcurve enthält, sobald der Schnitt parallel zur Rotationsaxe ZZ' geführt wird, und zwar in einem Abstande $e = r$.

Die letzt aufgestellte Behauptung (die eigentliche Basis der ganzen Entwickelung) zu beweisen, erfordert blos eine weitere Vollendung der Ableitung, d. h. die Änderung der Gleichung des Körpers in jene des Körperschnittes für die Bedingung $e = r$; dies geschieht aber ganz einfach dadurch, dass man in der Gleichung für den Körper allsogleich r statt y setzt, was nach gehöriger Reduction und Ordnung eine Gleichung

$$(x^2 - c^2)^2 + 2z^2(x^2 + c^2) + z^4 = 4c^2r^2$$

gibt, als letztes Resultat unserer Ableitung, d. i. als wirklich endgiltige Gleichung des nach den ausgesprochenen Bedingungen geführten Körperschnittes.

Vergleichen wir dieses letzte Resultat mit der Gleichung für die Cassinoide, so finden wir ein und dasselbe Gesetz ausgesprochen, und wenn wir zur noch grösseren Vollkommenheit die Beziehungen zwischen b und c untersuchen, so zeigt sich uns auch noch zur grössten Überraschung, dass diese beiden Grössen ihrem Werthe nach ganz gleiche und constante sind; denn denkt man sich b und c durch f und h (d. i. die Höhe und halbe Weite der Cassinoide analog bezeichnet mit der des Körperschnittes) ausgedrückt, so bekommt man Werthe

$$b^2 = \frac{h^2 - f^2}{2}$$

und

$$c^2 = \frac{h^2 - f^2}{2}$$

woraus natürlich hervorgeht, dass $b = c$ ist; ist aber dies der Fall, so ist die Gleichung des Körperschnittes selbst einerlei zu nennen mit der Gleichung der Cassinoide.

Nun ergeben sich aber in Folge der bewiesenen Behauptung noch einige sehr interessante Folgerungen, von denen wir nur die wichtigsten hervorheben wollen.

Wir haben aus dem Vorhergehenden gesehen, dass $b = c$ ist, und dies sagt uns, dass wir in dem Halbmesser der Körperaxe auch zugleich die Entfernung der Brennpunkte vom Mittelpunkte der Schnittcurve haben; ferner bewirkt die Gleichung des Körperschnittes (nun als Cassinoiden-Gleichung) im Vergleiche zur ursprünglichen Gleichung der Cassinoide den richtigen Schluss

$$a^4 = 4c^2r^2$$

oder besser

$$r . v' = 2cr,$$

d. h. das constante Product der Leitstrahlen der Schnittcurve ist gleich dem doppelten Producte aus dem Halbmesser der Körperaxe mit dem Querschnitts-Halbmesser.

Haben wir den Körper, so finden wir den Cassinoidenschnitt durch höchst einfache Constructionen, welche beliebig, entweder eine rein geometrische oder Projecirungs-Construction sein kann; sind im Gegentheil gegeben die Brennpunkte der Curve und das constante Product der Leitstrahlen, oder die Höhe und Weite derselben in den Axen, so haben wir im ersten Falle den Halbmesser der Körperaxe unmittelbar und erhalten den des Körperquerschnittes durch eine kleine Rechnung aus $r = \dfrac{c^2 + f^2}{2c}$, somit den Körper und mit diesem den Cassinoidenschnitt selbst wieder durch obige Constructionen; im zweiten Falle bekommen wir den Halbmesser der Körperaxe und des Körperschnittes ebenfalls durch eine sehr kurze Rechnung aus

$$c^2 = \frac{h^2 - f^2}{2}$$

und

$$r = \frac{c^2 + f^2}{2c},$$

und den Cassinoidenschnitt selbst, wie früher durch Construction.

Da sich der Schnittkörper durch die Vergrösserung oder Verkleinerung des c bei constantem Werthe des r in seiner Form bis zur Kugel ändern kann, und jede solche veränderte Form einen Schnitt besitzt, dessen Grenzcurve eine Cassinoide ist; so geht daraus hervor, dass es sehr verschiedene Cassinoiden-Formen geben muss; Hauptformen aber gibt es nur fünf, und wir wollen diese der Reihe nach folgen lassen. Denkt man sich einen solchen Körper, bei welchen $c > 2r$ ist, so entsteht durch den Cassinoidenschnitt, der stets in einer Entfernung $e = r$ (Fig. 3) geführt wird, die sogenannte cassinische Hyperbel (Fig. 4) als Hauptgrenzform für die Vergrösserung von c; für die Vergrösserung von c gibt es keine andere Form mehr. Für $c = 2r$ erhält man durch den Cassinoidenschnitt die Lemniskate oder Schleissenlinie (Fig. 5), für $c < 2r$ die eingezogene cassinische Ellipse

Fig. 4.

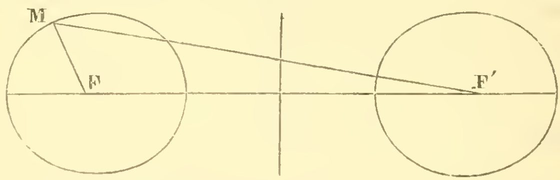


Fig. 5.

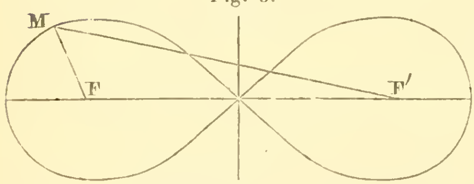


Fig. 8.

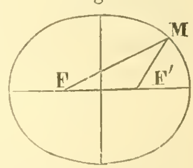


Fig. 6.

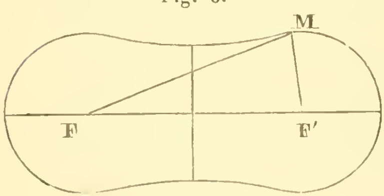
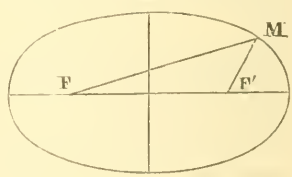


Fig. 7.



(Fig. 6), für $c = r$ die möglichst flache gewöhnliche cassinische Ellipse (Fig. 7) und für $c < r$ die gewöhnliche cassinische Ellipse (Fig. 8) als Hauptgrenzform für die Verkleinerung von c.

Nach den gemachten Erfahrungen kann man nun die Cassinoide mit vollem Rechte in die Reihe der Körperschnittslinien stellen, und es wäre nur noch zu wünschen übrig, dass dieselbe als solche in den Werken der Mathematik wenigstens mit derselben Ausführlichkeit behandelt würde, wie die übrigen Körperschnittslinien, indem sie ja das bedeutungsvolle Zeugniss gibt, auch als Curve höherer als der zweiten Ordnung (d. i. selbst als Curve der vierten Ordnung) Körperschnittslinie zu sein.

Zum Schlusse sei nur noch erwähnt, dass für die Praxis die Handhabung dieser Curve nun gewiss nicht unbedeutend erleichtert ist, da die Constructionen in Beziehung auf Einfachheit und Sicherheit jetzt denen für die Ellipse fast gleich kommen.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1855

Band/Volume: 18

Autor(en)/Author(s): Seidl Alois

Artikel/Article: Ableitung der Cassinoide aus dem Schnitte eines Rotationskörpers. 311-315